

Documentación Adicional: Modelos Estocásticos de Ecología de Bacterias

(Additional Documentation: Stochastic Models in Bacterial Ecology)

Jesús Arturo Moreno López
Tutor: Dr. Juan Pedro García Villaluenga

Julio 2019



Trabajo de Fin de Grado

Facultad de Ciencias Físicas

Universidad Complutense de Madrid

Índice

1. Demostración de la expresión (3)	1
2. Demostración de la equivalencia entre poblaciones totales de un VL con difusión y sin difusión.	1
3. Esquema del modelo LV_5species	1
4. Esquema del modelo B_BP_jeslop (con y sin adaptación del parámetro offspring)	3
5. Figuras obtenidas del análisis del código final.	5
5.1. Variando las condiciones iniciales.	5
5.2. Variando la efectividad de caza de los depredadores.	7
5.3. Variando la probabilidad de muerte de los depredadores.	9
5.4. Variando la tasa de reproducción de las presas.	11
5.5. Variando la probabilidad de muerte de las presas.	13

1. Demostración de la expresión (3)

Integrando a ambos lados en la variable espacial:

$$\begin{aligned}\frac{dN(x, t)}{dt} &= -D_N \frac{d^2 N(x, t)}{dx^2} \\ \frac{dN_{total}(t)}{dt} &= -D_N \int_0^L \frac{d^2 N(x, t)}{dx^2} dx \\ \frac{dN_{total}(t)}{dt} &= -D_N \left(\frac{dN(x, t)}{dx} \Big|_L - \frac{dN(x, t)}{dx} \Big|_0 \right)\end{aligned}$$

2. Demostración de la equivalencia entre poblaciones totales de un VL con difusión y sin difusión.

Condiciones:

- $\frac{dN(x, t)}{dx} \Big|_L = \frac{dN(x, t)}{dx} \Big|_0$
- $N(L, t) = N(0, t) = 0$

$$\frac{dN_{total}(t)}{dt} = a \int_0^L N(x, t) dx - b \int_0^L N(x, t) P(x, t) dx - D_N \left(\frac{dN(x, t)}{dx} \Big|_L - \frac{dN(x, t)}{dx} \Big|_0 \right)$$

aplicando la 1ª condición e integrando por partes

$$= aN_{total}(t) - b(N_{total}(t)P_{total}(t) - \int_0^L P_{total}(t) \frac{dN(x, t)}{dx} dx)$$

$$= aN_{total}(t) - b(N_{total}(t)P_{total}(t) - P_{total}(t)(N(L, t) - N(0, t)))$$

aplicando la 2ª condición

$$= aN_{total}(t) - bN_{total}(t)P_{total}(t)$$

3. Esquema del modelo LV_5species

La estructura del programa se puede visualizar en el siguiente esquema:

Parámetros globales:

Definimos:

- Número inicial de agentes: `num_agents`
- Proporciones iniciales de las distintas especies de presas: `r_init`, `ra_init`, `h_init`
- Proporciones iniciales de las distintas especies de depredadores: `f_init`, `w_init`
- Magnitud de movimiento de las presas / depredadores: `mr`, `mf`

- Probabilidad de reproducción de las distintas especies de presas: `rr`, `rra`, `rh`
- Probabilidad de reproducción de las distintas especies de depredadores: `rf`, `rw`
- Capacidad de carga de las presas: `nr`, `nra`, `nh`
- Probabilidad de muerte de las distintas especies de presas: `dr`, `dra`, `dh`
- Probabilidad de muerte de las distintas especies de depredadores: `df`, `dw`
- Distancia de interacción: `cd`

Inicializar:

- Crear `num_agents` agentes y asignar los distintos tipos según `r_init`, `ra_init`, `h_init`, `f_init`, `w_init`
- Asignar de forma aleatoria y con distribución uniforme (0,1) a cada agente unas coordenadas espaciales (x,y)

Actualizar:

Consiste en **micro-actualizar** tantas veces como agentes haya. Cada vez que se completa un **actualizar**, se considera que ha pasado una unidad de tiempo. Esto se repite un cierto número de veces dado por el parámetro `Tstep` (longitud temporal de la simulación).

Micro-actualizar:

- Se selecciona un agente al azar de entre todos.
- Añadimos a su posición un número dado por la distribución uniforme $(-m,m)$ donde $m = mr$ para las presas y $m = mf$ para los depredadores.
- Identifica a los agentes dentro del rango dado por `cd` y se clasifican según si son presas o depredadores.
- Si el agente que se está actualizando es una **presa**:
 - Si hay vecinos **depredadores**:
 - Si un número generado aleatoriamente entre 0 y 1 es menor que la probabilidad de muerte (`dr`, `dra`, o `dh`), se **borra la presa**.
 - Si **no** hay vecinos **depredadores**:
 - Si un número generado aleatoriamente entre 0 y 1 es menor que un compendio entre la prob. de reproducción (`rr`, `rra` o `rh`), el número total de agentes y la capacidad de carga (`nr`, `nra` o `nh`) entonces se **crea una copia de la presa**.
- Si el agente que se está actualizando es un **depredador**:
 - Si **no** hay vecinos **presas**:
 - Si un número generado aleatoriamente entre 0 y 1 es menor que la probabilidad de muerte (`dw` o `df`), el **se borra el depredador**.
 - Si hay vecinos **presas**:
 - Si un número generado aleatoriamente entre 0 y 1 es menor que la prob. de reproducción (`rw`, o `rf`) entonces **se crea una copia del depredador**.

4. Esquema del modelo B_BP_jeslop (con y sin adaptación del parámetro offspring)

Aquellos elementos del código correspondientes a la adaptación del número de fagos producidos vendrán precedidos por (*Con adaptación*) en el esquema.

Parámetros globales:

Definimos:

- Número inicial de agentes: `num_agents`
- Tamaño del recinto: `recinto`
- Proporciones iniciales de las distintas especies de presas: `r_init`, `ra_init`, `h_init`
- Proporciones iniciales de las distintas especies de depredadores: `f_init`, `w_init`
- Magnitud de movimiento de las presas / depredadores: `mr` / `mf`, `mw`
- Tiempo de espera para la reproducción: `cdr`, `cdra`, `cdh`
- Probabilidad por unidad de tiempo después del tiempo de espera: `nrr`, `nrar`, `nrh`
- Efectividad de la caza en un encuentro presa-depredador: `hunting_f`, `hunting_w`
- Fagos adicionales que nacen de la caza: `offspring_f`, `offspring_w`
- Probabilidad de muerte de las distintas especies de presas: `dr`, `dra`, `dh`
- Probabilidad de muerte de las distintas especies de depredadores: `df`, `dw`
- Distancia de interacción: `cd`

Inicializar:

- Crear `num_agents` agentes y asignar los distintos tipos según `r_init`, `ra_init`, `h_init`, `f_init`, `w_init`
- Dependiendo de si depredador o presa, añadimos distintas propiedades:
 - Si el agente es una **presa**, añadir una propiedad al agente llamada `time` que represente el tiempo restante para iniciar la reproducción e inicializarla con un valor aleatorio entre 0 y `cdr`, `cdra`, `cdh`
 - (*Con adaptación*) Si el agente es un **depredador**, añadir una propiedad al agente llamada `off` que representa los fagos producidos por caza fructuosa. Se inicializa, dependiendo de la especie de depredador, como `off = offspring_f` o `off = offspring_w`. Este valor ya no será fijo.
- Asignar, a cada agente, unas coordenadas espaciales (x,y) de forma aleatoria y con distribución uniforme (`-recinto,recinto`) .

