Capítulo 0
Erros experimentais

Esse capítulo lida com a questão dos erros experimentais, apresentando os tipos de erros experimentais, com a representação apropriada de resultados em termos de algarismos significativos, a propagação de erros experimentais pelos cálculos e finalmente a representação gráfica dos mesmos. Considera-se que esse assunto é importante para a análise crítica dos dados obtidos durante o curso de Hidráulica Experimental.

0.1 Definições preliminares

Erros experimentais estão presentes no dia a dia do trabalho experimental em Hidráulica. Exemplos são as medições de profundidade de escoamento, variação de peso e volume, medição de tempo, pressões, velocidades, entre outros.

Com o uso difundido de computadores e modernas calculadoras, alguém não habituado a lidar com erros e imprecisões experimentais pode chegar a resultados de áreas como 0,2342465... m2 mesmo quando a precisão dos instrumentos de medição seja apenas de milímetros. Quando dos cálculos de medidas experimentais estão acompanhados da respectiva barra de erros experimentais tem-se uma noção clara de quão preciso são os resultados. Isso por sua vez dá um importante subsídio na tomada de decisão ou no dimensionamento de uma unidade hidráulica dada a incerteza associada ao valor usado no dimensionamento.

Antes de seguirmos, é útil apresentar algumas definições:

Erro humano: Erros humanos em experimentos decorrem da inabilidade do experimentador de fazer uma leitura correta, seja por limitação na visão, por tendência ou critério errôneo na leitura. Erros humanos só podem ser percebidos com a mudança do experimentador por outro que tenha melhor capacidade de leitura ou que não possua determinada tendência em fazer a leitura;

Erros experimentais: Considera-se aqui como erro experimental a diferença entre o real valor de uma grandeza física (peso, área, velocidade, etc.) e o respectivo valor dessa grandeza obtido nas medições experimentais. Esses erros são resultados da soma dos erros sistemáticos e dos erros aleatórios associados à medição;

Erros sistemáticos: decorrem de imperfeição no equipamento de medição ou no procedimento (metodologia) de medição que leva a um erro que será obtido qualquer que seja a repetição feita na medição. Por exemplo, quando deseja-se medir o peso de um fluído com uma balança não calibrada;

Erros aleatórios: decorre da limitação do equipamento ou do procedimento de medição que impede que medidas exatas sejam tomadas. Por exemplo, digamos que a crista de um determinado vertedor tenha uma altura em metros igual a 0,150045321....m. Mas quando se dispõe apenas de uma régua milimétrica, pode-se esperar erros que chegam à metade da menor medida da régua, ou seja 0.0005 metro. Às vezes, esses erros são referidos como erros de leitura.

Precisão: De acordo com o dicionário eletrônico Aurélio, uma definição de precisão é "regularidade ou exatidão na execução", de onde se conclui que uma medida precisa é aquela que, em sendo feita várias vezes, é regularmente obtida. Precisão nas medições pressupõe que, por exemplo, em se repetindo várias vezes uma medição, a variação da mesma em relação ao valor médio é baixa;

Acurácia: associada à ausência de erros sistemáticos. Novamente, acurácia é a "Propriedade de uma medida de uma grandeza física que foi obtida por instrumentos e processos isentos de erros sistemáticos".

0.2 Lidando com erros experimentais

O objetivo maior das medições durante experimentos é o de obter resultados os mais acurados possíveis e com o grau de precisão requerido pelo problema que se deseja resolver. Assim, é fundamental que erros sistemáticos sejam eliminados das medições e que os instrumentos de medição estejam compatíveis com o tipo de medição e com o grau de exatidão que a análise requer. Em todo o caso, o cuidado e a atenção na execução dos experimentos podem ajudar a reduzir a ocorrência de erros nos experimentos. A eliminação de erros sistemáticos pode ser conseguida com a prévia calibração dos instrumentos de medição a serem utilizados ou seguindo o procedimento de medição corretamente. Dando um exemplo simples, um molinete para medição de velocidade de corrente que apresente erros sistemáticos pode ser calibrado por comparação de seus resultados com aquele obtidos com um velocímetro Doppler Acústico (ADV) previamente aferido. Às vezes é possível que erros experimentais sejam eliminados ou reduzidos com a mudança do procedimento experimental. Usando o exemplo acima, fazendo-se a medição da velocidade diretamente com o ADV. Por outro lado, se o erro sistemático decorre da falha de alinhar o molinete com o fluxo de escoamento, a correção no alinhamento pode eliminar o erro sistemático.

