myopractica4.pdf

jeshopenhauer

Mecánica y Ondas

2º Grado en Física

Facultad de Física
Universidad de Sevilla

Practica 4: Orbitas en un campo gravitatorio

Jesús Moral Aranda

1 Fundamento teórico

1.1 Problema de dos cuerpos

Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que interactuan mutuamente en el vacio por unas fuerzas $\vec{F_{12}} = -k\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|}$ y $\vec{F_{21}} = k\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|}$ donde $k = Gm_1m_2$. Como muestra el siguiente esquema:

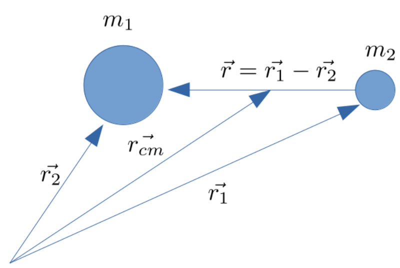


Figure 1: Problema de dos cuerpos esquema

El sistema de ecuaciones del sistema en cartesianas queda:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}\frac{x_1-x_2}{D} \\ \ddot{y}_1 = -\frac{k}{m_1}\frac{y_1-y_2}{D} \qquad\qquad D = \left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ \ddot{x}_2 = \frac{k}{m_2}\frac{x_1-x_2}{D} \\ \ddot{y}_2 = \frac{k}{m_2}\frac{y_1-y_2}{D} \end{cases} \tag{1}$$

Que para ser utilizado para ser integrado numericamente por ordenador queda:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{u}_1 = -\frac{k}{m_1}\frac{x_1-x_2}{D} \\ \\ \dot{y}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = -\frac{k}{m_1}\frac{y_1-y_2}{D} \qquad\qquad D = \left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{u}_2 = \frac{k}{m_2}\frac{x_1-x_2}{D} \\ \\ \dot{y}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = \frac{k}{m_2}\frac{y_1-y_2}{D} \end{cases} \tag{2}$$

Sin embargo existe solución analítica de la ecuación de la orbita. Esto se consigue haciendo el cambio de variable:

$$\vec{r_1} = \vec{r}_{cm} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \vec{r_2} = \vec{r}_{cm} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \tag{3}$$

Para que la trayectoria no se mueva y se salga de la panta preestablecemos $\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r_2} + m_2\vec{r_2} = 0 \quad \forall t.$

El sistema de equaciones (1) se transforma en el siguiente

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{\mu}\frac{1}{\rho^2} \\ \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Este sistema tiene dos integrales primeras, la de la conservación de la energia y del momento angular, donde v es el modulo del vector relativo que como se quiere que la orbita no salga torcida no debemos darle velocidad radial inicial.

$$\begin{cases} \mu\rho^2\dot{\varphi} = L \quad \rightarrow \quad L(v) = \mu\rho v = \mu\rho v_\varphi, \quad t = 0 \\ \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho} - \frac{k}{\rho} = E \quad \rightarrow E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{k}{\rho} \end{cases} \tag{5}$$

En la práctica partimos de que queremos encontrar condiciones iniciales que nos den ciertas trayectorias $\rho(\varphi)$, por lo que no nos interesa encontrar directamente $\rho(t)$ y $\varphi(t)$ por integración directa de (4), ya que no da cuentas de la geometría de la orbita. Aparte de que poner $\rho(\varphi)$ no es cosa trivial si son no lineales y entran en juego teoremas de la función implicita,que son de aplicación local de la función.

Si no que apartir de la trayectoria encontrar las condiciones iniciales será nuestra forma de proceder. Es decir una vez obtenida $\rho(\varphi)$ desacer el cambio de variable teniendo en cuenta que $\varphi = 0 \iff t = 0$ y que el tamaño de la orbita ρ lo prefijamos para facilidad de representación gráfica, con esta ρ se obtienen las posiciones iniciales de las particulas por simple sustitución de este en (3) y de las expresiones que veremos a continuación la velocidad relativa que nos proporcionará las velocidades iniciales de las particulas a partir de las ecuaciones (3) derivadas con respecto al tiempo .

De la (5) ecuación se sigue que:

$$\frac{\mu}{2}\dot{\varphi}^2\rho'(\varphi) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{k}{\rho} = E$$

donde hemos indicado con una prima la derivada respecto de φ. Sustituyendo en esta ecuación el valor de φ obtenido de la conservación del momento angular.

$$\frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\right] - \frac{k}{\rho} = E$$

$$u'^2 + u^2 - u\frac{2\mu k}{L^2} = \frac{2\mu}{L^2}E \tag{6}$$

Donde se ha hecho $u = \frac{1}{\rho}$ si se vuelve a derivar se eleva en un orden la ecuación diferencial a costa de introducir una constante de más pero reduciendo su dificultad. La primera será cuando $u = \frac{1}{\rho} = cte$ es decir cuando se traté de una órbita circular. Para el otro caso

$$u'' + u = \frac{\mu k}{L^2} \rightarrow u = \frac{\mu k}{L^2}(1 + ecos(\varphi - \varphi_0)) \rightarrow \rho = \frac{L^2}{\mu k}(1 + ecos(\varphi - \varphi_0))^{-1}$$

Como vemos hemos introducido una constante de más (teniamos una ecuación de primer orden con 1 cte y ahora tenemos e y φ_0). Se trata de la ecuación de una conica. Hacemos $\varphi_0 = 0$ para que no salga torcida respecto de los ejes.

$$\boxed{\rho = \frac{L^2}{\mu k}(1 + ecos\varphi)^{-1}} \tag{7}$$

Si $u' = 0 \Leftrightarrow u'' = 0$ y la ecuacion que la utilizaremos para las orbitas circulares queda:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\mu k}{L^2} \quad \rho' = 0} \tag{8}$$

1.2 Problema de un cuerpo

Para el problema de un cuerpo particularizamos en (4), es decir hacemos $\mu = m_2$ entonces la masa m_2 no participa en las ecuaciones de movimiento por que $k = Gm_1m_2$.