Actualizar:

Se actualiza el estado de **todos los agentes** en orden aleatorio. Cada vez que se completa un **actualizar**, se considera que ha pasado una unidad de tiempo. **Actualizar** se repite un cierto número de veces dado por el parámetro **Tstep** (longitud temporal de la simulación).

- Se ordena aleatoriamente la lista de agentes disponibles.
- Para todos los agentes de la lista se ejecuta la dinámica de mortalidad:
 - Si el agente es un **depredador**:
 - Dependiendo de la especie de depredador se asocia un parámetro de movilidad $m = m_f, m_w$
 - Si un número aleatorio generado uniformemente entre 0 y 1 es menor que la probabilidad de muerte del depredador (d_f o d_w), se borra el agente.
 - Si el agente es una **presa**:
 - Se le asocia un parámetro de movimiento $m = m_r$
 - Si un número aleatorio generado uniformemente entre 0 y 1 es menor que la probabilidad de muerte de la presa en cuestión (d_r, d_{ra} o d_h), se borra el agente.
- Para todos los agentes de la lista se ejecuta la dinámica de movilidad:
 - Añadimos a su posición un número dado por la distribución uniforme ($-m, m$) donde $m = m_r$ para las presas y $m = m_f$ o m_w para los depredadores. Existe la opción de elegir una distribución gaussiana con media 0 y desviación $2m$.
 - Si la posición supera los límites del recinto, se coloca al agente en los bordes del recinto.
- Para todos los agentes de la lista se ejecuta la dinámica de caza y/o reproducción:
 - Si el agente que se está actualizando es un **depredador**:
 - Identifica a los vecinos dentro del rango dado por cd .
 - Si hay presas vecinas:
 - ◇ (*Con adaptación*) Si hay **más de 1 vecino depredador**, el parámetro **off** del depredador que estamos examinando **baja**. Como mínimo este valor puede ser 0.
 - ◇ (*Con adaptación*) **En caso contrario**, el parámetro **off** **sube**. Como máximo este valor puede ser 2.
 - ◇ Si un número generado aleatoriamente entre 0 y 1 es menor que la efectividad de caza ($hunting_f$ o $hunting_w$):
 - Se borra a la presa más cercana y se crean tanto agentes como dicte el parámetro global $offspring_f$ o $offspring_w$, dependiendo de la especie de agente.
 - (*Con adaptación*) Se borra a la presa más cercana y se crean tantos agentes como dicte el parámetro individual **off** del agente en cuestión.

- Si el agente que se está actualizando es una **presa**:
 - Se añade una unidad de tiempo al contador **time** asociado a las presas.
 - Si dicho parámetro **time** es mayor que el tiempo de espera para la reproducción de dicho agente (**cdr**, **cdra** o **cdh**) y un número aleatorio generado uniformemente entre 0 y 1 es menor que la probabilidad de reproducción (**nrr**, **nrrea** o **nrh**) entonces se realiza una copia del agente en cuestión.

5. Figuras obtenidas del análisis del código final.

Incluimos una medida adicional denominada *inercia*, cuyo objetivo es ser una caracterización de la dispersión de la diferencia entre las poblaciones relativa al tamaño de las poblaciones:

$$inercia = \frac{\sigma(depredadores - presas)}{|\mu(depredadores - presas)|}$$

5.1. Variando las condiciones iniciales.

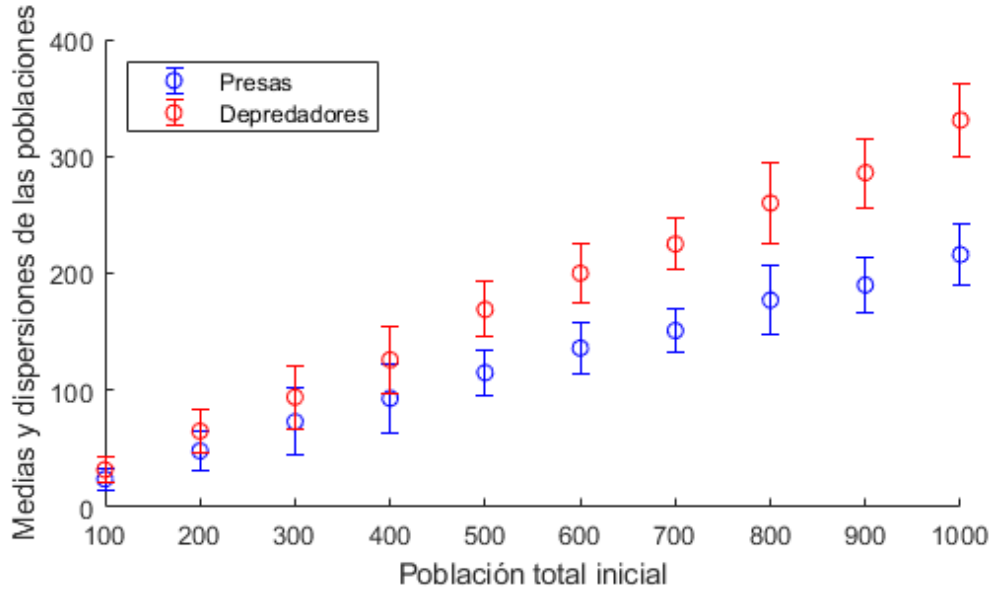


Figura 1: Media y dispersión de las poblaciones al variar el número total inicial de agentes, manteniendo la densidad inicial de agentes constante.