O problema dos erros sistemáticos é que eles não são facilmente percebidos, sendo possível que esses erros estejam presentes e não sejam percebidos a menos que os resultados sejam comparados com aqueles teoricamente esperados. Nesse caso, diferentemente dos erros aleatórios, a média de diversas repetições das medições não se aproxima dos resultados teoricamente esperados.

Erros aleatórios estão associados à precisão dos instrumentos utilizados e ao número de repetições feitas na medição. <u>Quando se promove apenas uma medição, o erro aleatório torna-se o erro da medição, que é metade da menor medida do instrumento</u>. No caso da medida sem repetição de um comprimento ou profundidade por meio de uma régua milimétrica, o erro experimental é de 0,5 milímetro. <u>Dada a limitação do tempo durante a execução dos experimentos, não são feitas repetições das medições experimentais.</u>

Conceitos de estatística devem ser introduzidos quando várias repetições da mesma medição são feitas durante um experimento. Assumindo não existirem erros sistemáticos (instrumentos calibrados e procedimento corretamente executado), o resultado de N repetições de uma medição experimental é a média aritmética entre elas, ou seja:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \sum_{j=1}^{N} x_j \quad (0.1)$$

Assumindo que o número de repetições das medidas seja suficientemente alto de forma que a distribuição dos desvios entre $\bar{x}-x_j$ siga uma distribuição normal, o erro aleatório associado às medidas experimentais é dado por

$$\Delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (0.2)$$

Onde σ_x é o desvio padrão das amostras, ou seja:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2} \quad (0.3)$$

Assim, o número de repetições N tende a reduzir o tamanho do erro aleatório nas medições, embora seja por um fator de $\sqrt{N}$.

Uma definição também útil é a do erro relativo, que é expresso em termos do valor médio da medida experimental $\bar{x}$ e do erro aleatório Δx como

$$(\Delta x)_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \quad (0.4)$$

Em resumo, no que tange aos erros experimentais, é importante considerar que:

- Erros humanos devem ser eliminados pela execução criteriosa das medições do experimento, sob pena de ser necessário repetir o experimento;
- Quando se suspeita da existência de erros sistemáticos deve-se proceder a uma calibração do experimento e de uma revisão dos procedimentos experimentais
- Erros aleatórios podem ser reduzidos com a execução de repetições das leituras dos experimentos

0.3 Algarismos significativos e erros

Da discussão anterior, percebe-se que resultados experimentais devem ser expressos na forma de $\bar{x}$ +Δx. Contudo, uma pergunta formulada anteriormente (se há sentido em representar o resultado de uma área como 0,2342465...m²) ainda não foi respondida. Essencialmente, para responder essa pergunta, é necessário relembrar o conceito de algarismos significativos.

Como o leitor deve se recordar, o número 0,234 e o número 0,2342465 diferem num aspecto fundamental que é a precisão. Imaginando um exemplo simples, a medição de uma profundidade usando uma régua centimétrica. Nesses experimentos, uma única leitura de profundidade indicou uma profundidade de 0,234 m. O último número significativo representa uma estimativa de quantos milímetros a profundidade excede 23 centímetros. Porque apenas uma medição foi feita, o erro dessa estimativa é igual à metade da precisão do instrumento de leitura, ou seja, 5 milímetros. O resultado experimental seria expresso como 0,234 ± 0,005 m. Se, por outro lado, a medição de profundidade fosse feita com uma régua milimétrica com um Vernier acoplado, a precisão das medidas seria de 0,1 milímetro, ou seja, 100 vezes maior. Retomando o exemplo anterior, seria possível medir uma profundidade de 0,23425 ± 0,00005 m. Finalmente, se mais repetições da leitura de profundidade fossem feitas, então a leitura seria a média aritmética e o erro seria calculado como $\sigma x/\sqrt{N}$.

