

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY

RAPPORT DE STAGE DE MASTER

Etude de modèles simples de micro nageurs

Auteur :
Jessie LEVILLAIN

Encadrants :
François ALOUGES,
Aline LEFEBVRE-LEPOT

école _____
normale _____
supérieure _____
paris–saclay _____



Un stage effectué pour la validation du M2 AMS

au sein du

CMAP (Centre de mathématiques appliquées), Ecole Polytechnique

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY

Résumé

CMAP (Centre de mathématiques appliquées), Ecole Polytechnique

M2 AMS

Etude de modèles simples de micro nageurs

par Jessie LEVILLAIN

Ce rapport traite de modèles simples de nageurs de taille microscopique se déformant dans un liquide. Les nageurs étudiés sont un premier pas vers une modélisation plus complexe de microorganismes comme des bactéries ou des spermatozoïdes, ou encore de micro-robots. Le problème en question est de comprendre la nature de la déformation du nageur, ainsi que de savoir s'il peut se déplacer, sachant que son inertie est négligeable. On veut également comprendre le lien entre les différents paramètres du modèle, et le mouvement du nageur. Le tout premier modèle est un nageur à deux degrés de liberté, que l'on peut entièrement contrôler, tandis que les autres en ont un seul, et comprennent un ou plusieurs ressorts, ou un élastique. Les modèles étudiés ici se déplacent selon une seule dimension, et les simulations ont été effectuées en langage Python.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma gratitude à mes encadrants, François Alouges et Aline Lefebvre-Lepot, pour leur investissement, la qualité de leur encadrement mais aussi la confiance qui m'ont accordée durant ce stage. Je désire aussi remercier le personnel du CMAP, qui a su m'accueillir chaleureusement, malgré le peu de temps que j'ai pu passer sur place. Enfin, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Christophe Chalons, responsable du Master AMS, qui s'est très gentiment désigné enseignant référent pour mon stage.

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
1 Introduction	1
2 Premier modèle de nageur : Le nageur à trois sphères	4
2.1 Nageur simple à trois sphères	4
2.1.1 Modélisation du problème	4
2.1.2 Contrôlabilité	5
2.1.3 Déplacement du nageur	5
2.2 Modèle élastique : Le nageur à trois sphères avec un ressort	6
2.2.1 Modélisation du problème	6
2.2.2 Déplacement du nageur	7
3 Modèle de nageur à N ressorts	8
3.1 Première approximation pour le calcul des $L_j(t)$	8
3.1.1 Bilan des forces	9
3.1.2 Calcul des ℓ_j pour ≥ 3	9
3.1.3 Calcul de $\ell_2(t)$	10
3.1.4 Simulations de la déformation du nageur	10
3.2 Nageur "continu" élastique	13
3.2.1 Formulation du problème	13
3.2.2 Caractère bien posé	14
3.2.3 Résolution du problème	15
3.2.4 Simulations de la déformation du nageur	15
4 Déplacement du nageur à N ressorts	17
4.1 Calcul direct du déplacement pour le modèle discret	17
4.2 Analogie continue	19
4.2.1 Analyse asymptotique préliminaire	19
4.2.2 Dédution d'une équation pour le modèle continu	19
4.2.3 Formule plus générale du déplacement	20
4.3 Déplacement du nageur à N ressorts en fonction de Ω	21
4.3.1 Nouvelle expression du déplacement	21
4.3.2 Simulations numériques	22
5 Conclusion	25
Bibliographie	26

Chapitre 1

Introduction

La natation à l'échelle microscopique est un sujet de recherche qui a de multiples retentissements dans plusieurs domaines des sciences. D'abord en biologie, puisque les microorganismes capables de se déplacer dans l'eau, comme les bactéries qui peuplent notre système digestif ou les spermatozoïdes qui permettent la reproduction, sont à l'origine et au maintien de la vie. Également en physique, où les principes auxquels sont confrontés ces organismes sont bien différents de ceux qui gouvernent nos capacités humaines de natation. Comme tout système dans un fluide, les nageurs microscopiques sont dans un environnement régi par l'équation de Navier-Stokes.

L'équation de Navier-Stokes est un système d'équations aux dérivées partielles permettant de décrire le mouvement d'un fluide visqueux incompressible :

$$\begin{cases} \rho(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u) - \mu\Delta u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où u et p sont la vitesse et la pression dans le fluide, ρ la densité du fluide et μ sa viscosité. La seconde équation garantit l'incompressibilité du fluide.

Lorsqu'on écrit l'équation 1.1 sous forme adimensionnée, avec L , V longueur et vitesse caractéristiques associées à l'écoulement, on fait apparaître une quantité sans dimension appelée nombre de Reynolds. Ce nombre quantifie l'importance de la contribution des effets inertiels par rapport à ceux de la viscosité dans l'écoulement, et est défini par :

$$Re = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad (1.2)$$

avec $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique du fluide.

Lorsque $Re \rightarrow 0$, on se retrouve dans un cas limite des équations de Navier-Stokes, dans lequel l'inertie devient négligeable. Ce système est alors un système d'équations linéaires, appelé équations de Stokes :

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla)u - \mu\Delta u + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans le cas de nageurs microscopiques, leur taille est d'environ $L = 1 \mu\text{m}$. On étudie leur mouvement dans l'eau, qui a une viscosité cinématique $\nu \sim 1 \text{ mm}^2/\text{s}$ à température ambiante, dans laquelle ils avancent environ de leur taille en une seconde. Dans cette situation, le nombre de Reynolds est donc de l'ordre de 10^{-6} . On est donc dans le cadre des équations de Stokes, car on est à faible Reynolds. En effet, par

comparaison, un humain qui nage dans l'eau à une vitesse d'environ 1m/s donne lieu à un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^6 .

Ces nageurs microscopiques, que nous allons étudier par la suite, ont de très nombreuses particularités et leur étude a fait l'objet de nombreux travaux depuis l'article fondateur de E.M. Purcell [1]. Il est le premier, en particulier à énoncer le "Théorème de la coquille Saint-Jacques" qui utilise la réversibilité des écoulements à bas nombre de Reynolds pour déduire l'impossibilité de la natation à cette échelle à l'aide de mouvements réciproques.

La natation se définit alors en mathématiques, comme avancer dans un fluide en se déformant de manière cyclique en l'absence de propulsion par des forces extérieures. Chaque cycle de déformation s'appelle une brassée. Une brassée peut donc être caractérisée comme un chemin fermé γ dans l'espace des formes du nageur [2]. Pour que le nageur avance, il doit avoir un déplacement non nul sur une période, soit :

$$0 \neq \Delta c = \int_0^T \dot{c}(t) dt \quad (1.4)$$

où T est la durée d'une brassée.

E.M. Purcell propose également des dispositifs simples permettant de contourner le théorème. De nombreux autres concepts ont depuis été développés (voir [3, 4] par exemple) et fonctionnant souvent sur des principes biomimétiques (cf. Le PushMePullYou d'Avron et al. [5]). De nombreux résultats ont été regroupés dans l'article de revue [6]. Tous ces systèmes se caractérisent par l'utilisation de deux dispositifs de contrôle habilement utilisés de façon synchrones.

En parallèle, plusieurs résultats de nature mathématique, faisant le lien entre le problème de la natation et la théorie du Contrôle [7], ont également permis de donner un autre éclairage, et d'exprimer les concepts sous-jacents (comme par exemple, "Est-ce que le mécanisme est capable de se propulser à faible nombre de Reynolds?") en termes de crochets de Lie de champs de vecteurs décrivant la dynamique du nageur.

Même les notions d'efficacité de la natation, qui apparaissent pour la première fois dans les ouvrages de Lighthill, ont un pendant qui s'exprime en termes de contrôle optimal. Lighthill définit l'efficacité sur une brassée par :

$$\text{Eff}^{-1} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v}{6\pi\mu L \bar{c}^2} = \frac{\int_0^1 \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v}{6\pi\mu L (\Delta c)^2} \quad (1.5)$$

Les trajectoires optimales deviennent ainsi des géodésiques dans des espaces sous-riemanniens [8, 7]. Cette approche fournit également un cadre pour mieux comprendre les brassées optimales que doit réaliser le nageur lorsqu'il a plusieurs contrôles à sa disposition. La géométrie semble, là encore, jouer un rôle important.

Dans ce rapport, nous nous intéresserons au mouvement de nageurs simples à 3 boules ou plus, se déplaçant selon une seule dimension, dans un régime de petites déformations. On s'appuiera sur des modèles simplifiés comme dans [9, 10] où l'on

prend en compte le fluide au travers d'un modèle local appelé *Resistive Force Theory* et l'élasticité par un systèmes de tiges indéformables réunies par des ressorts. Notre but est de comprendre s'ils peuvent avancer, comment, et d'optimiser leur déplacement.

Chapitre 2

Premier modèle de nageur : Le nageur à trois sphères

Le premier modèle qu'on a étudié est celui du nageur à trois sphères de [3], auquel on apporte des modifications par la suite. Ces modèles simples se déplacent selon une seule dimension.

2.1 Nageur simple à trois sphères

2.1.1 Modélisation du problème

Le modèle du nageur à trois sphères, illustré en figure 2.1, est composé de trois sphères de rayon $a = 0.05 \text{ mm}$, qui ne s'intersectent pas, reliées par des bras extensibles d'épaisseur négligeable, placé dans l'eau. Initialement, les sphères 1 et 3 sont à même distance de la sphère 2.

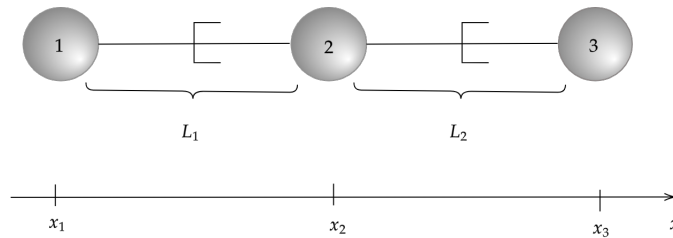


FIGURE 2.1 – Nageur simple à 3 sphères

On appelle x_1, x_2, x_3 les positions des trois sphères, et v_1, v_2, v_3 leurs vitesses respectives. Les formes possibles de ce nageur, décrites par $\xi = (L_1, L_2)$, sont dans l'espace $\mathcal{S} = (2a, +\infty)^2$. En effet, ce nageur peut seulement bouger selon l'axe des x . On appelle $c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ le centre de masse du système. Le système est ainsi entièrement décrit par sa forme $\xi = (L_1, L_2)$ et la position c du centre de masse.

