JESP_02_Antecedentes_mat

December 23, 2022

1 Antecedentes matemáticos

Autor: Jesús Emmanuel Solís Pérez

Contacto: jsolisp@unam.mx

1.1 Álgebra Lineal

1.1.1 Combinaciones lineales

Un sistema no homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1}$$

puede ser representado de forma vectorial como sigue

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m3}} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{2}$$

o equivalentemente como

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n = v, \tag{3}$$

donde u_1, u_2, ..., u_n, v son los vectores columnas, respectivamente.

Definición 1. Un vector v es una *combinación lineal* de los vectores u_1, u_2, ..., u_n si existen escalares a_1, a_2, ..., a_n tales que

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n. \tag{4}$$

La ecuación vectorial

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \cdots + x_n u_n, \tag{5}$$

tiene una solución cuando los x_1, x_2, ..., x_n son escalares por determinar.

Ejemplo 1. Sean

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Entonces v es una combinación lineal de u_1, u_2 y u_3 dado que el sistema o ecuación vectorial

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

o bien

$$\begin{aligned} 2 &= x + y + z, \\ 3 &= x + y, \\ -4 &= x, \end{aligned} \tag{8}$$

tiene una solución $x = -4$, $y = 7$, $z = -1$. Es decir

$$v = -4u_1 + 7u_2 - u_3. \tag{9}$$

1.1.2 Dependencia lineal

Definición 2. Los vectores u_1, u_2, u_3, ..., $u_n \in \mathbb{R}$ son *linealmente dependientes* si existen escalares a_1, a_2, ..., a_n no todos nulos tales que

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \cdots + a_n u_n = 0. \tag{10}$$

La ecuación vectorial

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \cdots + x_n u_n = 0, \tag{11}$$

tiene una solución no nula donde los escalares x_1, x_2, x_3, ..., x_n se deben determinar. En otro caso, los vectores son llamados *linealmente independientes*.

Ejemplo 2. La solución de

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

o bien

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0, \\ x - y - 5z &= 0, \\ x + 3y + 3z &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

¿Cómo llegamos a lo siguiente?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x + y &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

cuya representación queda

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

es la solución no nula $x = y = z = 0$. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes. El sistema de ecuaciones lineales

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

o bien

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0, \\ x - y - 5z &= 0, \\ x + 3y + 3z &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

tiene una solución no nula $(x, y, z) = (3, -2, 1)$. Por lo tanto, estos tres vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo 3. Realice la conversión de la siguiente ecuación vectorial en un sistema de ecuaciones lineales equivalente y resuélvalo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 5y + 2z \\ 3x + 8y + 3z \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Reduciendo el sistema, tenemos

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1, \\ 2x + 5y + 2z &= -6, \\ 3x + 8y + 3z &= 5, \end{aligned} \tag{19}$$

o bien

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 18 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Cuya solución única es $(x, y, z) = (-82, 28, 9)$. En combinación lineal, lo anterior es representado como

$$v = -82u_1 + 28u_2 + 9u_3, \tag{21}$$

donde

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 18 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Ejemplo 4. Escriba el vector $v = (1, -2, 5)$ como combinación lineal de los vectores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ y $u_3 = (2, -1, 1)$.

Ejemplo 5. Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes

- $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 3)$ y $u_3 = (1, -5, 3)$.
- $u_1 = (1, -2, -3)$, $u_2 = (2, 3, -1)$ y $u_3 = (3, 2, 1)$.

1.1.3 Ecuaciones lineales y sus soluciones

Se entiende por ecuación lineal con n incógnitas x_1, x_2, x_3, ..., x_n a una ecuación que puede escribirse de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{23}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son constantes reales. Aquí la constante $a_k$se denomina el **coeficiente** de x_k y b se denomina la **constante** de la ecuación lineal.

Se le llama **conjunto solución, solución general** o simplemente **solución** de la ecuación al conjunto de todas las soluciones denotado como sigue

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b; \quad a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}\}. \tag{24}$$

Ejemplo 6. La ecuación $2x - 5y + 3xz = 4$ no es lineal debido al producto de dos incógnitas.

Ejemplo 7. La ecuación $x + 2y - 4z + t = 3$ es lineal en las cuatro incógnitas x, y, z, t.

