Helsingin yliopisto

Kandidaatintutkielma

Hölderin lause

Tekijä:
Jesse JÄÄSAARI

Ohjaaja:
Prof. Eero SAKSMAN

2. huhtikuuta 2013

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on todistaa Hölderin lause, joka sanoo seuraavaa:

Lause: Gammafunktio $\Gamma(z)$ ei toteuta mitään algebrallista differentiaaliyhtälöä, jonka kertoimet ovat rationaalifunktioita.

Lauseessa esiintyvällä gammafunktiolla on paljon kiinnostavia ominaisuuksia, joita käymme tutkielman alussa läpi. Aloitamme tutustumalla gammafunktion historiaan aina 1700-luvun alusta 1900-luvun alkupuolelle, Hölderin lauseen todistamiseen asti. Johdannon historiallinen osuus perustuu pääasiassa Davisin artikkeliin [6].

1.1 Gammafunktion historiaa

Lähdemme liikkeelle tarkastelemalla peräkkäisten positiivisten kokonaislukujen tuloa. Jokaiselle positiivisille kokonaisluvuille n määritellään kertoma kaavalla

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Gammafunktion keksiminen lähti liikkeelle Leonhard Eulerin ja Christian Goldbachin kirjeenvaihdosta vuonna 1729 heidän yrittäessään ratkaista vanhaa ongelmaa. Daniel Bernoulli ja Goldbach esittivät 1720-luvulla kysymyksen siitä, voiko kertomafunktion laajentaa mielekkäästi myös positiivisten kokonaislukujen ulkopuolelle. Motivaatio tähän interpolaatio-ongelmaan oli vastaava tulos n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summalle: on helppo osoittaa, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tällä kaavalla saadaan mielekäästi laajennettua tällainen summa kokonaislukujen ulkopuolelle. Esimerkiksi kun $n = 11/2$ saadaan ”summaksi”

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{143}{8}.$$

Kertomafunktion kohdalla tällainen menettely ei toimi, sillä sen arvoille ei tunnettu yleistä lauseketta alkeisfunktioiden avulla.

Paperissaan *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*, vuonna 1729, Euler todisti[1], että vastaus Bernoullin ja Goldbachin esittämään kysymykseen oli myönteinen. Hän esitti kertomafunktion äärettömänä tulona: useiden erilaisten kokeilujen jälkeen Euler päätyi seuraavaan tuloesitykseen kertomafunktiolle, joka on voimassa kaikilla luonnollisilla luvuilla n

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = n!$$

[1] Eulerin todistukset eivät olleet aina kovin täsmällisiä ja hän luottikin paikoitellen intuitioonsa.

Nykyisillä merkinnöillä vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)...(n+m)},$$

mikä myöhemmin tässä tutkielmassa nähdään todella olevan gammafunktion arvo $\Gamma(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Euler ei lopettanut tähän vaan jatkoi tutkimusta aiheen ympäriltä. Hän havaitsi, että tietyillä n:n arvoilla hänen tuloesityksensä antoi kokonaislukuarvon, toisilla taas ei. Esimerkiksi kun $n = 1/2$ sen arvoksi tulee π.

Euler oli törmännyt π:n usein integraalien yhteydessä. Tämän intuition varassa hän pyrki esittämään tuloesityksensä integraalina. Euler tarkasteli integraalia

$$\int_0^1 t^e(1-t)^n dt,$$

missä n on luonnollinen luku. Kehittämällä termin $(1-t)^n$ auki binomikaavan avulla hän laski kyseisen integraalin arvoksi

$$\frac{n!}{(e+1)(e+2)...(e+n+1)}.$$

Useiden manipulaatioiden ja sijoitusten avulla hän sai lopulta ulos

$$n! = \int_0^1 (-\log t)^n dt.$$

Euler siis onnistui antamaan lausekkeen, joka antaa kiinteällä $n \in \mathbb{N}$ arvoksi $n!$. Yksinkertaisella muuttujan vaihdolla tämän voi kirjoittaa myös muodossa

$$n! = \int_1^\infty t^{n-1}e^{-t} dt.$$

Näin siis on saatu lauseke, joka laajentaa kertomafunktion positiivisten kokonaislukujen ulkopuolelle ja siten interpolaatio-ongelmaan oli saatu vastaus. Edelle mainitun muuttujanvaihdon suoritti ensimmäisenä Adrien Marie Legendre. Hän oli myös ensimmäinen joka nimitti tätä integraalia gammafunktioksi Γ. Siis kaikilla $x > 0$ on määritelty

$$\Gamma(x) := \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$$

Matemaatikot huomasivat kuinka erityinen gammafunktio ja jatkoivat sen tutkimista. Ajan kuluessa sille löydettiin paljon uusia ominaisuuksia ja yhteyksiä muuhun matematiikkaan. Vuonna 1730 James Stirling todisti approksimaatiokaavan $n!$:lle suurilla

n:n arvoilla. Kuitenkin vasta vuonna 1900 Charles Hermite todisti, että Stirlingin kaava ja Eulerin integraali ovat yhtäsuuret. Vuonna 1812 tehtiin jälleen uusi läpimurto. Carl Friedrich Gauss todisti Eulerin tuloesityksen ja integraalin yhtäsuuriksi. Tämä kaava tunnetaan nykyään Gaussin kaavana. 1800- ja 1900-luvuilla todistettiin vielä kaksi erittäin tärkeää gammafunktioon liittyvää tulosta.

