75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS
MODELACIÓN NUMÉRICA

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

PRIMER PARCIAL

2do cuatrimestre 2024
16 octubre 2024

Problema 1

Dada la siguiente descomposición de una matriz A:

$$A = PLU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Obtenga la solución del sistema $A\,x = b$ con $b^T = (1;\,1;\,1)$ calculada usando la descomposición indicada.
b) Calcule el residuo y obtenga una estimación del error de la solución obtenida en a)

Problema 2

Dada la función $y = \cos(1{,}35 - x)$, y sabiendo que $\Delta x = 0{,}05$, se desea encontrar el valor de x de manera que el error absoluto de la función y(x) sea 0,002. Para ello:

a) Plantee la formula general de propagación de errores de entrada y encuentre la expresión de Δy
b) Exprese la ENL anterior como $f(x) = 0$ y arme la función de iteración como $g(x) = x - f(x)$.
c) Avance 4 iteraciones partiendo de la semilla $x_0 = 1{,}2$ y calculando la estimación de los errores asociados. Exprese el resultado correctamente.
d) En función de los resultados obtenidos, indique si el esquema planteado parece estar convergiendo o no.

Pregunta 1
Indique como se vinculan el orden de la derivada, el orden del error y la cantidad de puntos en una estimación numérica de una derivada. Explique de que depende el error y si el mismo es de redondeo o de truncamiento.

Pregunta 2
Explique de qué depende la convergencia del método SOR para sistemas de ecuaciones lineales. Proporcione ejemplos de tales condiciones.

1

PARCIAL - Modelación Numérica (Tarela) - 2C2024

(1)

$$A = PLU = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

con pivoteo total. Red. a 3 cifras sig.

a) Obtenga la solución del sistema $Ax=b$ con $b^T = (1 \quad 1 \quad 1)$ calculada usando la descomposición indicada.

$$Ax = b \iff PLUx = b \iff LUx = P^{-1} \cdot b \iff Ly = P^{-1} \cdot b, \text{ con } Ux = y$$

$$Ly = P^{-1} \cdot b \iff Ly = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \iff \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\Bigg| \xrightarrow{F_2 \to F_1} \left|\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\Bigg| \begin{matrix} \\ F_2 - \frac{1}{3} F_1 \\ F_2 - \frac{2}{3} F_1 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}333 & 0 \\ 0 & -0{,}667 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 0{,}667 \\ 0{,}333 \end{matrix}\Bigg| \xrightarrow{F_3 \to F_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}667 & 1 \\ 0 & -0{,}333 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 0{,}333 \\ 0{,}667 \end{matrix}\Bigg| \end{array} \xrightarrow{C_3 \to C_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_3 & y_2 \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0{,}667 \\ 0 & 0 & -0{,}333 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 0{,}333 \\ 0{,}667 \end{matrix}\Bigg| \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + y_2 = 1 \\ y_3 - 0{,}667\, y_2 = 0{,}333 \\ -0{,}333\, y_2 = 0{,}667 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 1{,}001 \\ y_3 = -1{,}003 \\ y_2 = -2{,}003 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{vmatrix} 1{,}001 \\ -2{,}003 \\ -1{,}003 \end{vmatrix}$$

$$Ux = y \iff \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1{,}001 \\ -2{,}003 \\ -1{,}003 \end{matrix}\Bigg| \end{array} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1{,}001 \\ -4x_2 - 8x_3 = -2{,}003 \\ -x_3 = -1{,}003 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1{,}002 \\ x_2 = -1{,}505 \\ x_3 = 1{,}003 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \begin{vmatrix} 1{,}002 \\ -1{,}505 \\ 1{,}003 \end{vmatrix}$$

b)

$$Res = b - A\hat{x} = b - P.L.U \begin{vmatrix} 1{,}002 \\ -1{,}505 \\ 1{,}003 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1{,}001 \\ 0{,}999 \\ 0{,}999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}001 \\ 0{,}001 \\ 0{,}001 \end{vmatrix}$$

Cota del error relativo: $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \dfrac{\|Res\|}{\|b\|}$

Estimo: $K(A) \cong \dfrac{\|\delta x\|}{\|\hat{x}\|}$

Busco δx:

$$A\,\delta x = Res \iff P.L.U\,\delta x = Res \iff LU\,\delta x = P^{-1} Res \iff$$

$$\iff Ly = P^{-1} Res, \quad \text{con } U\,\delta x = y$$

$$Ly = P^{-1}Res = \begin{vmatrix} -0{,}001 \\ 0{,}001 \\ 0{,}001 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}001 \\ 3 & 1 & 0 & 0{,}001 \\ 2 & 0 & 1 & 0{,}001 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array} \begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}001 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}004 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}003 \end{array}\right| \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^T = (-0{,}001 \quad 0{,}004 \quad 0{,}003) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U\delta x = y \Leftrightarrow \begin{cases} \delta x_1 + 2\delta x_2 + 3\delta x_3 = -0{,}001 \\ -4\delta x_2 - 8\delta x_3 = 0{,}004 \\ -\delta x_3 = 0{,}003 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta x_1 = -0{,}002 \\ \delta x_2 = 0{,}005 \\ \delta x_3 = -0{,}003 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta x = \begin{vmatrix} -0{,}002 \\ 0{,}005 \\ -0{,}003 \end{vmatrix}$$

$$K(A) \cong \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|\hat{x}\|_\infty} = \frac{0{,}005}{1{,}505} \cong 0{,}00332$$

$$Error = K(A) \cdot \frac{\|Res\|_\infty}{\|b\|_\infty} \cong 0{,}00332 \cdot \frac{0{,}001}{1} \cong 3 \cdot 10^{-6}$$

(2) $y = \cos(1{,}35 - x)$

$\Delta x = 0{,}05$

Se desea encontrar el valor de x de manera que el error absoluto de la función $y(x)$ sea 0,002.

a) $\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \cdot \Delta x = 0{,}002 \Leftrightarrow |-\operatorname{sen}(1{,}35-x) \cdot (-1)| \cdot 0{,}05 = 0{,}002$

b) $F(x) = \operatorname{sen}(1{,}35-x) - 0{,}002 = 0$

Quiero hallar x tal que $f(x) = 0$ $\rightarrow$ ENL

Función de iteración: $g(x) = x - f(x) = x - \operatorname{sen}(1{,}35-x) - 0{,}002$

c) $x_0 = 1{,}2$

$x_1 = g(x_0) = 1{,}2 - \operatorname{sen}(1{,}35 - 1{,}2) - 0{,}002 = 1{,}0486$; $\Delta x_1 \cong 0{,}15$
$x_2 = g(x_1) = 0{,}74974$; $\Delta x_2 \cong 0{,}3$
$x_3 = g(x_2) = 0{,}18288$; $\Delta x_3 \cong 0{,}57$
$x_4 = g(x_3) = -0{,}73874$; $\Delta x_4 \cong 0{,}9 \cong 1$

$x = -1 \pm 1$

d) El esquema planteado no parece estar convergiendo ya que los errores se incrementan a medida que pasa cada iteración.