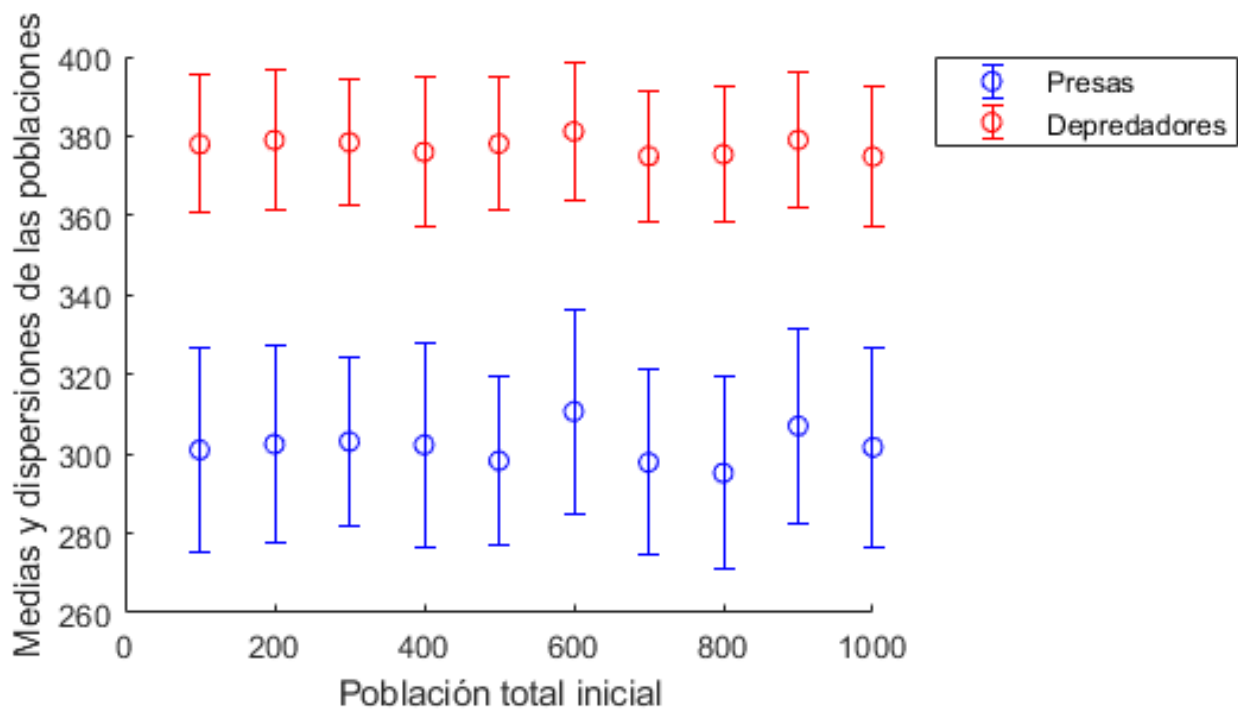


Figura 2: Media y dispersión de las poblaciones al variar el número total inicial de agentes, recinto fijo.

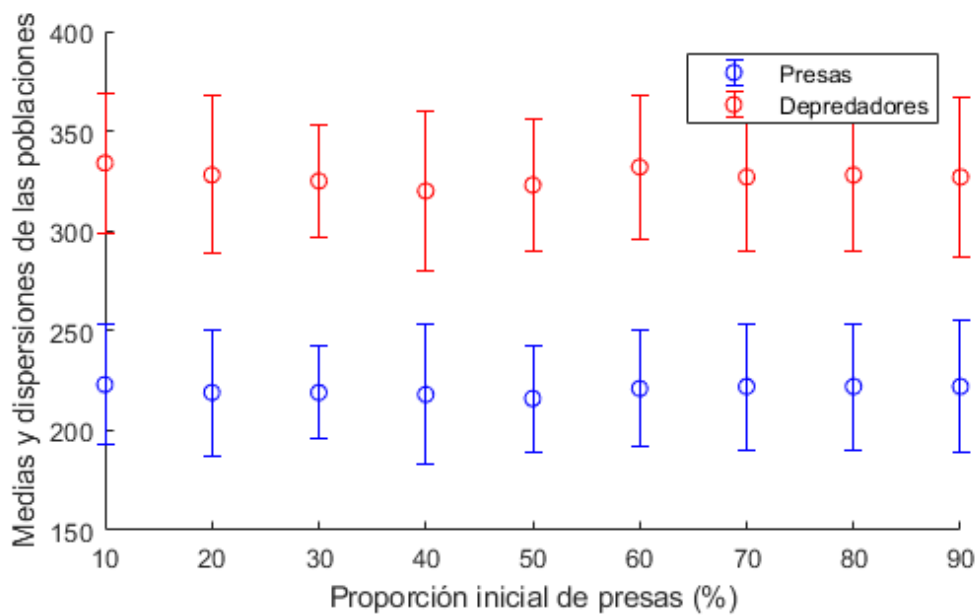


Figura 3: Media y dispersión de las poblaciones al variar la proporción presas/depredadores inicial.

5.2. Variando la efectividad de caza de los depredadores.

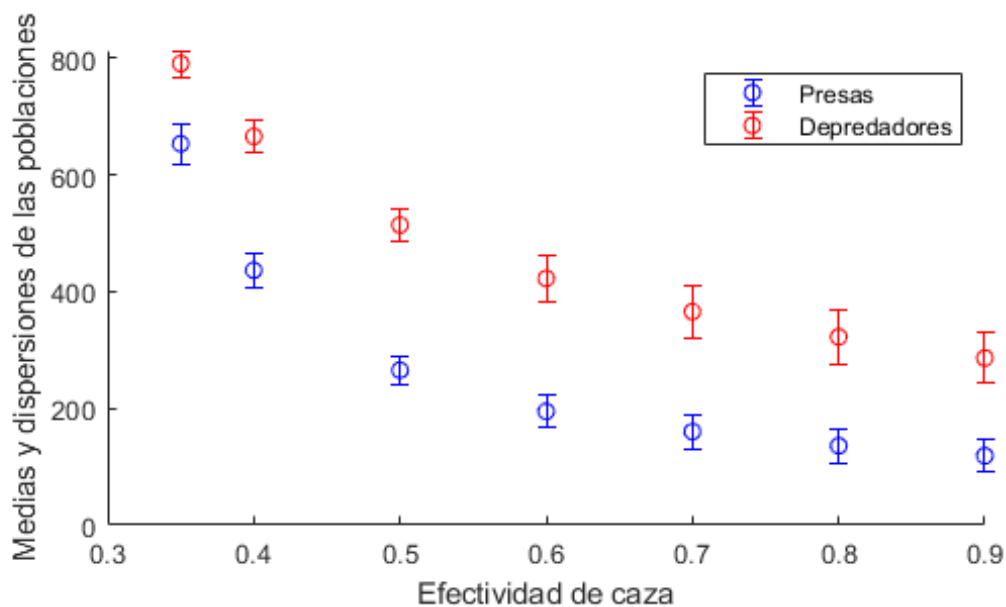


Figura 4: Evolución de las poblaciones al variar la efectividad de caza de los depredadores.