Ensimmäinen oli Bohr-Mollerupin lause, joka kertoo gammafunktion olevan ainoa välillä $x > 0$ määritelty funktio, joka toteuttaa samanaikaisesti tietyt ehdot. Tämän todistivat ensimmäisinä tanskalaiset matemaatikot Harold Bohr ja Johannes Mollerup vuonna 1922 [5]. Heidän alkuperäinen todistuksensa oli monimutkainen, mutta sitä saatiin lyhennettyä Emil Artinin toimesta [2]. Tästä syystä lauseeseen viitataan joskus Bohr-Mollerup-Artinin lauseena. Todistus on hämmästyttävän lyhyt, vain noin sivun pituinen, mutta sen löytämiseen kului 193 vuotta.

Toinen oli Hölderin lause. Kysymys siitä, toteuttaako gammafunktio algebrallista differentiaaliyhtälöä, oli pitkään avoin ongelma. Vuonna 1887 saksalainen matemaatikko Otto Hölder todisti, että gammafunktio ei toteuta yhtäkään algebrallista differentiaaliyhtälöä, jonka kertoimet ovat rationaalifunktioita [10]. Hölderin lause on kiinnostanut matemaatikkoja sen todistamisen jälkeen ja sille on löydetty useita uusia todistuksia. Esimerkiksi Alexander Ostrowski esitti uuden todistuksen vuonna 1919 [13]. Tässä tutkielmassa annamme kuitenkin Steven Bankin ja Robert Kaufmannin todistuksen, joka on tiettävästi yksinkertaisin kaikista todistuksista. Siinä löydetään välttämätön ehto sille, että gammafunktio toteuttaisi algebrallisen differentiaaliyhtälön, jonka kertoimet ovat tietynlaisessa[2] differentiaalikunnassa $\mathcal{M}$. Hölderin lause saadaan tämän avulla helposti.

1.2 Tutkielman sisällöstä

Alkuun luvussa 2 käymme nopeasti läpi tutkielmassa esiintyviä perusmääritelmiä kompleksianalyysistä kertauksena.

Luvussa 3 aloitamme määrittelemällä gammafunktion ja todistamme sen perusominaisuuksia, kuten yllämainitut tulokset ja muutaman funktionaaliyhtälön. Luku 4 on varattu Bohr-Mollerupin lauseelle. Sille esittämämme todistus on yksinkertaisin tunnettu ja se käyttää ainoastaan muutamia matemaattisen analyysin perustyökaluja. Samassa luvussa johdamme Bohr-Mollerupin lauseen avulla Stirlingin kaavat, joiden avulla voidaan approksimoida gammafunktiota suurilla muuttujan arvoilla. Kyseisessä luvussa käymme läpi tarvittavaa konveksien funktioiden teoriaa.

Viimeisessä luvussa todistamme tutkielman päätuloksen, Hölderin lauseen. Kuten aiemmin mainitsimme, antamamme todistus on tietääksemme lyhin tunnettu. Lisäksi luvussa on esitelty algebrallisten differentiaaliyhtälöiden teoriaa, jota lauseen 5.6, todistus käyttää.

Gammafunktioon liittyy paljon mielenkiintoista teoriaa, jota emme käsittele tässä tutkielmassa pitääksemme työn siedettävän pituisena. Esimerkiksi gammafunktion

[2] Myöhemmin määriteltävässä

ja beta-funktion

$$B(x,y) := \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \Re x > 0, \Re y > 0$$

välinen yhteys on ollut paljon tutkittu asia. Myöskään gammafunktion yhteyttä analyyttiseen lukuteoriaan (erityisesti Riemannin ζ-funktioon) tai todennäköisyyslaskentaan ei ole tässä esitelty.

Jos tutkielmassa esiintyvän lauseen todistus on otettu jostakin lähteestä, niin viite on annettu ja kirjoittaja on tarvittaessa lisännyt todistukseen yksityiskohtia. Jos jonkin lauseen todistus tai sen idea on otettu jostakin lähteestä, niin tämä viite on annettu. Jos viitettä ei ole todistus on kirjoittajan oma, joskin saman tyyppisiä todistuksia saattaa esiintyä joissakin oppikirjoissa.

2 Merkinnöistä ja määritelmistä

Tässä kappaleessa erittelemme tutkielmassa käytettyjä käsitteitä ja määritelmiä, joista suurin osa on standardeja. Nämä löytyvät mistä tahansa kompleksianalyysin perusteiden oppikirjasta tai luentomonisteesta; esimerkiksi [1], [9] ja [15].

