Modelación Numérica

Curso Tarela

Trabajo Práctico

Resolución numérica de problemas de valores iniciales

Análisis numérico de un sistema vibratorio lineal y no lineal

---

Fecha: 7 de junio de 2025

Alumno: Jesabel Pugliese

Padrón: 110860

Índice

1. Introducción

Este trabajo práctico propone la resolución numérica de un sistema masa-resorte-amortiguador lineal, con validación frente a la solución exacta, y luego el análisis de un caso no lineal mediante simulación computacional.

2. Modelo físico

Sistema lineal (modelo base):

$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$

Sistema no lineal (extensión con resorte no lineal):

$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) + \alpha x(t)^3 = 0$

Unidades y ordenes de magnitud sugeridos:

Variable/Parámetro	Significado	Orden típico
$x(t)$	Desplazamiento de la masa	10^{-2} a 10^{-1} m
m	Masa del cuerpo	0.1 a 10 kg
c	Coeficiente de amortiguamiento	0.1 a 10 Ns/m
k	Constante elástica del resorte	10 a 1000 N/m
α	Coef. de rigidez no lineal (Duffing)	$\pm 10^4$ a $\pm 10^6$ N/m³
t	Tiempo	0 a 10 s

3. Consignas

3.1. Análisis del sistema lineal

Reescribir el sistema de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Implementar dos métodos numéricos para resolver el sistema: Euler explícito y otro método de mayor orden.

Resolver el sistema para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento relativo $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$: subamortiguado ($\zeta < 1$), críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) y sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

Calcular y graficar la solución analítica correspondiente en cada caso. Comparar la solución numérica con la solución analítica gráficamente y mediante el cálculo del error.

Analizar el efecto del tamaño de paso h sobre la precisión y la estabilidad de los métodos utilizados.

3.2. Incorporación de no linealidad y análisis del oscilador de Duffing

Modificar el modelo para incluir una rigidez no lineal mediante el término $\alpha x(t)^3$.

Resolver numéricamente el nuevo sistema utilizando el mismo esquema que en la parte 1 (no se requiere solución analítica). Analizar el comportamiento cualitativo de la solución: oscilaciones periódicas, amortiguadas, amplificadas o caóticas. Analizar cómo varía la respuesta según el signo y valor de α. Comparar con el caso lineal de la parte 1.

Investigar brevemente el modelo del oscilador de Duffing:

1. ¿Dónde aparece en la práctica?

2. ¿Por qué es importante como modelo no lineal?
3. ¿Qué tipo de comportamiento puede presentar?

Incluir una referencia bibliográfica (libro, artículo o fuente académica) que lo describa.

4. Desarrollo

4.1. Elección de parámetros

Elijo valores de c, k y m de acuerdo a las restricciones y las unidades y ordenes de magnitud sugeridos:

Sistema subamortiguado

$\zeta < 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1 \Leftrightarrow c < 2\sqrt{km} \quad ; \quad km \neq 0$
$c = 2\frac{Ns}{m}$
$k = 500\frac{N}{m}$
$m = 5kg$
$2 < 2\sqrt{500 \times 5} \Leftrightarrow 2 < 100 \qquad \checkmark$

Sistema críticamente amortiguado

$c = 2\sqrt{km} \quad ; \quad km \neq 0$
$c = 2\frac{Ns}{m}$
$k = 10\frac{N}{m}$
$m = 0{,}1kg$
$2 = 2\sqrt{10 \times 0{,}1} \Leftrightarrow 2 = 2 \qquad \checkmark$

Sistema sobreamortiguado

$c > 2\sqrt{km} \quad ; \quad km \neq 0$
$c = 5\frac{Ns}{m}$
$k = 10\frac{N}{m}$
$m = 0{,}1kg$
$5 > 2\sqrt{10 \times 0{,}1} \Leftrightarrow 5 > 2 \qquad \checkmark$

4.2. Sistema lineal

Sistema de segundo orden:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$$

$x(t^0) = x_0 = 0,01$: desplazamiento inicial.
$x'(t^0) = v_0 = 0$: velocidad inicial.

4.2.1. Solución analítica

- **Sistema subamortiguado ($\zeta < 1$):**
  $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t))$, con:
  $A = x_0$
  $B = \frac{v_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}$
  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (frecuencia de oscilación con amortiguamiento)
  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (frecuencia natural sin amortiguamiento)
  El sistema oscila con amplitud decreciente antes de alcanzar su estado de equilibrio.
- **Sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$):**
  $x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t}$
  $A = x_0$
  $B = (v_0 + \omega_n x_0)$
  El sistema regresa al estado de equilibrio en el menor tiempo posible sin oscilar.
- **Sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$):**
  $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
  $A = \frac{v_0-r_2x_0}{r_1-r_2}$
  $B = (x_0 - A)$
  $r_1 = -\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})$
  $r_2 = -\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})$
  El sistema regresa al estado de equilibrio de forma lenta sin oscilar.

4.2.2. Solución por aproximación

Llamo $x(t) = y_1(t)$, introduzco el cambio de variable $x'(t) = y_2(t)$, y reescribo el sistema como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -\dfrac{k}{m}y_1(t) - \dfrac{c}{m}y_2(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = A\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\dfrac{k}{m}y_1(t) - \dfrac{c}{m}y_2(t) \end{bmatrix}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}$.

Busco $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ que satisfaga la ecuación y las condiciones iniciales $y_1(t^0)$ e $y_2(t^0)$, respectivamente.

Resuelvo el sistema para distintos valores de coeficiente de amortiguamiento relativo $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, siendo éste una medida adimensional que indica la resistencia que un sistema presenta a las oscilaciones después de ser perturbado. A su vez, lo resuelvo para distintos valores de paso del tiempo h.

Análisis de existencia y unicidad:

$D = \{(t, \mathbf{y}(t)) : 0 \leq t \leq 10 \wedge \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Existencia:
   $f_1(t, y_1(t)) = y_2(t)$ (constante)
   $f_2(t, y_2(t)) = -\frac{k}{m}y_1(t) - \frac{c}{m}y_2(t)$ (lineal)
   Como $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ es continua en D, entonces **existe** la solución $\mathbf{y}(t)$.

2. Unicidad:
   $\frac{\partial f_1(t,y_1(t))}{\partial y_1} = 0$
   $\frac{\partial f_2(t,y_2(t))}{\partial y_2} = -\frac{c}{m}$
   Como $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$ es continua en D, entonces la solución es **única**.

Proceso de discretización:

1. Discretización del tiempo t:
   $t \to t^n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, ..., N$
   $t^N = 10$
   Paso del tiempo: $h = t^{n+1} - t^n$
   Como $h = cte. \Rightarrow h = \frac{t^N - t^0}{N}$

2. Discretización de las ecuaciones diferenciales:
   $\mathbf{u}^n \approx \mathbf{y}(t^n)$
   $\mathbf{y}'(t) \to \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{h}$
   $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \to \mathbf{f}^n = A\mathbf{u}^n = \begin{bmatrix} u_2^n \\ -\frac{k}{m}u_1^n - \frac{c}{m}u_2^n \end{bmatrix}$

3. Discretización de las condiciones iniciales:
   $\mathbf{u}^0 = \mathbf{y}(t^0)$

Método de Euler explícito

$$\mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + h\mathbf{f}^n \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} u_2^n \\ -\frac{k}{m}u_1^n - \frac{c}{m}u_2^n \end{bmatrix}$$

- **Análisis de estabilidad:**
  $\mathbf{u}^{n+1} = (I + hA)\mathbf{u}^n$, por lo que $\mathbf{u}^{n+1} = G(h)\mathbf{u}^n$, siendo $G(h)$ la matriz de amplificación.

  Para que el problema sea estable, la matriz de amplificación $G(h)$ debe cumplir la siguiente condición sobre sus autovalores γ_j: $|\gamma_j| < 1 \quad \forall j$.

  Teniendo los autovalores ρ_j de A, puedo calcular los autovalores de la matriz de amplificación como $\gamma_j = 1 + h\rho_j$.

