PETER SCHOLZEN PERFEKTOIDIT AVARUUDET

JESSE JÄÄSAARI

Peter Scholzelle myönnettiin viime elokuussa Fieldsin mitali “aritmeettisen algebrallisen geometrian mullistamisesta p-adisten kuntien yli perfektoidien avaruuksien (engl. perfectoid spaces) teorian avulla, niiden sovelluksista Galois’n esitysten teoriaan, ja uusien kohomologiateorioiden kehittämisestä”. Tässä tekstissä keskitytään Scholzen alunperin väitöskirjassaan (johon artikkeli [3] perustuu) määrittelemiin perfektoideihin avaruuksiin (tämän ja muiden tekstissä esiintyvien käsitteiden täsmälliset määritelmät löytyvät artikkelista [3]), eikä esimerkiksi hänen kehittämiinsä kohomologiateorioihin (kts. esim. [1]).

Olkoon p alkuluku. Algebrallisessa lukuteoriassa on kaksi luonnollisesti vastaan tulevaa kuntaa: p-adisten lukujen kunta $\mathbb{Q}_p$ ja formaalien Laurent’n sarjojen kunta $\mathbb{F}_p((t))$. Ensisilmäyksellä nämä kunnat näyttävät samanlaisilta; eräällä tavalla voi ajatella alkuluvun $p \in \mathbb{Q}_p$ vastaavan muuttujan $t \in \mathbb{F}_p((t))$ roolia. Lähempi tarkastelu kuitenkin osoittaa, että näillä kunnilla on paljon eroja: esimerkiksi yhteenlasku $\mathbb{F}_p((t))$:ssä on paljon luonnollisempaa kuin $\mathbb{Q}_p$:ssä. Käy ilmi, että kunnan $\mathbb{Q}_p$ karakteristika on nolla ja kunnan $\mathbb{F}_p((t))$ karakteristika on p, erityisesti kunnat eivät ole isomorfisia. Fontaine ja Wintenberger [2] kuitenkin osoittivat 1970-luvulla, että jossakin mielessä ensimmäinen intuitio kuntien samanlaisuudesta ei ole täysin väärä. Nimittäin lisäämällä p:n potenssijuuria kuntien välille saadaan hämmästyttävä yhteys. Jos merkitään $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty}) := \cup_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}_p(p^{1/p^n})$ ja $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty}) := \cup_{n=1}^{\infty}\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^n})$, niin silloin

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}/\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})}/\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})). \tag{1}$$

Tästä isomorfismista seuraa bijektio $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$:n äärillisten kuntalaajennosten ja $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$:n äärellisten kuntalaajennosten välille. Tämä tulos on Scholzen perfektoidien avaruuksien teoriaa motivoiva lähtökohta. Kunnan $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ täydellistymä on esimerkki niinsanotusta (karakteristikan nolla) perfektoidista kunnasta (engl. perfectoid field). Perfektoidin kunnan K yli Scholze määrittelee kaksi uutta käsitettä: perfektoidin K-algebran ja edelleen affinoidin K-perfektoidin avaruuden. Nämä ovat oleellisesti analogioita klassisen algebrallisen geometrian käsitteiden “algebra kunnan yli” ja “affinoidi avaruus algebran yli” kanssa. Lopulta K-perfektoidi avaruus saadaan liimaamalla yhteen affinoideja K-perfektoideja avaruuksia (joten perfektoidi avaruus on eräällä tavalla skeeman vastine tässä kontekstissa). Lisäksi perfektoidista kunnasta K voidaan suhteellisen helposti konstruoida karakteristikan p perfektoidi kunta $K^\flat$, kts. [3, Luku 3] .

Kutsumme tätä kuvausta $K \mapsto K^\flat$ kallistuskuvaukseksi (engl. tilting). Kallistuskuvaus siirtyy ylläkuvatussa prosessissa vaiheesta toiseen kuljettaessa K:sta K-prefektoidiin avaruuteen, ja näin ollen jokaiseen K-perfektoidiin avaruuteen X voidaan liittää $K^\flat$-perfektoidi avaruus $X^\flat$. Nyt hämmästyttävä fakta on, että funktori $X \mapsto X^\flat$ indusoi isomorfismin K-perfektoidien avaruuksien kategorian ja $K^\flat$-perfektoidien avaruuksien kategorian välille. Lisäksi funktori indusoi bijektion X:n äärellisten étale-peitteiden ja $X^\flat$:n äärellisten étale-peitteiden välille. Näistä tuloksista jälkimmäinen on isomorfismin (1) pitkälle menevä yleistys. Näin on siis syntynyt yhteys karakteristikan nolla omaavien kuntien päällä elävien geometristen avaruuksien ja karakteristikan p omaavien kuntien päällä elävien geometristen avaruuksien välille.

Scholzen ensimmäinen sovellus tälle teorialle oli Delignen paino-monodromiakonjektuurin (engl. weight-monodromy conjecture) todistaminen monissa uusissa tapauksissa p-adisten kuntien yli. Vastaava tulos oli tunnettu kunnan $\mathbb{F}_p((t))$ yli (Delignen itsensä todistamana) ja monissa tapauksessa Scholze onnistui siirtämään Delignen tuloksen p-adisten lukujen maailmaan käyttäen ylläesitettyjä yhteyksiä.

Perfektoidien avaruuksien teorialle on löytynyt paljon muitakin sovelluksia, esimerkiksi p-adiseen Hodgen teoriaan [4] ja Galois’n esitysten teoriaan [5].

Viitteet

[1] Bhatt, B., P. Scholze ja M. Morrow: *Integral p-adic Hodge theory*, arXiv:1602.03148.

[2] Fontaine, J.-M. ja J.-P. Wintenberger: *Extensions algébrique et corps des normes des extensions APF des corps locaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. (1979), A-B, 288(8): A441–A444.

[3] Scholze, P.: *Perfectoid spaces*, Publ. math. de l’IHES 116 (2012), no. 1, 245–313.

[4] Scholze, P.: *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum of Mathematics, Pi, 1, e1, 2013.

[5] Scholze, P.: *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Annals of Mathematics (2) 182 (2015), no. 3, 945–1066.