On peut donc écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{c} - \frac{1}{3}(4\dot{L}_1 - \dot{L}_2) \\ v_2 &= \dot{c} - \frac{1}{3}(\dot{L}_1 - \dot{L}_2) \\ v_3 &= \dot{c} + \frac{1}{3}(4\dot{L}_2 - \dot{L}_1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

On note maintenant f_i la force hydrodynamique totale exercée sur la sphère i , on a, par linéarité des équations de Stokes :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = R(L_1, L_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où R est une matrice symétrique définie positive, connue sous le nom de matrice de résistance.

Comme le système n'a pas d'inertie, le bilan des forces sur l'ensemble du nageur donne :

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (2.3)$$

En posant $e_1 = (-1, 1, 0)^t$, $e_2 = (0, -1, 1)^t$ et $e_c = \frac{1}{3}(1, 1, 1)^t$, on en déduit une équation sur le centre de masse :

$$\dot{c} = \underbrace{\frac{R(L_1, L_2)e_c \cdot (e_c \times e_2)}{(L_1, L_2)e_c \cdot (e_1 \times e_2)}}_{V_1} \dot{L}_1 + \underbrace{\frac{R(L_1, L_2)e_c \cdot (e_c \times e_1)}{(L_1, L_2)e_c \cdot (e_1 \times e_2)}}_{V_2} \dot{L}_2 \quad (2.4)$$

2.1.2 Contrôlabilité

On peut réécrire l'équation 2.4 sous forme de système dynamique :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ c \end{pmatrix} = F_1(\xi, c) \dot{L}_1 + F_2(\xi, c) \dot{L}_2 \quad (2.5)$$

avec $F_1(\xi, c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ V_1(t) \end{pmatrix}$ et $F_2(\xi, c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ V_2(t) \end{pmatrix}$ des champs de vecteurs analytiques en

(ξ, c) [11], et \dot{L}_1 et \dot{L}_2 sont les deux degrés de liberté du système. On a donc un système commandé affine, dans lequel les contrôles représentent la vitesse des changements de forme du nageur. Ce système est globalement contrôlable, comme prouvé dans [11], ce qui fait que le nageur peut, en bougeant ses bras, se rendre n'importe où sur l'axe des x .

2.1.3 Déplacement du nageur

Le nageur à trois sphères se déplace en effectuant des brassées dans le fluide, donc une forme de mouvement périodique. Une brassée peut être définie comme un chemin fermé γ dans l'espace des formes du nageur [2]. Pour que le nageur avance, il doit avoir un déplacement non nul sur une période. En se basant sur la formule de la section 1.4, on obtient que le nageur avance si et seulement si :

$$0 \neq \Delta c = \int_0^T (V_1(t) \dot{L}_1(t) + V_2(t) \dot{L}_2(t)) dt \quad (2.6)$$

où T est la durée d'une brassée.

Par la suite, on cherchera donc à maximiser ce déplacement au cours d'une période, ou bien à minimiser l'énergie dépensée pour un déplacement donné, en utilisant la formule de l'efficacité de Lighthill comme en section 1.5.

2.2 Modèle élastique : Le nageur à trois sphères avec un ressort

Le modèle du nageur à deux bras est ensuite modifié pour remplacer le deuxième bras par un ressort de raideur k , comme illustré en figure 2.2, qui a alors un mouvement passif. On choisit ainsi de contrôler seulement le mouvement du premier bras pour induire un mouvement du deuxième, et permettre le déplacement du système. On a donc un seul degré de liberté dans ce système. Ce système est étudié dans [12].

2.2.1 Modélisation du problème

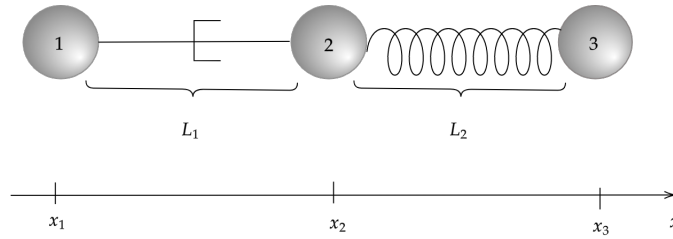


FIGURE 2.2 – Nageur à 1 ressort

Comme dans [3], on utilise l'approximation $\frac{a}{L_i} \ll 1$ pour approcher la matrice de résistance $R(L_1, L_2)$ et obtenir les relations linéaires suivantes entre forces hydrodynamiques et vitesses :

$$v_1 = \frac{f_1}{6\pi\mu a} + \frac{f_2}{4\pi\mu L_1} + \frac{f_3}{4\pi\mu(L_1 + L_2)}, \quad (2.7)$$

$$v_2 = \frac{f_1}{4\pi\mu L_1} + \frac{f_2}{6\pi\mu a} + \frac{f_3}{4\pi\mu L_2}, \quad (2.8)$$

$$v_3 = \frac{f_1}{4\pi\mu(L_1 + L_2)} + \frac{f_2}{4\pi\mu L_2} + \frac{f_3}{6\pi\mu a}. \quad (2.9)$$

Comme précédemment, le bilan des forces donne $f_1 + f_2 + f_3 = 0$, et on observe que $\dot{L}_1 = v_2 - v_1$, $\dot{L}_2 = v_3 - v_2$. De plus, un bilan des forces sur le sous-système constitué de la sphère 3 nous donne :

$$k(L_2 - \ell_2) - f_3 = 0 \quad (2.10)$$

où ℓ_2 est la longueur du ressort au repos. En utilisant les équations précédentes, on peut exprimer \dot{L}_2 en fonction de L_2 , L_1 , et \dot{L}_1 . En effet, on trouve :

$$\dot{L}_2 = \frac{k}{\mu\Lambda} G(L)(L_2 - \ell_2) - F(L)\dot{L}_1 \quad (2.11)$$

où Λ est une longueur caractéristique qui représente la taille du nageur, $L = (L_1, L_2)$ et

$$F(L) = \left(\frac{1}{2L_1} - \frac{1}{3a} \right)^{-1} \left(\frac{1}{4L_1} + \frac{1}{4L_2} - \frac{1}{4(L_1 + L_2)} - \frac{1}{6a} \right),$$

$$G(L) = \frac{\Lambda}{\pi} \left[\left(\frac{1}{3a} - \frac{1}{2L_2} \right) + \left(\frac{1}{4L_1} + \frac{1}{4L_2} - \frac{1}{4(L_1 + L_2)} - \frac{1}{6a} \right)^2 \left(\frac{1}{2L_2} - \frac{1}{3a} \right)^{-1} \right].$$

2.2.2 Déplacement du nageur

On a obtenu une EDO sur L_2 , et on étudie le cas où L_1 subit une déformation périodique de la forme

$$L_1(t) = \ell_1(1 + \varepsilon \sin(\omega t)), \quad (2.12)$$

avec $\omega, \varepsilon > 0$, et ε est petit, soit dans le cadre de petites déformations. On s'assure de plus que

$$\varepsilon < \varepsilon_{max} = 1 - 2a/\ell_1, \quad (2.13)$$

de manière à ce que les sphères ne se superposent jamais. Enfin, un choix naturel pour la longueur caractéristique est $\Lambda = \ell_1 + \ell_2$.

On cherche maintenant à étudier le déplacement d'un tel nageur. La vitesse V_0 du nageur est la moyenne des vitesses de toutes les sphères, soit $V_0 = v_1 + v_2 + v_3$. Donc si on note ξ_i la position de la sphère i , et $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, on a $\dot{\xi} = V_0$. On reprend l'équation 2.11 ce qui donne finalement :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} L_2 \\ \xi \end{pmatrix} = H(t, L_2, \xi) \quad (2.14)$$

Dans [12], une intégration numérique de l'équation précédente permet d'observer le déplacement en fonction de la valeur des différents paramètres $(a, \omega, \Lambda, \dots)$ du modèle, et donc d'optimiser ce dernier.

Chapitre 3

Modèle de nageur à N ressorts

Après avoir étudié le nageur à trois boules [3] avec un ressort comme dans le modèle de [12], on étend ce modèle en rajoutant plusieurs ressorts à notre nageur, comme en figure 3.1, pour obtenir un nageur à $N \in \mathbb{N}^*$ ressorts.

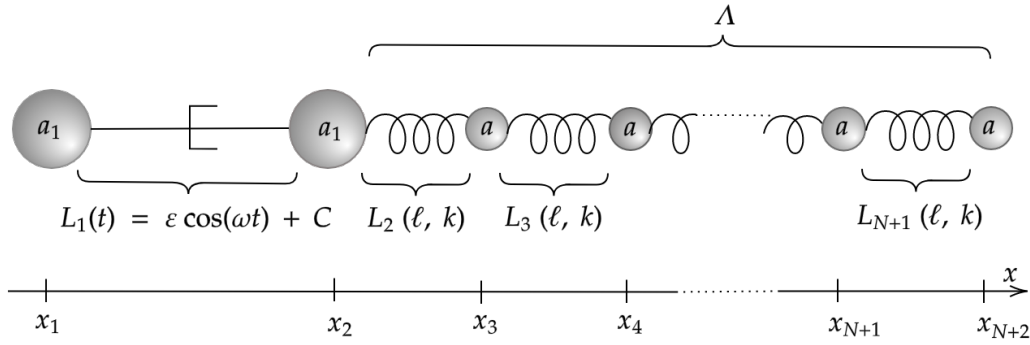


FIGURE 3.1 – Nageur à N ressorts

Le premier bras du nageur est un vérin dont la longueur est contrôlée par $L_1(t) = \varepsilon \cos(\omega t) + C$, avec $\varepsilon, C > 0$ et $\varepsilon \ll C$, et qui effectue donc des petites variations périodiques de longueur d'amplitude ε . Ce bras est attaché à deux boules de taille fixe a_1 . Les boules suivantes dans le nageur sont de taille $a = \tilde{a}/N$, avec \tilde{a} fixé. Entre deux boules, après le premier bras, on a des ressorts de raideur $k = \tilde{k}N$ avec \tilde{k} fixé, et dont la longueur pour un ressort i est déterminée par $L_j(t) = \frac{\ell_j(t)}{N} + \ell$, avec $\ell_j(t)/N$ le petit mouvement du ressort et $\ell = \frac{\Lambda}{N} \gg a$ la longueur d'un ressort au repos.

