75.12 / 95.04 – ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.13 – MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Curso Pablo Tarela
Primer Examen Pardal
1er cuatrimestre 2023
03-mayo-23

Problema 1

Se desea resolver un SEL caracterizado por la matriz A y el vector de términos independientes b de la siguiente forma:

$$A = \begin{matrix} 0.25 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 0.5 & 0.33 \\ 0.2 & 0.25 & 0.5 \end{matrix} \qquad b = (0; 1, 0)^T$$

a) Plantee el método de Gauss Seidel asegurando la convergencia. Resuelva para el vector semilla (1, 1, 1) e itere hasta alcanzar un error relativo menor a 5% utilizando norma infinito para el cálculo.
b) Exprese el resultado correctamente con su estimación del error.

Problema 2

Se desea resolver la siguiente función usando un método de punto fijo.

$$x^4 - 3x^2 = 3$$

a) Plantear la función de iteración que resulta de despejar el termino elevado a la cuarta.
b) Aproximar la solución hasta alcanzar una precisión menor al 1% en el error relativo.
c) Estimar experimentalmente el orden de convergencia del método.

Pregunta 1

Explique cómo podría elegir entre dos algoritmos matemáticamente equivalentes para reducir el error de redondeo cometido al realizar los cálculos.

Pregunta 2

Indique el efecto que causa resolver una matriz mal condicionada mediante un método directo y mediante un método iterativo.

PARCIAL - Modelación Numérica (Tarela) - 1C2023

(1) Resolver un SEL $Ax = b$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{vmatrix} \end{array} \quad ; \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{array}{l} E_1: \; 0{,}25\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}2\,x_3 = 0 \\ E_2: \; x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}33\,x_3 = 1 \\ E_3: \; 0{,}2\,x_1 + 0{,}25\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 0 \end{array}$$

a) Como Gauss Seidel converge $\forall x^0$ si A es estrictamente diagonal dominante, entonces uso:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

y para que ambos sistemas sean equivalentes:

$$b' = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{array}{l} E_1: \; x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}33\,x_3 = 1 \\ E_2: \; 0{,}25\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}2\,x_3 = 0 \\ E_3: \; 0{,}2\,x_1 + 0{,}25\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 0 \end{array}$$

Como A' es estrict. diagonal dominante $\Rightarrow$ Gauss Seidel converge $\forall x^0$.

$$x_1^K = 1 - 0{,}5\,x_2^{K-1} - 0{,}33\,x_3^{K-1}$$

$$x_2^K = \frac{-0{,}25\,x_1^K - 0{,}2\,x_3^{K-1}}{0{,}5} = -0{,}5\,x_1^K - 0{,}4\,x_3^{K-1}$$

$$x_3^K = \frac{-0{,}2\,x_1^K - 0{,}25\,x_2^K}{0{,}5} = -0{,}4\,x_1^K - 0{,}25\,x_2^K$$

Semilla $x^0 = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$

Iterar hasta alcanzar error relativo menor a 5%.

$$TOL = \frac{5}{100} = 0{,}05 \implies \text{Se pide } \frac{\| x^K - x^{K-1} \|}{\| x^K \|} < TOL = 0{,}05$$

$x_1^1 = 0{,}17$; $x_2^1 = -0{,}485$; $x_3^1 = 0{,}05325$; $R \cong 3$

$x_1^2 = 1{,}223$; $x_2^2 = -0{,}6328$; $x_3^2 = -0{,}331$; $R \cong 0{,}86$

$x_1^3 = 1{,}426$; $x_2^3 = -0{,}5806$; $x_3^3 = -0{,}4253$; $R \cong 0{,}14$

$x_1^4 = 1{,}431$; $x_2^4 = -0{,}5454$; $x_3^4 = -0{,}4361$; $R \cong 0{,}02$

b) $x_1 = 1{,}43 \pm 0{,}02$
$x_2 = -0{,}55 \pm 0{,}02$
$x_3 = -0{,}44 \pm 0{,}02$

② $x^4 - 3x^2 = 3$

Resolver usando método de Punto Fijo hasta $R < 1\% = 0{,}01$

a) $g(x) = x \Rightarrow x = \sqrt[4]{3 + 3x^2} = g(x)$

b) Elijo $x_0 = 2$; $R \cong \dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|}$

$x_1 = g(x_0) \cong 1{,}968$ $\quad R \cong 0{,}016$

$x_2 = g(x_1) \cong 1{,}955$ $\quad R \cong 0{,}0066 < 0{,}01$

c) El orden de convergencia es tal que:

$\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} \cong \dfrac{|e_k|}{|e_{k-1}|^p}$ para k en la zona de convergencia.

Luego: $P = \dfrac{\ln\left(\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|}\right)}{\ln\left(\dfrac{|e_k|}{|e_{k-1}|}\right)}$; aproximo $|e_k| \cong \Delta x = |x_k - x_{k-1}|$

Elijo $k = 2$.

$x_{2+1} = x_3 = g(x_2) = 1{,}950$

$P = \dfrac{\ln\left(\dfrac{0{,}005}{0{,}013}\right)}{\ln\left(\dfrac{0{,}013}{0{,}032}\right)} \cong 1{,}1$ → orden de convergencia lineal.

↳ El error disminuye linealmente tras cada iteración.