Teorema 1. Consideremos la ecuación lineal $Ax = b$ * Si $a \neq 0$, entonces $x = b/A = A^{-1}b$ es solución única de $Ax = b$. * Si $a = 0$, pero $b \neq 0$, entonces $Ax = b$ no tiene solución. * Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces todo escalar k es solución de $Ax = b$.

Una ecuación **degenerada** es una ecuación lineal que tiene la siguiente forma

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b, \tag{25}$$

donde cada coeficiente es igual a cero y su solución está dada como sigue

Teorema 2. Sea la ecuación lineal degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b$ se tiene * Si $b \neq 0$ entonces la ecuación no tiene solución. * Si $b = 0$ entonces todo vector es una solución.

Teorema 3. Sea una ecuación lineal no degenerada de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{26}$$

con primera incógnita x_p.

Dará una solución única cualquier conjunto de valores de las incógnitas x_j con $j \neq p$.

Observación. Las incógnitas x_j se llaman **variables libres** porque pueden tomar cualquier valor.

Ejemplo 8. Dada la siguiente ecuación

$$2x - 4y + z = 8, \tag{27}$$

encuentre * Sus soluciones particulares. * Su solución general.

Soluciones particulares

- x es la primera incógnita.
- dos variables libres y, z.

Entonces asignamos valores cualesquiera a las variables libres y, z y despejamos la primera incógnita x. Por ejemplo: para $y = 1$ y $z = 1$ tenemos $x = 11/2$. Por lo tanto, $u = (11/2, 1, 1)$ es una solución particular.

Solución general Asignamos valores arbitrarios (**parámetros**) a las variables libres. Por ejemplo: Si sustituimos $y = a$ y $z = b$ en la ecuación, obtenemos el valor de la primera incógnita

$$x = 4 + 2a - \frac{1}{2}b, \quad y = a, \quad z = b. \tag{28}$$

Por lo que la solución general esta dada como sigue

$$S = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 | u = \left(4 + 2a - \frac{1}{2}b, a, b \right), \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}. \tag{29}$$

La solución general de una ecuación lineal no degenerada con dos incógnitas x y y de la forma

$$ax + by = c, \tag{30}$$

donde a, b y c son reales está dada como sigue

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{31}$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales no degeneradas con dos incógnitas está dado como sigue

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= c_2, \end{aligned} \tag{32}$$

donde u_1 y u_2 son números reales que satisfacen ambas ecuaciones y se le conoce como **solución simultánea** y se escribe como $u = (u_1, u_2)$.

Podemos recurrir al método gráfico para encontrar tres casos: * El sistema tiene exactamente una solución. * El sistema no tiene soluciones. * El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 9. Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x + 5y = 8, \\ L_2: &\quad 3x - 2y = -7. \end{aligned} \tag{33}$$

Eliminamos x construyendo una ecuación $L = 3L_1 - 2L_2$ * Tenemos $19y = 38$ y por consiguiente $y = 2$. * Sustituyendo en L_1 obtenemos $x = -1$. * La solución única está dada como $u = (-1, 2)$

1.1.4 Matrices escalonadas

Una matriz A se dice que está en **forma escalonada** o se denomina **matriz escalonada** si cumple las siguientes condiciones: * Las filas no nulas están en la parte inferior de la matriz. * Cada entrada principal no nula está a la derecha de la entrada principal.

Una **matriz aumentada** M de m ecuaciones y n incógnitas está dada como sigue

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{bmatrix}. \tag{34}$$

La **matriz de coeficientes** A del sistema anterior está dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

El sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned} x + y - 2z + 4t &= 5, \\ 2x + 2y - 3z + t &= 3, \\ 3x + 3y - 4z - 2t &= 1, \end{aligned} \tag{36}$$

se resuelve reduciendo su matriz aumentada M a la forma escalonada y después a la forma canónica, i.e.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Por lo tanto, la solución general queda como sigue

$$\begin{aligned} x + y - 10t &= -9, \\ z - 7t &= -7, \end{aligned} \tag{38}$$

y el conjunto solución

$$S = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 \mid u = (-9 - y + 10t, y, -7 + 7t, t), \quad y, t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{39}$$

1.1.5 Sistema de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todas las constantes son iguales a cero, es decir

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + a_{m_3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

El sistema anterior tiene una solución llamada solución nula o trivial denotada como n-ada $0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$. Entonces el sistema puede reducirse a un sistema equivalente en forma escalonada

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots \quad &=\vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Del sistema anterior tenemos dos posibilidades * Si $r = n$, entonces el sistema tiene sólo la solución no nula. * Si $r < n$, entonces el sistema tiene una solución no nula.

