75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

EXAMEN INTEGRADOR III

1er cuatrimestre 2025

14 julio 2025

Problema 1

Dado el siguiente problema de valores de contorno definido en el dominio $0 \leq x \leq 1$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0 \ ; \ u(0) = 0 \ ; \ \frac{du}{dx}(1) = 1$$

Se pide:

a) Plantear el problema numérico asegurando orden 2.

b) Discretizar el dominio en 4 partes iguales, armar el sistema de ecuaciones resultante y mostrar la estructura que adquiere la matriz

c) Resolver por un método visto en el curso

Ayuda:
$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

Problema 2

Se requiere resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{y'}{2} + 2y - 7 = 0 \qquad con \ y(0) = 3 \ ; \ y'(0) = 1$$

a) Discretizar el problema con un método explícito de orden 1

b) Analizar la estabilidad numérica y determinar el paso de cálculo máximo

c) Calcular la solución en t = 0,4 tomando un paso k = 0,2 y uno k = 0,1

d) Calcular el orden del error de truncamiento y compararlo con lo esperado teóricamente

RESOLUCIÓN:

① PVC:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0 \; ; \quad u(0) = 0 \; ; \quad \frac{du}{dx}(1) = 1 \; ; \qquad 0 \leq x \leq 1$$

↳ CCs de tipo Neuman.

a) Discretizo:

$x \to x_i \qquad i = 0, 1, \dots, N$

$0 \leq x_i \leq 1$

$h = \dfrac{1-0}{N}$

$u \to u_n = u(x_n)$

$$\frac{d^2u}{dx} \to \frac{u_{i-1} - 2u_i - u_{i+1}}{h^2}$$

$u(0) = 0 \to u_0 = 0$

$$\frac{du}{dx}(1) = 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} \to \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \qquad OP = \underset{2}{N} - \underset{1}{OD} = 1 \; ✗ \Rightarrow$$ No nos sirve. Queremos orden 2.

Busco una aproximación en atraso para la derivada primera usando 3 puntos: u_N, u_{N-1}, u_{N-2}.

Asumiendo espaciado uniforme, con paso h:

$u_N = u_N = u(x_N)$

$u_{N-1} = u_N - h = u(x_N - h)$

$u_{N-2} = u_N - 2h = u(x_N - 2h)$

Desarrollo u_{N-1}, u_{N-2} en serie de Taylor alrededor de u_N:

$$u_{N-1} = u_N - h = \underbrace{u_N}_{u(x_N)} + u'_N \cdot \underbrace{(-h)}_{x_N - h - x_N} + u''_N \frac{(-h)^2}{2!} + \dots$$ → Desarrollo hasta h^2 para tener orden 2.

$$u_{N-2} = u_N - 2h = u_N + u'_N(-2h) + u''_N \frac{(-2h)^2}{2!} + \dots$$

$$u'_N = a.u_N + b.u_{N-1} + c.u_{N-2} =$$

$$= a.u_N + b.\left(u_N - hu'_N + \frac{h^2}{2}u''_N\right) + c\left(u_N - 2hu'_N + 2h^2u''_N\right) =$$

$$= \underbrace{(a+b+c)}_{=0}.u_N + \underbrace{(-hb - 2hc)}_{=1}u'_N + \underbrace{\left(\frac{h^2}{2}.b + 2h^2c\right)}_{=0}u''_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -h & -2h & 1 \\ 0 & h^2/2 & 2h^2 & 0 \end{array}\right|_{F_3 - \left(-\frac{h}{2}\right)F_2} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -h & -2h & 1 \\ 0 & 0 & h^2 & h/2 \end{array}\right| \underset{h \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 3/2h \\ b = -2/h = -4/2h \\ c = 1/2h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \to \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} \qquad OP = \underset{3}{\overset{\shortparallel}{N}} - \underset{1}{\overset{\shortparallel}{OD}} = 2 \ \checkmark$$

$$\frac{du}{dx}(1) = 1 \longrightarrow \frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} = 1$$

El problema numérico nos queda:

$$\frac{d^2u}{dx} + u = 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + u_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_{i-1} \cdot \left(\frac{1}{h^2}\right) + u_i\left(-\frac{2}{h^2} + 1\right) + u_{i+1}\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

b, c) Si discretizo el dominio en 4 partes, entonces:

$$N = 4 \Rightarrow h = \frac{1}{N} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
i = 0 &\Rightarrow u_0 = 0 \\
i = 1 &\Rightarrow -31u_1 + 16u_2 = 0 \\
i = 2 &\Rightarrow 16u_1 - 31u_2 + 16u_3 = 0 \\
i = 3 &\Rightarrow 16u_2 - 31u_3 + 16u_4 = 0 \\
i = 4 &\Rightarrow u_2 - 4u_3 + 3u_4 = 0{,}5
\end{aligned} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} -31 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -31 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -31 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0{,}5 \end{array}\right| F_2 - {}^{16}/_{(-31)} \cdot F_1 \left|\begin{array}{cccc|c} -31 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22{,}7 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -31 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0{,}5 \end{array}\right| \begin{array}{l} F_3 - {}^{16}/_{(-22,7)} \cdot F_2 \\ F_4 - {}^{1}/_{(-22,7)} \cdot F_2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} -31 & 16 & 0 & 0 & -160 \\ 0 & -22{,}7 & 16 & 0 & 8{,}26 \\ 0 & 0 & -19{,}7 & 16 & 5{,}82 \\ 0 & 0 & -3{,}3 & 3 & -0{,}136 \end{array}\right| F_4 - {}^{(-3,3)}/_{(-19,7)} \cdot F_3 \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc|c} -31 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22{,}7 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19{,}7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}32 & 0{,}5 \end{array}\right| \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 \cong 0{,}462 \\ u_2 \cong 0{,}895 \\ u_3 \cong 1{,}27 \\ u_4 \cong 1{,}56 \end{cases}$$