On pose $L_{N+2} = 0$, qui est un $(N + 1)$ -ième ressort fictif, et on note $V_j = \dot{x}_j$, la vitesse de la boule j .

3.1 Première approximation pour le calcul des $L_j(t)$

Dans un premier temps, on cherche à calculer une approximation des $L_j(t)$, dans le cas où les forces hydrodynamiques sont linéaires par rapport aux vitesses des sphères :

$$\begin{cases} f_j^F = 6\pi\mu a V_j & \text{pour } j \geq 3 \\ f_j^F = 6\pi\mu a_1 V_j & \text{pour } j = 1, 2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Par ailleurs, pour le calcul des ℓ_j , on passera en complexe et on écrira $L_1(t) = \varepsilon e^{i\omega t}$. Il suffira par la suite de prendre les parties réelles des solutions calculées ci-dessous.

3.1.1 Bilan des forces

On identifie les forces au sein du système, puis on effectue un bilan des forces sur plusieurs sous-systèmes.

Pour les forces de rappel des ressorts, on a :

$$\begin{cases} f_j^R = k(L_{j-1} - L_j) = k \frac{\ell_{j-1} - \ell_j}{N} \text{ pour } j \geq 3 \\ f_2^R = -k(L_2 - \ell) = -k \frac{\ell_2}{N}. \end{cases} \quad (3.2)$$

De plus, pour $1 \leq j \leq N+1$, on a $\dot{L}_j = V_{j+1} - V_j$. On effectue ensuite un bilan des forces sur chaque boule j pour $j \geq 2$, et un bilan global sur tout le système. Comme on est à faible Reynolds, le système n'a pas d'inertie et on obtient donc :

$$\begin{cases} f_1^F + \dots + f_{N+2}^F = 0 \text{ sur tout le système,} \\ f_j^R = f_j^F \text{ pour } j \geq 3. \end{cases}$$

Ceci nous permet de calculer f_1^F et f_2^F , en effet, on a :

$$\begin{cases} 6\pi\mu a_1 \dot{L}_1 = 6\pi\mu a_1 (V_2 - V_1) = -(f_1^F - f_2^F) \\ f_1^F + f_2^F = -(f_3^R + \dots + f_{N+2}^R) = -k((L_2 - \ell) - (L_{N+2} - 0)) = -k\ell_2/N, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} f_1^F = \frac{1}{2}(-6\pi\mu a_1 \dot{L}_1 - \tilde{k}\ell_2) \\ f_2^F = \frac{1}{2}(6\pi\mu a_1 \dot{L}_1 - \tilde{k}\ell_2). \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1.2 Calcul des ℓ_j pour $j \geq 3$

On suppose dans un premier temps que L_2 est connu, et de la forme $\ell_2 = b_d e^{i\omega t}$. On écrit ensuite les équations sur les L_j pour $3 \leq j \leq N+1$, à partir des formules précédentes :

$$\dot{L}_j = \frac{k}{6\pi\mu a} (L_{j-1} - 2L_j + L_{j+1}) \quad (3.4)$$

On pose $K = \frac{k\ell^2}{6\pi\mu a} = \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu \tilde{a}}$ et on déduit de l'équation 3.4 :

$$\dot{\ell}_j = \frac{K}{\ell^2} (\ell_{j-1} - 2\ell_j + \ell_{j+1}) \quad (3.5)$$

On cherche ℓ_j sous la forme $\ell_j(t) = \gamma^j e^{i\omega t}$. En injectant cette expression dans l'équation 3.5, on a :

$$i\omega\gamma = \frac{K}{\ell^2} (1 - 2\gamma + \gamma^2) \quad (3.6)$$

C'est une équation du second degré en γ , de déterminant $\Delta = \frac{-\omega^2 \ell^4}{K^2} + \frac{2i\omega \ell^2}{K}$. On trouve donc comme solutions :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{i\omega \ell^2 / K + 2 + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \gamma_2 = \frac{i\omega \ell^2 / K + 2 - \sqrt{\Delta}}{2}, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $|\gamma_1| > 1$ et $|\gamma_2| < 1$. On peut donc écrire $\ell_j(t) = e^{i\omega t} (\alpha_d \gamma_1^j + \beta_d \gamma_2^j)$.

On utilise ensuite les conditions sur ℓ_2 et ℓ_{N+2} pour déterminer α_N et β_N . On a :

$$\begin{cases} \ell_2(t) = b_d e^{i\omega t} = e^{i\omega t}(\alpha_d \gamma_1^2 + \beta_d \gamma_2^2) \\ \ell_{N+2}(t) = e^{i\omega t}(\alpha_d \gamma_1^{N+2} + \beta_d \gamma_2^{N+2}) = 0, \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} b_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 & \gamma_2^2 \\ \gamma_1^{N+2} & \gamma_2^{N+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_d \\ \beta_d \end{pmatrix}.$$

On a finalement

$$\alpha_d = \frac{-\gamma_2^{N+2} b_d}{\gamma_1^{N+2} \gamma_2^2 - \gamma_2^{N+2} \gamma_1^2}, \quad \beta_d = \frac{\gamma_1^{N+2} b_d}{\gamma_1^{N+2} \gamma_2^2 - \gamma_2^{N+2} \gamma_1^2}. \quad (3.8)$$

3.1.3 Calcul de $\ell_2(t)$

On reprend les expressions trouvées au paragraphe 3.1.2 pour les ℓ_j , et on le réinjecte dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_2 &= V_3 - V_2 = \frac{1}{6\pi\mu a} f_3^F - \frac{1}{6\pi\mu a_1} f_2^F \\ &= -\frac{1}{2} \dot{\ell}_1 + \frac{k}{6\pi\mu a} \frac{\ell_3 - \ell_2}{N} + \frac{k}{12\pi\mu a_1} \frac{\ell_2}{N}. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\dot{\ell}_2 = -\frac{1}{2} N \dot{\ell}_1 + \frac{k}{6\pi\mu a} (\ell_3 - \ell_2) + \frac{k}{12\pi\mu a_1} \ell_2. \quad (3.9)$$

Or, on a que $\ell_3(t) = e^{i\omega t}(\alpha_d \gamma_1^3 + \beta_d \gamma_2^3) = b_d \left[\frac{\gamma_1^{N+2} \gamma_2^3 - \gamma_2^{N+2} \gamma_1^3}{\gamma_1^{N+2} \gamma_2^2 - \gamma_2^{N+2} \gamma_1^2} \right] e^{i\omega t}$. On pose donc $z_3 = \frac{\gamma_1^{N+2} \gamma_2^3 - \gamma_2^{N+2} \gamma_1^3}{\gamma_1^{N+2} \gamma_2^2 - \gamma_2^{N+2} \gamma_1^2}$ et on a :

$$b_d i\omega = -\frac{1}{2} \varepsilon i\omega N + \frac{k}{6\pi\mu a} b_d (z_3 - 1) + \frac{k b_d}{12\pi\mu a_1}$$

Finalement,

$$b_d = -\frac{i\omega \varepsilon 3\pi\mu a_1 N}{6\pi\mu a_1 i\omega - k/2 + \frac{k a_1}{a} (1 - z_3)}. \quad (3.10)$$

3.1.4 Simulations de la déformation du nageur

Les solutions des équations précédentes ont ensuite été implémentées afin d'observer la déformation du nageur sur une période. Sauf lorsque d'autres valeurs sont précisées, les tests ont été effectués avec les valeurs du tableau 3.1.

Tout d'abord, en figure 3.2, on peut voir l'amplitude de l'oscillation de chaque ressort en fonction de sa position dans le système du nageur, ainsi que le déphasage de ce mouvement par rapport à celui du vérin. On observe une atténuation du mouvement vers les derniers ressorts du nageur, tandis que le déphasage évolue de façon cyclique entre $-\pi$ et π . Le dernier ressort ne bouge jamais, comme c'est un ressort fictif permettant de calculer les conditions aux limites du modèle.

Sur les figures 3.3 et 3.4, on observe respectivement les mouvements de l'ensemble des ressorts, du premier et du dernier (non-fictif) en fonction du mouvement du bras avec un vérin, pour différentes fréquences d'oscillation ω , tous les autres paramètres

Λ	$4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
a	$1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
a_1	$1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
k	$1 \cdot 10^{-8} \text{ Nm}^{-1}$
μ	$8.9 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
C	$1 \cdot 10^{-50} \text{ m}$
ε	0.7

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres utilisés dans les simulations numériques. μ est la viscosité dynamique de l'eau à 25°C .