  - **Sistema subamortiguado ($\zeta < 1$):**
    Calculo los autovalores ρ_j de A para así poder calcular los autovalores de la matriz de amplificación y hallar los h aplicando la condición de estabilidad:
    $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0{,}4 \end{bmatrix}$
    $\det(A - \rho I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\rho & 1 \\ -100 & -0{,}4 - \rho \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + 0{,}4\rho + 100 = 0 \Leftrightarrow$
    $\rho_1 \approx -\frac{1}{5} + i9{,}998 \Rightarrow \gamma_1 \approx 1 - \frac{h}{5} + i9{,}998h$
    $\rho_2 \approx -\frac{1}{5} - i9{,}998 \Rightarrow \gamma_2 \approx 1 - \frac{h}{5} - i9{,}998h$
    $|\gamma_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{h}{5}\right)^2 + (9{,}998h)^2} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 100h^2 - 0{,}4h + 1 < 1 \Leftrightarrow$

    $\Leftrightarrow 0 < h < 0{,}004$

- **Sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$):**
  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -20 \end{bmatrix}$
  $\det(A - \rho I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\rho & 1 \\ -100 & -20-\rho \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + 20\rho + 100 = 0 \Leftrightarrow$
  $\rho \approx -10 \Rightarrow \gamma = 1 - 10h$
  $|\gamma| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1-10h)^2} < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 < h < 0{,}2$
- **Sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$):**
  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -50 \end{bmatrix}$
  $\det(A - \rho I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\rho & 1 \\ -100 & -50-\rho \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + 50\rho + 100 = 0 \Leftrightarrow$
  $\rho_1 \approx -2{,}087 \Rightarrow \gamma_1 \approx 1 - 2{,}087h$
  $\rho_2 \approx -47{,}913 \Rightarrow \gamma_2 \approx 1 - 47{,}913h$
  $|\gamma_1| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1-2{,}087h)^2} < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 < h \leq 0{,}958$
  $|\gamma_2| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1-47{,}913h)^2} < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 < h \leq 0{,}0417$
  Luego: $0 < h \leq 0{,}0417$

Método de Runge-Kutta 2

$\mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. Predicción:
   $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^n + \frac{h}{2}\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\begin{bmatrix} u_2^n \\ -\frac{k}{m}u_1^n - \frac{c}{m}u_2^n \end{bmatrix}$
2. Corrección:
   $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + h\mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} u_2^{n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{k}{m}u_1^{n+\frac{1}{2}} - \frac{c}{m}u_2^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

- **Análisis de estabilidad:**
  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + hA(\mathbf{u}^n + \frac{h}{2}A\mathbf{u}^n) \Leftrightarrow \mathbf{u}^{n+1} = (I + hA + \frac{h^2}{2}A^2)\mathbf{u}^n$, por lo que $\mathbf{u}^{n+1} = G(h)\mathbf{u}^n$, siendo $G(h)$ la matriz de amplificación.

  Para que el problema sea estable, la matriz de amplificación $G(h)$ debe cumplir la siguiente condición sobre sus autovalores γ_j: $|\gamma_j| < 1 \quad \forall j$.

  Teniendo los autovalores ρ_j de A, puedo calcular los autovalores de la matriz de amplificación como $\gamma_j = 1 + h\rho_j + \frac{h^2}{2}\rho_j^2$.

  - **Sistema subamortiguado ($\zeta < 1$):**
    $\rho_{1,2} \approx -\frac{1}{5} \pm i9{,}998 \Rightarrow \gamma_{1,2} \approx 1 - \frac{h}{5} - 49{,}96h^2 \pm i(9{,}998h - 2h^2)$
    $|\gamma_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{h}{5} - 49{,}96h^2\right)^2 + (9{,}998h - 2h^2)^2} < 1 \Leftrightarrow$
    $\Leftrightarrow 0 < h \leq 0{,}057$

- **Sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$):**
  $\rho \approx -10 \Rightarrow \gamma = 1 - 10h + 100\frac{h^2}{2}$
  $|\gamma| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1 - 10h + 100\frac{h^2}{2})^2} < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 < h < 0{,}2$
- **Sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$):**
  $\rho_1 \approx -2{,}087 \Rightarrow \gamma_1 \approx 1 - 2{,}087h + 2{,}178h^2$
  $\rho_2 \approx -47{,}913 \Rightarrow \gamma_2 \approx 1 - 47{,}913h + 1147{,}828h^2$
  $|\gamma_1| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1 - 2{,}087h + 2{,}178h^2)^2} < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 < h \leq 0{,}958$
  $|\gamma_2| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1 - 47{,}913h + 1147{,}828h^2)^2} < 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 < h \leq 0,0417$
  Luego: $0 < h \leq 0,0417$

4.3. Sistema no lineal

Sistema de segundo orden:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) + \alpha x(t)^3 = 0$$

$x(t^0) = x_0 = 0,01$: desplazamiento inicial.

$x'(t^0) = v_0 = 0$: velocidad inicial.

4.3.1. Solución por aproximación

Llamo $x(t) = y_1(t)$, introduzco el cambio de variable $x'(t) = y_2(t)$, y reescribo el sistema como un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -\dfrac{k}{m}y_1(t) - \dfrac{c}{m}y_2(t) - \dfrac{\alpha}{m}y_1(t)^3 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\dfrac{k}{m}y_1(t) - \dfrac{c}{m}y_2(t) - \dfrac{\alpha}{m}y_1(t)^3 \end{bmatrix}$$

Análisis de existencia y unicidad:

El análisis resulta el mismo que para el sistema lineal, pues trabajamos con el mismo dominio y entre los dos sistemas solo varía $f_2(t, y_2(t))$, a la cual se le agrega un término constante $\left(-\dfrac{\alpha}{m}y_1(t)^3\right)$.

Proceso de discretización:

1. Discretización del tiempo t:
   $t \rightarrow t^n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, ..., N$
   $t^N = 10$
   Paso del tiempo: $h = t^{n+1} - t^n$
   Como $h = cte. \Rightarrow h = \frac{t^N - t^0}{N}$

2. Discretización de las ecuaciones diferenciales:

   $\mathbf{u}^n \approx \mathbf{y}(t^n)$

   $\mathbf{y}'(t) \to \frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{h}$

   $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \to \mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} u_2^n \\ -\frac{k}{m}u_1^n - \frac{c}{m}u_2^n - \dfrac{\alpha}{m}(u_1^n)^3 \end{bmatrix}$

3. Discretización de las condiciones iniciales:

   $\mathbf{u}^0 = \mathbf{y}(t^0)$

Método de Runge-Kutta 2

$\mathbf{u}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. Predicción:

   $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^n + \frac{h}{2}\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} u_2^n \\ -\frac{k}{m}u_1^n - \frac{c}{m}u_2^n - \dfrac{\alpha}{m}(u_1^n)^3 \end{bmatrix}$

2. Corrección:

   $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + h\mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} u_2^{n+\frac{1}{2}} \\ -\frac{k}{m}u_1^{n+\frac{1}{2}} - \frac{c}{m}u_2^{n+\frac{1}{2}} - \dfrac{\alpha}{m}\left(u_1^{n+\frac{1}{2}}\right)^3 \end{bmatrix}$

Análisis de estabilidad:

Como el sistema es no lineal, se analizará la estabilidad del método eligiendo valores de h experimentalmente.

Debido al término no lineal, se espera que, con h sobrepasando ligeramente la cota máxima de estabilidad, la solución diverja con un error mucho mayor que para un sistema lineal.

4.3.2. Modelo del oscilador de Duffing

A través de estudios hechos sobre osciladores no lineales forzados, examinados en sistemas mecánicos por Georg Duffing (1918), y en sistemas eléctricos con amortiguamiento no lineal por Balthasar van der Pol, cualquier ecuación de la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = F\sin\omega t$$

fue llamada ecuación de Duffing. Se trata de una ecuación de segundo orden no lineal que presenta un amortiguamiento dado por la constante b, una fuerza forzante externa $F\sin\omega t$, y un término no lineal $f(x)$ (fuerza restitutiva), que es usualmente cúbico, de la forma:

$$f(x) = \alpha x + \beta x^3$$

1. ¿Dónde aparece en la práctica?

   En la práctica este modelo puede aparecer en sistemas con amortiguamiento lineal o no lineal y con una fuerza restitutiva no lineal.

   Casos en los que se utiliza este modelo son para describir péndulos en los que no hay un comportamiento lineal, para el estudio del movimiento Browniano, o en distribuciones caóticas de átomos en sistemas de condensado Bose-Einstein [1].

   Un análisis de la aplicación del modelo en péndulos con comportamiento no lineal se puede encontrar en [2].

2. ¿Por qué es importante como modelo no lineal?

   El modelo no lineal es importante ya que permite el estudio de fenómenos no lineales y oscilaciones no lineales.

3. ¿Qué tipo de comportamiento puede presentar?

   Si $\beta > 0$, la rigidez del sistema aumenta a medida que crece la amplitud de la oscilación, lo que se traduce en oscilaciones con frecuencia creciente a medida que aumenta el desplazamiento. Este fenómeno se asocia a un comportamiento no lineal tipo resorte endurecido (*hardening system*).

   Sucede lo contrario si $\beta < 0$: la rigidez efectiva disminuye con la amplitud. Esto se puede traducir en la disminución de la frecuencia o incluso en comportamientos caóticos. En este caso, el sistema actúa como un resorte ablandado (*softening system*).

En nuestro modelo, la ecuación de Duffing está dada por:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) + \alpha x(t)^3 = 0$$

con:

$$b = \frac{c}{m}, \quad \alpha = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\alpha}{m}, \quad F = 0.$$

5. Resultados

5.1. Sistema lineal

Realicé los cálculos de cada sistema (subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado) para cada método, variando h en tres valores distintos en cada caso: uno muy chico, otro muy cercano a la cota máxima de estabilidad, y otro sobrepasando la cota.