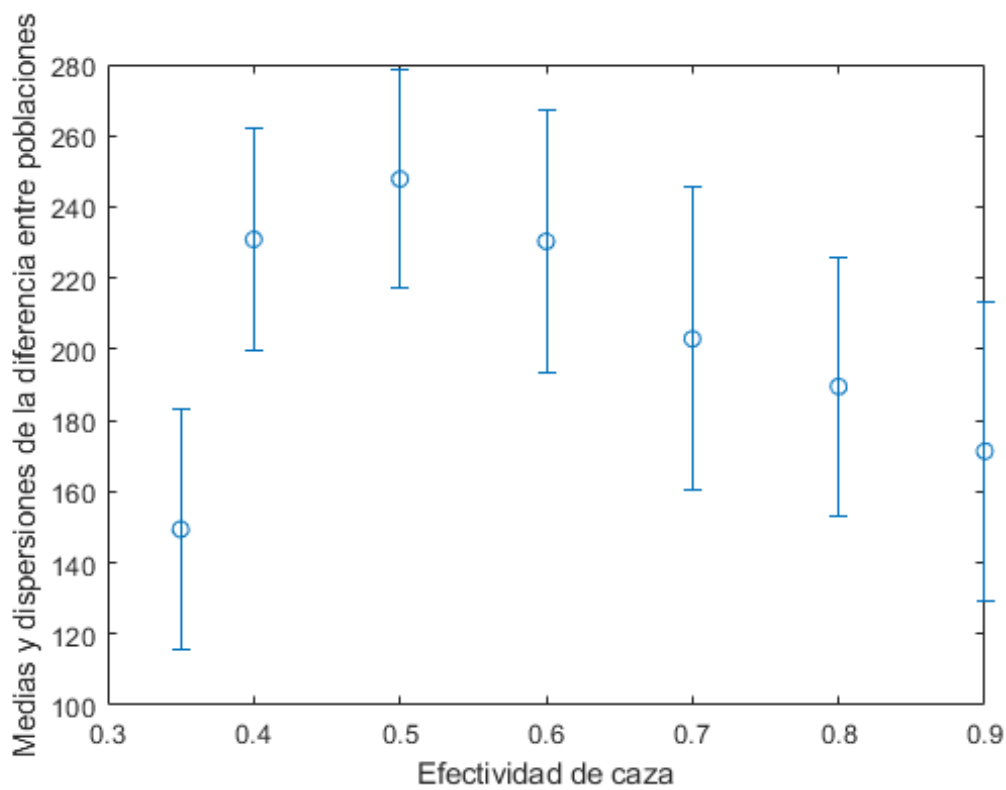


Figura 5: Evolución de la diferencia entre poblaciones al variar la efectividad de caza de los depredadores.

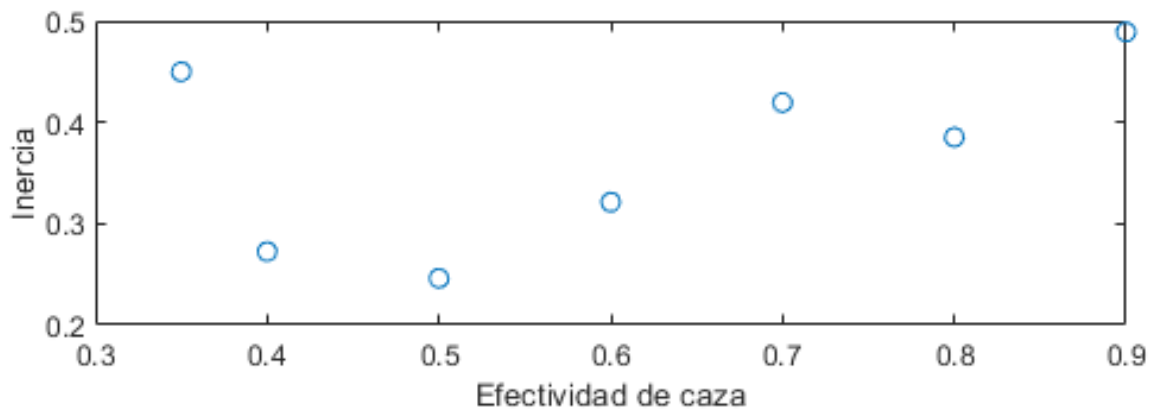


Figura 6: Evolución de la medida de inercia al variar la efectividad de caza de los depredadores.

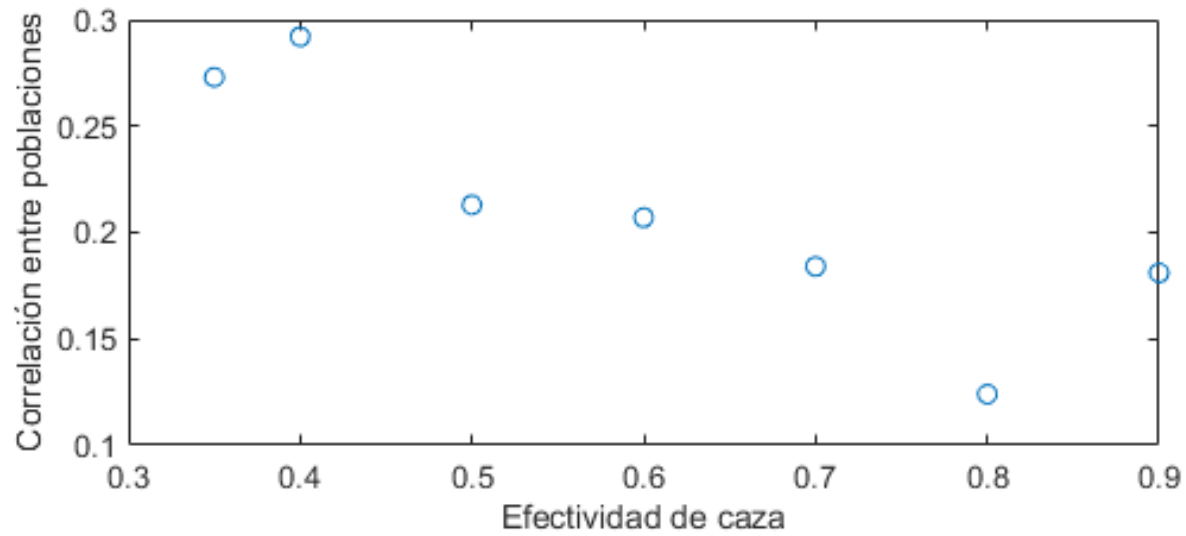


Figura 7: Evolución del coeficiente de correlación de Pearson entre las poblaciones al variar la efectividad de caza de los depredadores.