Em qualquer que seja o caso, o erro experimental incide no último significativo, ou seja, nos milímetros. Como consequência, o erro experimental deve ser expresso em apenas um número significativo, não sendo correto representar erros experimentais (ou o resultado da propagação de erros experimentais) como ±0,00484... Também não faz sentido representar o resultado experimental como 0,2342465 ± 0,005 por que os últimos números (...2465) são menores que erro experimental. <u>Para compatibilizar os valores, adotam-se os arredondamentos para cima (no caso de algarismo maior ou igual a 5) ou para baixo (no caso de algarismo menor que 5).</u>

<u>Em suma, o número de algarismos significativos que deve ser usado na representação das medições experimentais está sujeito a precisão das medidas feitas. Os erros experimentais (e as propagações dos erros) devem ser representados em apenas 1 algarismo significativo, sendo esse algarismo o limite da precisão que os resultados experimentais devem ser representados.</u>

0.4 Propagação de erros experimentais

Frequentemente diferentes tipos de medição experimentais são realizados de forma a obter grandezas de interesse. Num exemplo simples, toma-se a medida de pressão em 2 pontos P1 e P2 ao longo de um conduto fechado pressurizado de forma a obter a perda de energia Hf ao longo do mesmo. Deseja-se saber qual seria a forma correta de expressar a perda de energia ao longo desses dois pontos considerando os erros associados a cada uma das duas medidas experimentais e a independência das mesmas.

Para responder essa pergunta, vamos recordar o conceito das séries de Taylor. Uma função q de várias variáveis representa a grandeza experimental (tal como a perda de carga entre dois pontos) que desejamos obter. Sejam também m,n... medições experimentais de grandezas independentes que são necessárias à obtenção do valor de q. Sejam dados os erros associados à cada uma das medidas experimentais, respectivamente Δm,Δn,.... A representação da grandeza q em função das medidas experimentais pode ser dada em termos da expansão em séries de Taylor:

$$\Delta q(m,n,...) = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial n}\Delta n\right)^2 + ...} \quad (0.5)$$

de forma que o erro seja limitado pelo valor:

$$\Delta q(m,n,...) \leqslant \left|\frac{\partial q}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial q}{\partial n}\right|\Delta n + ... \quad (0.6)$$

Essa regra se aplica a qualquer forma de operações com mais de uma medida experimental. No exemplo inicial, a função q seria a perda de energia no conduto Hf, cujo valor médio é expresso em termos das medidas experimentais na forma:

$$q(m,n,...) = \bar{H}_f(P1,P2) = \bar{P}1 - \bar{P}2 \quad (0.7)$$

As medidas P1 e P2 têm erros associados de ΔP1 e ΔP2 respectivamente, com valores das derivadas ∂Hf/∂P1 e ∂Hf/∂P2 respectivamente de 1 e −1. Assim, levando na equação 0.5, o erro de ΔHf é expresso da seguinte forma:

$$\Delta Hf = \sqrt{(1.\Delta P1)^2 + (-1.\Delta P2)^2} = \sqrt{(\Delta P1)^2 + (\Delta P2)^2} \quad (0.8)$$

Para terminar essa seção, tem-se outro exemplo: calcular o erro experimental da medida da vazão de um canal, dadas as medições da velocidade V +ΔV, da largura do canal L+ΔL e da profundidade H +ΔH. A vazão média do canal é dada por:

$$\bar{Q} = \bar{H}.\bar{L}.\bar{V} \quad (0.9)$$

Para calcular a fórmula do erro associado ao valor de $\bar{Q}$ calculamos primeiramente as derivadas parciais calculadas para os pontos $\bar{H}$, $\bar{L}$, $\bar{V}$ obtendo $\partial Q/\partial H = \bar{L}.\bar{V}$, $\partial Q/\partial L = \bar{H}.\bar{V}$ e $\partial Q/\partial V = \bar{H}.\bar{L}$. Assim, introduzindo esses resultados na equação 0.5 tem-se:

$$\Delta Q(L,H,V) = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial H}\Delta H\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\Delta V\right)^2}$$

$$\Delta Q(L,H,V) = \sqrt{\left(\bar{L}.\bar{V}\Delta H\right)^2 + \left(\bar{H}.\bar{V}\Delta L\right)^2 + \left(\bar{H}.\bar{L}\Delta V\right)^2} \quad (2.10)$$