Expresé los resultados de la solución $x(t)$ en gráficos, comparándolos con la solución analítica para realizar el cálculo del error.

5.1.1. Gráficos

Sistema subamortiguado:

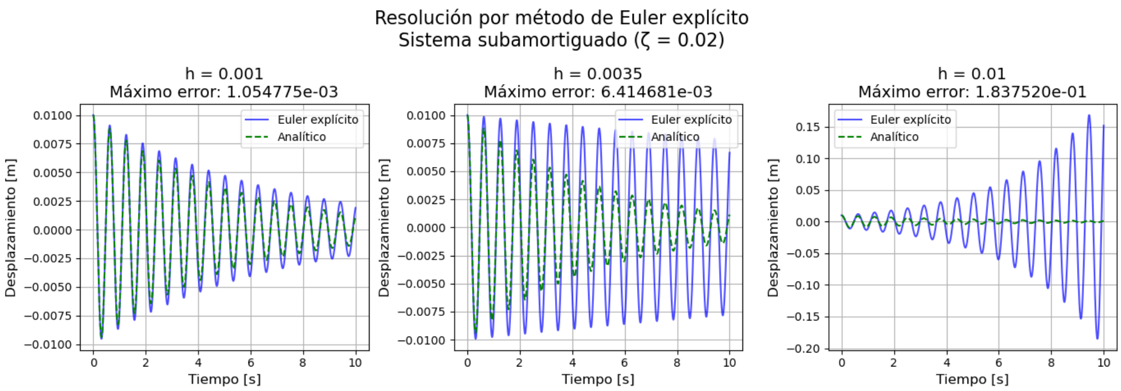

Figura 1: Sistema lineal subamortiguado por método de Euler explícito

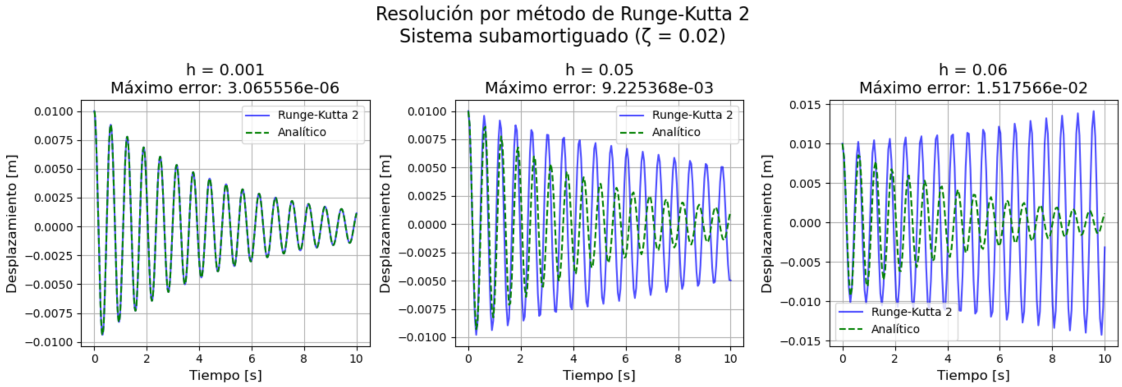

Figura 2: Sistema lineal subamortiguado por método de Runge-Kutta 2

Sistema críticamente amortiguado:

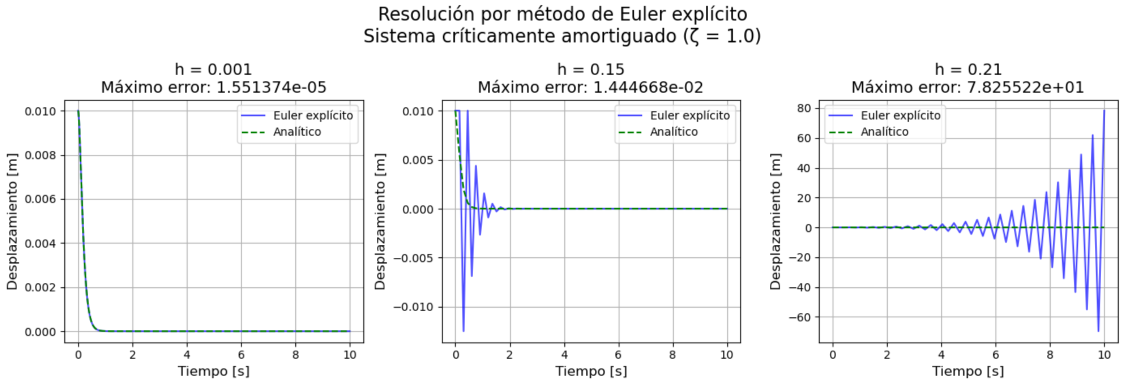

Figura 3: Sistema lineal críticamente amortiguado por método de Euler explícito

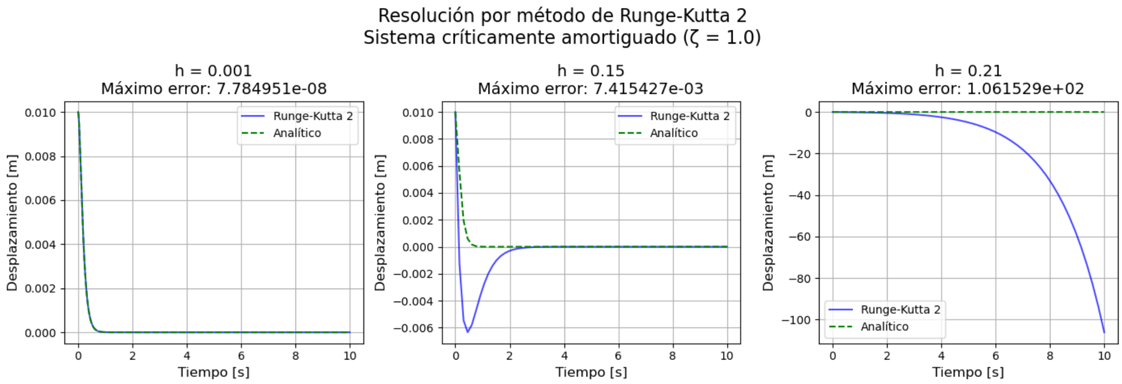

Figura 4: Sistema lineal críticamente amortiguado por método de Runge-Kutta 2

Sistema sobreamortiguado:

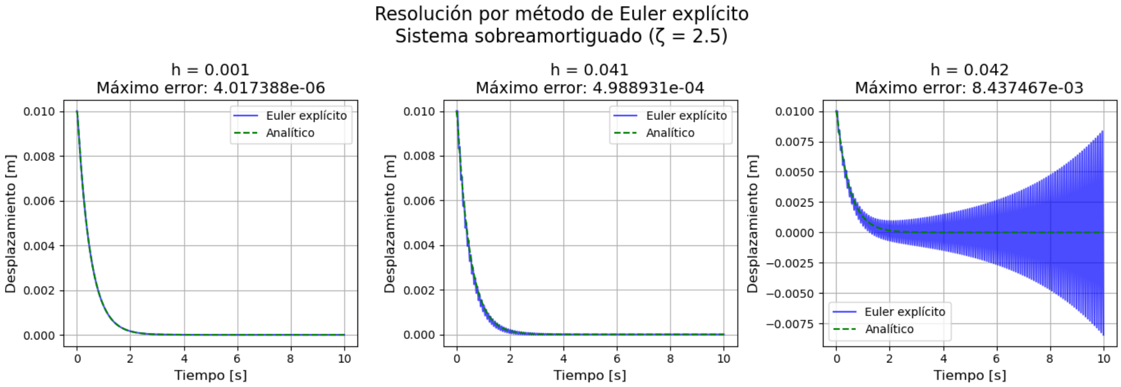

Figura 5: Sistema lineal sobreamortiguado por método de Euler explícito

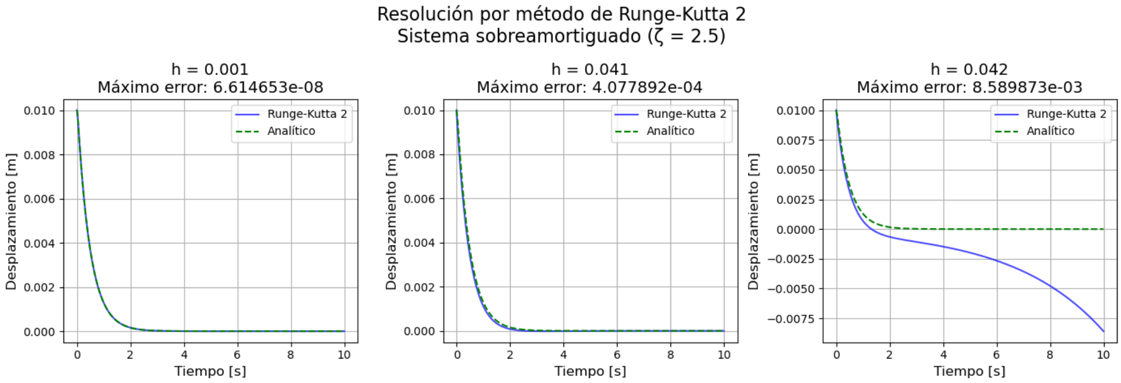

Figura 6: Sistema lineal sobreamortiguado por método de Runge-Kutta 2

5.1.2. Análisis

Comportamiento de los sistemas:

Los tres sistemas con un h estable se comportan como lo esperado. En el sistema subamortiguado, se puede observar cómo la masa oscila con amplitud decreciente hasta llegar al estado de equilibrio (cuando el desplazamiento y la velocidad tienden a cero con el tiempo). En el sistema críticamente amortiguado, al igual que en el sobreamortiguado, se puede observar que el sistema no oscila antes de llegar al equilibrio, aunque el primero converge más rápido que el segundo.