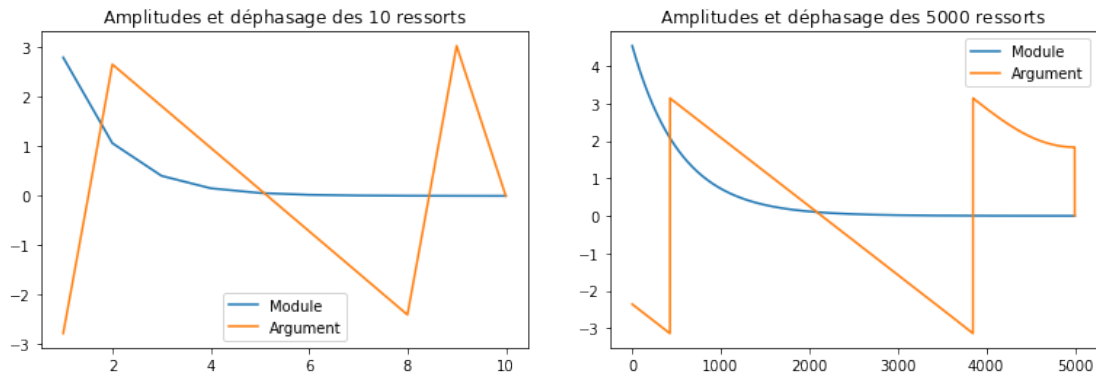


FIGURE 3.2 – Amplitudes et déphasages de chaque ressort du nageur pour 10 et 5000 ressorts

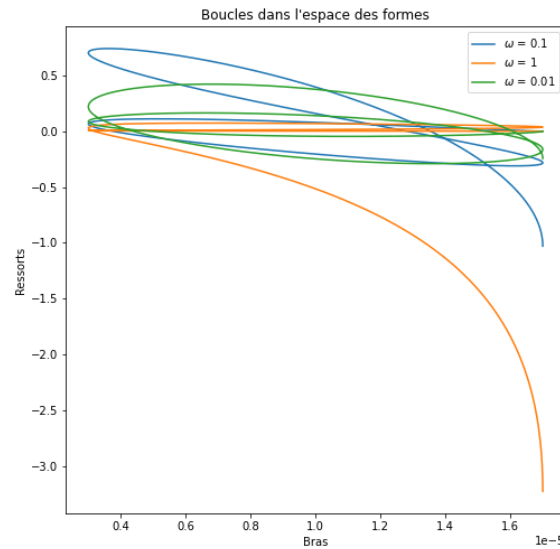
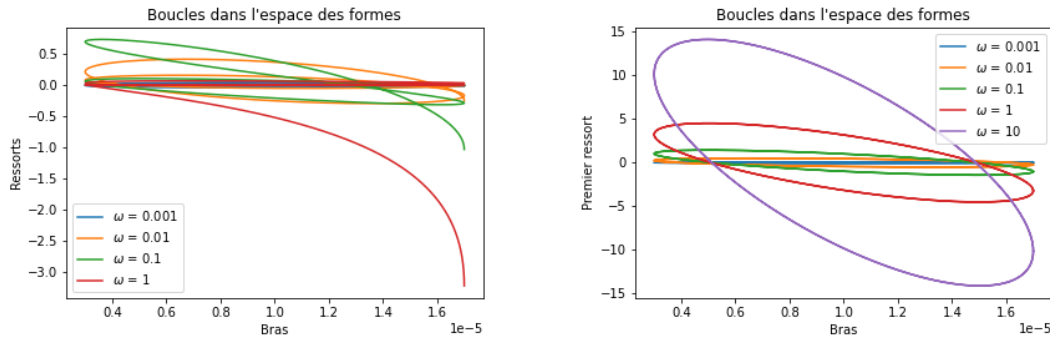


FIGURE 3.3 – Evolution de la forme du vérin et de l'ensemble des 1000 ressorts du nageur pour différentes pulsations ω

étant fixés. La distance parcourue par le nageur est proportionnelle à l'aire de la boucle correspondante. Pour l'ensemble des ressorts, la plus grande boucle semble être celle obtenue pour la plus petite fréquence, $\omega = 0.01$. Pour le premier ressort, une



Mouvement du vérin et du premier ressort Mouvement du vérin et du dernier ressort

FIGURE 3.4 – Evolution de la forme du vérin et des ressorts du nageur à 1000 ressorts pour différentes pulsations ω

fréquence entre 0.1 et 0.01 semble également être idéale. Cependant, le dernier ressort a le plus grand mouvement, dans nos tests, lorsque $\omega = 10$, soit pour la plus haute fréquence. En fait, lorsque le vérin bouge trop rapidement, les premiers ressorts n'ont pas le temps de se déformer, et ainsi ce sont les ressorts de l'autre bout du nageur qui s'étirent. Inversement, lorsque la fréquence est idéale pour que les premiers ressorts se déforment, l'onde est partiellement absorbée et les ressorts du bout du nageur se déforment moins.

Enfin, la figure 3.5 montre la déformation de chaque ressort d'un nageur à 5000 ressorts au cours du temps, durant une période. On observe bien la déformation périodique sur les premiers ressorts, ainsi que son atténuation sur la fin du nageur. Si on regarde seulement une animation des 100 derniers ressorts, on retrouve la même figure, à plus petite échelle.

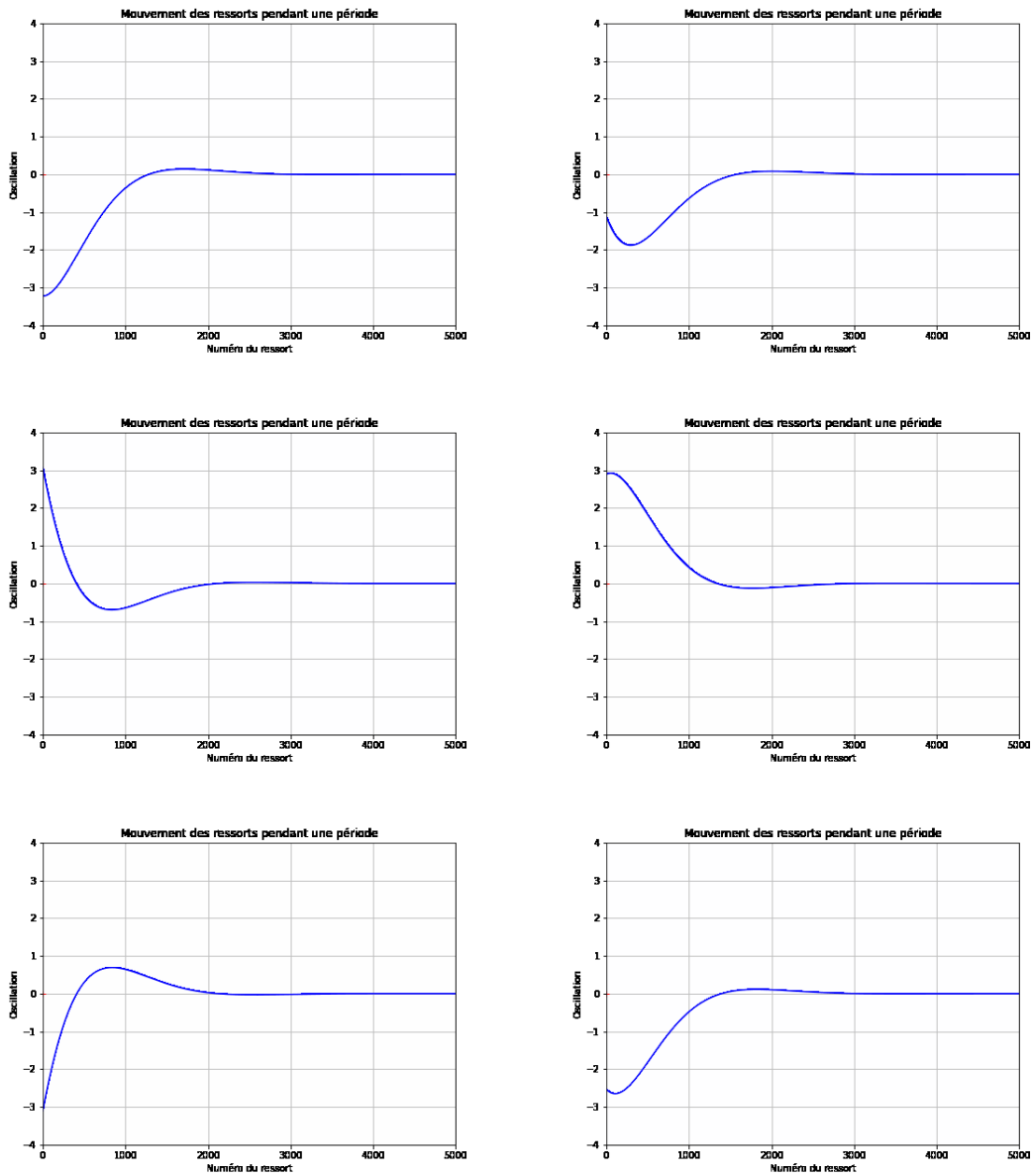


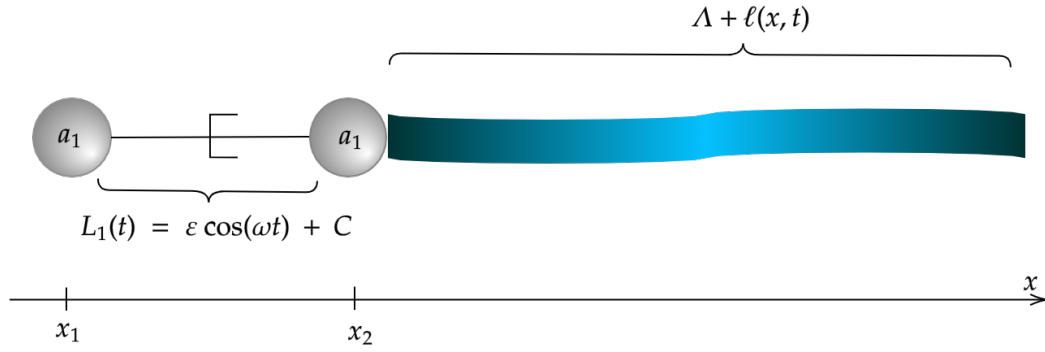
FIGURE 3.5 – Mouvement de l'ensemble des ressorts du nageur à 5000 ressorts sur une brassée

3.2 Nageur "continu" élastique

On s'intéresse maintenant à la limite de notre modèle discret à N ressorts, quand N tend vers l'infini. Les boules, à partir de la troisième, deviennent donc de plus en plus petites, ainsi que les ressorts. La raideur des ressorts, quant à elle, augmente. On imagine donc ce modèle comme un vérin avec deux boules, puis une sorte d'élastique, comme illustré en figure 3.6.