2.1 Merkinnät

• Tavalliseen tapaan kompleksitasoa merkitään $\mathbb{C}$:llä sekä z-keskeistä ja $r > 0$ säteistä kuulaa merkitään $\mathcal{B}(z,r)$:llä.

• Tässä tutkielmassa x:llä tarkoitetaan reaalimuuttujaa ja z:lla kompleksimuuttujaa.

• Kompleksiluvun z reaali- ja imaginääriosia merkitään $\Re$ ja $\Im$.

• Kompleksiluvun $z := x + iy$ kompleksikonjugaatti on $\overline{z} := x - iy$.

• Poikkeuksena normaaliin merkitsemme e-kantaista logaritmia log:lla tavallisen ln sijaan.

• Eksponenttifunktiota merkitään toisinaan exp.

2.2 Määritelmät

• Olkoon A $\mathbb{C}$:n epätyhjä osajoukko. Funktio[3] $f : A \to \mathbb{C}$ on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0 \in A$ jos raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

missä $z_0 + h \in A$, on olemassa.

Palautetaan mieleen analyyttisen ja meromorfisen funktion määritelmät:

• Funktio f on analyyttinen pisteessä z, jos on olemassa z:n ympäristö $\mathcal{B}(z, r)$, $r > 0$, jonka jokaisessa pisteessä f on kompleksisesti derivoituva. Funktio f on analyyttinen alueessa Ω, jos se on analyyttinen jokaisessa pisteessä $z \in \Omega$.

• Funktio f on meromorfinen kompleksitason avoimessa osajoukossa D, jos se on analyyttinen siellä lukuunottamatta äärellistä määrää f:n erikoispisteitä, joita kutsutaan sen navoiksi. Tarkemmin; funktio f on meromorfinen pisteessä z_0, jos kiekossa $B(z_0, r)$, $r > 0$ pätee $f(z_0) = \infty$ ja funktio

$$\begin{cases} h(z) = \frac{1}{f(z)}, & \text{kun } 0 < |z - z_0| < r \\ h(z_0) = 0 \end{cases}$$

on analyyttinen pisteessä z_0.

• Olkoon f analyyttinen funktio f: $\mathcal{B}(a, r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$. Tällöin a on f:n n:nnen kertaluvun napa jos ja vain jos

$$\lim_{z \to a} (z - a)^n f(z) = c \neq 0,$$

missä c on vakio.

• Meromorfisen funktion f residy navassa a on yksikäsitteinen reaaliluku ℓ siten, että funktiolla

$$f(z) - \frac{\ell}{z - a}$$

on analyyttinen antiderivaatta punkteeratussa kiekossa $\mathcal{B}(a, r) \setminus \{a\}$. Residyä merkitsemme $\mathrm{Res}(f, a)$. Vaihtoehtoinen karakterisointi residylle on seuraava: jos f:llä on napa pisteessä a niin sillä on Laurent-kehitelmä

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

[3] Tässä tutkielmassa kaikki funktiot ovat, ellei toisin mainita, määriteltyjä jossain kompleksitason epätyhjässä osajoukossa ja niiden maalijoukko on $\mathbb{C}$.

Kerrointa a_{-1} sanotaan f:n residyksi pisteessä a.

Analyyttisellä jatkolla tarkoitamme seuraavaa:

- Olkoon f analyyttisen funktion alueessa Ω'. Tällöin sen analyyttinen jatko alueeseen $\Omega \supset \Omega'$ on analyyttinen funktio g alueessa Ω, jolle pätee $g\,|_{\Omega'} = f$.

- Funktiota f sanotaan kokonaiseksi, jos se on analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$.

- Rationaalifunktio on funktio, joka voidaan lausua kahden kompleksisen polynomin[4] osamääränä.

- Sanomme, että funktio f on k-periodinen, jos $f(z+k) = f(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

3 Gammafunktiosta

Tässä luvussa määrittelemme gammafunktion ja todistamme sen tärkeimpiä ominaisuuksia. Luvussa käsitellyt asiat löytyvät lähes poikkeuksetta kompleksianalyysin perusoppimateriaaleista. Esityksemme pohjautuu pitkälti Ahlforsin kirjaan [1] ja Saksmanin luentomonisteeseen [16]. Aloitamme määritelmällä:

Määritelmä 3.1. Eulerin gammafunktio Γ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla $x > 0$ integraalina

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1}$$

Gammafunktio voidaan laajentaa suurempaan alueeseen. Tämän todistamiseen tarvitsemme muutaman tuloksen.

Lause 3.2. Kaava

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

määrittelee analyyttisen jatkon oikeaan puolitasoon $\Re z > 0$.