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{m_2}\frac{1}{\rho^2} \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Y las ecuaciones anteriores siguen siendo válidas solo que hay que sustituir $\mu = m_2$:

$$\boxed{\rho = \frac{L^2}{m_2 k}(1 + ecos\varphi)^{-1}} \tag{10}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\mu k}{L^2} \quad \rho' = 0} \tag{11}$$

2 Cuentas de problema de un cuerpo

2.1 Datos Orbita Circular

Acontinuación se muestrán los cálulos para obtener las condiciones inicales en forma de codigo y un resumen de lo que se obtiene y se va utilizar como condiciones iniciales para integrar las ecuaciones. Para ello se usa (8) para obtener v que coincidirá en $t = 0$ con la condición inicial v_2 que buscamos. Ya que digamoslo así, como la partícula 1 está en reposo debido a que es problema de un cuerpo, entoces la particula dos se lleva toda la velocidad relativa del sistema. O bien $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = -\vec{r_2} \Leftrightarrow |\vec{r}| = |\vec{r_2}| \Leftrightarrow |\vec{v}| = |\vec{v_2}|$. El signo menos solo influyen en que si quieres que la orbita sea en sentido de las agujas del reloj. Yo la pondré positiva por simplicidad. Para el periodo se usara tanto para la elipse y el circulo la siguiente formula trivial de obtener:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

```
%% Circulo
%Calculos de ci
syms 'm1' 'm2' 'r' 'vp' 'mu' 'k' 'L'  'G' 'r'
m1 = 2.30*10^8;
m2 = 2.50*10^6;
r=1.5*10^2;
G=6.67*10^-11;
k=G*m1*m2;
mu=m2;
L=mu*r*vp;
eqn0= 1/r==mu*k/L^2;

vp=double(solve(eqn0,vp))
T=2*pi*r^(3/2)./sqrt(G*(m1+m2))
Tdias=T*(60^2*24)^-1
```

m_1 kg	m_2 kg	x_1 m	u_1 m/s	x_2 m	u_2 m/s	y_1 m	v_1 m/s	y_2 m	v_2 m/s
2.30*10ˆ8	2.50*10ˆ6	0	0	3.50*10ˆ3	0	0	0	0	0.01
T	9.2692e+04 s				1.0728 dias				

2.2 Datos Orbita elíptica

Para la orbita elítica prefijamos e=0.5 para que salga elíptica y de (6) obtenemos v que coincidirá en $t = 0$ con la condición inicial v_2 que buscamos.

```
%% ORBITA ELIPSE
clear; clc;
syms 'm1' 'm2' 'r' 'v' 'mu' 'k' 'L' 'E' 'G' 'r' 'theta'
m1 = 2.30*10^08;

m2 = 2.50*10^06;

r=1.5*10^2;
G=6.67*10^-11;
k=G*m1*m2;
mu=m2
L=mu*r*v;
e=0.5;
theta=0;
eqn0= r==L^2/(mu*k*(1+e*cos(theta)));
v=double(solve(eqn0,v))
v=v(2);
a=L^2/(mu*k)*1/(1-e^2);
a=double(subs(a,v));
T=2*pi*a^(3/2)./sqrt(G*(m1+m2));
Tdias=T*(60^2*24)^-1;
```

m_1 kg	m_2 kg	x_1 m	u_1 m/s	x_2 m	u_2 m/s	y_1 m	v_1 m/s	y_2 m	v_2 m/s
2.30*10ˆ8	2.50*10ˆ6	0	0	3.50*10ˆ3	0	0	0	0	0.0125
T	2.6217e+05s	3.0344 dias	a (m)	300			e	0.5	

2.3 Datos Orbita hiperbólica

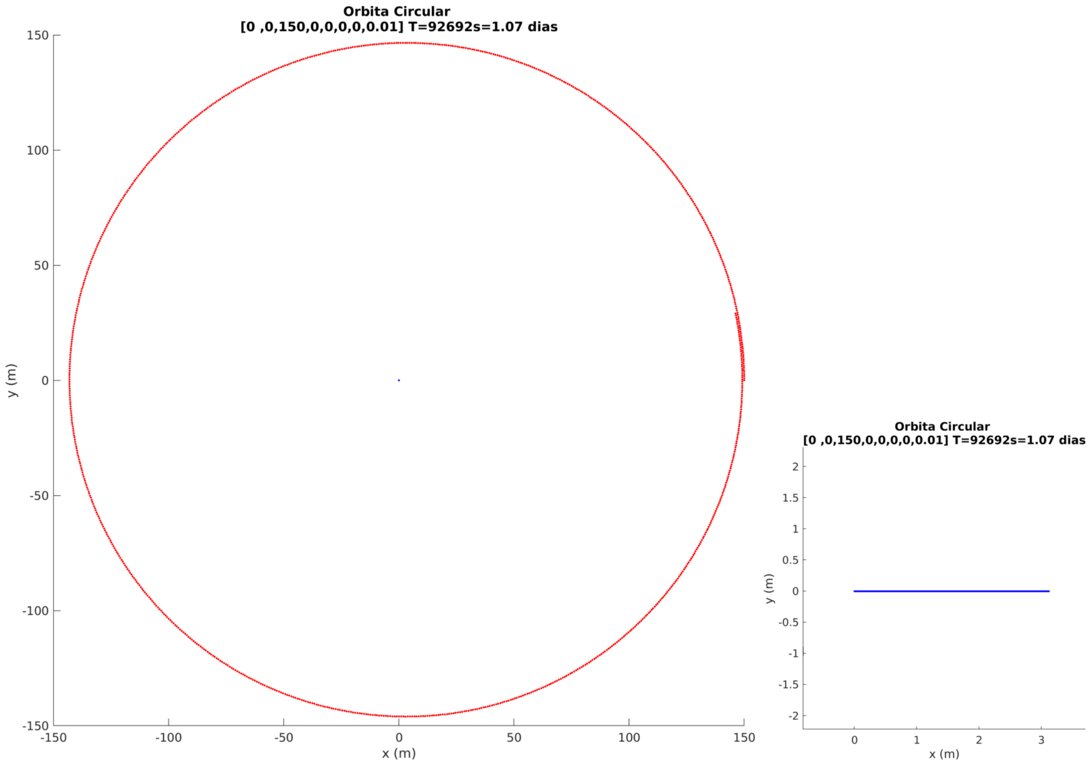
Para la órbita hiperbólica simplemente hago los mismos cálculos que con la elipse pero con $e = 0.99$ y $e = 0.92$ debido a que no es necesario que nisiquiera $e > 0$, ya que los errores en la simulación numérica harán que sea directamente una órbita hiperbólica. En ambos casos $v \sim 0.14$ ya da órbitas hiperbólicas.