3.2.1 Formulation du problème

On cherche à trouver un système d'équations aux dérivées partielles correspondant à la limite de notre précédent système. L'équation sur les ℓ_j était $\dot{\ell}_j = \frac{K}{\ell^2}(\ell_{i-1} - 2\ell_i +$

FIGURE 3.6 – Limite du modèle du nageur à N ressorts

ℓ_{i+1}). Or, lorsque $N \rightarrow \infty$, $\frac{\ell_{i-1}-2\ell_i+\ell_{i+1}}{\ell^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}$. On en déduit une équation de type chaleur :

$$\frac{\partial \ell}{\partial t}(x, t) = \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x, t), \quad \forall (x, t) \in [0, \Lambda] \times \mathbb{R}_+^* \quad (3.11)$$

Pour les conditions aux limites, on utilise d'abord que $L_{N+2} = 0$, donc $\ell_{n+2} = 0$ et donc $\ell(\Lambda, t) = 0$ pour tout $t > 0$. On rappelle aussi l'équation sur ℓ_2 :

$$\frac{\dot{\ell}_2}{N} = -\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}N}{6\pi\mu\tilde{a}/N} \frac{(\ell_3 - \ell_2)}{N} + \frac{\tilde{k}N}{12\pi\mu a_1} \frac{\ell_2}{N},$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{\dot{\ell}_2}{N} = -\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}\Lambda}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{(\ell_3 - \ell_2)}{\Lambda/N} + \frac{\tilde{k}}{12\pi\mu a_1} \ell_2. \quad (3.12)$$

En passant à la limite sur N dans le terme de gauche, on trouve 0, tandis qu'à droite on voit apparaître un terme en $\frac{\partial \ell}{\partial x}(0, t)$. On trouve donc une condition de type Fourier :

$$\frac{\partial \ell}{\partial x}(0, t) + \frac{\tilde{a}}{2a_1\Lambda} \ell(0, t) = \frac{3\pi\mu\tilde{a}}{\tilde{k}\Lambda} \dot{L}_1(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.13)$$

Le problème peut être donc formulé de la façon suivante : Trouver $\ell \in \mathcal{C}^2([0, \Lambda] \times \mathbb{R}_+^*)$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial t}(x, t) = \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x, t), & \forall (x, t) \in]0, \Lambda[\times \mathbb{R}_+^* \\ \frac{\partial \ell}{\partial x}(0, t) + \frac{\tilde{a}}{2a_1\Lambda} \ell(0, t) = \frac{3\pi\mu\tilde{a}}{\tilde{k}\Lambda} \dot{L}_1(t), & \forall t > 0 \\ \ell(\Lambda, t) = 0, & \forall t > 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2.2 Caractère bien posé

Vérifions que le problème 3.14 est bien posé. On construit la formulation variationnelle équivalente à ce problème en multipliant la première équation par une fonction test $v \in \mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$, en prenant une solution $\ell \in \mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ où $\Omega = [0, \Lambda]$. En intégrant

sur Ω puis par intégration par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \ell}{\partial t} v + \int_{\Omega} \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial \ell}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial \ell}{\partial x} v = 0 \quad (3.15)$$

Regardons $\int_{\partial\Omega} \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial \ell}{\partial x} v$. Ce terme vaut aussi $\frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} (\frac{\partial \ell}{\partial x}(\Lambda, t)v(\Lambda, t) - \frac{\partial \ell}{\partial x}(0, t)v(0, t))$ pour tout $t > 0$. Comme ℓ et v vivent dans le même espace, on a que $v(\Lambda, t) = 0$ pour tout $t > 0$. Il nous reste donc le terme en 0. Ce terme vaut, pour $t > 0$, d'après les conditions aux limites :

$$\frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial \ell}{\partial x}(0, t)v(0, t) = \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} v(0, t) \left(-\frac{\tilde{a}}{2a_1\Lambda} \ell(0, t) + \frac{3\pi\mu\tilde{a}}{\tilde{k}\Lambda} \dot{L}_1(t) \right) \quad (3.16)$$

D'où finalement, la formulation variationnelle s'écrit : Trouver $\ell \in \mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$, tel que pour tout $v \in \mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \ell}{\partial t} v + \int_{\Omega} \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial \ell}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\tilde{k}\Lambda}{12\pi\mu a_1} \ell(0, t)v(0, t) = \frac{\Lambda}{2} \dot{L}_1(t)v(0, t) \quad (3.17)$$

On pose donc $a(\ell, v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \ell}{\partial t} v + \int_{\Omega} \frac{\tilde{k}\Lambda^2}{6\pi\mu\tilde{a}} \frac{\partial \ell}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\tilde{k}\Lambda}{12\pi\mu a_1} \ell(0, t)v(0, t)$ et $b(v) = \frac{\Lambda}{2} \dot{L}_1(t)v(0, t)$.

Par construction des opérateurs a et b , on a clairement que b est continue et linéaire sur $\mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$, et a est bilinéaire sur $\mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*) \times \mathcal{H}^1(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$. Comme de plus les constantes sont positives, par Cauchy-Schwarz on observe que a est bien continue et coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème 3.14 est donc bien posé.

3.2.3 Résolution du problème

On cherche une solution du système 3.14 sous la forme $\ell(x, t) = \underline{\ell}(x)e^{i\omega t}$, car on peut chercher une solution à variables séparées de cette équation, tout comme pour le modèle discret. On déduit de 3.11 l'équation suivante :

$$i\omega \underline{\ell}(x) = K \underline{\ell}''(x) \quad (3.18)$$

L'équation caractéristique associée à 3.18 a deux racines, $r = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{K}}$ et $-r$. On trouve donc comme solution :

$$\underline{\ell}(x) = \alpha e^{rx} + \beta e^{-rx}, \quad (3.19)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Les conditions aux bords nous permettent de déterminer α et β :

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) \frac{\tilde{a}}{2a_1\Lambda} + \alpha r - \beta r = \frac{6\pi\mu\tilde{a}}{2\tilde{k}\Lambda} \varepsilon i\omega \\ \alpha e^{r\Lambda} + \beta e^{-r\Lambda} = 0, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\varepsilon i\omega 3\pi\mu\tilde{a}}{\tilde{k}\Lambda \left(\frac{\tilde{a}}{2a_1\Lambda} (1 - e^{2r\Lambda}) + r(1 + e^{2r\Lambda}) \right)}, \\ \beta = -e^{2r\Lambda} \alpha. \end{cases} \quad (3.20)$$

3.2.4 Simulations de la déformation du nageur

Ces tests ont encore été effectués avec les paramètres du tableau 3.1.

Amplitudes et déphasages de l'élastique et d'un modèle à 10000 ressorts

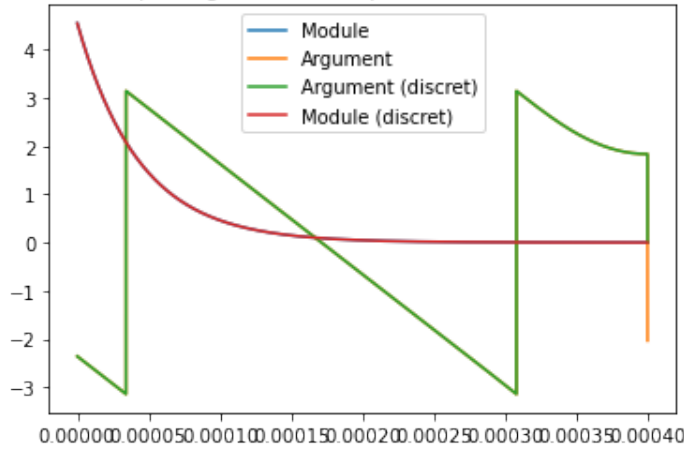
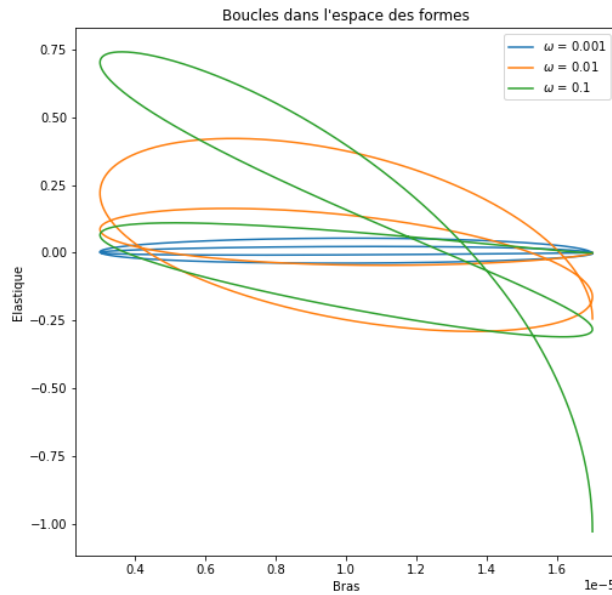


FIGURE 3.7 – Amplitudes et déphasage de l'élastique du nageur, comparé avec un modèle discret à 10000 ressorts

FIGURE 3.8 – Evolution de la forme du vérin et de l'élastique du nageur pour différentes pulsations ω

On observe en figure 3.7 que le modèle discret et le modèle continu coïncident parfaitement. En pratique, on ne voit quasiment plus de différence sur la figure entre les deux modèles à partir de 1000 ressorts. Pour la figure 3.8, on retrouve également des résultats similaires à ceux du modèle discret, avec les plus grandes boucles autour de $\omega = 0.01$.

Enfin, les animations de la déformation de l'élastique donnent des images visuellement identiques à celles de la figure 3.5. On en conclut donc que, mathématiquement comme visuellement (sur les simulations), le modèle continu se comporte bien comme une limite du modèle discret, exactement comme nous avons cherché à le construire.

Chapitre 4

Déplacement du nageur à N ressorts

On calcule tout d'abord le déplacement du modèle de nageur discret à N ressorts, en utilisant les formules approchées décrivant le mouvement des bras, calculées en 3.1.2. On étend ensuite ce calcul au modèle limite, toujours en utilisant une solution approchée des changements de forme du nageur. Enfin, on trouve une formule générale du déplacement d'un nageur élastique, valable quelle que soit le calcul du mouvement de l'élastique.