Ejemplo 10. Determine si $u = (8, 1, 2)$ es solución de la siguiente ecuación lineal $x+2y-3z = 4$.

Ejemplo 11. Encuentre cada una de las soluciones de la ecuación $2x+y+x-5 = 2y+3x+y+4$.

Ejemplo 12. Encuentre la solución general de la ecuación lineal $x - 2y + 3z = 4$.

Ejemplo 13. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7, \\ 2x - y + 4z &= 17, \\ 3x - 2y + 2z &= 14. \end{aligned} \tag{42}$$

Ejemplo 14. Determine los valores de k para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ 2x + 3y + kz &= 3, \\ x + ky + 3z &= 2, \end{aligned} \tag{43}$$

obtenga * Una solución única. * Ninguna solución. * Infinitas soluciones.

Ejemplo 15. Reduzca la siguiente matriz A a la forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Ejemplo 16. Resuelva el siguiente sistema utilizando la matriz aumentada

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z - 2s + 4t &= 1, \\ 2x + 5y - 8z - s + 6t &= 4, \\ x + 4y - 7z + 2t &= 8. \end{aligned} \tag{45}$$

Ejemplo 17. Determine si el siguiente sistema homogéneo tiene una solución no nula

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0, \\ 2x + 5y + 2z &= 0, \\ x + 4y + 7z &= 0, \\ x + 3y + 3z &= 0. \end{aligned} \tag{46}$$

1.1.6 Álgebra de matrices

Dadas dos matrices A y B de orden $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{3n} \\ a_{\mathrm{n1}} & a_{\mathrm{n2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{3n} \\ b_{\mathrm{n1}} & b_{\mathrm{n2}} & \cdots & b_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

podemos sumarlas o multiplicarlas.

La suma de A y B es una matriz $A + B$ de $m \times n$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} + b_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} + b_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} + b_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}. \tag{48}$$

El producto de un escalar k y una matriz A es la matriz kA de orden $m \times n$

$$\mathrm{kA} = \begin{bmatrix} \mathrm{ka}_{11} & \mathrm{ka}_{12} & \cdots & \mathrm{ka}_{1n} \\ \mathrm{ka}_{21} & \mathrm{ka}_{22} & \cdots & \mathrm{ka}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{ka}_{\mathrm{m1}} & \mathrm{ka}_{\mathrm{m2}} & \cdots & \mathrm{ka}_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Teorema 4. Sea $M_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ se tiene

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = A$
- $A + (-A) = 0$
- $A + B = B + A$
- $a(A + B) = aA + aB$
- $(a + b)A = aA + bA$
- $(ab)A = a(bA)$
- $1 \cdot A = A, 0 \cdot A = 0$

El producto de dos matrices A_{mp} y B_{pn}, denotado como AB de $m \times n$ está definido como

$$
\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^n \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^n \end{bmatrix}, \tag{50}
$$

donde las A_i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ son las filas de la matriz A y las B^j con $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ son las columnas de la matriz B.

Teorema 5. Sean A, B y C matrices arbitrarias de órdenes compatibles, entonces las operaciones están definidas como sigue con un escalar cualquiera $k \in \mathbb{R}$

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

La **transpuesta** de una matriz A, denotada como A^T se obtiene de escribir las filas de A, por orden, como columnas

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{\mathrm{m1}} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{1n}} & a_{\mathrm{2n}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}. \tag{51}
$$

Teorema 6. Sean A y B matrices arbitrarias de órdenes compatibles, las operaciones están definidas para un escalar $k \in \mathbb{R}$ cualquiera como sigue

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede ser representado de forma equivalente como sigue

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{52}
$$

o simplemente $Ax = b$, donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes del sistema, $x = (x_j)$ representa el vector de incógnitas y $b = (b_i)$ el vector de constantes.