Todistus: Jokaisella kiinteällä $t > 0$ kuvaus $z \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ on analyyttinen alueessa $\Re z > 0$. Lisäksi alueessa $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{n} < \Re z < n\}$ sillä on integroituva majorantti

[4] Kompleksinen polynomi on aivan kuin reaalipolynomi, mutta tässä tapauksessa polynomin kertoimet voivat olla aidosti kompleksisia. Toki reaalipolynomi on kompleksipolynomin erikoistapaus.

$$\left|e^t t^{z-1}\right| = e^{-t} t^{\Re z-1} \leq e^{-t}(t^{\frac{1}{n}-1} + t^{n-1}).$$

Näistä seuraa[5], että funktio

$$g_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t} t^{z-1} dt$$

on analyyttinen kaistaleessa $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{n} < \Re z < n\}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siten gammafunktio saadaan jatkettua analyyttiseksi funktioksi oikeaan puolitasoon, sillä $\frac{1}{n} \to 0$ kun $n \to \infty$. $\square$

Monista gammafunktiota koskevista funktionaaliyhtälöistä ensimmäinen on seuraava:

Lause 3.3. Oikeassa puolitasossa $\Re z > 0$ pätee kaava $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Todistus: Olkoon $z \in \mathbb{C}$ sellainen, että $\Re z > 0$. Nyt osittaisintegroinnilla saadaan

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{M\to\infty} \Big/_0^M \frac{e^{-t} t^z}{z} + \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^z}{z} dt = \lim_{M\to\infty} \Big/_0^M \frac{e^{-t} t^z}{z} + \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \tag{2}$$

Tarkastellaan oikean puolen ensimmäistä termiä. Huomataan, että

$$\lim_{M\to\infty} \Big/_0^M \frac{e^{-t} t^z}{z} = \lim_{M\to\infty} \frac{M^z}{z e^M}.$$

Koska eksponentiaalinen kasvu on nopeampaa kuin potenssifunktion kasvu niin

$$\lim_{M\to\infty} \frac{M^z}{z e^M} = 0$$

Siten yhtälön (2) nojalla

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt.$$

Mutta gammafunktion määritelmän nojalla oikea puoli on $\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$, joten $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, mikä piti todistaa. $\square$

[5] Viitteen [16] lemman 1.2. nojalla

Yllä esitetyistä lauseista seuraa helposti, että gammafunktio laajenee meromorfiseksi funktioksi koko kompleksitasossa lukuunottamatta yksinkertaisia napoja $z = -n$, $n \geq 0$. Nimittäin soveltamalla lauseen 3.3. funktionaaliyhtälöä $n+1$ kertaa saadaan

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \tag{3}$$

kaikilla z joilla $\Re z > 0$. Nyt lauseen 3.2. nojalla yllä olevan yhtälön oikea puoli on analyyttinen alueessa $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > -n-1\}$ jokaisella luonnollisella luvulla n, lukuunottamatta yksinkertaisia[6] napoja pisteissä $z = 0, 1, \cdots, n$. Siten jokaisella $n \in \mathbb{N}$, myös $\Gamma(z)$ on analyyttinen alueessa $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > -n-1\}$ jokaisella luonnollisella luvulla n, lukuunottamatta yksinkertaisia napoja pisteissä $z = 0, -1, \cdots, -n$. Näin ollen analyyttisen jatkon nojalla saadaan gammafunktio jatkettua meromorfiseksi funktioksi koko kompleksitasoon.

Nyt on luonnollista kysyä mitkä ovat residyjen arvot navoissa $z = 0, -1, -2, \cdots$ Käy ilmi, että ne on helppo laskea:

Lause 3.4. Gammafunktion residy pisteessä $z = -n$, $n \in \mathbb{N}$ on

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Todistus: Koska gammafunktiolla on yksinkertaiset navat pisteissä $z = 0, -1, \cdots$ niin

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z).$$

Kaavan (3) ja lauseen 3.3. nojalla kiinteällä $n \in \mathbb{N}$ voidaan kirjoittaa

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n+1)}.$$

Antamalla $z \to -n$ yllä olevassa kaavassa saadaan

$$\mathrm{Res}(\Gamma, n) = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

kuten haluttiinkin. $\square$

Lauseen 3.3 funktionaaliyhtälön avulla voidaan määrittää gammafunktion arvot kaikilla luonnollisilla luvuilla. Osoittautuu että

Korollaari 3.5. $\Gamma(n+1) = n!$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

[6] Napojen yksinkertaisuus seuraa suoraan kaavasta (3).

Todistus: Todistamme väitteen induktiolla n:n suhteen. Kaavan (1) nojalla $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}tdt = 1 = 0!$. Oletetaan, että $\Gamma(k) = (k-1)!$, jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin lauseen 3.3. nojalla $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$. Siten induktioaskel on otettu ja väite seuraa. $\square$

Gammafunktiolle on voimassa myös seuraava yksinkertainen funktionaaliyhtälö:

Lemma 3.6. Kaikilla $z \neq \{0, -1, -2, ...\}$ pätee

$$\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma}(z).$$

Todistus: Seuraa suoraan määritelmästä 3.1. ja tiedosta $\Im t^z = t^{\Im z}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(\overline{z}) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\overline{z}-1}dt = \int\limits_0^\infty \overline{e^{-t}t^{z-1}}dt = \overline{\Gamma}(z).$$

$\square$

Seuraaksi esitämme ja todistamme gammafunktion erään tuloesityksen. Todistuksen idea on peräisin viitteestä [1].