4.1 Calcul direct du déplacement pour le modèle discret

Compte tenu de la taille des différentes boules, on s'intéresse au déplacement de la première, on calcule donc $V_1 = \dot{x}_1$. Pour ce faire, on garde les approximations des ℓ_j que l'on a calculées au paragraphe 3.1.2, mais on prend en compte des non-linéarités dans la relation entre les forces et les vitesses. Si on ne les prenait pas en compte ici, on trouverait directement un nageur se déformant mais faisant du sur place. Par contre, d'un point de vue de la compréhension des expressions et de la rapidité des simulations par la suite, les approximations des ℓ_j devraient donner un résultat raisonnablement proche de la réalité. En notant R la matrice de résistance, on a :

$$(V_j)_j = R(f_j)_j, \quad \text{avec } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6\pi\mu a_1} & \frac{1}{4\pi\mu L_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{4\pi\mu(L_1+\dots+L_N)} \\ \frac{1}{4\pi\mu L_1} & \frac{1}{6\pi\mu a_1} & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{1}{6\pi\mu a} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{4\pi\mu L_N} \\ \frac{1}{4\pi\mu(L_1+\dots+L_N)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{4\pi\mu L_N} & \frac{1}{6\pi\mu a} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Par ailleurs, on garde maintenant seulement les parties réelles des ℓ_j . On a donc à nouveau $\ell_1(t) = \varepsilon \cos(\omega t) = L_1(t) - C$, et on pose pour $j \geq 2$, $R_j = \text{Re}(\alpha_d \gamma_1^j + \beta_d \gamma_2^j)$ et $I_j = \text{Im}(\alpha_d \gamma_1^j + \beta_d \gamma_2^j)$. On a ainsi, pour $j \geq 2$:

$$\ell_j(t) = R_j \cos(\omega t) + I_j \sin(\omega t). \quad (4.2)$$

Par ailleurs, comme on se place dans un régime de petites variations, on peut faire des développements limités des L_j en les ℓ_j . Ainsi, au premier ordre on a, pour un

$j \geq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j} &= \frac{1}{L_1 + (j-1)\Lambda/N + (\ell_2 + \dots + \ell_j)/N} \\ &= (L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N})^{-1} \left[1 - \frac{\ell_2 + \dots + \ell_j}{N(L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N})^2} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ainsi, on peut calculer V_1 :

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}}{12\pi\mu a_1}\ell_2 + \frac{3a_1\dot{L}_1}{4L_1} - \frac{\tilde{k}\ell_2}{8\pi\mu L_1} + \sum_{j=3}^{N+1} \frac{\tilde{k}N}{4\pi\mu} \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{N} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j} \\ &= -\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}}{12\pi\mu a_1}\ell_2 + \frac{3a_1\dot{L}_1}{4L_1} - \frac{\tilde{k}\ell_2}{8\pi\mu L_1} \\ &\quad + \sum_{j=3}^{N+1} \frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} (\ell_j - \ell_{j+1}) (L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N})^{-1} \left[1 - \frac{\ell_2 + \dots + \ell_j}{N(L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N})^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

On remarque tout d'abord que $-\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}}{12\pi\mu a_1}\ell_2$ est d'intégrale nulle. Comme le déplacement Δx_1 est l'intégrale de V_1 sur une période, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V_1 dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{3a_1\dot{L}_1}{4L_1} - \frac{\tilde{k}\ell_2}{8\pi\mu L_1} + \sum_{j=3}^{N+1} \frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} (\ell_j - \ell_{j+1}) (L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N})^{-1} \left[1 - \frac{\ell_2 + \dots + \ell_j}{N(L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N})^2} \right] \right) dt. \end{aligned}$$

On observe de plus que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{3a_1\dot{L}_1}{4L_1} - \frac{\tilde{k}\ell_2}{8\pi\mu L_1} \right) dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\frac{-3a_1\varepsilon \sin(\omega t)}{4(\varepsilon \cos(\omega t) + C)} - \frac{\tilde{k}(-I_2 \sin(\omega t) + R_2 \cos(\omega t))}{8\pi\mu(\varepsilon \cos(\omega t) + C)} \right) dt \\ &= 0 - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\tilde{k}R_2 \cos(\omega t)}{8\pi\mu(\varepsilon \cos(\omega t) + C)} dt \end{aligned}$$

Finalement, on a, comme $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\sin(\omega t)}{\varepsilon \cos(\omega t) + C + (j-1)\Lambda/N} dt = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\tilde{k}R_2 \cos(\omega t)}{8\pi\mu(\varepsilon \cos(\omega t) + C)} dt \\ &\quad + \frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{j=3}^{N+1} \frac{(R_j - R_{j+1}) \cos(\omega t)}{\varepsilon \cos(\omega t) + C + (j-1)\Lambda/N} dt \\ &\quad - \frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{j=3}^{N+1} \frac{((R_j - R_{j+1}) \cos(\omega t) + (I_j - I_{j+1}) \sin(\omega t)) (\sum_{i=2}^j R_i \cos(\omega t) + \sum_{i=2}^j I_i \sin(\omega t))}{N(\varepsilon \cos(\omega t) + C + (j-1)\Lambda/N)^3} dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 Analogie continue

Avant d'adapter les calculs précédents au modèle du nageur continu, nous avons besoin d'étudier le comportement asymptotique des coefficients du modèle discret.

4.2.1 Analyse asymptotique préliminaire

On s'intéresse tout d'abord à γ_1 et γ_2 , lorsque N devient grand. Soit $1 \leq j \leq N$. On a, pour N grand :

$$\begin{aligned}\gamma_1^j &= \left(\frac{i\omega\ell^2/K+2+\sqrt{\Delta}}{2} \right)^j \\ &= \left(1 + \frac{i\omega\Lambda}{2KN^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\omega}{K}} \frac{\Lambda(1+i)}{\sqrt{2N}} \sqrt{1 + \frac{i\omega\Lambda^2}{KN^2}} \right)^j \\ &\sim \left(1 + \frac{\Lambda}{N} \sqrt{\frac{\omega}{K}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^j \\ &\sim e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{K}} \frac{j\Lambda}{N}}\end{aligned}\tag{4.6}$$

De même, on trouve que $\gamma_2^j \sim e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{K}} \frac{j\Lambda}{N}}$.

On regarde ensuite b_d . Pour cela, on commence par faire un développement limité de z_3 , de la même manière que ci-dessus. On trouve $z_3 = 1 + \frac{i\omega\Lambda}{KN^2}(1 - \Lambda) + o(1/N^2)$. Finalement, on obtient que $\lim_{N \rightarrow \infty} b_d = \underbrace{\frac{i\omega\varepsilon 6\pi\mu a_1}{\tilde{k}}}_b$.

4.2.2 Dédution d'une équation pour le modèle continu

On cherche maintenant à déduire du déplacement Δx_1 du modèle à N ressorts l'expression du déplacement Δx du modèle continu. On a :

$$V_1 = \underbrace{-\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}}{12\pi\mu a_1}\ell_2}_A + \underbrace{\frac{3a_1\dot{L}_1}{4L_1} - \frac{\tilde{k}\ell_2}{8\pi\mu L_1}}_B + \underbrace{\sum_{j=3}^{N+1} \frac{\tilde{k}N}{4\pi\mu} \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{N} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j}}_C\tag{4.7}$$

Déjà, A est périodique, et $\lim_{N \rightarrow \infty} A = -\frac{1}{2}\dot{L}_1 + \frac{\tilde{k}}{12\pi\mu a_1} \text{Re}(b \exp(i\omega t))$, d'après la section 4.2.1, car $\lim_{N \rightarrow \infty} \ell_2(t) = \text{Re}(b \exp(i\omega t)) = \frac{-\omega\varepsilon 6\pi\mu a_1}{\tilde{k}} \sin(\omega t)$, donc en passant à la limite, on garde un terme périodique, d'intégrale nulle sur une période.

On s'intéresse maintenant au terme B :

$$B = \underbrace{\frac{3a_1\dot{L}_1}{4L_1}}_{\text{d'intégrale nulle sur une période}} - \frac{\tilde{k}\ell_2}{8\pi\mu L_1}$$

Ceci donne un terme en $\frac{\sin(\omega t)}{\varepsilon \cos(\omega t) + C}$ qui est d'intégrale nulle sur une période.

Finalement, il ne reste que le terme C . On regarde ce que représente $\frac{1}{L_1 + \dots + L_j}$ en posant $j = \frac{x\Lambda}{N}$, avec $x \in [0, \Lambda]$. On a que $L_1 + \dots + N = L_1 + \frac{(j-1)\Lambda}{N} + \frac{1}{N}(\ell_2 + \dots + \ell_j)$.

Tout d'abord,

$$\frac{1}{N}(\ell_2 + \dots + \ell_j) = \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\alpha_d}{N} \frac{\gamma_1 - \gamma_1^{x\Lambda/N}}{1 - \gamma_1} + \frac{\beta_d}{N} \frac{\gamma_2 - \gamma_2^{x\Lambda/N}}{1 - \gamma_2} \right) e^{i\omega t} \right). \quad (4.8)$$

D'après les estimations faites en section 4.2.1, on sait que $(1 - \gamma_1) \sim -\frac{\Lambda}{N} \sqrt{\frac{\omega}{K}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, et que $\gamma_1^{x\Lambda/N} \sim e^{rx}$, et on a des relations similaires pour γ_2 . On sait de plus que α_d, β_d tendent vers des constantes que l'on notera respectivement $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$. Finalement, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j} = \left(L_1(t) + x + \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\Lambda r} (\tilde{\beta}(1 - e^{-rx}) - \tilde{\alpha}(1 - e^{rx})) \right) \right)^{-1} \quad (4.9)$$

En regardant C en entier, on a :

$$\begin{aligned} C &= \sum_{j=3}^{N+1} \frac{\tilde{k}N}{4\pi\mu} \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{N} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j} \\ &= \sum_{j=3}^{N+1} \frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} \frac{\Lambda}{N} \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{\Lambda/N} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j} \end{aligned} \quad (4.10)$$

et on remarque de plus que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ell_j(t) - \ell_{j+1}(t)}{\Lambda/N} = -\frac{\partial \ell}{\partial x}(x, t)$, et Λ/N représente un accroissement dx . Finalement,

$$C = \int_0^{\Lambda} -\frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} \frac{\partial \ell}{\partial x}(x, t) \left(L_1(t) + x + \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\Lambda r} (\tilde{\beta}(1 - e^{-rx}) - \tilde{\alpha}(1 - e^{rx})) \right) \right)^{-1} dx \quad (4.11)$$