Expressando o erro relativo (ΔQ)r tem-se:

$$\Delta Q(L,H,V)_r = \frac{\Delta Q(L,H,V)}{\bar{H}\bar{L}\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta H}{\bar{H}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{\bar{L}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{\bar{V}}\right)^2} \quad (2.11)$$

0.5 Representação gráfica de resultados experimentais

Essa seção é particularmente direcionada à produção dos gráficos para a disciplina de hidráulica experimental. Os pontos a serem considerados no traçado de gráfico são os seguintes:

- Erros experimentais devem estar apresentados nos gráficos na forma de barras de erros nos pontos. Citamos como exemplo a produção de um gráfico de vazão num canal Q em função da profundidade H. Cada par de coordenadas $\bar{Q}$, $\bar{H}$ define ponto experimental, mas as barras de erro ΔQ,ΔH devem estar presentes acima e abaixo dos pontos. Caso as barras de erros sejam demasiadamente pequenas, deve-se explicar a ausência delas na legenda da figura como “as barras de erro são demasiado pequenas para aparecer no gráfico”.
- As escalas do gráfico devem ser escolhidas de forma a enfatizar e facilitar a análise dos resultados e a comparação com a previsão teórica.

- Lembre-se de adicionar títulos para o gráfico, para os eixos do gráfico (os nomes das variáveis), e de numerar as escalas de forma a facilitar a leitura e compreensão do mesmo.
- Não una os pontos experimentais, mas quando for requerido use o mesmo gráfico com os pontos experimentais para representar a previsão teórica de forma a permitir a comparação com os resultados de laboratório.
- Adicione uma legenda no pé do gráfico onde seja apresentado o número do gráfico e o que ele representa de forma a facilitar a leitura e a compreensão do leitor.

Atividade 1
Medidas Experimentais e Propagação de Erros

A Atividade 1 retrata um experimento no qual se ensaiou o funcionamento de um vertedor instalado em um canal de laboratório. Um vertedor é essencialmente um anteparo, que nesse caso é fino (delgado) e perpendicular ao escoamento, com sua aresta superior (soleira) de geometria definida. Foram coletados dados com o objetivo de gerar uma curva experimental carga sobre o vertedor *versus* vazão escoada no canal (em regime permanente). A carga é, de forma simplificada, a profundidade da água à montante (antes, no sentido do escoamento) do vertedor subtraída a altura da soleira do vertedor.

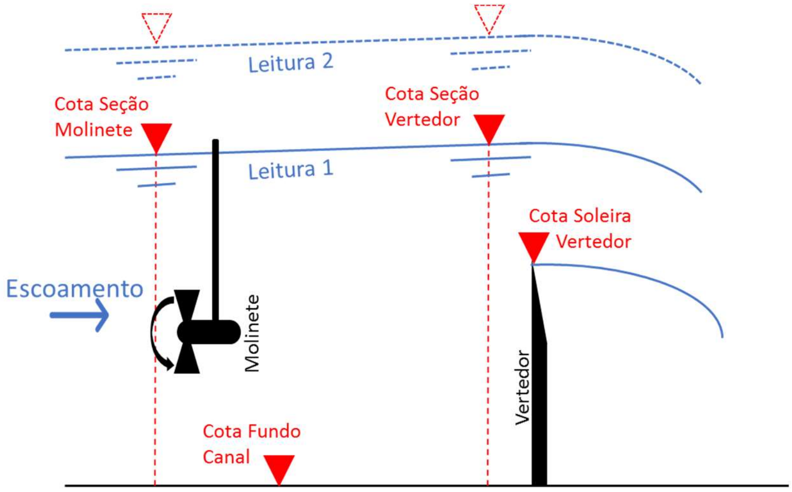
Uma fórmula simples aplicável ao problema de escoamento sobre vertedores retangulares delgados (também chamados descarregadores de Bazin) foi proposta por Francis em 1883:

$$Q = 1{,}838 \cdot L \cdot H^{1,5}$$

Na qual: Q é a vazão sobre vertedor [m^3/s], L é a largura do vertedor [m] e H é a carga sobre a soleira [m]. Essa equação é utilizada para vertedores sem efeito de contrações laterais (<u>ou seja, a largura L do vertedor é igual à largura do canal</u>) e despreza a velocidade de aproximação.