Lause 3.7. (Weierstrassin tulokaava) Kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, ...\}$ gammafunktiolle pätee seuraava tuloesitys:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right],$$

missä $\gamma := \lim_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right]$ on Eulerin-Mascheronin vakio ($\approx 0,5772156649...$).

Todistus: Määritellään

$$G(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Koska tunnetusti[7]

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

niin

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

[7] Kts. [1] s.197; tässä viitteessä kaava on johdettu erikoistapauksena Weierstrassin yleisemmästä tuloksesta.

Selvästi $G(z-1)$:llä on samat nollakohdat kuin $G(z)$:lla. Siten

$$G(z-1) = ze^{f(z)}G(z),$$

jossa $f(z)$ on kokonainen funktio. Ottamalla logaritmi[8] ja derivoimalla puolittain saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z}+f'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right).$$

Korvaamalla n $n+1$:llä vasemmanpuoleisessa kaavassa ei muuta sen arvoa, joten

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Siten yhdistämällä tämä derivoimalla saadun kaavan oikeaan puoleen nähdään, että $f'(z)=0$ kaikilla $z\in\mathbb{C}$. Tästä seuraa, että f on vakio: $f(z):=\gamma$. Siten erityisesti

$$G(z-1) = ze^{\gamma}G(z). \tag{4}$$

Merkitään $H(z):=G(z)e^{\gamma z}$. Nyt edellisen kaavan nojalla H toteuttaa funktionaaliyhtälön

$$H(z-1) = zH(z).$$

Tällöin funktio $g(z):=1/zH(z)$ toteuttaa funktionaaliyhtälön

$$g(z-1) = \frac{g(z)}{z-1}.$$

Nyt lauseen 3.3. nojalla $g(z)=\Gamma(z)$ kaikilla $z\in\mathbb{C}$. Kysytty tuloesitys seuraa. Tarkastetaan vielä, että γ todella on Eulerin-Mascheronin vakio. Valitsemalla $z=1$ kaavassa (4) saadaan $1=G(0)=e^{\gamma}G(1)$, eli

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}.$$

Siten oikean puolen n:s osittaistulo on muotoa

$$(n+1)e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)},$$

josta päätellään ottamalla logaritmi, että

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

[8] Logaritmi voidaan ottaa, koska ylläolevat tulot suppenevat.

$\square$

Tämän seurauksena saamme tietoa gammafunktion derivoituvuudesta:

Lause 3.8. Gammafunktio on äärettömän monta kertaa derivoituva, jokaisella $z \in \mathbb{C}$.

Todistus: Kaavan $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ nojalla riittää osoittaa väite tilanteessa $\Re z > 0$. Riittää osoittaa, että funktio $\log \Gamma(z)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva, sillä tällöin kaavasta $\Gamma(z) = e^{\log \Gamma(z)}$ seuraa, että myös gammafunktio on äärettömän monta kertaa derivoituva. Ottamalla puolittain logaritmi Weierstrassin tulokaavasta saadaan

$$\log \Gamma(z) = -\log z - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right).$$

Derivoimalla oikeaa puolta termeittäin saadaan derivaataksi

$$-\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}.$$

Olkoon $\mathcal{K}$ alueen $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$ kompakti osajoukko, jossa $|z| \leq \ell < \infty$. Tällöin $\mathcal{K}$:ssa on voimassa arvio

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{n\,|z+n|} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{n^2} < \infty.$$

Siten derivoimalla saatu sarja suppeenee lokaalisti tasaisesti. Siten myös termeittäin derivoidun sarjan täytyy supeta. Näin ollen $\log \Gamma(z)$ on derivoituva niissä alueen $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$ kompakteissa osajoukossa, jossa $|z| \leq \ell$, ja pätee

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}.$$

Koska tämä pätee mielivaltaisella $\ell \in \mathbb{R}$, niin se pätee koko alueessa $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$. Yleisemmin induktiolla nähdään, että jokaisella $m \geq 2$ pätee

$$\frac{d^m}{dz^m} \log \Gamma(z) = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m-1)}{(x+n)^m}.$$

Koska jokaisella $m \geq 2$ edellisen kaavan oikealla puolella oleva sarja suppenee, niin induktiolla saadaan, että $\log \Gamma(z)$ on äärettömän monta kertaa derivoituva alueessa $\Re z > 0$. Tämä todistaa väitteen. $\square$

Seuraavaksi esitämme lauseen, jonka avulla saadaan toinen hyödyllinen tuloesitys gammafunktiolle. Toinen (pidempi) todistus tälle lauseelle löytyy esimerkiksi viitteestä [16], s. 28 – 30.