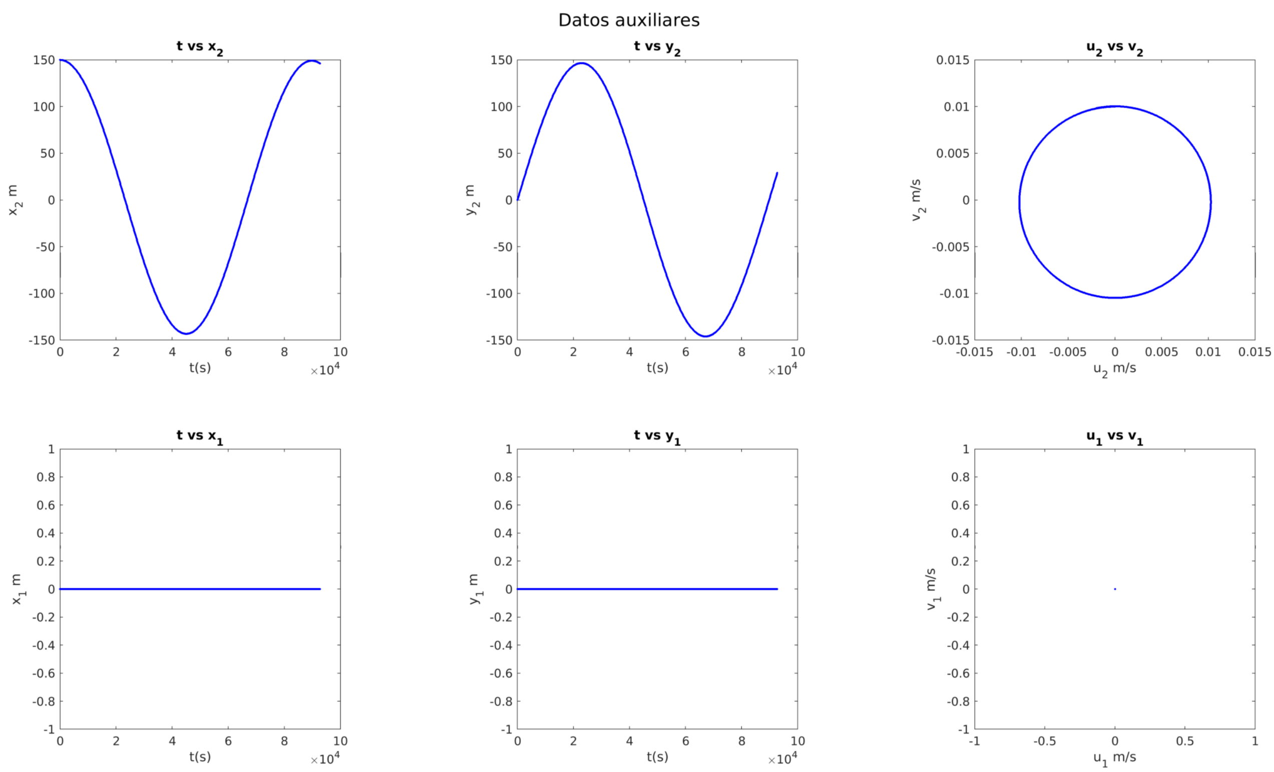
2.4 Resultados Orbita circular

2.4.1 Por Matlab

Acontinuación se muestra una integración en paralelo a la del programa de la práctica para verificación de resultados. Se ha usado el método Runge–Kutta y se muestrán datos de interés respecto posiciones y velocidades. Se puede ver curiosamente también como la órbita no se cierra exactamente debido a los errores acumulados de integración simulando ”perdida de energía”.

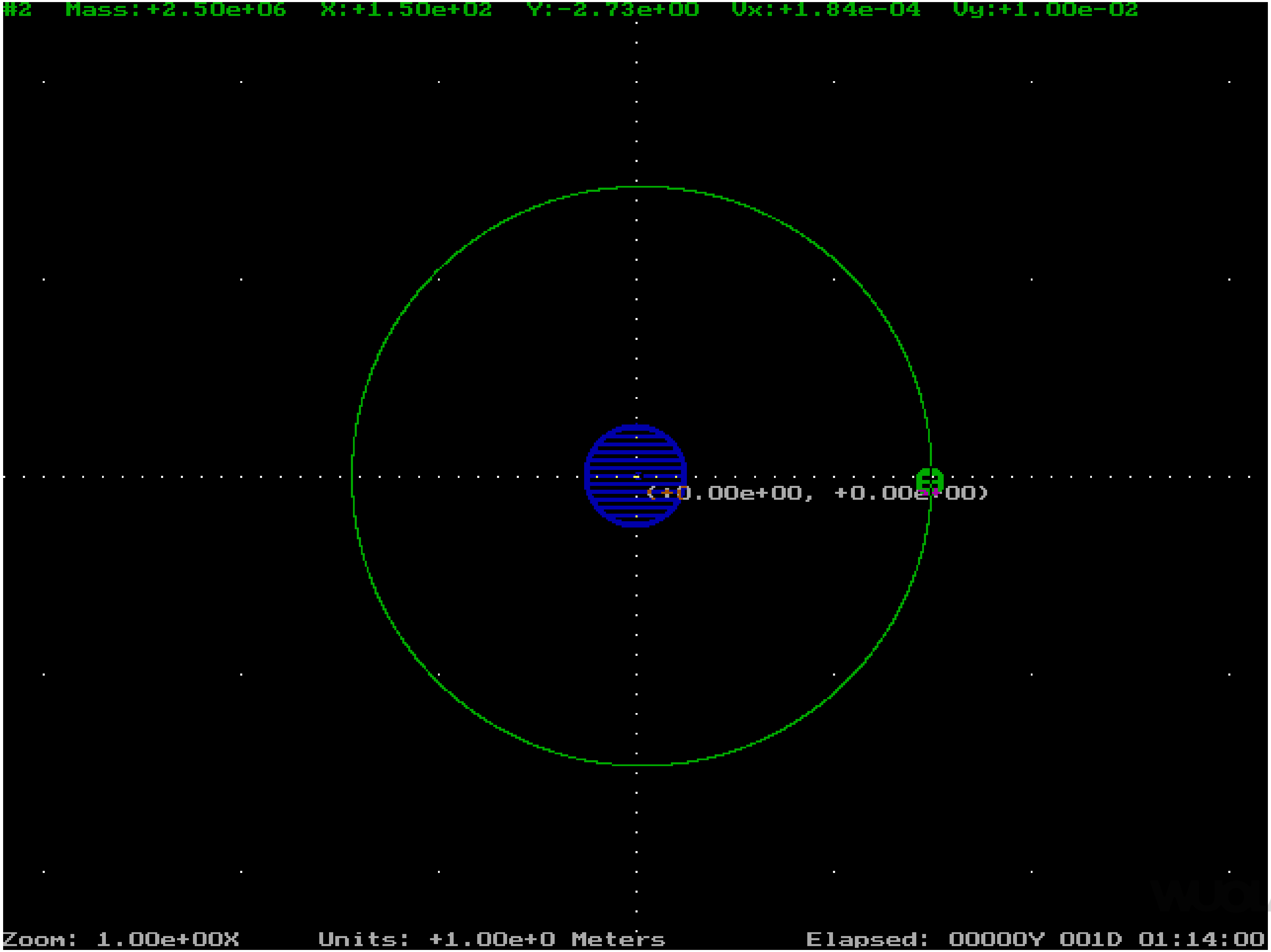
Realmente para integrar el problema de un cuerpo lo que he hecho es imponer de (2) que el primer y tercer par de ecuaciones sea cero. Muestro en la grafica chica al lado de la grande lo que se desplazaría si no pusiesemos dicha condición. Es poco lo que se mueve por que varia en 2 ordenes de magnitud m_1 y m_2.





