75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Primer Parcial

1er. Cuatrimestre 2025
05 Mayo 2025

Problema 1

Se desea resolver el siguiente el SEL $A.x=b$ utilizando métodos iterativos

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Justificar teóricamente por qué se obtendrá convergencia aplicando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
b) Calcule tres iteraciones utilizando el método de Jacobi arrancado de $x^{t}(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$
c) Calcule tres iteraciones utilizando el método de Gauss-Seidel arrancado de $x^{t}(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$
d) Sabiendo que todas las componentes de x valen 2/7, calcular empíricamente el radio espectral de cada uno de los métodos utilizados y analizar si los resultados son consistentes con lo que indica la teoría.

Ayuda: $\|x^{(k)} - x\| \approx \rho(T)\|x^{(k-1)} - x\|$

Problema 2

La concentración "C" de una bacteria que contamina un lago decrece de acuerdo con la siguiente relación donde el tiempo esta expresado en días

$$C = 80\, e^{-2\,t} + 20\, e^{-0.1\,t}$$

Al momento de comenzar la observación la concentración es 100. Se necesita saber cuánto tiempo debe transcurrir hasta que la concentración se reduzca hasta el valor C*.

Cada alumno trabajará con el valor de C* que surja de considerar los últimos dos dígitos de su padrón. En el caso de que esos dos dígitos sean "00" tomar C*=50.

a) Se pide calcular el mínimo valor de tiempo t* para el cual la concentración resulta menor que C* utilizando los métodos vistos en el curso para resolver ecuaciones no lineales. En caso de considerarlo conveniente puede usar más de un método. Se requiere conocer t* con al menos tres dígitos significativos correctos .
b) Analizar experimentalmente el orden de convergencia y comparar con lo visto en la teoría.

Pregunta 1
Explicar que significa que un sistema de ecuaciones lineales se encuentre mal condicionado y explicar cómo ello afecta la resolución del mismo por métodos directos.

Pregunta 2
Explicar el concepto de orden de convergencia en el contexto de los métodos para el cálculo de raíces. Indicar qué condiciones se requieren para que la convergencia del método de Newton-Raphson sea cuadrática.

PARCIAL - Modelación Numérica (Tarela) - 1C2025

1) Resolver el SEL $Ax=b$ utilizando métodos iterativos.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \end{array} \quad ; \quad b = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

a) Se obtendrá convergencia aplicando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel porque A es estrictamente diagonal dominante, lo que asegura convergencia para toda semilla x^0.

b) $x^0 = (\underset{x^0}{1/3} \;\; \underset{y^0}{1/3} \;\; \underset{z^0}{1/3})^T$

Calcular 3 iteraciones utilizando método de Jacobi.

Para implementar el método de Jacobi, despejo x_i de la ecuación E_i, siendo las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \\ E_3: \end{array} \begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + 10y + 2z = 4 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases} , \quad \text{entonces:}$$

$$x^k = 0,4 - 0,4\,y^{k-1}$$

$$y^k = 0,4 - 0,2\,x^{k-1} - 0,2\,z^{k-1}$$

$$z^k = 0,4 - 0,4\,y^{k-1}$$

Iteraciones:

$$x^1 = 0,4 - 0,4 \cdot \frac{1}{3} = 0,26667 \quad ; \quad \Delta x^1 = 0,066663$$

$$y^1 = 0,4 - 0,2 \cdot \frac{1}{3} - 0,2 \cdot \frac{1}{3} = 0,26667 \quad ; \quad \Delta y^1 = 0,066663$$

$$z^1 = 0,4 - 0,4 \cdot \frac{1}{3} = 0,26667 \quad ; \quad \Delta z^1 = 0,066663$$

$$x^2 = 0,4 - 0,4 \cdot 0,26667 = 0,29333 = y^2 = z^2 \quad ; \quad \Delta x^2 = 0,026662 = \Delta y^2 = \Delta z^2$$

$$x^3 = 0,4 - 0,4 \cdot 0,293332 = 0,28267 = y^3 = z^3 \quad ; \quad \Delta x^3 = 0,010665 = \Delta y^3 = \Delta z^3$$

c) $x^0 = (\underset{x^0}{1/3} \;\; \underset{y^0}{1/3} \;\; \underset{z^0}{1/3})^T$

Calcular 3 iteraciones utilizando método de Gauss-Seidel.

Para implementar el método de Gauss-Seidel, despejo x_i de la ecuación E_i, pero para aquellas ecuaciones para las cuales ya haya calculado una de sus incógnitas en el paso K, utilizo el valor calculado en el paso K, en lugar de usar el de K-1:

$x^k = 0{,}4 - 0{,}4 y^{k-1}$

$y^k = 0{,}4 - 0{,}2 x^k - 0{,}2 z^{k-1}$

$z^k = 0{,}4 - 0{,}4 y^k$

Iteraciones:

$x^1 = 0{,}26667$; $\Delta x^1 = 0{,}066663$
$y^1 = 0{,}28$; $\Delta y^1 = 0{,}84$
$z^1 = 0{,}288$; $\Delta z^1 = 0{,}045333$

$x^2 = 0{,}288$; $\Delta x^2 = 0{,}02133$
$y^2 = 0{,}2848$; $\Delta y^2 = 0{,}0048$
$z^2 = 0{,}28608$; $\Delta z^2 = 0{,}00192$