Estabilidad:

Se puede observar cómo los sistemas convergen dentro del rango de estabilidad de los valores de h calculados, pero, como es esperado, los sistemas no convergen a una solución cuando se utilizan valores de h por fuera de la cota máxima de estabilidad. Esto se puede observar en el tercer gráfico de cada figura, en la forma en que se incrementa el error a mayor tiempo. Por ejemplo, en el tercer gráfico de la Figura 1, podemos notar el incremento del error en la medida en que la amplitud crece a mayor tiempo.

De todas formas, la estabilidad no garantiza que obtengamos una buena solución, como podemos observar en los gráficos del medio de cada figura (que corresponden a cálculos para un h muy cercano a la cota máxima). Se puede notar cómo el máximo error resulta mayor en estos casos, comparándolo con los de los gráficos de la izquierda (cálculos con valores de h muy chicos).

Precisión:

El error de la aproximación por cada método se puede observar en la diferencia entre las soluciones analíticas y las aproximadas. Utilicé el error máximo global para comparar la precisión de los métodos.

Si comparamos los errores apreciados entre ambos métodos de resolución en cada sistema, podemos observar una tendencia en el método de Runge-Kutta 2 a tener un error menor que en el método de Euler explícito a menor paso h. Esto es esperable debido a que el primer método es de orden 2 y el segundo de orden 1, lo que significa que a medida que se disminuye el tamaño del paso, el error de Runge-Kutta 2 decrece de manera proporcional a h^2, mientras que el de Euler explícito lo hace en proporción a h. Este comportamiento se puede observar en los gráficos para los cálculos con un h dentro del rango de estabilidad. Este fenómeno no se presenta cuando el h es inestable debido a que, en esas condiciones, los errores se amplifican.

Podemos verificar el orden de convergencia P esperado al comparar los errores para distintos pasos h (dentro del rango de estabilidad) utilizando la fórmula:

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^P = \frac{E_1}{E_2}$$

Ejemplificando con el caso del sistema subamortiguado, buscamos los órdenes del método de Euler explícito y el método de Runge-Kutta 2, siendo éstos respectivamente P_E y P_{RK2}:

$$\left(\frac{0{,}001}{0{,}0035}\right)^{P_E} = \frac{0{,}001}{0{,}006} \Leftrightarrow P_E \approx 1{,}4$$

$$\left(\frac{0{,}001}{0{,}05}\right)^{P_{RK2}} = \frac{0{,}000003}{0{,}009} \Leftrightarrow P_{RK2} \approx 2$$

Los órdenes calculados resultaron aproximadamente los esperados. Es también esperable en este caso que no sean exactamente iguales, ya que uno de los valores de h utilizados estaba muy cercano a la cota máxima de estabilidad.

Al realizar el mismo cálculo del orden para los sistemas críticamente amortiguado y sobreamortiguado, se observó la misma tendencia.

5.2. Sistema no lineal

Realicé los cálculos de cada sistema variando h en tres valores distintos en cada caso para visualizar el comportamiento de la estabilidad. También realicé variaciones del valor y signo de α.

Expresé los resultados de la solución $x(t)$ en gráficos.

5.2.1. Gráficos

Sistema subamortiguado:

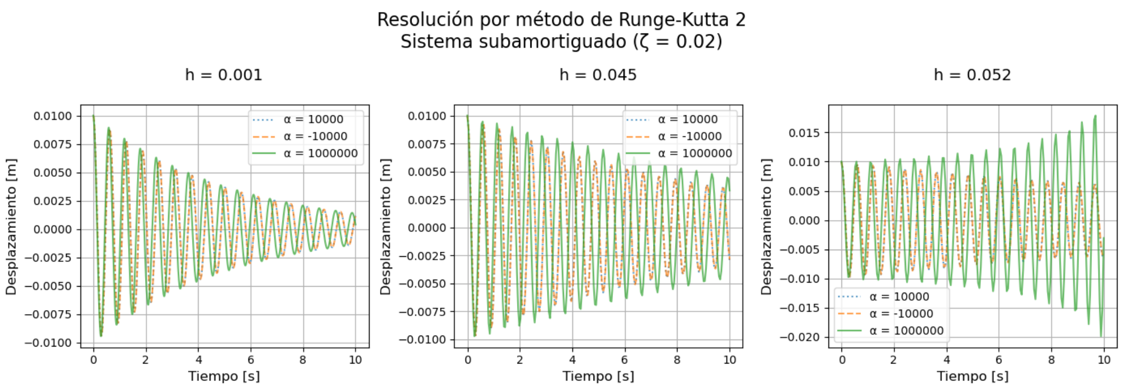

Figura 7: Sistema no lineal subamortiguado por método de Runge-Kutta 2

Se hicieron los cálculos graficando solo para $\alpha < 0$ y $\alpha > 0$ (con igual módulo), recortando el gráfico para así poder visualizar la diferencia entre ambos:

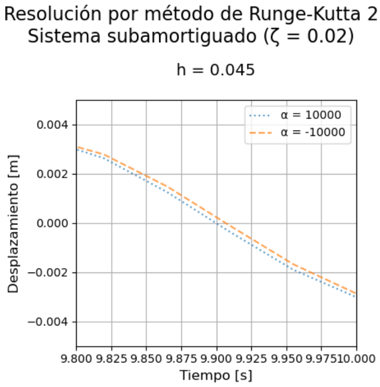

Figura 8: Comparación entre gráficos para $\alpha < 0$ y $\alpha > 0$.

Sistema críticamente amortiguado:

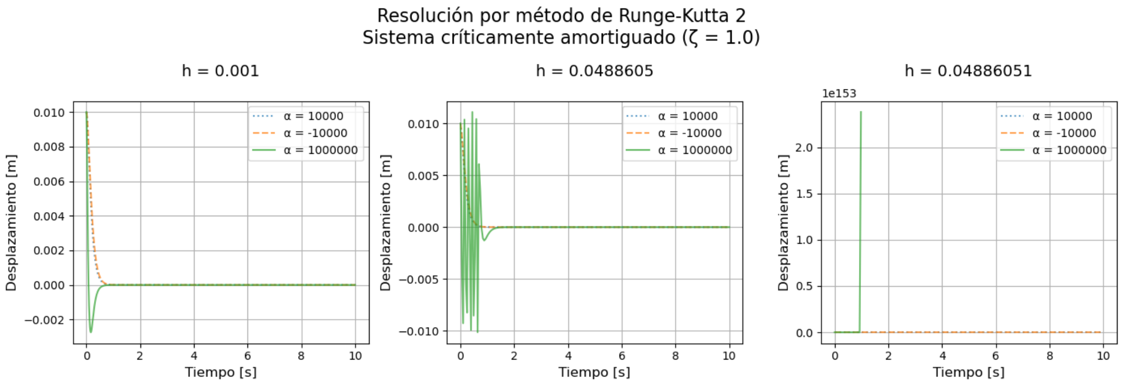

Figura 9: Sistema no lineal críticamente amortiguado por método de Runge-Kutta 2

Sistema sobreamortiguado:

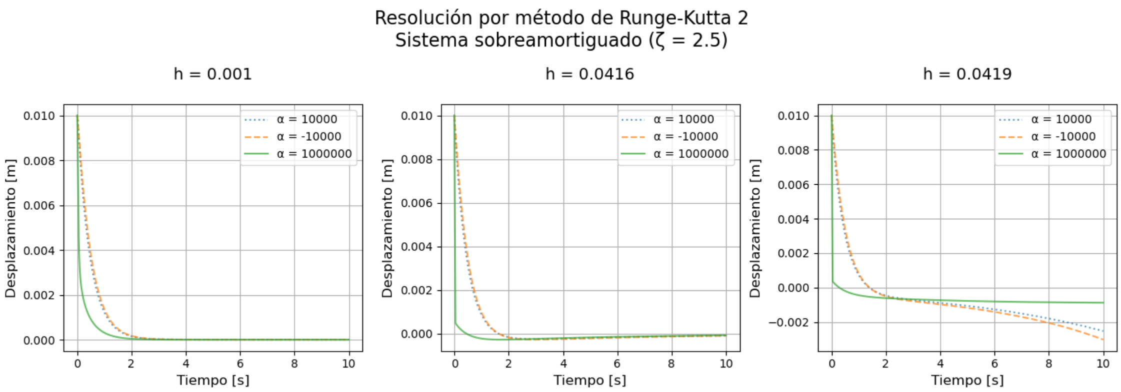

Figura 10: Sistema no lineal sobreamortiguado por método de Runge-Kutta 2

5.2.2. Análisis

Para el sistema no lineal, los análisis del comportamiento de los sistemas, la estabilidad y la precisión resultan los mismos que para el sistema lineal con el método de Runge-Kutta 2.