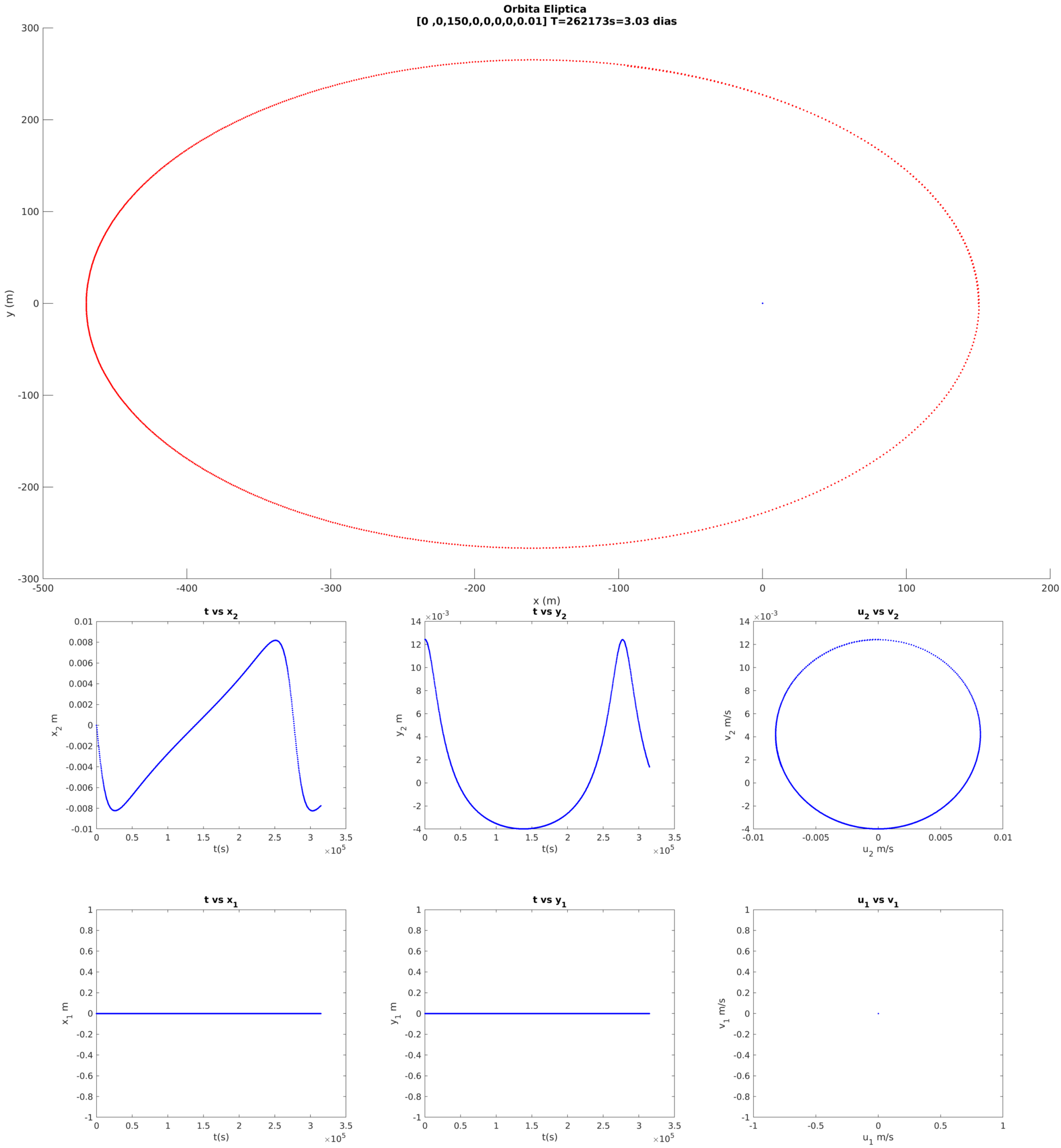
2.4.2 Por Gravity

Podemos observar que pone x:1.50e+02 que es el radio de la orbita 150m como antes.