Lause 3.9. (Gaussin kaava) Kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ pätee

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Todistus: Weierstrassin tulokaavan nojalla kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, ...\}$ pätee

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \\
&= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{z/n}}{z+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z} n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \exp\left(z\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Toisaalta pätee

$$e^{-\gamma z} \exp\left(z\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right) = n^z \exp\left(z\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)\right),$$

mistä väite seuraa välittömästi. □

Korollaarissa 3.5. saimme määrättyä gammafunktiolle arvon kaikilla luonnollisilla luvuilla. Nyt, luvun aikaisempia tuloksia käyttäen, saadaan lisää gammafunktion arvoja tietynlaisissa pisteissä.

Korollaari 3.10. Gammafunktio toteuttaa yhtälöt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ja

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi},$$

kun $n = 1, 2, \cdots$.

Todistus: Asettamalla $z = n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, lauseen 3.3. funktionaaliyhtälöön saadaan

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Iteroimalla tätä päädytään haluttuun kaavaan:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Edellisen kaavan ja lauseen 3.3. nojalla

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

mistä toinen kaava saadaankin. □

Seuraavaksi todistamme kaavan, joka antaa yhteyden gammafunktion eri arvojen välille. Todistus seuraa Ahlforsin kirjaa [1] s. 200.

Lause 3.11. (Legendren duplikaatiokaava) Alueessa $\Re z > 0$ pätee

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Todistus: Lauseen 3.8. nojalla voidaan tarkastella funktion $\log(\Gamma(z))$ toista derivaattaa. Siinä johdettiin esitys

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} \tag{5}$$

On selvää, että $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$:lla ja $\Gamma(2z)$:lla on samat navat, joten edellisen kaavan (5) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2}\\
&= 4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right]\\
&= 4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+m)^2}=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)
\end{aligned}$$

Integroimalla saadaan

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=e^{az+b}\Gamma(2z)$$

joillakin vakioilla $a,b\in\mathbb{R}$. Sijoittamalla tähän kaavaan $z=\frac{1}{2}$ ja $z=1$, sekä ottamalla huomioon tunnetut arvot $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ ja $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}\log(\pi)\\ a+b=\frac{1}{2}\log(\pi)-\log(2)\end{cases}$$

Tästä ratkaistaan

$$\begin{cases} a = -2\log(2) \\ b = \frac{1}{2}\log(\pi) + \log(2) \end{cases}$$

Siten

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}\log(\pi)+\log(2)-2z\log(2)} = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z),$$

mikä piti todistaa □

Legendren duplikaatiokaavan avulla saadaan toinen tärkeä funktionaaliyhtälö gammafunktiolle. Todistus seuraa Artin artikkelia [2] s. $25-26$.

Lause 3.12. (Eulerin peilikaava) Olkoon $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Tällöin

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{6}$$

Todistus: Merkitään $\varphi(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$. Funktio φ on kokonainen ainoastaan $z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$:ssa, sillä gammafunktiolla ei ole napoja ei-positiivisten kokonaislukujen ulkopuolella. Koska pätee $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$ ja $\sin(\pi(z+1)) = -\sin(\pi z)$, niin nähdään, että $\varphi(z)$ on 1-periodinen: $\varphi(z+1) = \varphi(z)$. Nyt Legendren duplikaatiokaavan nojalla voidaan kirjoittaa

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = C_1 2^{-z}\Gamma(z)$$

Tässä vakion C_1 eksplisiittisellä arvolla ei ole merkitystä, mutta sen voi laskea Legendren duplikaatiokaavasta olevan, $C_1 = 2\sqrt{\pi}$. Korvaamalla edellisessä kaavassa z $(1-z)$:lla saadaan

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right) = C_1 2^{z-1}\Gamma(1-z).$$

Nyt huomataan, että

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{z}{2}\right)\varphi\left(\frac{z+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \\ &= \frac{C_1^2}{4}\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z). \end{aligned}$$

Siten saatiin relaatio

$$\varphi\left(\frac{z}{2}\right)\varphi\left(\frac{z+1}{2}\right) = C_2\varphi(z), \tag{7}$$

missä C_2 on C_1:stä riippuva vakio. Jälleen, C_2:n tarkalla arvolla ei ole merkitystä. Koska gammafunktio ja sinifunktio ovat äärettömän monta kertaa derivoituvia niin funktio φ on myös äärettömän monta kertaa derivoituva. Jos määritellään $\varphi(z) = \pi$

kaikilla $z \in \mathbb{Z}$ niin $\varphi(z)$ on jatkuva funktio ja yhtälö (7) on voimassa myös näissä pisteissä jatkuvuuden johdosta. Osoitetaan nyt, että $\varphi(z)$ on vakio. Merkitään $g(z)$:lla funktion $\log \varphi(z)$ toista derivaattaa. Selvästi $g(z)$ on 1-periodinen. Nyt yhtälön (7) nojalla $g(z)$ toteuttaa funktionaaliyhtälön

$$\frac{1}{4}\left(g\left(\frac{z}{2}\right)+g\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)=g(z). \tag{8}$$

