FINAL - Modelación Numérica (Tarea) - 30/6/2025

Problema 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \;\; ; \;\; y(0) = 1 \;\; ; \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

a. Exprese el SEL resultante de discretizar a $O(2)$.
b. Calcular $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$ para N=2 y N=4.
c. Si la solución es $y = \cos(x)$ cuál sería el orden del error del ítem anterior
d. Qué pasaría si tenemos una condición de borde en la derivada

Problema 2

Dado los datos:

Año	Concentración
1959	316,9
1980	338,8
2021	416,5

a. Calcular la función interpolante mediante el método de Newton eligiendo el grado adecuado.
b. Calcular el valor para el año 2015
c. Si el valor del año 2015 es 401,01 estime el error cometido.
d. Qué haría para mejorar la precisión

RESOLUCIÓN:

1 PVC:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \; , \; y(\pi/2) = 0 \quad \rightarrow \text{CC de Dirichlet}$$

$$0 \leq x \leq \pi/2$$

a) Discretizamos a orden 2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y = f(x; y; y')$$

1. Discretización del espacio

$x \rightarrow x_i \quad ; \; i = 0, 1, \ldots, N$

$0 \leq x_i \leq \pi/2$

$$h = \frac{\pi/2 - 0}{N} = \frac{\pi}{2N}$$

2. Discretización de la EDO

$y \rightarrow u_i \cong y(x_i)$

$$y'' \rightarrow \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad \rightarrow O(2)$$

3. Discretización de las CC.

$u_0 = 1$

$u_N = 0$

La ecuación queda:

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=-u_i$$

Reordeno para formar la ecuación en diferencias finitas:

$$u_{i-1}\cdot\left(\frac{1}{h^2}\right)+u_i\left(-\frac{2}{h^2}+1\right)+u_{i+1}\left(\frac{1}{h^2}\right)=0$$

Nos queda el SEL:

$$\begin{cases} i=0 \Rightarrow u_0=1 \\ i=1 \Rightarrow u_1\left(\frac{-2}{h^2}+1\right)+u_2\left(\frac{1}{h^2}\right)=-\frac{1}{h^2} \\ i=2 \Rightarrow u_1\left(\frac{1}{h^2}\right)+u_2\left(\frac{-2}{h^2}+1\right)+u_3\left(\frac{1}{h^2}\right)=0 \\ \vdots \\ i=N-1 \Rightarrow u_{N-2}\left(\frac{1}{h^2}\right)+u_{N-1}\left(\frac{-2}{h^2}+1\right)=0 \\ i=N \Rightarrow u_N=0 \end{cases}$$

b) Calcular $y(\pi/4)$ para $N=2$ y $N=4$.

- $N=2 \Rightarrow h=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_1\left(-\frac{32}{\pi^2}+1\right)=-\frac{16}{\pi^2} \iff u_1=\frac{16}{32-\pi^2} \\ u_2=0 \end{cases}$$

$u_1=y(x_1)$

Como $x_0=0$ y $h=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4} \Rightarrow y(\pi/4)=\frac{16}{32-\pi^2}\cong 0{,}723$

- $N=4 \Rightarrow h=\frac{\pi}{8}$

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_1(-11{,}969)+u_2\cdot 6{,}485=-6{,}485 \\ u_1\cdot 6{,}485+u_2(-11{,}969)+u_3\cdot 6{,}485=0 \\ u_2\cdot 6{,}485+u_3(-11{,}969)=0 \\ u_4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & \\ \hline -11,969 & 6,485 & 0 & -6,485 \\ 6,485 & -11,969 & 6,485 & 0 \\ 0 & 6,485 & -11,969 & 0 \end{array} \quad F_2 - 6,485\,(-11,969)^{-1} F_1$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -11,969 & 6,485 & 0 & -6,485 \\ 0 & -8,455 & 6,485 & -3,514 \\ 0 & 6,485 & -11,969 & 0 \end{array}\right| \quad F_3 - 6,485 \cdot (-8,455)^{-1} \cdot F_2$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -11,969 & 6,485 & 0 & -6,485 \\ 0 & -8,455 & 6,485 & -3,514 \\ 0 & 0 & -6,995 & -2,695 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dots \\ u_2 = 0,711 \\ u_3 = 0,385 \end{cases}$$