5.3. Variando la probabilidad de muerte de los depredadores.

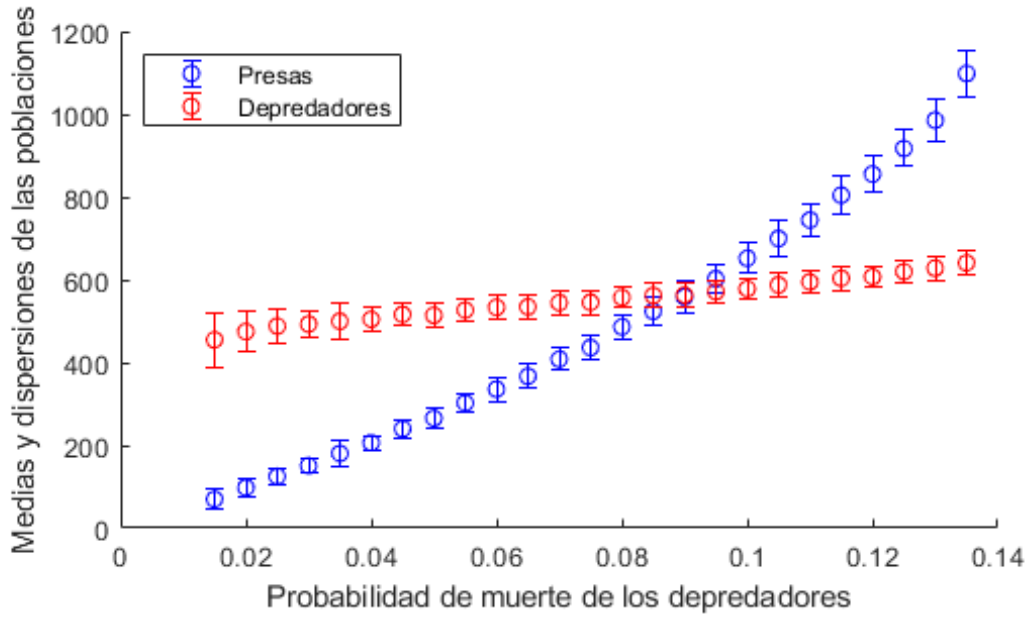


Figura 8: Evolución de las poblaciones al variar la probabilidad de muerte de los depredadores.

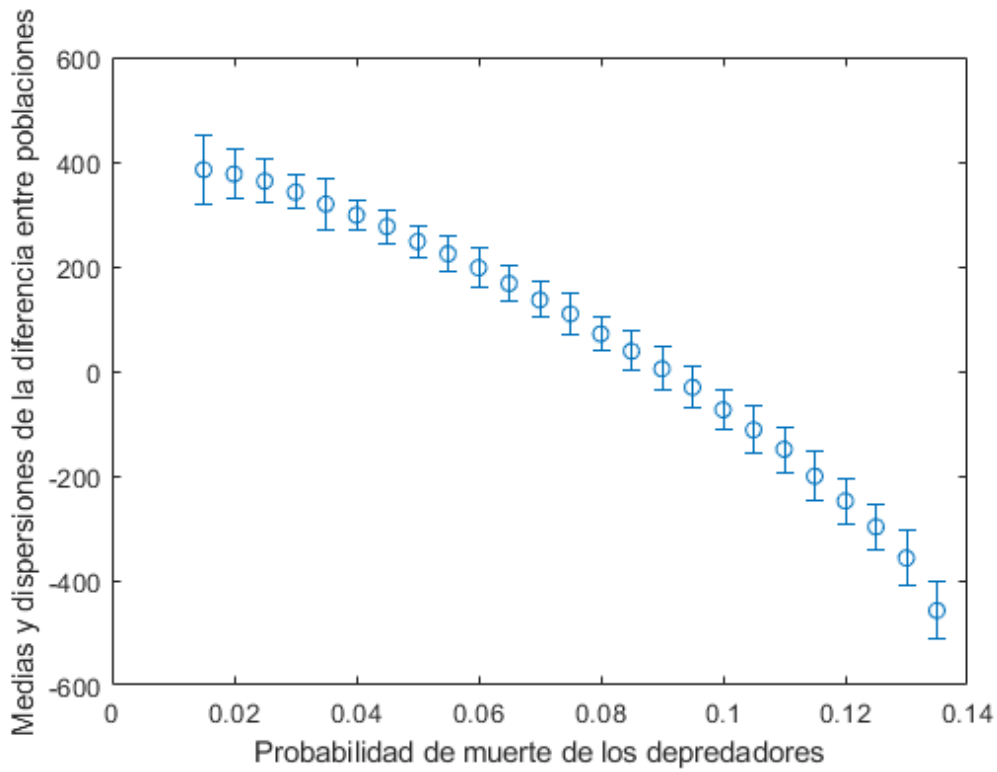


Figura 9: Evolución de la diferencia entre poblaciones al variar la probabilidad de muerte de los depredadores.

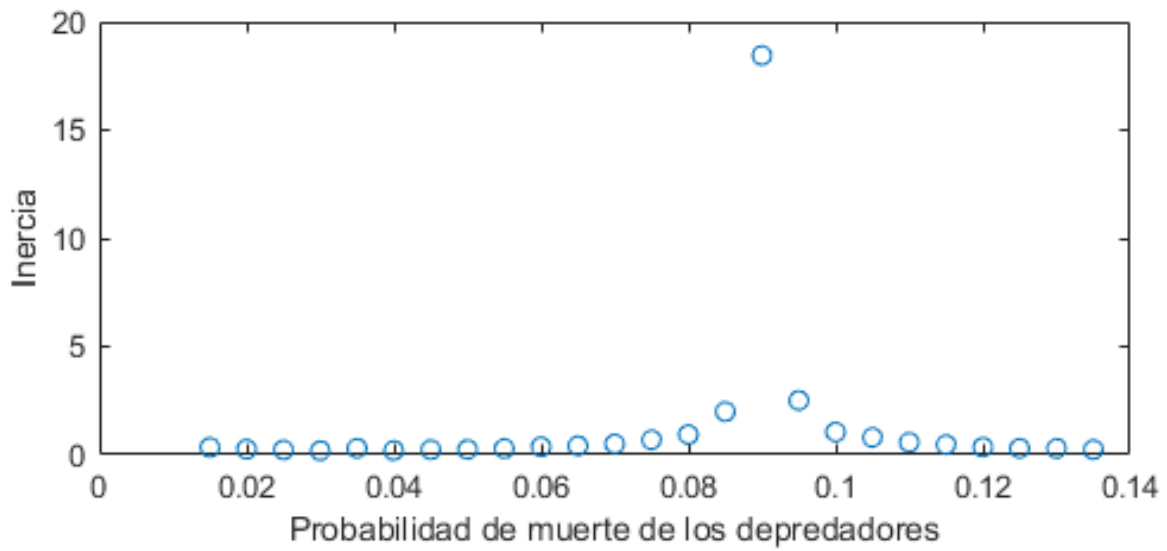


Figura 10: Evolución de la medida de inercia al variar la probabilidad de muerte de los depredadores.