Koska $g(z)$ on jatkuva välillä $0 \leq z \leq 1$, niin se on myös rajoitettu tällä välillä, sanotaan vaikka vakiolla M: $|g(z)| \leq M$. Mutta koska $g(z)$ oli 1-periodinen, niin tämä arvio on voimassa kaikilla z. Nyt kolmioepäyhtälön ja kaavan (8) nojalla on voimassa

$$|g(z)| \leq \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{z}{2}\right)\right|+\frac{1}{4}\left|g\left(\frac{z+1}{2}\right)\right| \leq \frac{M}{4}+\frac{M}{4}=\frac{M}{2}.$$

Siispä yläraja saatiin pienennettyä $M/2$:een. Jatkamalla tätä prosessia yläraja saadaan mielivaltaisen pieneksi: k:nnen iteraation jälkeen se on $M/2^k$. Siten $g(z)=0$ kaikilla z. Koska $g(z)$ oli $\log \varphi(z)$:n toinen derivaatta, niin tästä seuraa, että $\log \varphi(z)$ on lineaarinen funktio. Toisaalta se on myös jaksollinen funktio. Näistä seuraa, että log $\varphi(z)$ on vakio, mistä puolestaan seuraa, että $\varphi(z)$ on vakio. Toisaalta tiedämme, että $\varphi(0)=\pi$. Siten $\varphi(z)=\pi$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Siispä $\varphi(z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)=\pi$, mikä haluttiin todistaa. $\square$

Edelliselle lauseelle on myös todistuksia, jotka eivät käytä Legendren duplikaatiokaavaa. Esimerkiksi residylausetta soveltavan todistuksen löytää viitteestä [16] s. 30.

Suorana seurauksena edellisestä saadaan:

Korollaari 3.13. $\Gamma(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Täten erityisesti funktio $\frac{1}{\Gamma(z)}$ on kokonainen.

Todistus: Seuraa suoraan kaavasta (6), sillä sen nojalla $\Gamma(z) \neq 0$ kun $z \in \mathbb{Z}/\{0,-1,-2,...\}$ ja pisteet $0,-1,-2,...$ ovat gammafunktion napoja. $\square$

4 Bohr-Mollerupin lause

Tässä luvussa todistamme gammafunktion karakterisointilauseen eli Bohr - Mollerupin lauseen. Tätä varten tarvitsemme logaritmisen konveksisuuden määritelmän. Ennen sitä palutamme kuitenkin mieliin konveksin funktion määritelmän.

Määritelmä 4.1. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Funktio $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ on konveksi jos kaikilla $x_1, x_2 \in [a,b]$ on voimassa epäyhtälö

$$f(tx_2+(1-t)x_1) \leq tf(x_2)+(1-t)f(x_1)$$

jokaisella $0 \leq t \leq 1$. Joukko $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ on puolestaan konveksi, jos kaikilla $z, w \in \mathcal{A}$ pätee $tz + (1-t)w \in \mathcal{A}$ kun $0 \leq t \leq 1$.

On olemassa helppo tapa tarkistaa, onko annettu funktio konveksi. Nimittäin funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on konveksi jos ja vain jos $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.

Esimerkki 4.2. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ on konveksi, sillä $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Yksikkökuula $\mathcal{B}(x,r)$ on puolestaan konveksi joukko. Tämä nähdään arviosta

$$|x - (ty + (1-t)z)| \leq (1-t)\,|x - z| + t\,|x - y| < (1-t)r + tr = r,$$

missä $y, z \in \mathcal{B}(x,r)$ ja $t \in \mathbb{R}$ on kiinteä.

Nyt määrittelemme logaritmisesti konveksin (log-konveksin) funktion:

Määritelmä 4.3. Reaaliarvoisen vektoriavaruuden konveksissa osajoukossa määritelty positiiviarvoinen funktio f on logaritmisesti konveksi jos $\log f$ on konveksi funktio. Konveksisuuden määritelmän nojalla tämä voidaan muotoilla siten, että funktio f on logaritmisesti konveksi jos $\log(f(tx + (1-t)y) \leq t\log(x) + (1-t)\log(y)$ kaikilla $x, y > 0$ ja $0 \leq t \leq 1$.

Esimerkki 4.4. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^4}$ on logaritmisesti konveksi, sillä funktio $g(x) = x^4$ on konveksi esimerkin 4.2. nojalla.

Nyt voimme todistaa luvun tärkeän lauseen. Todistuksen idea pohjautuu viitteeseen [2] s. 14-15.

