75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Examen integrador, fecha 2

1er. Cuatrimestre 2025

07 Julio 2025

Problema 1

Evaluar la siguiente integral mediante cuadratura de Gauss con 3 puntos:

$$I = \int_0^{\pi} e^{sen^2 x}\, dx$$

Para hacerlo, obtenga explícitamente la fórmula de cuadratura.

Ayuda: el polinomio de Legendre de grado 3 es $P_3(x) = (x/2)(5x^2 - 3)$

Problema 2

Dado el siguiente problema de valor inicial de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = -ty^2 \quad ; \quad y(t = 10) = 10$$

a) Plantear la resolución numérica mediante el método de Euler Explícito y el método de Euler Implícito.

Ayuda: si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

b) Avanzar la solución un paso de tiempo para los siguientes valores del mismo:

$$h = 0.02 \; ; \; h = 0.005 \; ; \; h = 0.001$$

c) Comparar para cada paso de tiempo los resultados obtenidos mediante los métodos explícito e implícito. Obtener conclusiones basadas en la teoría vista en el curso (error de truncamiento, estabilidad, etc).

RESOLUCIÓN:

1.

$$I = \int_0^{\pi} e^{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

Cuadratura de Gauss con 3 puntos.
Obtener explícitamente fórmula de cuadratura.

Como la cuadratura de Gauss sirve para aproximar integrales de la forma $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, hago un cambio de variable:

$$au + b = x \Rightarrow \begin{cases} a(-1)+b=0 \\ a(1)+b=\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+\pi-a=0 \\ b=\pi-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pi/2 \\ b=\pi/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}(u+1) \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow dx = \frac{\pi}{2}du \quad ; \; -1 \leq u \leq 1$$

$$I = \int_0^{\pi} e^{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{e^{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}(u+1)\right)} \cdot \frac{\pi}{2}}_{f(u)}\, du$$

$$I \simeq G = c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2) + c_3 f(u_3)$$

Para 3 puntos, los nodos u_i son las raíces del polinomio de Legendre $P_3(u)$:

$$P_3(u) = \frac{u}{2}(5u^2-3) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0, \quad u_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \;\wedge\; u_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G = c_1 \cdot f(0) + c_2\, f(\sqrt{3/5}) + c_3 \cdot f(-\sqrt{3/5}) =$$
$$= c_1 \cdot e + c_2 \cdot 1{,}128 + c_3 \cdot 1{,}128$$

Para hallar el valor de las 3 incógnitas c_1, c_2, c_3, queremos que G integre de forma exacta los polinomios $P_0[u], P_1[u]$ y $P_2[u]$:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} du = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ \int_{-1}^{1} u\,du = c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2 + c_3\, u_2 \Leftrightarrow u_2 c_2 - u_2 c_3 = 0 \\ \int_{-1}^{1} u^2\,du = c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2 + c_3 u_2^2 \Leftrightarrow u_2^2 c_2 + u_2^2 c_3 = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & u_2 & -u_2 & 0 \\ 0 & u_2^2 & u_2^2 & 2/3 \end{array}\right| \xrightarrow{F_3 - u_2 F_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & u_2 & -u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_2^2 & 2/3 \end{array}\right| \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - \frac{2}{3u_2^2} = \frac{8}{9} \\ c_2 = \frac{1}{3u_2^2} = \frac{5}{9} \\ c_3 = \frac{1}{3u_2^2} = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow G \simeq 3{,}670$$

② PVI de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = -ty^2 \quad ; \quad y(t=10) = 10$$

$$f(t; y(t)) = -ty^2 \longrightarrow D = \{ (t; y(t)) : t \geq 0 \wedge y(t) \in \mathbb{R} \}$$

f continua en D $\Rightarrow$ la solución existe.
$\frac{\partial f}{\partial y} = -t2y$ continua en D $\Rightarrow$ la solución es única.

Proceso de discretización:

$$t \to t^n \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N$$
$$h = \frac{t^N - t_0}{N} \quad ; \quad t_0 = 10.$$
$$y \to u^n \cong y(t^n)$$
$$f(t; y(t)) \longrightarrow f(t^n; u^n) = f^n = -t^n \cdot (u^n)^2$$
$$y(t=10) = 10 \longrightarrow u^0 = 10$$

a) Método de Euler explícito:

$$u^{n+1} = u^n + h \cdot f^n$$

Método de Euler implícito:

$$u^{n+1} = u^n + h \cdot f^{n+1}$$

b) • $h = 0{,}02 \Rightarrow t^1 = t^0 + h = 10{,}02$

Euler explícito: $u^1 = u^0 + h \cdot f^0 = u^0 - h \cdot t^0 (u^0)^2 = 10 - 0{,}02 \cdot 10 \cdot 10^2 = -10$

Euler implícito: $u^1 = u^0 + h \cdot f^1 = u^0 - h\, t^1 (u^1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -h t^1 (u^1)^2 - u^1 + u^0 = 0 \Leftrightarrow u^1 = 4{,}997 \vee u^1 = -9{,}987$

Como $u^1 = 4{,}997$ es más cercano a $u^0 = 10$, tomo ese valor.

• $h = 0{,}005 \Rightarrow t^1 = t^0 + h = 10{,}005$
Euler explícito: $u^1 = 5$
Euler implícito: $u^1 = 7{,}32 \vee$ ~~$u^1 = -27{,}31$~~

• $h = 0{,}001 \Rightarrow t^1 = t^0 + h = 10{,}001$
Euler explícito: $u^1 = 9$
Euler implícito: $u^1 = 9{,}161 \vee$ ~~$u^1 = -109{,}151$~~

c) Si estimamos el error de truncamiento como $e = |u^{n+1} - u^n|$, podemos notar que, para los 3 valores de h, el método de Euler implícito resultó con un menor error. Esto es esperable, ya que Euler implícito aproxima $y(t)$ con el valor de la pendiente en el paso actual (f^{n+1}), mientras que Euler explícito aproxima con el valor anterior (f^n).

	$h = 0{,}02$	$h = 0{,}005$	$h = 0{,}001$
Euler explícito	$e = 20$	$e = 5$	$e = 1$
Euler implícito	$e \cong 5$	$e \cong 2{,}7$	$e \cong 0{,}8$

Además, se puede evidenciar la inestabilidad de Euler explícito para $h = 0{,}02$ debido al salto que hizo la solución (pasó de $u^0 = 10$ a $u^1 = -10$). Esto es ya que el método es condicionalmente estable. Como Euler implícito es incondicionalmente estable, entonces notamos un salto más suave.