En conclusion, on a :

$$\Delta x = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{\Lambda} -\frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} \frac{\partial \ell}{\partial x}(x, t) \left(L_1(t) + x + \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\Lambda r} (\tilde{\beta}(1 - e^{-rx}) - \tilde{\alpha}(1 - e^{rx})) \right) \right)^{-1} dx dt \quad (4.12)$$

4.2.3 Formule plus générale du déplacement

Après avoir obtenu la formule 4.12, on cherche maintenant une formule plus générale et éventuellement plus simple, qui ne dépendrait pas de l'expression de ℓ , qu'on avait précédemment trouvée grâce à des approximations. Cette fois, on garde :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L_1 + \dots + L_j} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L_1 + x - \Lambda/N + 1/N \sum_{i=2}^j \ell_i} \\ &= \frac{1}{L_1 + x + \int_0^x \frac{\ell}{\Lambda}} \end{aligned}$$

On conserve le reste des calculs précédents, pour finalement obtenir :

$$\Delta x = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{\Lambda} -\frac{\tilde{k}}{4\pi\mu} \frac{\partial \ell}{\partial x}(x, t) \left(L_1(t) + x + \int_0^x \frac{\ell}{\Lambda} \right)^{-1} dx dt \quad (4.13)$$

Cette expression, plus compacte, est ainsi indépendante des approximations que l'on pourrait faire pour calculer ℓ . Cependant, la triple intégration numérique reste coûteuse, et son aspect ne donne pas une idée très claire de l'aspect du déplacement de notre nageur.

4.3 Déplacement du nageur à N ressorts en fonction de Ω

En se basant sur [12], on introduit le paramètre adimensionné $\Omega = \frac{\omega \tilde{a} \mu}{\tilde{k}}$. On s'intéresse ici au déplacement du nageur à N ressorts, soit à notre modèle discret. On réécrit d'abord les ℓ_j en fonction de Ω , en reprenant les notations précédentes. γ_1 devient $\gamma_1 = \frac{6\pi\Omega i/N^2 + \sqrt{(6\pi\Omega i/N^2 + 2)^2 - 4}}{2}$ et $b_d = \frac{\varepsilon i N \Omega / 2}{(z_3 - 1)N^2 + \frac{N\tilde{a}}{2a_1} - 6i\pi\Omega}$.

4.3.1 Nouvelle expression du déplacement

Après avoir trouvé l'expression des ℓ_j en fonction de Ω , on calcule l'expression du déplacement d'une nouvelle manière. Tout d'abord, on sait que pour $j \geq 1$, $\dot{L}_j = V_{j+1} - V_j$, on en déduit pour $j \geq 2$:

$$V_j = V_1 + \sum_{k=1}^{j-1} \dot{L}_k \quad (4.14)$$

On a toujours

$$V = RF, \quad \text{avec } R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6\pi\mu a_1} & \frac{1}{4\pi\mu L_1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{4\pi\mu(L_1 + \dots + L_N)} \\ \frac{1}{4\pi\mu L_1} & \frac{1}{6\pi\mu a_1} & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{1}{6\pi\mu a} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{4\pi\mu L_N} \\ \frac{1}{4\pi\mu(L_1 + \dots + L_N)} & \cdots & \cdots & \frac{1}{4\pi\mu L_N} & \frac{1}{6\pi\mu a} \end{pmatrix}$$

et $V = (V_j)_j$, $F = (f_j)_j$. D'où $R^{-1}V = F$. On réécrit l'équation précédente comme :

$$R^{-1} \left(V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{L}_1 \\ \vdots \\ \dot{L}_1 + \dots + \dots L_N \end{pmatrix} \right) = F \quad (4.15)$$

Or, on a toujours que $f_1 + \dots + f_N = 0$, d'où :

$$(1 \quad \dots \quad 1) R^{-1} \left(V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{L}_1 \\ \vdots \\ \dot{L}_1 + \dots + \dots L_N \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (4.16)$$

Finalement, on a :

$$V_1 = \frac{-(1 \quad \dots \quad 1) R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{L}_1 \\ \vdots \\ \dot{L}_1 + \dots + \dots L_N \end{pmatrix}}{(1 \quad \dots \quad 1) R^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (4.17)$$

4.3.2 Simulations numériques

Avant d'implémenter l'équation 4.17, on a choisi de faire les simulations avec deux approches différentes pour le calcul de R^{-1} . La première a été de calculer directement une inverse approchée à l'aide de la librairie `numpy.linalg`, et la seconde de donner directement une expression de R^{-1} calculée préalablement à la main.

Calculons donc une expression de R^{-1} . On veut d'abord écrire R sous la forme $D^{1/2} M D^{1/2}$ avec D diagonale. On a :

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6\pi\mu a_1} & \frac{1}{4\pi\mu L_1} & \dots & \dots & \frac{1}{4\pi\mu(L_1 + \dots + L_N)} \\ \frac{1}{4\pi\mu L_1} & \frac{1}{6\pi\mu a_1} & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{1}{6\pi\mu a} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{4\pi\mu L_N} \\ \frac{1}{4\pi\mu(L_1 + \dots + L_N)} & \dots & \dots & \frac{1}{4\pi\mu L_N} & \frac{1}{6\pi\mu a} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Donc en posant

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_1}} & & & \vdots \\ \vdots & & \sqrt{\frac{N}{a}} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{\frac{N}{a}} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3a_1}{2L_1} & \frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+L_2)} & \dots & \dots & \frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+\dots+L_N)} \\ \frac{3a_1}{2L_1} & 1 & \frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2L_2} & \dots & \dots & \frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_2+\dots+L_N)} \\ \frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+L_2)} & \frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2L_2} & 1 & \frac{3\tilde{a}}{2N L_3} & & \frac{3\tilde{a}}{2N(L_3+\dots+L_N)} \\ \vdots & \frac{3}{2} \frac{\tilde{a}}{N L_3} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{3\tilde{a}}{2N L_N} \\ \frac{3}{2} \frac{\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{(L_1+\dots+L_N)} & \dots & \dots & \dots & \frac{3\tilde{a}}{2N L_N} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

on a bien $R = D^{1/2}MD^{1/2}$, avec D diagonale et M symétrique définie positive. Ainsi, on peut calculer $R^{-1} = D^{-1/2}M^{-1}D^{-1/2}$. On connaît exactement $D^{-1/2}$ comme $D^{1/2}$ est diagonale. On calcule une inverse de M à $o(\tilde{a}/\ell)$ près. En effet $M = Id + O(\tilde{a}/\ell)$, donc en inversant on garde seulement le terme d'ordre 1 en \tilde{a}/ℓ . On a donc :

$$M^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3a_1}{2L_1} & -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+L_2)} & \cdots & \cdots & -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+\dots+L_N)} \\ -\frac{3a_1}{2L_1} & 1 & -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2L_2} & \cdots & \cdots & -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_2+\dots+L_N)} \\ -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+L_2)} & -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2L_2} & 1 & -\frac{3\tilde{a}}{2NL_3} & \cdots & -\frac{3\tilde{a}}{2N(L_3+\dots+L_N)} \\ \vdots & -\frac{3\tilde{a}}{2NL_3} & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & -\frac{3\tilde{a}}{2NL_N} \\ -\frac{3\sqrt{a_1}\tilde{a}/N}{2(L_1+\dots+L_N)} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{3\tilde{a}}{2NL_N} & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir codé les deux méthodes, on peut comparer les résultats obtenus pour un petit nombre de ressorts (moins de 10). Les tests suivants ont été effectués avec un modèle à 3 ressorts, les paramètres choisis sont ceux du tableau 3.1.

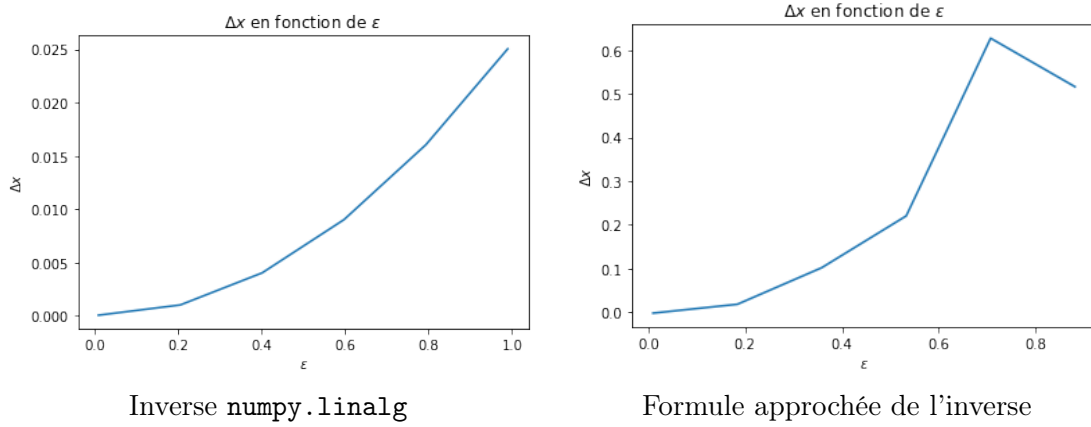


FIGURE 4.1 – Déplacement (m) du nageur à 3 ressorts en fonction de ε pour les deux méthodes de calcul de M^{-1}

La figure 4.1 montre le déplacement du nageur en fonction du paramètre ε . On observe que les deux méthodes ont une croissance similaire, jusqu'à $\varepsilon = 0.8$. En pratique, on prend toujours $\varepsilon = 0.7$. Après, on observe que le signe du déplacement s'inverse avec la méthode $R = D^{1/2}MD^{1/2}$, ce qui vient des erreurs d'approximation dans l'inverse de R . L'échelle est également différente, ce qui nous prouve qu'on devrait faire l'approximation de M^{-1} à un ordre plus élevé afin d'avoir des résultats plus fiables et de mieux prendre en compte la dépendance en ε dans la formule.