La **matriz aumentada** del sistema dado en la expresión anterior está dada como sigue

$$
[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{bmatrix}. \tag{53}
$$

Ejemplo 18. El siguiente ejemplo representa un sistema de ecuaciones lineales y su ecuación matricial equivalente

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7, \\ x - 2y - 5z &= 3, \end{aligned} \tag{54}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{55}$$

1.1.7 Videos de apoyo

- Multiplicación de matrices
- Operaciones matriciales con un escalar
- Dependencia e independencia lineal
- Funciones linealmente independientes
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales (método de sustitución)
- Solución de sistemas de ecuaciones (método de Gauss)

1.2 Ecuaciones Diferenciales

Definición 3. Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + xy\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0, \tag{56}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} + 5\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 3x = \sin(t), \tag{57}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v. \tag{58}$$

Definición 4. Se define como **ecuación diferencial ordinaria** a una ecuación diferencial que involucra derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una **sola variable** independiente. En la primer y segunda ecuación, x es la variable independiente en la primera y t lo es en la segunda.

Definición 5. Se define como ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a más de una variable independiente. La tercer ecuación es un ejemplo de ecuación diferencial parcial donde las variables independientes son s y t.

Definición 6. El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Definición 7. El grado de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Ejemplo 19. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales

- $\dot{y} + by = 0$,
- $L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0$,
- $x\dot{y} + y = 3$,
- $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$,
- $\left(\ddot{y}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^3 + 3y = x^2$.

Definición 8. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es **lineal** en la variable dependiente y así como en la variable independiente x si está escrita como sigue

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x). \tag{59}$$

Definición 9. Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n, en la variable dependiente y así como en la variable independiente x si se expresa como sigue

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\dot{y}(x) + a_n(x)y(x) = b(x), \tag{60}$$

donde a_0 no es idénticamente cero y el término $b(x)$ se le llama **término no homogéneo**.

¿Cómo podemos identificar las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales? * La variable dependiente y y sus derivadas ocurren sólo en el primer grado. * No hay productos de y o cualquiera de sus derivadas. * No hay funciones trascendentales de y o sus derivadas

Ejemplo 20. Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son lineales

- $\ddot{y}(x) + 5\dot{y}(x) + 6y(x) = 0$,
- $y^{iv}(x) + x^2\ddot{y}(x) + x^3\dot{y}(x) = x \cdot \exp(x)$.

Observación. La primer ecuación es homogénea mientras que la segunda es no homogénea.

Ejemplo 21. Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son no lineales

- $\ddot{y}(x) + 5\dot{y}(x) + 6y^2(x) = 0$,
- $\ddot{y}(x) + 5(\dot{y}(x))^3 + 6y = 0$,
- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta \cdot t) = 0$,
- $\ddot{y}(x) + 5y(x)\dot{y}(x) + 6y(x) = 0$.

Una EDO lineal es EDO con **coeficientes constantes** si todos los coeficientes de las variables dependientes y sus derivadas son constantes. Si alguno de los coeficientes es función de la variable independiente se dice entonces que es una EDO lineal con **coeficientes variables**.

Ejemplo 22. Clasifique cada una de las siguientes ecuaciones como ordinarias, parciales, lineales, no lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables así como su grado y orden.

- $\dot{y}(x) + x^2y = x\exp{(x)}$,

- $\dddot{y}(x) + 4\ddot{y}(x) - 5\dot{y}(x) + 3y(x) = \sin(x)$,
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$,
- $y^{iv}(x) + 3\left[\ddot{y}(x)\right]^5 + 5y(x) = 0$,
- $\ddot{y}(x) + y\sin(x) = 0$,
- $\ddot{y}(x) + x\sin(y) = 0$,
- $x^{vi}(t) + \left(x^{iv}(t)\right)\left(\ddot{x}(t)\right) + x = t$,
- $(\dot{r}(s))^3 = \sqrt{\ddot{r}(s) + 1}$.