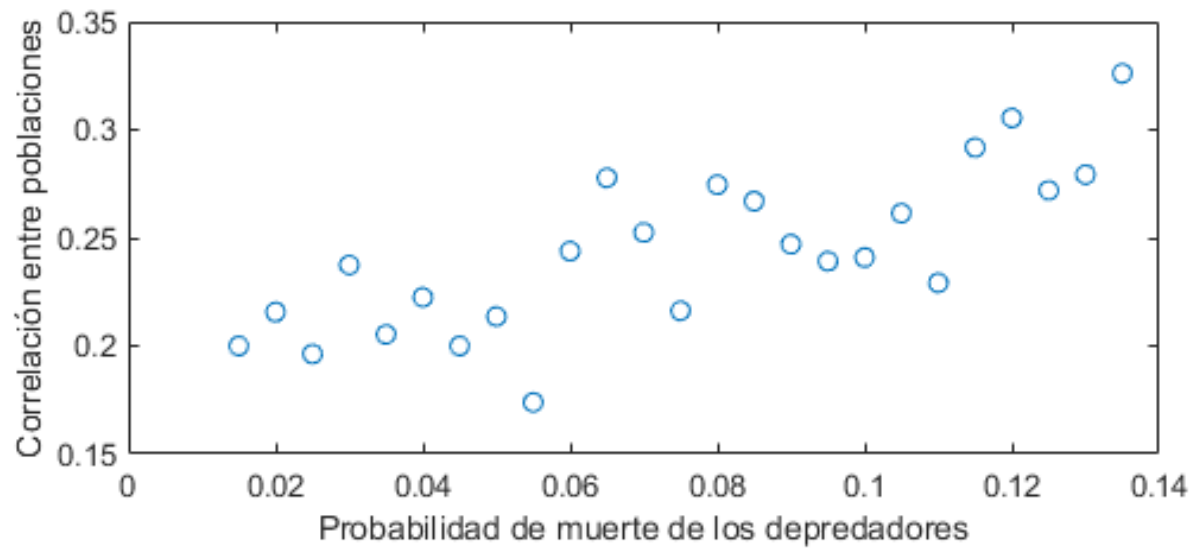


Figura 11: Evolución del coeficiente de correlación de Pearson al variar la probabilidad de muerte de los depredadores.

5.4. Variando la tasa de reproducción de las presas.

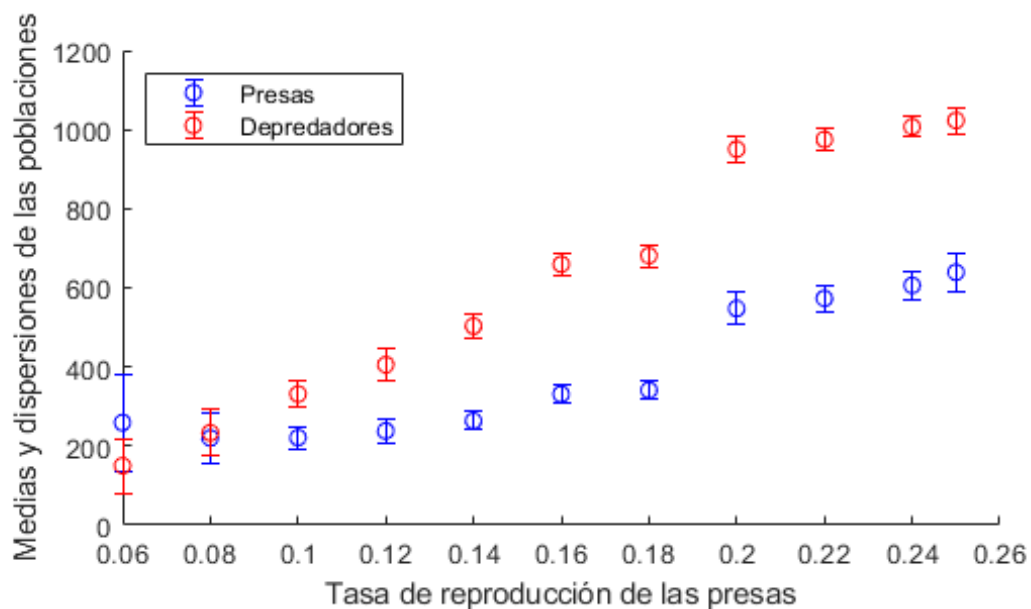


Figura 12: Evolución de las poblaciones al variar la tasa de reproducción de las presas.

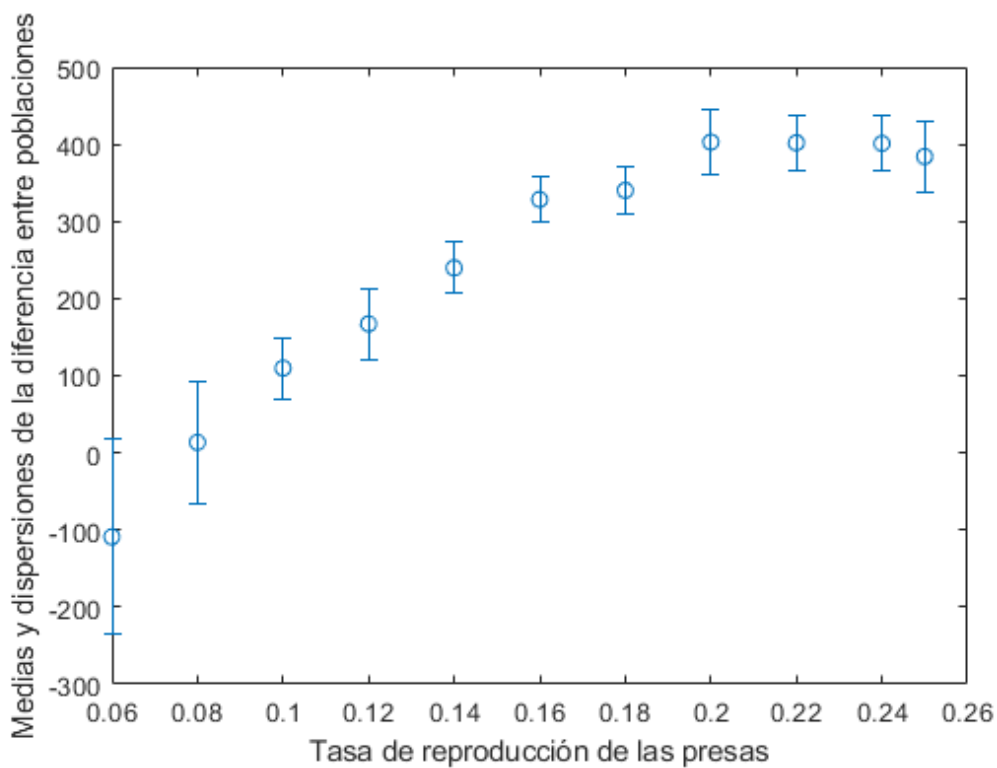


Figura 13: Evolución de la diferencia entre poblaciones al variar la tasa de reproducción de las presas.