Para h estable no se observó un comportamiento caótico o explosivo, mientras que para los h

fuera del rango de estabilidad, sí se pudo observar un crecimiento explosivo de la solución. En el sistema lineal este crecimiento no era tan abrupto, en este caso lo es debido al término no lineal, que introduce una mayor sensibilidad a errores. Se puede observar en la Figura 9 que para dos valores de h, uno estable y el otro no, con una diferencia entre ambos de 10^{-8}, la solución que diverge sobrepasó rápidamente un valor de 10^{153}.

Influencia de α:

Para el sistema subamortiguado, el término no lineal introduce variaciones en las oscilaciones del sistema. Como es esperado, para un α grande ($\alpha = 10^6$) resultó un sistema endurecido que se aprecia en las oscilaciones con frecuencia creciente. Se puede observar este comportamiento en la Figura 7. Comparando los gráficos para este α (línea verde) con los gráficos para valores de α menores (líneas punteadas naranja y azul), podemos notar cómo aumenta la frecuencia de oscilación del primero respecto al segundo a mayor tiempo. En los sistemas críticamente amortiguado y sobreamortiguado este fenómeno se puede observar en la aceleración de la convergencia a mayor α.

En cuanto a la variación del signo de α, se logró notar el comportamiento esperado: la reducción de la fuerza restitutiva que ocasiona el signo negativo de α se aprecia en la reducción de la frecuencia de oscilación del gráfico para $\alpha < 0$ (línea punteada naranja). Esto se puede observar claramente en la Figura 8.

6. Conclusiones

Tras la resolución de los sistemas para los métodos numéricos de Euler explícito y Runge-Kutta 2, con su respectivo análisis, podemos concluir que se cumple lo esperado teóricamente en cuanto a la precisión de ambos métodos: Runge-Kutta 2 presenta una mejora frente a Euler explícito en cuanto a la rapidez con la que disminuye el error al reducir el paso h. Esto era esperado debido al orden de ambos métodos.

A su vez, pudimos comprender la importancia de utilizar un valor de paso h no solo dentro del rango de estabilidad para asegurar la convergencia, sino también lo suficientemente pequeño para obtener una buena precisión a menor tiempo.

En cuanto al sistema no lineal, comprobamos que se generaron comportamientos distintos de acuerdo al signo y el módulo de α, especialmente en la convergencia: para $\alpha > 0$ obtenemos un sistema más rígido que para $\alpha < 0$.

Finalmente, al comparar ambos sistemas, notamos cómo en el sistema no lineal la influencia del término no lineal ocasiona un sistema más sensible a errores, con soluciones que se pueden volver caóticas o explosivas. Esto advierte que este sistema requiere un análisis más cuidadoso que el sistema lineal.

7. Referencias

Referencias

[1] Alejandra Alfonso, Kevin Giraldo Hincapié,
Estudio del oscilador de Duffing,
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

[2] Alvaro H. Salas, Jairo E. Castillo H.,
Exact solution to Duffing equation and the pendulum equation,
Applied Mathematical Sciences, 2014, 8 (176), pp. 8781-8789. 10.12988/ams.2014.44243. hal-01356787

8. Anexo I – Código fuente

A continuación se encuentra el código en Python utilizado para la resolución de los sistemas. Para no complejizar su entendimiento, no adjunté el código para la construcción de los gráficos ni las impresiones por salida estándar.

```python
import numpy as np

t0 = 0
tN = 10

DESPL_INICIAL = 0.01
VELOC_INICIAL = 0

c = [2, 2, 5]        # coeficiente de amortiguamiento
k = [500, 10, 10]    # cte. elástica del resorte
m = [5, 0.1, 0.1]    # masa del cuerpo

# >> SISTEMA LINEAL
# h_*_vector_sl[*][0] = h de Euler explícito
# h_*_vector_sl[*][1] = h de RK 2
h_subamort_vector_sl = [[0.001, 0.001], [0.0035, 0.05], [0.01, 0.06]]
h_crit_amort_vector_sl = [[0.001, 0.001], [0.15, 0.15], [0.21, 0.21]]
h_sobreamort_vector_sl = [[0.001, 0.001], [0.041, 0.041], [0.042, 0.042]]

# >> SISTEMA NO LINEAL
h_subamort_vector_snl = [0.001, 0.045, 0.052]
h_crit_amort_vector_snl = [0.001, 0.0488605, 0.04886051]
h_sobreamort_vector_snl = [0.001, 0.0416, 0.0419]
alpha_vector = [10000, -10000, 1000000]

def metodo_euler_explicito_sl(N, h, c, k, m):
    t = np.linspace(0, tN, N+1)
    u1 = np.zeros(N+1)
    u2 = np.zeros(N+1)

    u1[0] = DESPL_INICIAL
    u2[0] = VELOC_INICIAL

    for n in range(N):
        u1[n+1] = u1[n] + h * u2[n]
        u2[n+1] = u2[n] + h * (-(k/m) * u1[n] - (c/m)*u2[n])

    return u1, t

def metodo_rk2_sl(N, h, c, k, m):
    t = np.linspace(0, tN, N+1)
    u1 = np.zeros(N+1)
    u2 = np.zeros(N+1)

    u1[0] = DESPL_INICIAL
    u2[0] = VELOC_INICIAL

    for n in range(N):
        u1_interm = u1[n] + (h/2) * u2[n]
        u2_interm = u2[n] + (h/2) * (-(k/m) * u1[n] - (c/m)*u2[n])

        u1[n+1] = u1[n] + h * u2_interm
        u2[n+1] = u2[n] + h * (-(k/m) * u1_interm - (c/m)*u2_interm)

    return u1, t
```

```python

def metodo_analitico_sl(N, c, k, m):
    t = np.linspace(0, tN, N+1)
    x = np.zeros(N+1)
    x[0] = DESPL_INICIAL

    w = np.sqrt(k/m)
    zeta = c / (2 * np.sqrt(k*m))
    if zeta < 1:      # subamortiguado
        w_amort = w * np.sqrt(1 - zeta**2)
        A = DESPL_INICIAL
        B = (VELOC_INICIAL + zeta*w*DESPL_INICIAL)/w_amort
        for n in range(N):
            x[n+1] = np.exp(-zeta*w*t[n+1]) * (A*np.cos(w_amort*t[n+1]) + B*np.sin(w_amort*t[n+1]))
    elif zeta == 1:   # críticamente amortiguado
        A = DESPL_INICIAL
        B = VELOC_INICIAL + w*DESPL_INICIAL
        for n in range(N):
            x[n+1] = (A + B*t[n+1])*np.exp(-w*t[n+1])
    else:             # sobreamortiguado
        r1 = -w*(zeta - np.sqrt(zeta**2 - 1))
        r2 = -w*(zeta + np.sqrt(zeta**2 - 1))
        A = (VELOC_INICIAL - r2*DESPL_INICIAL)/(r1 - r2)
        B = DESPL_INICIAL - A
        for n in range(N):
            x[n+1] = A*np.exp(r1*t[n+1]) + B*np.exp(r2*t[n+1])

    return x, t

def metodo_rk2_snl(N, h, c, k, m, alpha):
    t = np.linspace(0, tN, N+1)
    u1 = np.zeros(N+1)
    u2 = np.zeros(N+1)

    u1[0] = DESPL_INICIAL
    u2[0] = VELOC_INICIAL

    for n in range(N):
        u1_interm = u1[n] + (h/2) * u2[n]
        u2_interm = u2[n] + (h/2) * (-(k/m) * u1[n] - (c/m)*u2[n] - (alpha/m)*(u1[n]**3))

        u1[n+1] = u1[n] + h * u2_interm
        u2[n+1] = u2[n] + h * (-(k/m) * u1_interm - (c/m)*u2_interm - (alpha/m)*(u1_interm**3))

    return u1, t
```