1.2.1 Soluciones

La ecuación

$$F\left(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{61}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden y representa una relación entre las $n+2$ variables $x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \ldots, y^{(n)}$ que puede ser resuelta para $y(n)$ en términos de las otras variables, i.e.

$$y^{(n)} = f(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \ldots, y^{(n-1)}). \tag{62}$$

Definición 10. Sea f una función real definida para toda x, se dice que la función f es una solución explícita si f satisface los siguientes requisitos

$$F\left(x, f, \dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \ldots, f^{(n)}\right), \tag{63}$$

está definida $\forall x \in I$.

$$F\left(x, f, \dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \ldots, f^{(n)}\right) = 0. \tag{64}$$

Lo anterior se traduce en que si al sustituir $f(x)$ y sus derivadas por y así como sus correspondientes derivadas, ésta se reduce a una identidad en I.

Definición 11. Una relación de la forma $g(x, y)$ se conoce como **solución implícita** si esta relación define una función real f de la variable x en un intervalo I tal que esta función es una solución explícita.

Ejemplo 23 La función f está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ como sigue

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x), \tag{65}$$

la cual es una solución explícita de la siguiente ED

$$\ddot{y}(x) + y(x) = 0, \tag{66}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 24 La relación

$$x^2 + y^2 - 25 = 0, \tag{67}$$

es una solución implícita de la siguiente ED

$$x + y(x)\dot{y}(x) = 0, \tag{68}$$

en el intervalo $I = (-5, 5)$.

Cuando hablamos de “resolver” una ecuación diferencial debemos considerar que no existen métodos exactos de solución y para ello utilizamos métodos aproximados, por ejemplo: 1. Métodos de integración por series 2. **Métodos numéricos** 3. Métodos gráficos

Ejemplo 25 Encuentre una solución a la ecuación diferencial

$$\dot{y} = 2x, \tag{69}$$

tal que en $x = 1$ esta solución valga 4.

Problema con valor inicial. Implica que la solución o sus derivadas tomen valores en un solo valor de x.

$$\ddot{y}(x) + y(x) = 0, \quad y(1) = 3, \quad \dot{y}(1) = -4. \tag{70}$$

Problema con valores en la frontera. Implica que la solución o sus derivadas tomen valores de *dos valores diferentes* de x.

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 5. \tag{71}$$

Ejemplo 26 Resuelva el siguiente problema con valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}, \quad y(3) = 4. \tag{72}$$

La familia de soluciones está determinada por

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{73}$$

1.3 Transformada de Laplace

Suponga que f es una función real de la variable $t > 0$ y s un parámetro real, entonces definimos la **transformada de Laplace** de f como

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t, \tag{74}$$

$$F(s) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t. \tag{75}$$

Para aplicar la transformada de Laplace a problemas físicos, es necesario invocar la transformada inversa. Si $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, entonces la **transformada inversa de Laplace** denotada como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t), \quad t \geq 0, \tag{76}$$

la cual mapea la transformada de Laplace de una función de regreso a la función original.

De las tablas tenemos

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0), \tag{77}$$

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{f}(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0), \tag{78}$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{79}$$

Ejemplo 27 Muestre que $y = 4\exp(2x) + 2\exp(-3x)$ es la solución al problema con valor inicial

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0, \quad y(0) = 6, \quad \dot{y}(0) = 2. \tag{80}$$

Definición 12. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal si está escrita de la siguiente forma

$$\dot{y}(x) + p(x)y(x) = q(x). \tag{81}$$

Ejemplo 28

$$x\dot{y} + (x+1)y = x^3 \quad \to \quad \dot{y} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = x^2, \tag{82}$$

con $p(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $q(x) = x^2$.

Ejemplo 29 Encuentre la solución a los siguientes problemas con valor inicial utilizando Laplace y el método descrito anteriormente

- $\dot{y} - 8y = 0, \quad y(0) = -3.,$
- $\dot{y} + 16y = 0, \quad y(0) = 2.,$
- $-4\dot{y} - 3y = 0, \quad y(0) = 1.,$
- $16\dot{y} + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.,$
- $\dot{y} + 2y = 1,$
- $\dot{y} + 4y = 8x,$
- $\dot{y} + 3y = 6x^2,$
- $\dot{y} + 3y = 3x^2e^{-3x}.$

1.3.1 Videos de apoyo

- Transformada de Laplace
- Ecuación diferencial de primer orden (solución)
- Ecuación diferencial lineal de primer orden (solución)
- Orden y grado de ecuaciones diferenciales
- Solución de ecuaciones diferenciales por Laplace