Para diferentes valores de profundidade no canal (e de carga H) foi medida a velocidade de escoamento por meio de um molinete. A equação do molinete relaciona o número de rotações por segundo e a velocidade V de escoamento, e é dada abaixo da tabela "Resultados do Experimento".

Para determinar a vazão associada a essa medição de velocidade, multiplica-se ela pela área transversal do escoamento. A área de escoamento é definida como o produto dos valores da profundidade seção molinete (h_1= Cota Seção Molinete – Cota Fundo Canal) pela Largura do Canal. A carga do vertedor, por sua vez, é definida como a diferença entre os valores da coluna "Cota seção vertedor" e os valores da coluna "Cota da soleira do vertedor".



Pede-se: executar os itens a) até h), apresentando a correspondente propagação dos erros experimentais baseada em fórmulas de erro do tipo:

$$\Delta q(m, n, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial n}\Delta n\right)^2 + \cdots}$$

a) A velocidade de rotação do molinete em rotações por segundo

b) Os valores de velocidade *V* de escoamento em *m/s*

c) As áreas de escoamento *A* em m^2

d) A vazão *Q* de cada uma das leituras em m^3/s

e) As cargas hidráulicas *H* nos vertedores

f) A vazão Q pela fórmula de Francis com a propagação de erro

g) Criar uma tabela com os valores obtidos experimentalmente de Q vesus H (vazão versus carga no vertedor) com os respectivos cálculos de erro (valor ± erro), comparando-os com os valores calculados a partir da equação de Francis.

h) Analisar a aplicabilidade dessa equação aos dados coletados no experimento.

<u>Resultados do Experimento - Vertedores</u>

Medidas de carga no vertedor e dados do molinete

LEITURA	COTA SEÇÃO MOLINETE (mm)	COTA SEÇÃO VERTEDOR (mm)	NR. ROTAÇÕES MOLINETE	TEMPO (S)
1	202,50 +/- 0,05	206,50 +/- 0,05	79,5 +/- 0,3	60 +/- 1
2	224,80 +/- 0,05	226,90 +/- 0,05	148,5 +/- 0,3	60 +/- 1
3	235,00 +/- 0,05	239,30 +/- 0,05	185,0 +/- 0,3	60 +/- 1
4	251,90 +/- 0,05	255,80 +/- 0,05	239,0 +/- 0,3	60 +/- 1
5	264,30 +/- 0,05	268,20 +/- 0,05	376,0 +/- 0,3	60 +/- 1
6	281,20 +/- 0,05	283,90 +/- 0,05	330,0 +/- 0,3	60 +/- 1

Leitura 1,2,3: Apenas alunos com soma dos 2 primeiros dígitos (ano) da matrícula de 0 a 8

Leituras 4,5,6: Apenas alunos com soma dos 2 primeiros dígitos (ano) da matrícula de 9 e 10.

Largura do canal

Turma	Largura (cm)	Erro (cm)
02	29,500	±0,005
03	30,500	±0,005

Cota do fundo do canal: -0,095 ± 0,005 cm

Cota da soleira do vertedor: 15,095 ± 0,005 cm

Número da hélice do molinete: 1

Número do Molinete: 14538

Equação do molinete: $v = 0{,}0562 \cdot m + 0{,}038$; para $m < 6{,}47$;

$v = 0{,}0545 \cdot m + 0{,}049$; para $m > 6{,}47$.

Observação: nas equações do molinete m = nr. rotações molinete/tempo;

v = velocidade do escoamento [m/s]