9. Anexo II – Corridas numéricas

9.1. Sistema lineal

9.1.1. Método de Euler explícito

```
>>> Sistema subamortiguado (ζ = 0.02)
-----------------------------------------------
                   h = 0.001
-----------------------------------------------
 t         | Euler explícito   | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.001 | x = 1.000000e-02  | x = 9.999500e-03
t = 0.002 | x = 9.999000e-03  | x = 9.998001e-03
t = 0.003 | x = 9.997000e-03  | x = 9.995502e-03
t = 0.004 | x = 9.994002e-03  | x = 9.992005e-03
   ...     |       ...         |       ...
t = 9.995 | x = 1.837470e-03  | x = 1.102032e-03
t = 9.996 | x = 1.849788e-03  | x = 1.109637e-03
t = 9.997 | x = 1.861916e-03  | x = 1.117128e-03
t = 9.998 | x = 1.873855e-03  | x = 1.124504e-03
t = 9.999 | x = 1.885602e-03  | x = 1.131765e-03
Máximo error: 0.0010547752227540903

-----------------------------------------------
                   h = 0.0035
-----------------------------------------------
 t         | Euler explícito   | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.004 | x = 1.000000e-02  | x = 9.993878e-03
t = 0.007 | x = 9.987750e-03  | x = 9.975530e-03
t = 0.011 | x = 9.963267e-03  | x = 9.944997e-03
t = 0.014 | x = 9.926584e-03  | x = 9.902333e-03
   ...     |       ...         |       ...
t = 9.982 | x = 5.849416e-03  | x = 9.976533e-04
t = 9.986 | x = 6.025505e-03  | x = 1.028576e-03
t = 9.989 | x = 6.194182e-03  | x = 1.058197e-03
t = 9.993 | x = 6.355242e-03  | x = 1.086481e-03
t = 9.996 | x = 6.508489e-03  | x = 1.113395e-03
Máximo error: 0.006414680677650962

-----------------------------------------------
                   h = 0.01
-----------------------------------------------
 t         | Euler explícito   | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.010 | x = 1.000000e-02  | x = 9.950108e-03
t = 0.020 | x = 9.900000e-03  | x = 9.801196e-03
t = 0.030 | x = 9.700400e-03  | x = 9.555143e-03
t = 0.040 | x = 9.402598e-03  | x = 9.214792e-03
   ...     |       ...         |       ...
t = 9.950 | x = 7.053036e-02  | x = 6.553976e-04
t = 9.960 | x = 8.868844e-02  | x = 7.703489e-04
t = 9.970 | x = 1.060686e-01  | x = 8.771596e-04
t = 9.980 | x = 1.224923e-01  | x = 9.747971e-04
t = 9.990 | x = 1.377897e-01  | x = 1.062324e-03
Máximo error: 0.1837519994281809

>>> Sistema críticamente amortiguado (ζ = 1.0)
-----------------------------------------------
```

```
                      h = 0.001
------------------------------------------------
 t          | Euler explícito    | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.001 | x = 1.000000e-02   | x = 9.999503e-03
t = 0.002 | x = 9.999000e-03   | x = 9.998026e-03
t = 0.003 | x = 9.997020e-03   | x = 9.995589e-03
t = 0.004 | x = 9.994080e-03   | x = 9.992210e-03
   ...     |        ...         |        ...
t = 9.995 | x = 2.411005e-44   | x = 3.947961e-44
t = 9.996 | x = 2.387131e-44   | x = 3.909065e-44
t = 9.997 | x = 2.363494e-44   | x = 3.870553e-44
t = 9.998 | x = 2.340091e-44   | x = 3.832420e-44
t = 9.999 | x = 2.316920e-44   | x = 3.794662e-44
Máximo error: 1.5513744266375078e-05

------------------------------------------------
                      h = 0.15
------------------------------------------------
 t          | Euler explícito    | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.152 | x = 1.000000e-02   | x = 5.527671e-03
t = 0.303 | x = -1.250000e-02 | x = 1.946677e-03
t = 0.455 | x = 1.000000e-02   | x = 5.886692e-04
t = 0.606 | x = -6.875000e-03 | x = 1.647230e-04
   ...     |        ...         |        ...
t = 9.242 | x = 7.892992e-19   | x = 6.778305e-41
t = 9.394 | x = -4.011548e-19 | x = 1.513861e-41
t = 9.545 | x = 2.038300e-19   | x = 3.380184e-42
t = 9.697 | x = -1.035413e-19 | x = 7.545490e-43
t = 9.848 | x = 5.258381e-20   | x = 1.683956e-43
Máximo error: 0.014446676636106092

------------------------------------------------
                      h = 0.21
------------------------------------------------
 t          | Euler explícito    | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.213 | x = 1.000000e-02   | x = 3.725535e-03
t = 0.426 | x = -3.410000e-02 | x = 7.456542e-04
t = 0.638 | x = 6.292000e-02   | x = 1.247783e-04
t = 0.851 | x = -9.716300e-02 | x = 1.914637e-05
   ...     |        ...         |        ...
t = 8.936 | x = -4.336289e+01 | x = 1.401814e-39
t = 9.149 | x = 4.884922e+01   | x = 1.709098e-40
t = 9.362 | x = -5.499918e+01 | x = 2.082637e-41
t = 9.574 | x = 6.189065e+01   | x = 2.536533e-42
t = 9.787 | x = -6.961041e+01 | x = 3.087859e-43
Máximo error: 78.25522328432658

>>> Sistema sobreamortiguado (ζ = 2.5)
------------------------------------------------
                      h = 0.001
------------------------------------------------
 t          | Euler explícito    | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.001 | x = 1.000000e-02   | x = 9.999508e-03
t = 0.002 | x = 9.999000e-03   | x = 9.998065e-03
t = 0.003 | x = 9.997050e-03   | x = 9.995717e-03
t = 0.004 | x = 9.994198e-03   | x = 9.992509e-03
   ...     |        ...         |        ...
```

```
t = 9.995 | x = 8.915662e-12  | x = 9.112156e-12
t = 9.996 | x = 8.897054e-12  | x = 9.093157e-12
t = 9.997 | x = 8.878484e-12  | x = 9.074199e-12
t = 9.998 | x = 8.859954e-12  | x = 9.055279e-12
t = 9.999 | x = 8.841462e-12  | x = 9.036400e-12
Máximo error: 4.017388438691625e-06

------------------------------------------------
                   h = 0.041
------------------------------------------------
 t         | Euler explícito   | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.041 | x = 1.000000e-02  | x = 9.531510e-03
t = 0.082 | x = 8.319000e-03  | x = 8.796383e-03
t = 0.123 | x = 8.403050e-03  | x = 8.079271e-03
t = 0.165 | x = 6.916374e-03  | x = 7.415267e-03
   ...     |        ...        |       ...
t = 9.794 | x = -8.215302e-08 | x = 1.385467e-11
t = 9.835 | x = 7.924182e-08  | x = 1.271437e-11
t = 9.877 | x = -7.641284e-08 | x = 1.166792e-11
t = 9.918 | x = 7.370400e-08  | x = 1.070759e-11
t = 9.959 | x = -7.107369e-08 | x = 9.826310e-12
Máximo error: 0.0004988930883813207

------------------------------------------------
                   h = 0.042
------------------------------------------------
 t         | Euler explícito   | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.042 | x = 1.000000e-02  | x = 9.516785e-03
t = 0.084 | x = 8.236000e-03  | x = 8.765365e-03
t = 0.126 | x = 8.412400e-03  | x = 8.035792e-03
t = 0.168 | x = 6.765530e-03  | x = 7.361964e-03
   ...     |        ...        |       ...
t = 9.790 | x = 7.935571e-03  | x = 1.398024e-11
t = 9.832 | x = -8.033503e-03 | x = 1.280647e-11
t = 9.874 | x = 8.132644e-03  | x = 1.173125e-11
t = 9.916 | x = -8.233008e-03 | x = 1.074631e-11
t = 9.958 | x = 8.334611e-03  | x = 9.844057e-12
Máximo error: 0.008437467324543984
```