② $\frac{y'}{2} + 2y - 7 = 0 \quad ; \quad y(0) = 3 \quad ; \quad y'(0) = 1$

Se trata de un PVI.

a) Uso Euler explícito.

Discretizo:

$y = y(t)$

$t \to t_n \quad ; \quad n = 0, 1, \ldots, N$

$t \geq 0 \ ; \ t_0 = 0$

$y \rightarrow u^n = y(t_n)$

$y' \rightarrow \frac{u^{n+1} - u^n}{K} = f^n \quad \Rightarrow \quad u^{n+1} = u^n + K f^n$

$y(0) = 3 \rightarrow u^0 = 3$

$y' = 14 - 4y$

La ecuación queda: $\frac{u^{n+1} - u^n}{K} = 14 - 4 . u^n$

b) $u^{n+1} = 14K + (1-4K) u^n$

Para analizar la estabilidad numérica, observamos cómo se propaga el error en el tiempo (t).

Planteamos que hay un pequeño error en el dato y queremos ver como afecta en los pasos siguientes:

$$\begin{matrix} u^n \rightarrow u^n + \delta u^n \\ u^{n+1} \rightarrow u^{n+1} + \delta u^{n+1} \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow u^{n+1} + \delta u^{n+1} = 14K + (1-4K) . (u^n + \delta u^n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^{n+1} + \delta u^{n+1} = 14K + (1-4K) u^n + (1-4K) \delta u^n$

A la ecuación resultante le resto la ecuación sin errores para hallar cómo avanza el error.

Me queda:

$\delta u^{n+1} = (1-4K) \delta u^n \Leftrightarrow \frac{\delta u^{n+1}}{\delta u^n} = 1 - 4K = g^n$ → Factor de amplificación.

Para hallar el rango de estabilidad de K, pido que $|g^n| < 1$:

$|g^n| < 1 \Leftrightarrow |1-4K| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-4K < 1 \Leftrightarrow 0 < K < \frac{1}{2}$ → Rango de estabilidad de K.

Un K dentro del rango de estabilidad nos asegurará una solución cuyo error no aumente de forma explosiva en el tiempo, pero no nos asegurará precisión.

c) $t = 0,4$

- $K = 0,2$

  $0 \leq t_n \leq 0,4 \Rightarrow K = \frac{0,4}{N} = 0,2 \Leftrightarrow N = \frac{0,4}{0,2} = 2$

  $n = 0 \Rightarrow u^0 = 3$

  $n = 1 \Rightarrow u^1 = 14 . 0,2 + (1 - 4 . 0,2) . 3 = 3,4$

  $n = 2 \Rightarrow u^2 = 14 . 0,2 + (1 - 4 . 0,2) . 3,4 = 3,48$

- $K = 0,1$

  $0 \leq t_n \leq 0,4 \Rightarrow K = \frac{0,4}{N} = 0,1 \Leftrightarrow N = \frac{0,4}{0,1} = 4$

$n=0 \Rightarrow u^0 = 3$

$n=1 \Rightarrow u^1 = 14 \cdot 0{,}1 + (1-4\cdot 0{,}1) \cdot 3 = 3{,}2$

$n=2 \Rightarrow u^2 = 14 \cdot 0{,}1 + (1-4\cdot 0{,}1) \cdot 3{,}2 = 3{,}32$

$n=3 \Rightarrow u^3 = 14 \cdot 0{,}1 + (1-4\cdot 0{,}1) \cdot 3{,}32 = 3{,}392$

$n=4 \Rightarrow u^4 = 14 \cdot 0{,}1 + (1-4\cdot 0{,}1) \cdot 3{,}392 = 3{,}4352$

d) $\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^P = \frac{E_2}{E_1}$

$K_1 = 0{,}2$; $K_2 = 0{,}1$

P: orden del error

Estimo E_1, E_2 como $|u^N - u^{N-1}|$:

$E_1 \cong 0{,}08$

$E_2 \cong 0{,}04$

$$\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^P = \frac{E_2}{E_1} \Leftrightarrow P \cdot \left(\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right)\right) = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \Leftrightarrow P \cdot \ln(0{,}5) = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow P = 1$$

El orden del error de truncamiento es de 1, lo que es esperable, ya que se utilizo un método de orden 1, que significa que el error se reduce linealmente respecto al tamaño del paso.