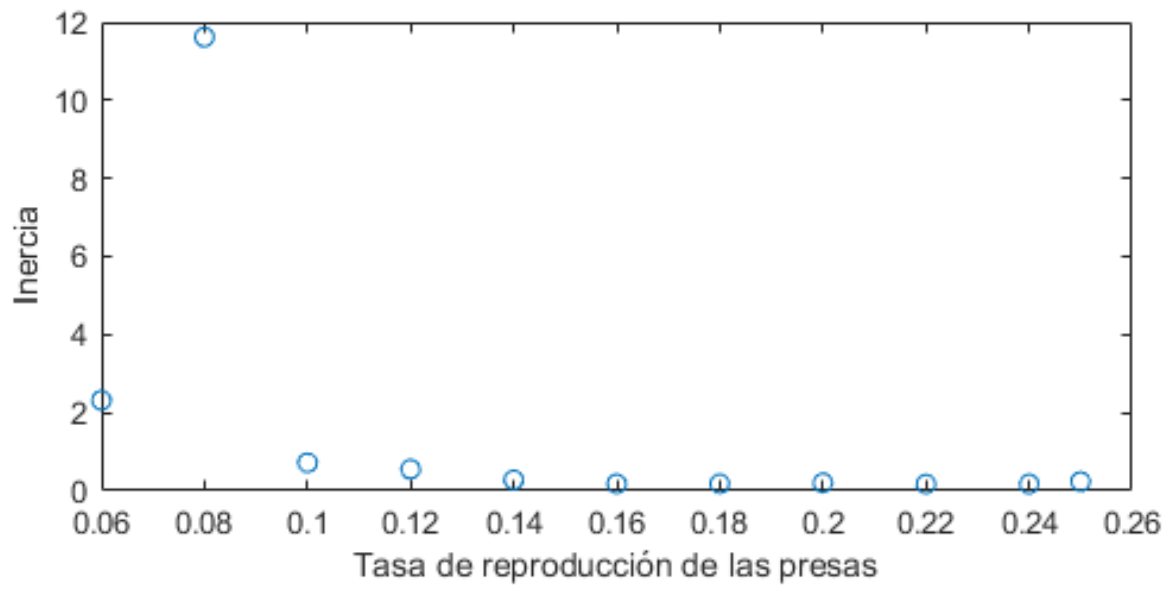


Figura 14: Evolución de la medida de inercia al variar la tasa de reproducción de las presas.

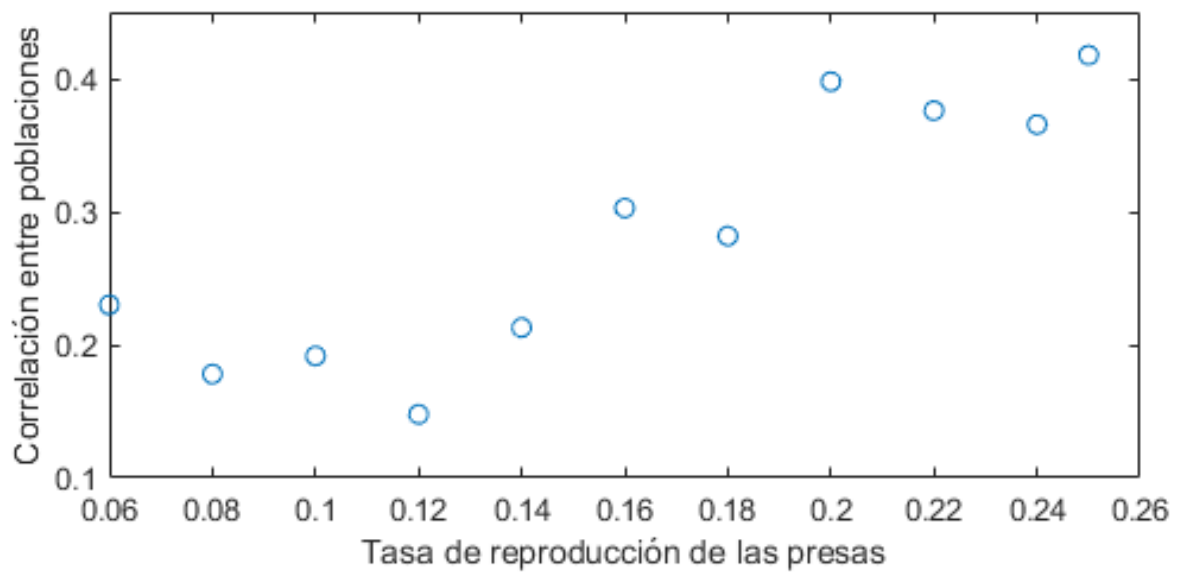


Figura 15: Evolución del coeficiente de correlación de Pearson al variar la tasa de reproducción de las presas.

5.5. Variando la probabilidad de muerte de las presas.

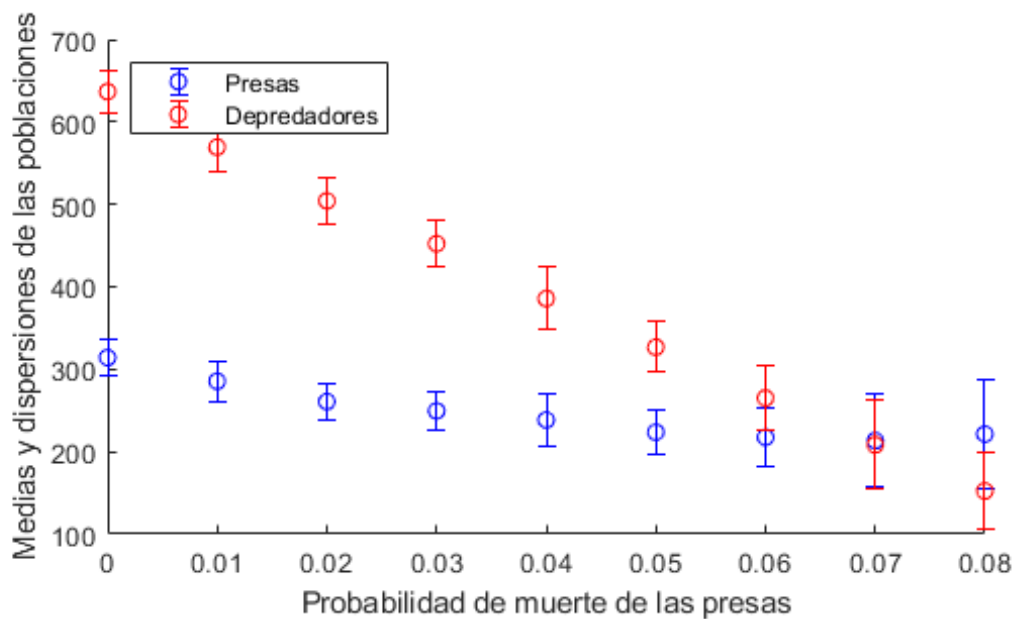


Figura 16: Evolución de las poblaciones al variar la probabilidad de muerte de las presas.

