# FINAL - Modelación Numérica (Tarela) - 21/7/2025

① Realizar ajuste sobre los datos obtenidos experimentalmente:

| $x$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,9 | 1,3 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,75 | 1,25 | 1,45 | 1,25 | 0,85 | 0,55 | 0,35 |

Para ello se propone usar como función de ajuste $y(x) = a\,x\,e^{bx}$.

a) Linealice el modelo y arme el sistema de ecuaciones resultante.

b) Resuelva el sistema con un método visto en clase y obtenga "a" y "b".

c) Usando el ajuste, estimar $y(x=1)$.

② Dado el siguiente PVI:

$$y' = -t\,y + 2 \quad ; \quad y(0) = 0$$

a) Discretizar con el método implícito ponderado con $\beta = 0,5$:

$$\mu_{n+1} = \mu_n + h\,[\beta\cdot f(\mu_{n+1}; t_{n+1}) + (1-\beta)\cdot f(\mu_n; t_n)]$$

b) Hallar $y(0,4)$ usando un paso de cálculo que minimice el esfuerzo de cálculo.

c) Reducir el paso a la mitad y obtener nuevamente $y(0,4)$.

d) Reducir nuevamente el paso a la mitad y calcular $y(0,4)$.

e) En función de los resultados, hallar el orden del método y justificar teóricamente el resultado.

## RESOLUCIÓN:

① $$y^*(x) = a\,x\,e^{bx} \iff \frac{y^*(x)}{x} = a\,e^{bx}$$

a)

$$f^*(x) = \ln\left(\frac{y^*(x)}{x}\right) = \ln(a\,e^{bx}) \iff f^*(x) = \underbrace{\ln(a)}_{c_0}\cdot\underbrace{1}_{\varphi_0} + \underbrace{b}_{c_1}\,\underbrace{x}_{\varphi_1}$$

Para minimizar el error entre la aproximación y la función original, pido que:

$$\sum_{i=0}^{1} c_i \langle \varphi_i ; \varphi_k \rangle = \langle f ; \varphi_k \rangle \quad ; \text{ con } k = 0,1 \ \wedge\ f(x) = \ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

$$k=0 \Rightarrow c_0 \langle \varphi_0 ; \varphi_0 \rangle + c_1 \langle \varphi_1 ; \varphi_0 \rangle = \langle f ; \varphi_0 \rangle$$
$$k=1 \Rightarrow c_0 \langle \varphi_0 ; \varphi_1 \rangle + c_1 \langle \varphi_1 ; \varphi_1 \rangle = \langle f ; \varphi_1 \rangle$$

$$\varphi_0 = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)$$
$$\varphi_1 = x = (0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,9; 1,3; 1,5)$$
$$f = \ln\left(\frac{y(x)}{x}\right) = (2,0; 1,8; 1,3; 0,73; -0,055; -0,86; -1,5)$$

$$\langle \varphi_0 ; \varphi_0 \rangle = 7$$
$$\langle \varphi_1 ; \varphi_0 \rangle = \langle \varphi_0 ; \varphi_1 \rangle = 5$$
$$\langle \varphi_1 ; \varphi_1 \rangle = 5,32$$

$<f;\varphi_0> = 3,4$
$<f;\varphi_1> = -1,9$

El sistema lineal queda:

$$\begin{cases} 7c_0 + 5c_1 = 3,4 \\ 5c_0 + 5,32c_1 = -1,9 \end{cases}$$

b) Resuelvo el sistema:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 3,4 \\ 5 & 5,32 & -1,9 \end{array}\right| \xrightarrow{F_2 - \frac{5}{7}F_1} \begin{array}{cc} c_0 & c_1 \end{array} \left|\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 3,4 \\ 0 & 1,7 & -4,3 \end{array}\right| \iff \begin{cases} c_0 = \ln(a) \cong 2,3 \\ c_1 = b \cong -2,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cong 10 \\ b \cong -2,5 \end{cases}$$

c) $y(x=1)$?

$$y(x=1) \cong y^*(x=1)$$

$$y^*(x) = a.x.e^{bx} = 10xe^{-2,5x} \Rightarrow y^*(x=1) = 10e^{-2,5} = 0,82$$

(2) PVI:

$$y' = -ty + 2 \quad ; \quad y(0) = 0$$

a) Discretizo:

$t \to t_n \quad n = 0,1,\dots,N$
$t \geq 0$
$y(t) \to u^n = y(t_n)$
$f(t;y(t)) \to f^n = f(t_n;u^n)$

$$y'(t) \to \frac{u^{n+1} - u^n}{h} = \beta f^{n+1} + (1-\beta)f^n$$

$$y(0) = 0 \to u_0 = 0$$

La ecuación me queda:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = \beta f^{n+1} + (1-\beta)f^n = \frac{1}{2}(-t_{n+1}.u^{n+1} + 2) + \frac{1}{2}(-t_n u^n + 2) =$$

$$= -\frac{t_{n+1}}{2}u^{n+1} + 1 - \frac{t_n}{2}u^n + 1 \iff \frac{u^{n+1}}{h} + \frac{t_{n+1}}{2}u^{n+1} = -\frac{t_n}{2}u^n + \frac{u^n}{h} + 2 \iff$$

$$\iff u_{n+1}\left(\frac{1}{h} + \frac{t_{n+1}}{2}\right) = u^n\left(\frac{1}{h} - \frac{t_n}{2}\right) + 2 \iff u^{n+1} = \frac{u^n(2 - ht_n) + 4h}{2 + ht_{n+1}}$$

b) Quiero hallar $y(0,4)$ tal que minimice el esfuerzo de cálculo. En este caso, el esfuerzo es menor si se realiza únicamente una operación correspondiente a $t_1 = 0,4$, lo que implica $h = 0,4$.

- $h = 0{,}4$

$N = 0 \Rightarrow u_0 = 0$
$N = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{4 \cdot 0{,}4}{2 + 0{,}4 \cdot 0{,}4} \cong 0{,}74 = y(0{,}4)$

c) • $h = 0{,}2$
$t_N = 0{,}4 \Rightarrow h = \dfrac{0{,}4}{N} = 0{,}2 \Leftrightarrow N = \dfrac{0{,}4}{0{,}2} = 2$

$N = 0 \Rightarrow u_0 = 0$
$N = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{4 \cdot 0{,}2}{2 + 0{,}2 \cdot 0{,}2} \cong 0{,}39$
$N = 2 \Rightarrow u_2 = \dfrac{0{,}39 \cdot (2 - 0{,}2 \cdot 0{,}2) + 4 \cdot 0{,}2}{2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4} \cong 0{,}75 = y(0{,}4)$

d) • $h = 0{,}1$
$t_N = 0{,}4 \Rightarrow h = \dfrac{0{,}4}{N} = 0{,}1 \Leftrightarrow N = \dfrac{0{,}4}{0{,}1} = 4$

$N = 0 \Rightarrow u_0 = 0$
$N = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{4 \cdot 0{,}1}{2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1} \cong 0{,}20$
$N = 2 \Rightarrow u_2 = \dfrac{0{,}20 \cdot (2 - 0{,}1 \cdot 0{,}1) + 4 \cdot 0{,}1}{2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2} \cong 0{,}40$
$N = 3 \Rightarrow u_3 = \dfrac{0{,}40 \cdot (2 - 0{,}1 \cdot 0{,}2) + 4 \cdot 0{,}1}{2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3} \cong 0{,}59$
$N = 4 \Rightarrow u_4 = \dfrac{0{,}59 \cdot (2 - 0{,}1 \cdot 0{,}3) + 4 \cdot 0{,}1}{2 + 0{,}1 \cdot 0{,}4} \cong 0{,}77 = y(0{,}4)$

e) Para hallar el orden del método, voy a comparar los errores para $h_1 = 0{,}2$ y $h_2 = 0{,}1$:

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^P = \frac{E_2}{E_1}$$

$P$: Orden del método
Estimo $E_1, E_2$ como $|u^N - u^{N-1}|$:
$E_1 \cong 0{,}4$
$E_2 \cong 0{,}2$

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^P = \frac{E_2}{E_1} \Leftrightarrow P \cdot \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \Leftrightarrow P = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}5)} = 1$$

El orden del método es 1. Esto significa que al disminuir el valor del paso h, el error disminuye linealmente, en función de h.