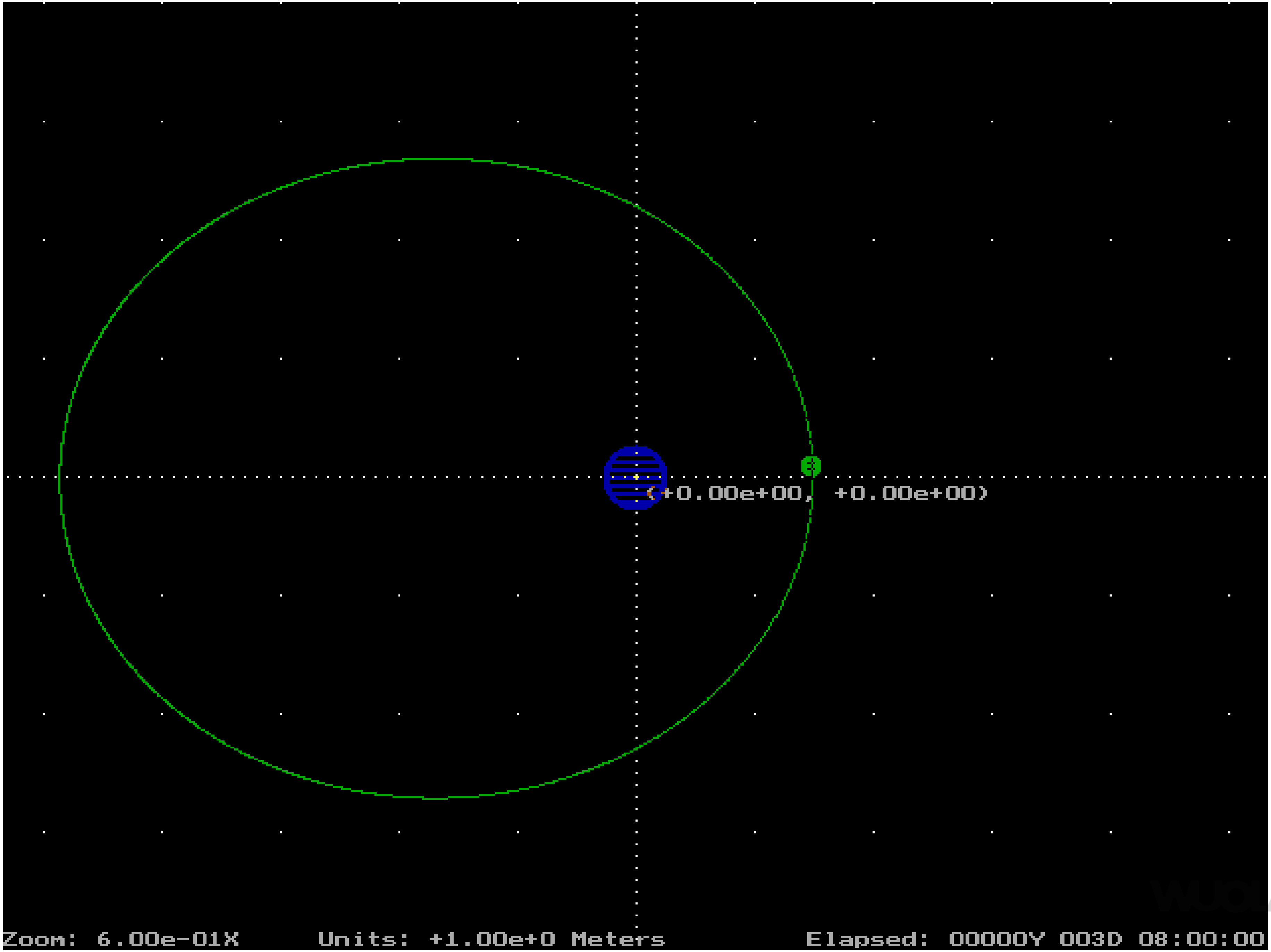
2.5 Resultados Orbita eliptica

2.5.1 Por Matlab



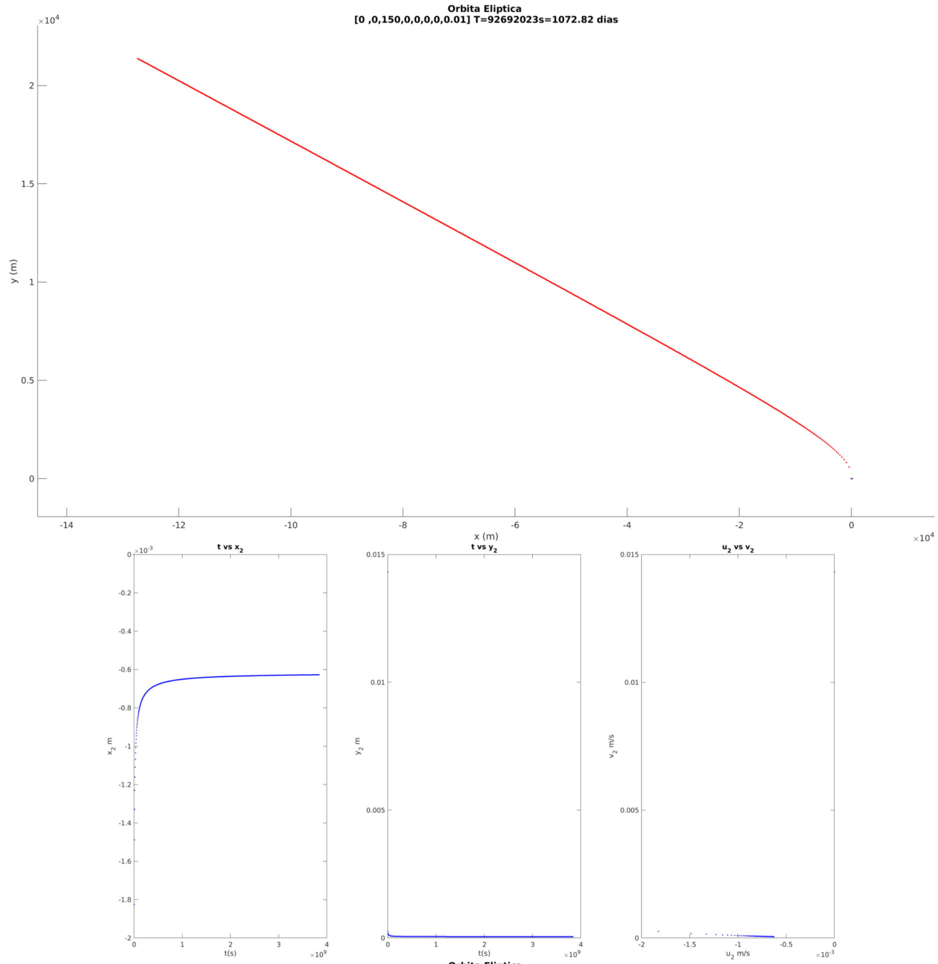
2.5.2 Por Gravity

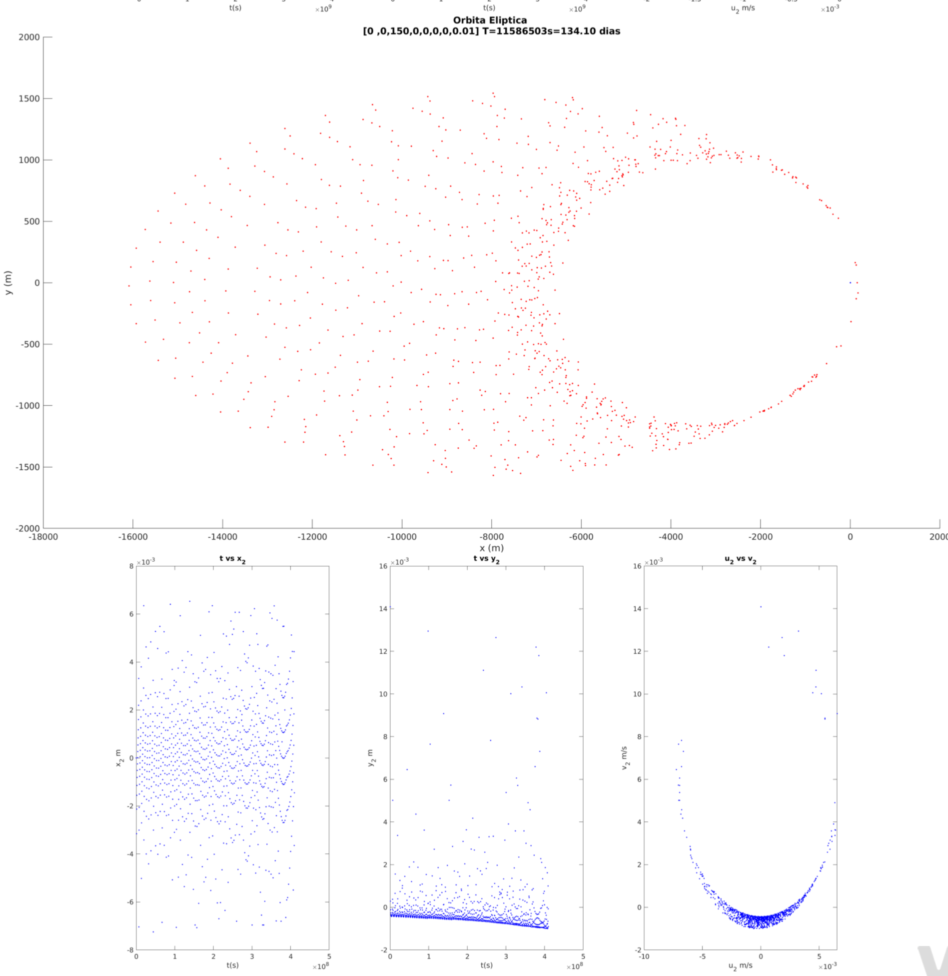
Se vuelve a obtener el mismo resultado que arriba.



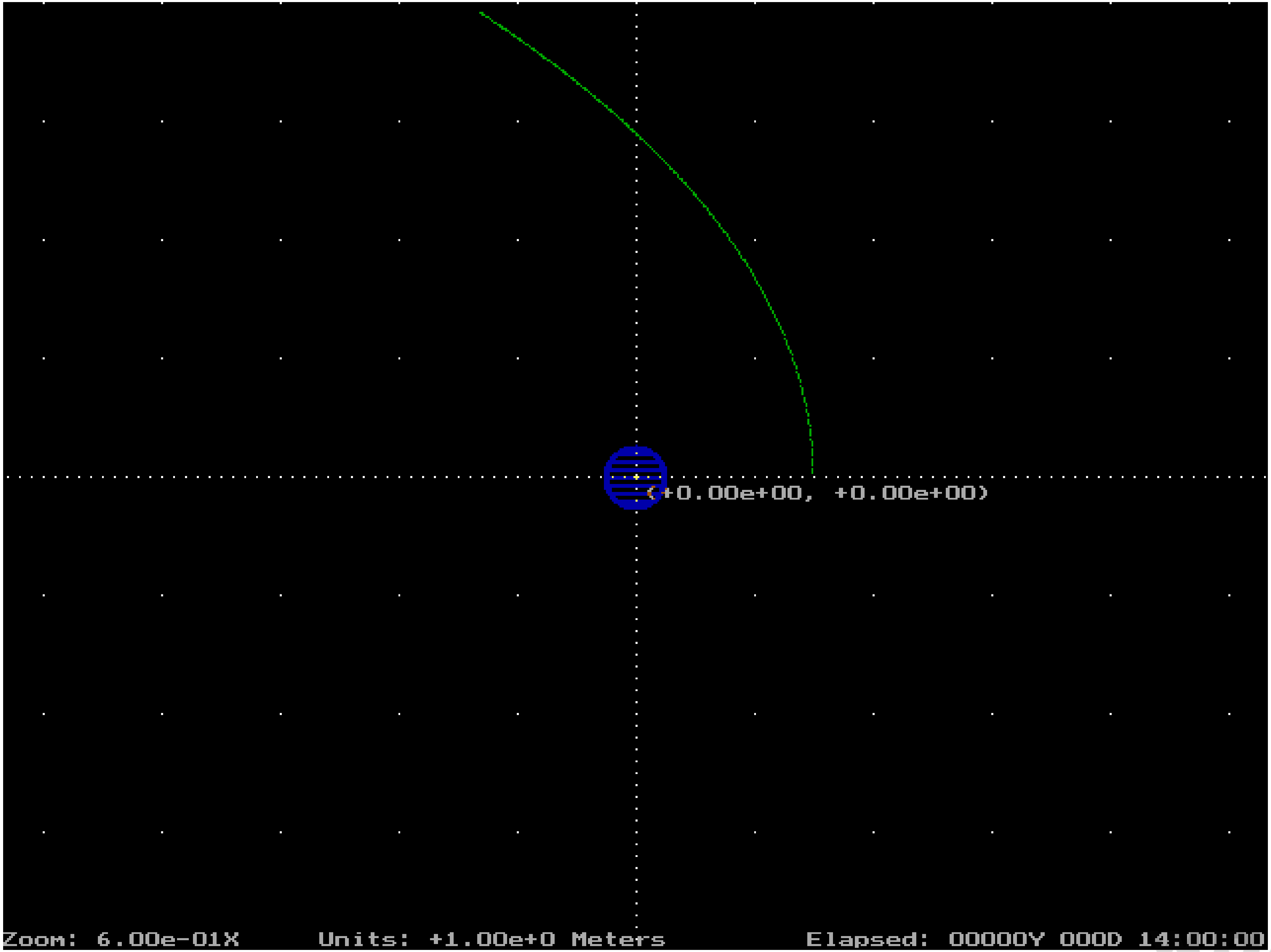
2.6 Resultados Orbita Hiperbólica

La primera corresponde a $e = 0.99$ y la segunda a $e = 0.92$





2.6.1 Por Matlab



3 Problema de dos cuerpos

Resolveremos el problema del vector relativo paral ello prefijamos $e = 0.5$, $r = 15m$, $m_1 = 2\pi * 10^6$ y $m_2 = 3\pi * 10^6$.
Antes v =v_2 y r=x_2 pero ahora para desacer el cambio hay que sustituir en:

$$\begin{cases} x\_1 = (m2 * x)/(m1 + m2) \\ x\_2 = -(m1 * x)/(m1 + m2) \\ V\_1 = (m2 * v)/(m1 + m2) \\ V\_2 = -(m1 * v)/(m1 + m2) \end{cases} \tag{12}$$

$$V\_1 = \sqrt{u\_1^2 + v\_1^2}$$

$$V\_2 = \sqrt{u\_2^2 + v\_2^2}$$

Para que no salgan torcidas las elipses: $u\_i = 0 \rightarrow v\_i = V\_i \quad i = 1, 2$, por lo que nos queda finalmente:

$$\begin{cases} x\_1 = (m2 * r)/(m1 + m2) \\ x\_2 = -(m1 * r)/(m1 + m2) \\ u\_1 = 0 \\ v\_1 = V\_1 \\ u\_2 = 0 \\ v\_2 = V\_2 \end{cases} \tag{13}$$

Acontinuación se muestra el codigo de los cálculos y un resumen de los datos obtenidos de la elipse del vector relativo.

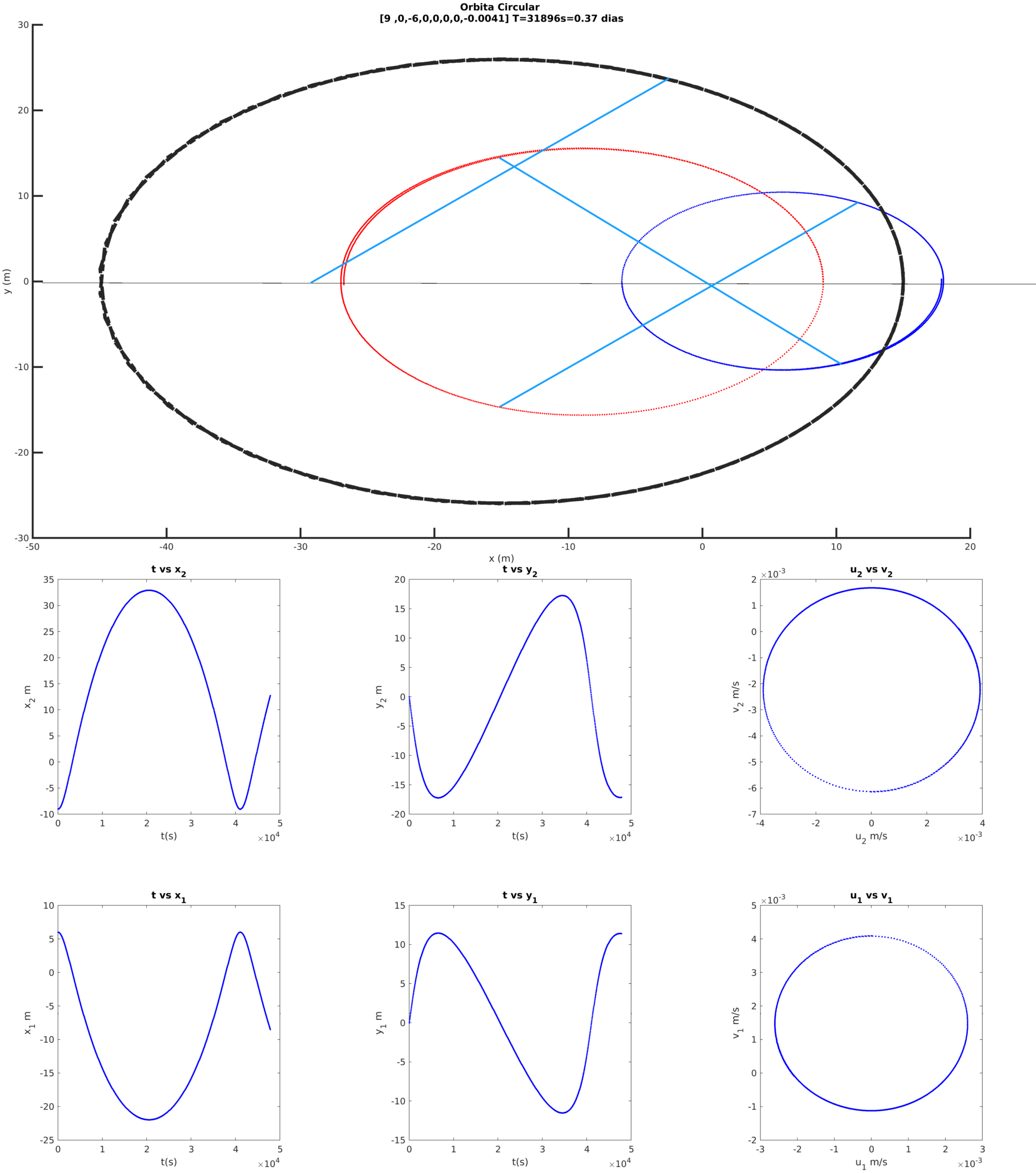
```
clear; clc; close all;
clear; clc;
syms 'm1' 'm2' 'r' 'v' 'mu' 'k' 'L' 'E' 'G' 'r' 'theta'
m1 = 2*pi*10^6;
m2 = 3*pi*10^6;
r=15;
G=6.67*10^-11;
k=G*m1*m2;
mu=m1*m2/(m1+m2);
L=mu*r*v;
e=0.5;
theta=0;
eqn0= r==L^2/(mu*k*(1+e*cos(theta)));
v=double(solve(eqn0,v));
v=v(2);
a=L^2/(mu*k)*1/(1-e^2);
a=double(subs(a,v));
T=2*pi*a^(3/2)./sqrt(G*(m1+m2));
Tdias=T*(60^2*24)^-1;

 x1= (m2*r)/(m1 + m2);
 x2= -(m1*r)/(m1 + m2);
 V1= (m2*v)/(m1 + m2);
 u1=0;
v1=V1;
 V2= -(m1*v)/(m1 + m2);
 u2=0;
v2=V2;
```

m_1 kg	m_2 kg	x_1 m	u_1 m/s	x_2 m	u_2 m/s	y_1 m	v_1 m/s	y_2 m	v_2 m/s
2*pi*10^6	3*pi*10^6	9	0	6	0	0	0.0061	0	0.0041
T	3.1896e+04s	0.3692 dias	a (m)	30			e	0.5	