$$h = \frac{\pi}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u_2 = y(\pi/4) \cong 0,711$$

c) $y = \cos(x)$

$$y(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707$$

$$y^*_{N=2}(\pi/4) = 0,723 \Rightarrow \Delta_{N=2} = y^*_{N=2}(\pi/4) - y(\pi/4) = 0,016$$

$$y^*_{N=4}(\pi/4) = 0,711 \Rightarrow \Delta_{N=4} = y^*_{N=4}(\pi/4) - y(\pi/4) = 0,004$$

$$\left(\frac{h_{N=2}}{h_{N=4}}\right)^p = \frac{\Delta_{N=2}}{\Delta_{N=4}} \Leftrightarrow 2^p = 4 \Leftrightarrow p \cdot \ln(2) = \ln(4) \Leftrightarrow p = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ El método es de orden 2.

d) Si tuviéramos una condición de borde en la derivada, tendríamos una cc de Neuman. En ese caso, deberíamos discretizar la derivada primera, para así hallar la condición de contorno en el punto correspondiente.
Para mantener el orden 2 del método, usaría una aproximación con 3 puntos en adelanto o atraso, dependiendo de si la cc está en x_0 o x_N, resp.
Una vez teniendo la aproximación, la reemplazo en la cc y agrego la ecuación como parte del SEL para hallar el u_0 o u_N correspondiente.
Otra opción sería usando una aproximación con 2 puntos centrada:

$$y' \rightarrow \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Esto haría que en el SEL aparezca un "nodo fantasma", por lo cual deberíamos agregar una ecuación en diferencias para el nodo u_i y, finalmente, despejando de las 2 ecuaciones, obtendríamos la ecuación que iría en el SEL para u_i y podríamos resolverlo.

2

Año	Concentración
1959	316,9
1980	338,8
2021	416,5

a) Calcular la función interpolante mediante el método de Newton eligiendo el grado adecuado.

Si llamo:
x : "Año"
y : "Concentración"

$m+1=3$ datos $\Rightarrow m=2$

Como se trata de interpolación, luego $m=n=2$, siendo n el grado del polinomio interpolador.

$$P_N = y_0 + y[x_0; x_1].(x-x_0) + y[x_0; x_1; x_2].(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\begin{array}{cc|l} x_0 & y_0 & \\ & & y[x_0, x_1] = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cong 21 \\ x_1 & y_1 & \\ & & y[x_1, x_2] = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cong 1,9 \\ x_2 & y_2 & \end{array}$$

$$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1; x_2] - y[x_0; x_1]}{x_2 - x_0} \cong -0,3$$

El polinomio queda:

$$P_N(x) = 316,9 + 21(x-1959) - 0,3(x-1959)(x-1980)$$

b) Calcular el valor para el año 2015.

$$P_N(2015) = 904,9$$

c) Si el valor del año 2015 es 401,01 estime el error cometido.

$$y(2015) = 401,01$$

$$y^*(2015) = P_N(2015) = 904,9$$

$$e = y^*(2015) - y(2015) = 503,89 \Rightarrow e_r = \frac{e}{|y(2015)|} = 1,3$$ $\Rightarrow$ La estimación varía en, aprox., un 130% del valor real.

d) Qué haría para mejorar la precisión?
Ya que tenemos 3 datos, para mejorar la precisión aplicaría ajuste con un polinomio de grado 1 ($n=1$). Así, se cumple que $n < 2\sqrt{m} \cong 2,8$, lo que significa que el problema está mejor condicionado si se aproxima mediante ajuste con el polinomio $P_1[x]$.