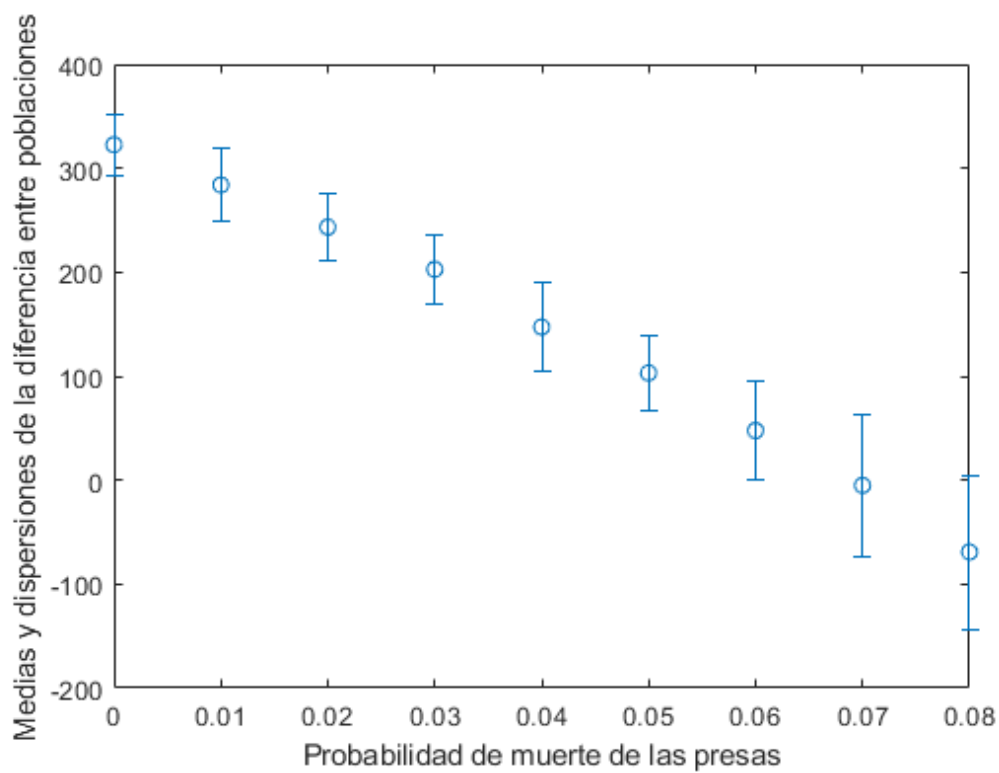


Figura 17: Evolución de la diferencia entre poblaciones al variar la probabilidad de muerte de las presas.

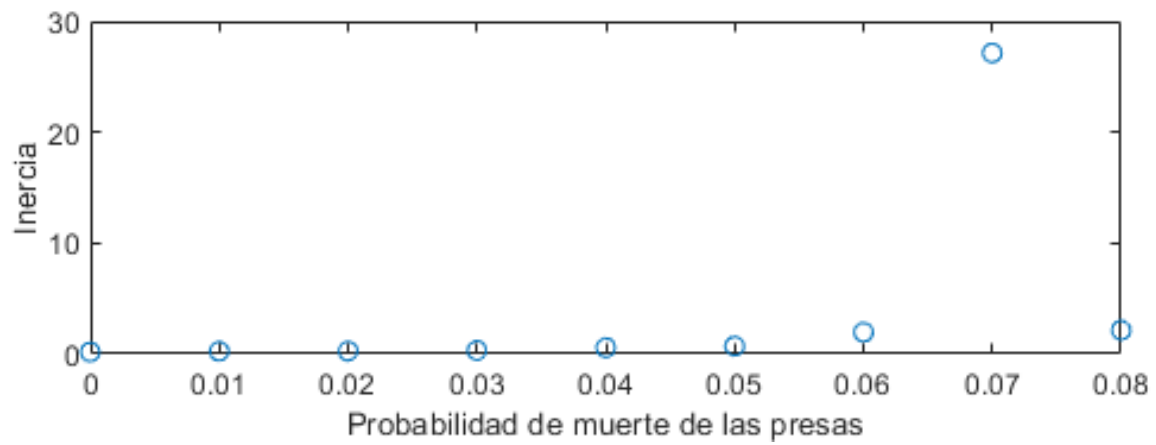


Figura 18: Evolución de la medida de inercia al variar la probabilidad de muerte de las presas.

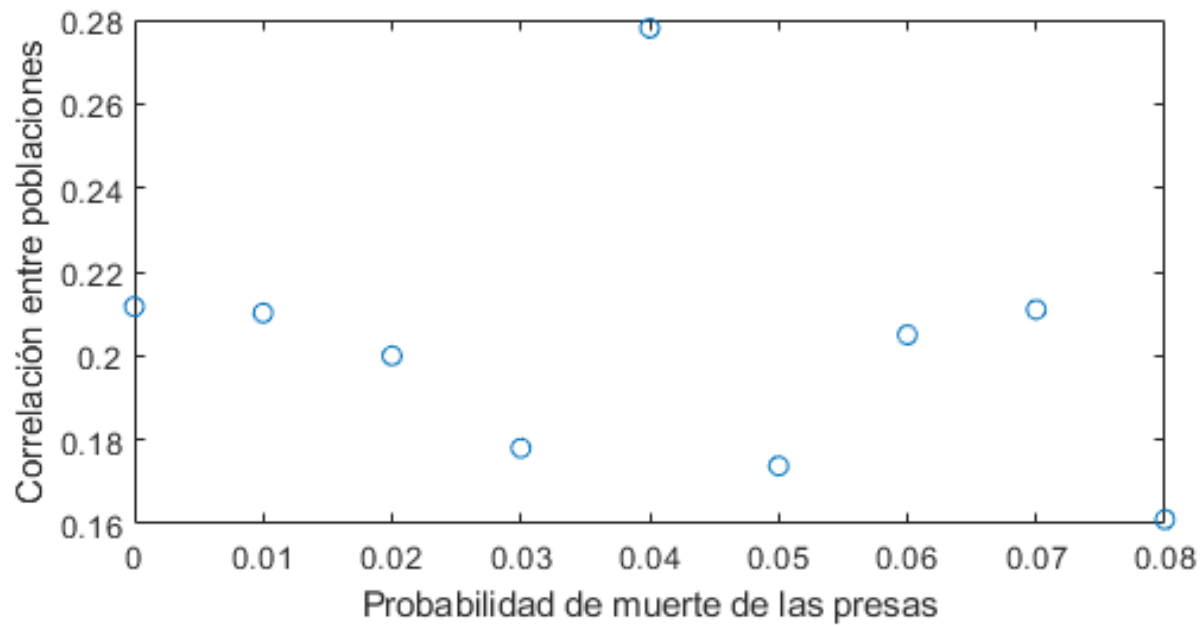


Figura 19: Evolución del coeficiente de correlación de Pearson al variar la probabilidad de muerte de las presas.