$x^3 = 0{,}28608$; $\Delta x^3 = 0{,}00192$
$y^3 = 0{,}28557$; $\Delta y^3 = 0{,}000768$
$z^3 = 0{,}28577$; $\Delta z^3 = 0{,}000308$

d) $x_{exacto} = (2/7 \;\; 2/7 \;\; 2/7)^T = x$

$$\| x^k - x \| \cong \rho(T) \| x^{k-1} - x \| \iff$$

$$\iff \rho(T) \cong \frac{\| x^k - x \|}{\| x^{k-1} - x \|}$$; Tomo $k=3$, pues para ambos métodos el error resultó pequeño para ese k (zona de convergencia).

$$\rho_J(T) \cong \frac{\left\| \begin{matrix} -0{,}0023823 \\ -0{,}0023823 \\ -0{,}0023823 \end{matrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{matrix} -0{,}0076157 \\ -0{,}0076157 \\ -0{,}0076157 \end{matrix} \right\|_\infty} = \frac{0{,}0023823}{0{,}0076157} \cong 0{,}3$$

$$\rho_{GS}(T) \cong \frac{\left\| \begin{matrix} 0{,}00036571 \\ -0{,}00014429 \\ -0{,}000055714 \end{matrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{matrix} 0{,}0022857 \\ -0{,}00091429 \\ 0{,}00036571 \end{matrix} \right\|_\infty} = \frac{0{,}00036571}{0{,}0022857} \cong 0{,}16$$

Los resultados son consistentes con lo que indica la teoría ya que:
1. Ambos métodos son convergentes y $\rho_{J,GS}(T) < 1$.
2. GS converge más rápido que Jacobi y $\rho_{GS}(T) < \rho_J(T)$, lo que tiene sentido, ya que el radio espectral nos habla de qué tan rápido converge un método.

2

$$C = 80e^{-2t} + 20e^{-0,1t} < 60$$

a) Busco el tiempo t para el cual la concentración es $C^* = 60$:

$$F(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0,1t} - 60 = 0$$

Para definir el intervalo, analizo el comportamiento de la función:

$$F'(t) = -160\underbrace{e^{-2t}}_{>0} - 2\underbrace{e^{-0,1t}}_{>0} \Rightarrow F'(x) < 0 \ \forall x \Rightarrow F(x) \text{ es decreciente} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x)$ tiene una única raíz. Por lo tanto, el tiempo encontrado será el mínimo valor para el cual la concentración sea C^*.

$$\underbrace{F(0)}_{>0} . \underbrace{F(1)}_{<0} < 0 \Rightarrow I = [a_0 ; b_0] = [0; 1]$$

Uso el método de Regula-Falsi:

$$m_{k+1} = a_k - (b_k - a_k) \frac{F(a_k)}{F(b_k) - F(a_k)}$$

$$m_1 = -\frac{F(0)}{F(1) - F(0)} = -\frac{40}{-71,07643} \cong 0,56277 \quad ; F(m_1) \cong -15,13628 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = [0; 0,56277]$$

$$m_2 = -0,56277 \cdot \frac{F(0)}{F(m_1) - F(0)} \cong 0,40828 \quad ; F(m_2) \cong -5,44417 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = [0; 0,40828]$$

$$m_3 = -0,40828 \cdot \frac{F(0)}{F(m_2) - F(0)} \cong 0,35937 \quad ; F(m_3) \cong -1,71670 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = [0; 0,35937]$$

$$m_4 = -0,35937 \cdot \frac{F(0)}{F(m_3) - F(0)} \cong 0,34458 \quad ; F(m_4) \cong -0,51762 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = [0; 0,34458]$$

$$m_5 = -0,34458 \cdot \frac{F(0)}{F(m_4) - F(0)} \cong 0,34018 \quad ; F(m_5) \cong -0,15415 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = [0; 0,34018]$$

$$m_6 = -0,34018 \cdot \frac{F(0)}{F(m_5) - F(0)} \cong 0,33887 \quad ; F(m_6) \cong -0,045326 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = [0; 0,33887]$$

$$m_7 = -0,33887 \cdot \frac{F(0)}{F(m_6) - F(0)} \cong 0,33849$$

Como m_6 y m_7 resultaron iguales en al menos 3 dígitos de precisión, luego $t = 0,338$.

Como se busca t^* tal que $80e^{-2t}+20e^{-0,1t} < 60$ y:

$80e^{-2\cdot 0,338}+20\cdot e^{-0,1\cdot 0,338} \cong 60,027 > 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^* = 0,339$, pues $80\cdot e^{-2\cdot 0,339}+20\cdot e^{-0,1\cdot 0,339} \cong 59,94 < 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Con 3 dígitos significativos correctos, el menor t para el cual la concentración resulta menor a $C^* = 60$ es $t^* = 0,339$.

b) El orden de convergencia P es tal que: $\lim_{k\to\infty} \frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^P} = C$ — cte. asintótica del error.

Como para k en la zona de convergencia resulta $\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^P} \cong \frac{|e^k|}{|e^{k-1}|^P}$, luego:

$$P \cong \frac{\ln\left(\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|}\right)}{\ln\left(\frac{|e^k|}{|e^{k-1}|}\right)} \underset{\text{Uso } k=6}{\cong} \frac{\ln(0,290)}{\ln(0,298)} \cong 1 \longrightarrow \text{orden de convergencia lineal.}$$

El orden de convergencia nos indica que el error disminuye linealmente a medida que pasan las iteraciones.
Este orden de convergencia es esperable en métodos lentos como lo es Regula-Falsi.