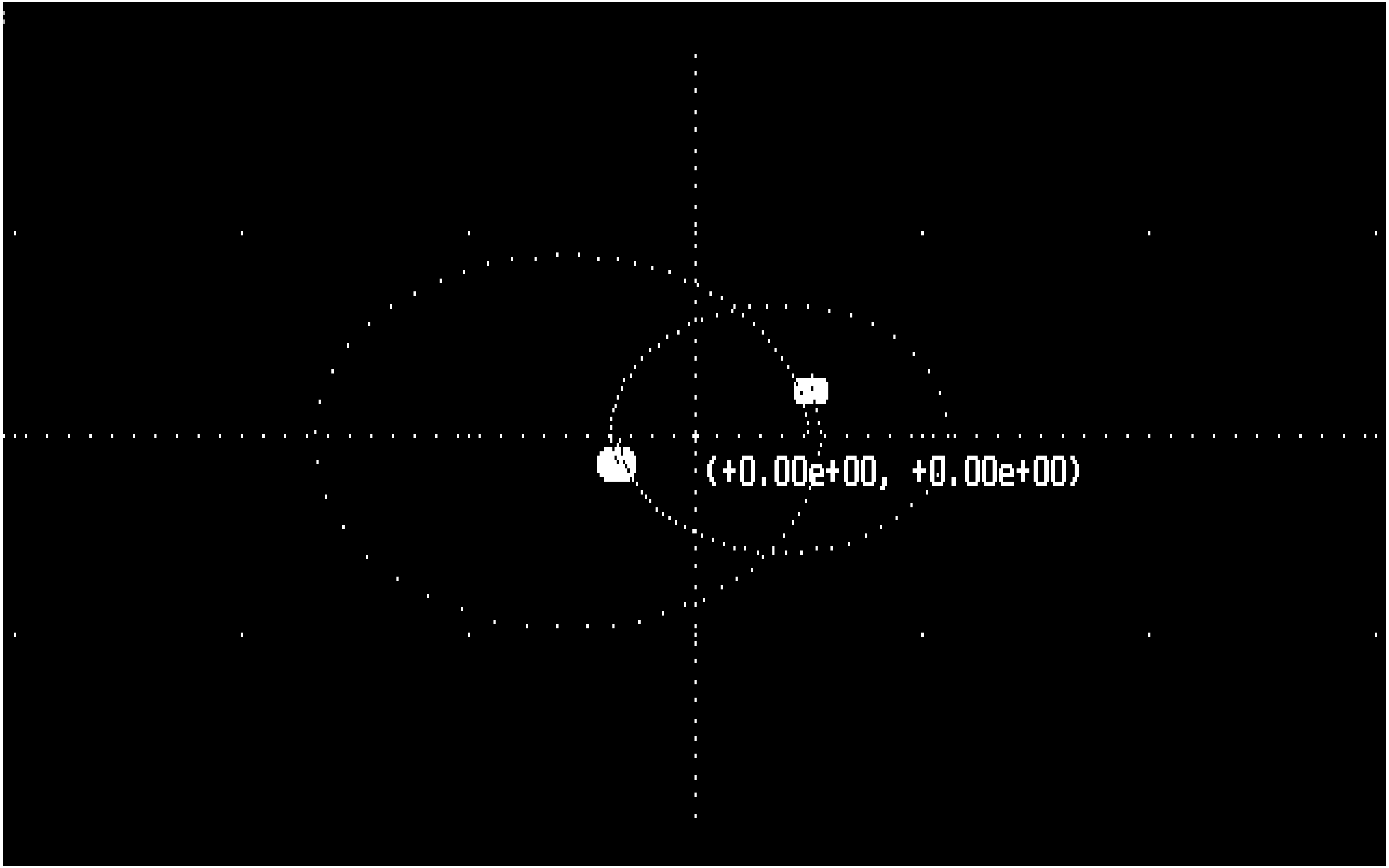
3.1 Por Matlab

Se muestra también en negro la elipse del vector relativo y su relación con el radio vector con las de las particulas por separado.



3.2 Por programa de laboratorio

Se ha usado Utility/ChangeVideoMode/CGA para que se distingan mejor las órbitas



4 Resultados experimentales vs teóricos problema de un cuerpo

4.1 Circulo

Los valores teóricos se puede decir que no presentan errores por que el radio lo he prefijado yo a 150 y el periodo viene dado por la expresión:

$$T = \frac{2\,\pi\,\sqrt{2}\,\sqrt{145}\,a^{3/2}}{3335}$$

La cual depende funcionalmente solo del radio que no posee error y el diferencial da=0 entonces. Alguien podría decir de coger como error los decimales de pi y demás que se utilizan pero eso es un error bajísimo comparado con medir con una regla en el papel. Los periodos experimentales voy a poner los que me de Gravity.

	CIRCULO		ELIPSE		ELIPSE DOS CUERPOS	
	TEORICO	EXPERIMENTAL	TEORICO	EXPERIMENTAL	TEORICO	EXPERIMENTAL
T (s)	9,27E+08	9,1E+08	2,62E+09	2,6E+09	3,19E+08	3,2 E+08
a(m)	150	150,5	300	300,5	30	30,2
e	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5
p(m)	150	150,5	150	150,2	15	15,2
p' (m)	150	150,5	450	450,2	45	45,2
b (m)	150	150,5	259.8	260	25.98	26
b	150	150,5	b	259.8	260	b

Donde se han usado las siguientes formulas:

$$\alpha = \frac{L^2}{\mu k}\,.$$

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\,.}$$

$$p = \frac{\alpha}{1+e} = a(1-e)\,, \qquad p' = \frac{\alpha}{1-e} = a(1+e)\,.$$

$$\boxed{a = \frac{\alpha}{1-e^2}\,, \qquad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-e^2}}\,.}$$

Contents