9.1.2. Método de Runge-Kutta 2

```
>>> Sistema subamortiguado (ζ = 0.02)
------------------------------------------------
                   h = 0.001
------------------------------------------------
 t         | Runge-Kutta 2     | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.001 | x = 9.999500e-03  | x = 9.999500e-03
t = 0.002 | x = 9.998000e-03  | x = 9.998001e-03
t = 0.003 | x = 9.995502e-03  | x = 9.995502e-03
t = 0.004 | x = 9.992005e-03  | x = 9.992005e-03
   ...     |        ...        |       ...
t = 9.995 | x = 1.103246e-03  | x = 1.102032e-03
t = 9.996 | x = 1.110832e-03  | x = 1.109637e-03
t = 9.997 | x = 1.118303e-03  | x = 1.117128e-03
t = 9.998 | x = 1.125660e-03  | x = 1.124504e-03
t = 9.999 | x = 1.132901e-03  | x = 1.131765e-03
```

```
Máximo error: 3.0655563392591786e-06

------------------------------------------------
                  h = 0.05
------------------------------------------------
 t         | Runge-Kutta 2      | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.050 | x = 8.750000e-03   | x = 8.783912e-03
t = 0.100 | x = 5.206000e-03   | x = 5.462659e-03
t = 0.150 | x = 3.158275e-04   | x = 8.830078e-04
t = 0.200 | x = -4.624805e-03 | x = -3.820004e-03
   ...     |        ...         |        ...
t = 9.750 | x = 3.710667e-03   | x = -1.419428e-03
t = 9.800 | x = 1.403049e-03   | x = -1.185346e-03
t = 9.850 | x = -1.258343e-03 | x = -6.685687e-04
t = 9.900 | x = -3.570869e-03 | x = 3.880239e-08
t = 9.950 | x = -4.928374e-03 | x = 6.553976e-04
Máximo error: 0.009225367625781352

------------------------------------------------
                  h = 0.06
------------------------------------------------
 t         | Runge-Kutta 2      | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.060 | x = 8.200000e-03   | x = 8.253694e-03
t = 0.120 | x = 3.209882e-03   | x = 3.677942e-03
t = 0.181 | x = -3.047724e-03 | x = -2.068231e-03
t = 0.241 | x = -8.149903e-03 | x = -6.958168e-03
   ...     |        ...         |        ...
t = 9.699 | x = 3.427695e-03   | x = -1.300234e-03
t = 9.759 | x = -5.400615e-03 | x = -1.401979e-03
t = 9.819 | x = -1.217162e-02 | x = -1.013628e-03
t = 9.880 | x = -1.424863e-02 | x = -2.819347e-04
t = 9.940 | x = -1.080511e-02 | x = 5.304080e-04
Máximo error: 0.015175661136342295

>>> Sistema críticamente amortiguado (ζ = 1.0)
------------------------------------------------
                  h = 0.001
------------------------------------------------
 t         | Runge-Kutta 2      | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.001 | x = 9.999500e-03   | x = 9.999503e-03
t = 0.002 | x = 9.998020e-03   | x = 9.998026e-03
t = 0.003 | x = 9.995579e-03   | x = 9.995589e-03
t = 0.004 | x = 9.992197e-03   | x = 9.992210e-03
   ...     |        ...         |        ...
t = 9.995 | x = 3.954395e-44   | x = 3.947961e-44
t = 9.996 | x = 3.915437e-44   | x = 3.909065e-44
t = 9.997 | x = 3.876862e-44   | x = 3.870553e-44
t = 9.998 | x = 3.838667e-44   | x = 3.832420e-44
t = 9.999 | x = 3.800849e-44   | x = 3.794662e-44
Máximo error: 7.784950526064371e-08

------------------------------------------------
                  h = 0.15
------------------------------------------------
 t         | Runge-Kutta 2      | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02
t = 0.152 | x = -1.250000e-03 | x = 5.527671e-03
t = 0.303 | x = -5.468750e-03 | x = 1.946677e-03
```

```
t = 0.455 | x = -6.347656e-03 | x = 5.886692e-04
t = 0.606 | x = -5.798340e-03 | x = 1.647230e-04
   ...    |        ...        |       ...
t = 9.242 | x = -2.553984e-13 | x = 6.778305e-41
t = 9.394 | x = -1.622771e-13 | x = 1.513861e-41
t = 9.545 | x = -1.030813e-13 | x = 3.380184e-42
t = 9.697 | x = -6.546216e-14 | x = 7.545490e-43
t = 9.848 | x = -4.156156e-14 | x = 1.683956e-43
Máximo error: 0.007415426636106092

------------------------------------------------
                   h = 0.21
------------------------------------------------
 t        | Runge-Kutta 2     | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.213 | x = -1.205000e-02 | x = 3.725535e-03
t = 0.426 | x = -3.884075e-02 | x = 7.456542e-04
t = 0.638 | x = -7.112471e-02 | x = 1.247783e-04
t = 0.851 | x = -1.097601e-01 | x = 1.914637e-05
   ...    |        ...        |       ...
t = 8.936 | x = -5.750954e+01 | x = 1.401814e-39
t = 9.149 | x = -6.507853e+01 | x = 1.709098e-40
t = 9.362 | x = -7.360295e+01 | x = 2.082637e-41
t = 9.574 | x = -8.320002e+01 | x = 2.536533e-42
t = 9.787 | x = -9.400099e+01 | x = 3.087859e-43
Máximo error: 106.1528923752006

>>> Sistema sobreamortiguado (ζ = 2.5)
------------------------------------------------
                   h = 0.001
------------------------------------------------
 t        | Runge-Kutta 2     | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.001 | x = 9.999500e-03  | x = 9.999508e-03
t = 0.002 | x = 9.998049e-03  | x = 9.998065e-03
t = 0.003 | x = 9.995695e-03  | x = 9.995717e-03
t = 0.004 | x = 9.992480e-03  | x = 9.992509e-03
   ...    |        ...        |       ...
t = 9.995 | x = 9.112294e-12  | x = 9.112156e-12
t = 9.996 | x = 9.093295e-12  | x = 9.093157e-12
t = 9.997 | x = 9.074336e-12  | x = 9.074199e-12
t = 9.998 | x = 9.055417e-12  | x = 9.055279e-12
t = 9.999 | x = 9.036537e-12  | x = 9.036400e-12
Máximo error: 6.614653283096295e-08

------------------------------------------------
                   h = 0.041
------------------------------------------------
 t        | Runge-Kutta 2     | Analítico
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02
t = 0.041 | x = 9.159500e-03  | x = 9.531510e-03
t = 0.082 | x = 8.388593e-03  | x = 8.796383e-03
t = 0.123 | x = 7.681554e-03  | x = 8.079271e-03
t = 0.165 | x = 7.033124e-03  | x = 7.415267e-03
   ...    |        ...        |       ...
t = 9.794 | x = -9.602200e-08 | x = 1.385467e-11
t = 9.835 | x = -9.266778e-08 | x = 1.271437e-11
t = 9.877 | x = -8.943069e-08 | x = 1.166792e-11
t = 9.918 | x = -8.630666e-08 | x = 1.070759e-11
t = 9.959 | x = -8.329172e-08 | x = 9.826310e-12
Máximo error: 0.0004077891772473266
```

```

--------------------------------------------------
                   h = 0.042
--------------------------------------------------
 t         | Runge-Kutta 2       | Analítico
t = 0.000  | x = 1.000000e-02    | x = 1.000000e-02
t = 0.042  | x = 9.118000e-03    | x = 9.516785e-03
t = 0.084  | x = 8.309382e-03    | x = 8.765365e-03
t = 0.126  | x = 7.567990e-03    | x = 8.035792e-03
t = 0.168  | x = 6.888181e-03    | x = 7.361964e-03
   ...     |        ...          |         ...
t = 9.790  | x = -8.075874e-03   | x = 1.398024e-11
t = 9.832  | x = -8.176152e-03   | x = 1.280647e-11
t = 9.874  | x = -8.277676e-03   | x = 1.173125e-11
t = 9.916  | x = -8.380460e-03   | x = 1.074631e-11
t = 9.958  | x = -8.484521e-03   | x = 9.844057e-12
Máximo error: 0.008589873457674186
```