La figure 4.2, quant à elle, illustre la valeur du déplacement en fonction de Ω , pour plusieurs ε . ici, les deux méthodes donnent un résultat identique, mais la formule approchée diminue le coût du calcul.

Sur les deux figures avec le calcul de l'inverse en `Python`, on retrouve des résultats similaires à ceux de [12], avec en particulier un maximum pour le déplacement autour de $\Omega = 3$, et une dépendance quadratique en ε de la valeur de $\Delta x/\varepsilon^2$.

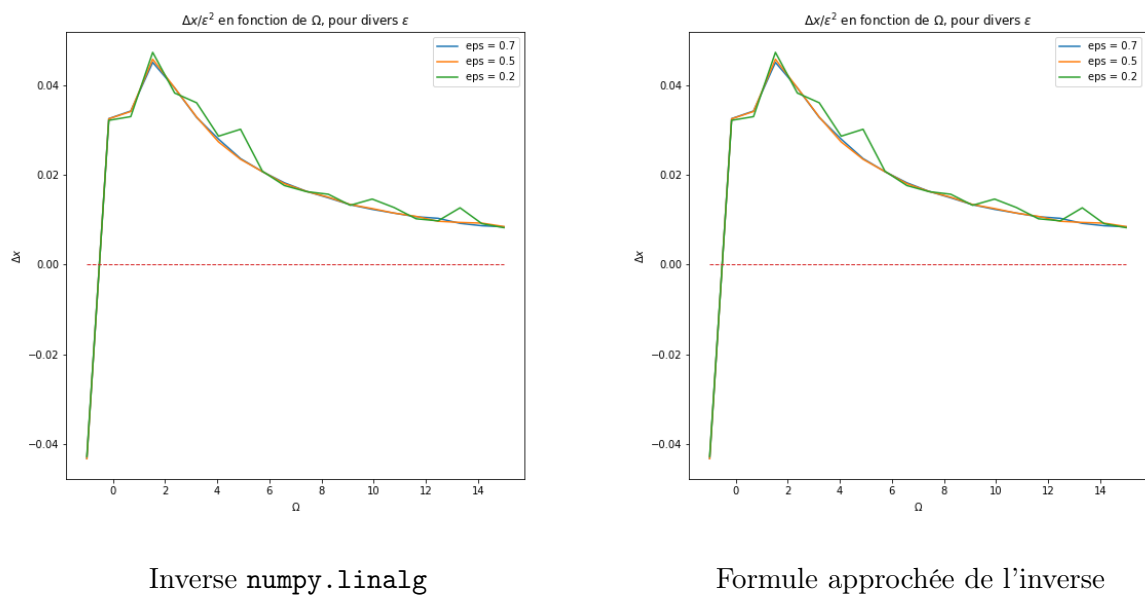


FIGURE 4.2 – Déplacement (m) du nageur à 3 ressorts en fonction de Ω pour plusieurs ε pour les deux méthodes de calcul de M^{-1}

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce rapport, nous avons pu étudier différents modèles simples de micro nageurs se déplaçant selon une dimension. Alors que les premiers modèles avaient seulement trois sphères et deux bras, le modèle que nous avons construit avait $N + 2$ sphères. Notre but était d'étudier ce système pour comprendre s'il pouvait avancer, et quel était son comportement quand N devenait grand, afin de tendre vers un modèle élastique.

Si résoudre directement les équations pour le nageur à un seul ressort donnait lieu à des calculs raisonnables, nous avons pu observer qu'il fallait trouver d'autres solutions (approximations, ou simulations numériques par exemple) pour comprendre le mouvement d'un nageur avec de nombreux ressorts. C'est pourquoi, au début, nous avons considéré une relation linéaire entre les forces hydrodynamiques et les vitesses des sphères. Cette approximation nous a permis de trouver une expression approchée du mouvement de chaque bras, et ainsi comprendre comment le nageur se déformait. La déformation observée ressemble à une onde se propageant et s'atténuant le long du nageur.

Lors du passage à la limite $N \rightarrow \infty$, le comportement du nageur reste le même, et donc lorsqu'on tente de modéliser un nageur "continu" avec un élastique représentant une succession de ressorts infiniment petits, on garde la même onde qui se propage, en partant du bout du vérin, jusqu'à l'extrémité du nageur.

Pour calculer le déplacement de notre nageur à N ressorts sur une période, nous avons choisi de reprendre les approximations des mouvements des bras, et de les réinjecter dans le calcul du déplacement de la première sphère, afin d'éviter de trop lourdes simulations pour le calcul du mouvement des bras. Ce calcul du déplacement a donné lieu à des expressions assez compliquées, que nous avons su adapter au modèle du nageur élastique. Cependant, cette formule ne permettait pas vraiment, à vue d'œil, d'intuiter le comportement du nageur. C'est pourquoi nous avons ensuite tenté une nouvelle approche, en se basant sur les calculs de [12]. La formule ainsi obtenue est plus simple à lire, mais ne permet pas un passage direct à la version continue. De plus, elle nécessite d'inverser une matrice, ce qui est très coûteux d'un point de vue des calculs lors des simulations. Nous avons donc essayé d'approximer l'inverse de cette matrice, mais nos calculs ne s'avèrent pas suffisamment précis pour tous les tests que nous souhaitons effectuer.

Dans le futur, il faudrait donc trouver un moyen efficace de simuler le déplacement d'un nageur à N ressorts à l'aide de la formule 4.16, mais aussi de calculer le déplacement du nageur élastique de manière similaire. Nous pourrions ensuite nous intéresser à des modèles de nageurs plus complexes, afin mieux comprendre le mouvement des microorganismes.

Bibliographie

- [1] E.M. PURCELL. « Life at low Reynolds Number ». In : *American Journal of Physics* vol 45, 3-11 (1977).
- [2] Aline LEFEBVRE, François ALOUGES et Antonio DESIMONE. « Biological fluid dynamics : swimming at low Reynolds numbers ». In : *Encyclopedia of Complexity and System Science, Springer Verlag*. 2009. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03031304>.
- [3] Ali NAJAFI et Ramin GOLESTANIAN. « Simple swimmer at low Reynolds number : Three linked spheres ». In : *Phys. Rev. E* 69 (6 2004), p. 062901. DOI : [10.1103/PhysRevE.69.062901](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.69.062901). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.69.062901>.
- [4] Rémi DREYFUS, Jean BAUDRY et HA STONE. « Purcell's "rotator" : Mechanical rotation at low Reynolds number ». In : *Physics of Condensed Matter* 47 (sept. 2005), p. 161-164. DOI : [10.1140/epjb/e2005-00302-5](https://doi.org/10.1140/epjb/e2005-00302-5).
- [5] Joseph E. AVRON, Oded KENNETH et David H. OAKNIN. « Pushmepullyou : an efficient micro-swimmer ». In : *New Journal of Physics* 7 (2005), p. 234-234. DOI : [10.1088/1367-2630/7/1/234](https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/234). URL : <https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/234>.
- [6] Eric LAUGA et Thomas R POWERS. « The hydrodynamics of swimming microorganisms ». In : *Reports on Progress in Physics* 72.9 (2009), p. 096601. ISSN : 1361-6633. DOI : [10.1088/0034-4885/72/9/096601](https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/9/096601). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/72/9/096601>.
- [7] François ALOUGES, Antonio DESIMONE et Aline et LEFEBVRE. « Optimal strokes for axisymmetric microswimmers ». In : *Eur. Phys. J. E* 28, 279-284 (2009).
- [8] Marta ZOPPELLO et al. « Self-propulsion of slender micro-swimmers by curvature control : N-link swimmers ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 56 (nov. 2013). DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2013.04.012](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.04.012).
- [9] François ALOUGES et al. « Can Magnetic Multilayers Propel Artificial Microswimmers Mimicking Sperm Cells ? ». In : *Soft Robotics* 2.3 (sept. 2015), p. 117-128. DOI : [10.1089/soro.2015.0007](https://doi.org/10.1089/soro.2015.0007). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02562438>.
- [10] François ALOUGES et al. « Energy-optimal strokes for multi-link microswimmers : Purcell's loops and Taylor's waves reconciled ». In : *New Journal of Physics* 21.4 (2019), p. 043050. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/ab1142](https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab1142). URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ab1142>.
- [11] François ALOUGES et al. « Optimally swimming stokesian robots ». In : *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B* 18.5 (2013), 1189-1215. ISSN : 1553-524X. DOI : [10.3934/dcdsb.2013.18.1189](https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.1189). URL : <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.1189>.

-
- [12] Alessandro MONTINO et Antonio DESIMONE. « Three-sphere low-Reynolds-number swimmer with a passive elastic arm ». In : *The European Physical Journal E* 38 (2015), p. 1-10.

Table des figures

2.1	Nageur simple à 3 sphères	4
2.2	Nageur à 1 ressort	6
3.1	Nageur à N ressorts	8
3.2	Amplitudes et déphasages de chaque ressort du nageur pour 10 et 5000 ressorts	11
3.3	Evolution de la forme du vérin et de l'ensemble des 1000 ressorts du nageur pour différentes pulsations ω	11
3.4	Evolution de la forme du vérin et des ressorts du nageur à 1000 ressorts pour différentes pulsations ω	12
3.5	Mouvement de l'ensemble des ressorts du nageur à 5000 ressorts sur une brassée	13
3.6	Limite du modèle du nageur à N ressorts	14
3.7	Amplitudes et déphasage de l'élastique du nageur, comparé avec un modèle discret à 10000 ressorts	16
3.8	Evolution de la forme du vérin et de l'élastique du nageur pour différentes pulsations ω	16
4.1	Déplacement (m) du nageur à 3 ressorts en fonction de ε pour les deux méthodes de calcul de M^{-1}	23
4.2	Déplacement (m) du nageur à 3 ressorts en fonction de Ω pour plusieurs ε pour les deux méthodes de calcul de M^{-1}	24