9.2. Sistema no lineal

9.2.1. Método de Runge-Kutta 2

```
>>> Sistema subamortiguado (ζ = 0.02)
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.001
-----------------------------------------------------------------------
 t         | RK 2 (α = 10000)    | RK 2 (α = -10000)  | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000  | x = 1.000000e-02    | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02  |
t = 0.001  | x = 9.999499e-03    | x = 9.999501e-03   | x = 9.999400e-03  |
t = 0.002  | x = 9.997996e-03    | x = 9.998004e-03   | x = 9.997601e-03  |
t = 0.003  | x = 9.995493e-03    | x = 9.995511e-03   | x = 9.994602e-03  |
t = 0.004  | x = 9.991989e-03    | x = 9.992021e-03   | x = 9.990406e-03  |
   ...     |        ...
t = 9.995  | x = 1.117911e-03    | x = 1.088216e-03   | x = 4.565170e-04  |
t = 9.996  | x = 1.125291e-03    | x = 1.096005e-03   | x = 4.432186e-04  |
t = 9.997  | x = 1.132555e-03    | x = 1.103681e-03   | x = 4.298811e-04  |
t = 9.998  | x = 1.139703e-03    | x = 1.111244e-03   | x = 4.165060e-04  |
t = 9.999  | x = 1.146734e-03    | x = 1.118692e-03   | x = 4.030945e-04  |
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.045
-----------------------------------------------------------------------
 t         | RK 2 (α = 10000)    | RK 2 (α = -10000)  | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000  | x = 1.000000e-02    | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02  |
t = 0.045  | x = 8.985475e-03    | x = 8.989525e-03   | x = 8.785000e-03  |
t = 0.090  | x = 6.081535e-03    | x = 6.096070e-03   | x = 5.371768e-03  |
t = 0.135  | x = 1.920971e-03    | x = 1.945184e-03   | x = 7.747305e-04  |
t = 0.180  | x = -2.605558e-03   | x = -2.577019e-03  | x = -3.929340e-03 |
   ...     |        ...
t = 9.775  | x = 3.452575e-03    | x = 3.501151e-03   | x = -1.980292e-04 |
t = 9.820  | x = 2.628590e-03    | x = 2.783750e-03   | x = 1.898755e-03  |
t = 9.865  | x = 1.257816e-03    | x = 1.486038e-03   | x = 3.573674e-03  |
t = 9.910  | x = -3.653764e-04   | x = -1.128986e-04  | x = 4.461837e-03  |
t = 9.955  | x = -1.896225e-03   | x = -1.672981e-03  | x = 4.360905e-03  |
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.052
-----------------------------------------------------------------------
 t         | RK 2 (α = 10000)    | RK 2 (α = -10000)  | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000  | x = 1.000000e-02    | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02  |
t = 0.052  | x = 8.645296e-03    | x = 8.650704e-03   | x = 8.377600e-03  |
```

```
t = 0.104 | x = 4.821359e-03  | x = 4.840126e-03  | x = 3.908301e-03  |
t = 0.156 | x = -3.621558e-04 | x = -3.336976e-04 | x = -1.700244e-03 |
t = 0.208 | x = -5.415444e-03 | x = -5.385831e-03 | x = -6.780075e-03 |
   ...    |        ...
t = 9.740 | x = 4.103095e-03  | x = 4.557345e-03  | x = 9.258935e-03  |
t = 9.792 | x = 1.102578e-03  | x = 1.758092e-03  | x = -2.843944e-03 |
t = 9.844 | x = -2.197745e-03 | x = -1.529405e-03 | x = -1.391145e-02 |
t = 9.896 | x = -4.852886e-03 | x = -4.362896e-03 | x = -1.987853e-02 |
t = 9.948 | x = -6.106609e-03 | x = -5.935051e-03 | x = -1.538795e-02 |

>>> Sistema críticamente amortiguado (ζ = 1.0)
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.001
-----------------------------------------------------------------------
 t        | RK 2 (α = 10000)  | RK 2 (α = -10000) | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02  |
t = 0.001 | x = 9.999450e-03  | x = 9.999550e-03  | x = 9.994500e-03  |
t = 0.002 | x = 9.997822e-03  | x = 9.998218e-03  | x = 9.978227e-03  |
t = 0.003 | x = 9.995137e-03  | x = 9.996021e-03  | x = 9.951446e-03  |
t = 0.004 | x = 9.991417e-03  | x = 9.992977e-03  | x = 9.914445e-03  |
   ...    |        ...
t = 9.995 | x = 3.131260e-44  | x = 4.992952e-44  | x = -3.530817e-45 |
t = 9.996 | x = 3.100409e-44  | x = 4.943764e-44  | x = -3.495944e-45 |
t = 9.997 | x = 3.069862e-44  | x = 4.895061e-44  | x = -3.461415e-45 |
t = 9.998 | x = 3.039617e-44  | x = 4.846837e-44  | x = -3.427227e-45 |
t = 9.999 | x = 3.009669e-44  | x = 4.799089e-44  | x = -3.393377e-45 |
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.0488605
-----------------------------------------------------------------------
 t        | RK 2 (α = 10000)  | RK 2 (α = -10000) | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02  |
t = 0.049 | x = 8.686958e-03  | x = 8.925693e-03  | x = -3.130417e-03 |
t = 0.098 | x = 6.884982e-03  | x = 7.383222e-03  | x = -9.258429e-03 |
t = 0.147 | x = 5.196451e-03  | x = 5.807974e-03  | x = 1.036719e-02  |
t = 0.196 | x = 3.806361e-03  | x = 4.406515e-03  | x = -4.880054e-03 |
   ...    |        ...
t = 9.755 | x = 9.943855e-41  | x = 1.435526e-40  | x = -4.597098e-38 |
t = 9.804 | x = 6.303215e-41  | x = 9.099856e-41  | x = -2.915386e-38 |
t = 9.853 | x = 3.995388e-41  | x = 5.768292e-41  | x = -1.848825e-38 |
t = 9.902 | x = 2.532476e-41  | x = 3.656364e-41  | x = -1.172420e-38 |
t = 9.951 | x = 1.605172e-41  | x = 2.317614e-41  | x = -7.434609e-39 |
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.04886051
-----------------------------------------------------------------------
 t        | RK 2 (α = 10000)  | RK 2 (α = -10000) | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000 | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02  | x = 1.000000e-02  |
t = 0.049 | x = 8.686958e-03  | x = 8.925693e-03  | x = -3.130422e-03 |
t = 0.098 | x = 6.884981e-03  | x = 7.383221e-03  | x = -9.258432e-03 |
t = 0.147 | x = 5.196450e-03  | x = 5.807973e-03  | x = 1.036722e-02  |
t = 0.196 | x = 3.806360e-03  | x = 4.406514e-03  | x = -4.880165e-03 |
   ...    |        ...
t = 9.755 | x = 9.943696e-41  | x = 1.435503e-40  | x = nan  |
t = 9.804 | x = 6.303114e-41  | x = 9.099709e-41  | x = nan  |
t = 9.853 | x = 3.995324e-41  | x = 5.768199e-41  | x = nan  |
t = 9.902 | x = 2.532435e-41  | x = 3.656304e-41  | x = nan  |
t = 9.951 | x = 1.605146e-41  | x = 2.317576e-41  | x = nan  |

>>> Sistema sobreamortiguado (ζ = 2.5)
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.001
-----------------------------------------------------------------------
```

```
 t          | RK 2 (α = 10000)   | RK 2 (α = -10000)  | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02   |
t = 0.001 | x = 9.999450e-03   | x = 9.999550e-03   | x = 9.994500e-03   |
t = 0.002 | x = 9.997854e-03   | x = 9.998244e-03   | x = 9.978552e-03   |
t = 0.003 | x = 9.995264e-03   | x = 9.996125e-03   | x = 9.952713e-03   |
t = 0.004 | x = 9.991728e-03   | x = 9.993232e-03   | x = 9.917545e-03   |
   ...      |        ...
t = 9.995 | x = 8.634048e-12   | x = 9.671324e-12   | x = 2.180015e-12   |
t = 9.996 | x = 8.616047e-12   | x = 9.651160e-12   | x = 2.175470e-12   |
t = 9.997 | x = 8.598083e-12   | x = 9.631038e-12   | x = 2.170934e-12   |
t = 9.998 | x = 8.580156e-12   | x = 9.610958e-12   | x = 2.166408e-12   |
t = 9.999 | x = 8.562267e-12   | x = 9.590919e-12   | x = 2.161891e-12   |
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.0416
-----------------------------------------------------------------------
 t          | RK 2 (α = 10000)   | RK 2 (α = -10000)  | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02   |
t = 0.042 | x = 9.048192e-03   | x = 9.221248e-03   | x = 4.819200e-04   |
t = 0.083 | x = 8.198127e-03   | x = 8.488706e-03   | x = 4.087941e-04   |
t = 0.125 | x = 7.435402e-03   | x = 7.802248e-03   | x = 3.427047e-04   |
t = 0.167 | x = 6.748478e-03   | x = 7.161101e-03   | x = 2.828500e-04   |
   ...      |        ...
t = 9.792 | x = -8.739268e-05 | x = -9.652162e-05 | x = -7.599292e-05 |
t = 9.833 | x = -8.679826e-05 | x = -9.586526e-05 | x = -7.547209e-05 |
t = 9.875 | x = -8.620789e-05 | x = -9.521337e-05 | x = -7.495488e-05 |
t = 9.917 | x = -8.562154e-05 | x = -9.456590e-05 | x = -7.444127e-05 |
t = 9.958 | x = -8.503917e-05 | x = -9.392284e-05 | x = -7.393123e-05 |
-----------------------------------------------------------------------
                                h = 0.0419
-----------------------------------------------------------------------
 t          | RK 2 (α = 10000)   | RK 2 (α = -10000)  | RK 2 (α = 1000000)|
t = 0.000 | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02   | x = 1.000000e-02   |
t = 0.042 | x = 9.034415e-03   | x = 9.209976e-03   | x = 3.441450e-04   |
t = 0.084 | x = 8.172283e-03   | x = 8.466530e-03   | x = 2.700059e-04   |
t = 0.126 | x = 7.398821e-03   | x = 7.769583e-03   | x = 2.023082e-04   |
t = 0.168 | x = 6.702206e-03   | x = 7.118381e-03   | x = 1.403410e-04   |
   ...      |        ...
t = 9.790 | x = -2.443490e-03 | x = -2.906086e-03 | x = -8.806246e-04 |
t = 9.832 | x = -2.460676e-03 | x = -2.930346e-03 | x = -8.810111e-04 |
t = 9.874 | x = -2.477964e-03 | x = -2.954845e-03 | x = -8.813922e-04 |
t = 9.916 | x = -2.495354e-03 | x = -2.979589e-03 | x = -8.817679e-04 |
t = 9.958 | x = -2.512846e-03 | x = -3.004579e-03 | x = -8.821382e-04 |
```