Lause 4.5. (Bohr-Mollerupin lause) Gammafunktio $\Gamma(x)$ on ainoa funktio f välillä $x > 0$, joka toteuttaa samanaikaisesti seuraavat kolme ehtoa:

(I) $f(1) = 1$
(II) $f(x+1) = xf(x)$ kaikilla $x > 0$
(III) f on logaritmisesti konveksi

Todistus: Olkoon $f(x)$ funktio, joka toteuttaa ylläolevat ehdot. Ehtoa (II) iteroimalla saadaan

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x),\ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Koska $f(1) = 1$ niin ehdon (I) nojalla, niin edellisen kaavan perusteella $f(n) = (n-1)!$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Riittää osoittaa, että $f(x)$=$\Gamma(x)$ välillä $0 \leq x < 1$, sillä tällöin ehdon (II) nojalla yhtäsuuruus saadaan jatkettua välille $x > 0$. Olkoon $x_1 < x_2$ reaalilukuja. Merkitään pisteitä $(x_1,\ f(x_1))$ ja $(x_2,\ f(x_2))$ yhdistävän janan kulmakerrointa k_{x_1,x_2}:lla. Kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$ ja tarkastellaan kulmakertoimia $k_{x,n}$, missä $x \in \mathbb{R}$ vaihtelee. Koska f on logaritmisesti konveksi, niin $k_{x,n}$ on kasvava x:n funktiona. Niinpä on voimassa epäyhtälö

$$\frac{\log f(-1+n) - \log f(n)}{(-1+n) - n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \leq \frac{\log f(1+n) - \log f(n)}{(1+n) - n}.$$

Koska $f(n)=(n-1)!$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin edellinen epäyhtälö saa muodon

$$\log(n-1)! - \log(n-2)! \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log(n!) - \log(n-1)!$$

eli

$$\log\left(\frac{(n-1)!}{(n-2)!}\right) \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log\left(\frac{(n)!}{(n-1)!}\right).$$

Siten

$$\log(n-1) \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log(n),$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x\log(n-1) + \log(n-1)! \leq \log f(x+n) \leq x\log(n) + \log(n-1)!$$

Lopulta tästä saadaan

$$\log((n-1)^x(n-1)!) \leq \log f(x+n) \leq \log(n^x(n-1)!).$$

Koska logaritmi on kasvava funktio, niin edellisestä kaavasta saadaan

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!$$

Nyt kaavan (9) nojalla

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x)x(x+1)\cdots(x+n-1) \leq n^x(n-1)!$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{x+n}{n}\right).$$

Koska edelliset epäyhtälöt pätevät kaikilla $n \geq 2$, niin voimme korvata n:n $(n+1)$:llä vasemmanpuoleisessa epäyhtälössä. Niinpä

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{x+n}{n}\right).$$

Ylläolevasta epäyhtälöketjusta saadaan

$$\left(\frac{n}{x+n}\right) f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x)$$

Nyt annetaan $n \to \infty$. Koska $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{x+n})$=1, niin kuristuslauseen[9] nojalla

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)$$

Tämä raja-arvo on olemassa kaikilla $x > 0$ lauseen 3.9. nojalla. Koska raja-arvo on yksikäsitteinen, niin funktio $f(x)$ on yksikäsitteinen. Toisaalta edellisen luvun tulosten perusteella gammafunktio $\Gamma(x)$ toteuttaa ehdot (I) ja (II). Todistetaan vielä, että ehto (III) toteutuu. Olkoot $x, y > 0$ ja $0 \leq \lambda \leq 1$. Tällöin Gammafunktion määritelmän (1) ja Hölderin epäyhtälön[10] nojalla

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \log\int_0^\infty e^{-t}t^{\lambda x+(1-\lambda)y-1}dt \\
&= \log\int_0^\infty (e^{-t}t^{x-1})^{\lambda}(e^{-t}t^{y-1})^{1-\lambda}dt \\
&\leq \log\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}dt\right)^{1-\lambda} \\
&= \lambda\log\Gamma(x) + (1-\lambda)\log\Gamma(y)
\end{aligned}$$

Tämä osoittaa, että Gammafunktio on log-konveksi. Niinpä ehdot (I)-(III) toteutuvat, ja siten $f(x) = \Gamma(x)$ kaikilla $x > 0$, mikä piti todistaa. □

Huomautus 4.6. Bohr-Mollerupin lauseen ehdot toteuttava yksikäsitteinen funktio f olisi voitu ottaa suoraan gammafunktion määritelmäksi.

4.1 Stirlingin kaavat

Tässä kappaleessa johdetaan kuuluisat Stirlingin kaavat, joilla voidaan approksimoida gammafunktion $\Gamma(x)$ arvoa suurilla $x \in \mathbb{R}$. Tulokset saadaan konstruoimalla funktio, joka toteuttaa Bohr-Mollerupin lauseen ehdot. Seuraamme Artinin esitystä [2] s. $20 - 24$.

Aloitetaan seuraavalla helpolla aputuloksella:

[9] Kts. [8] s. 28.
[10] Kts. [15] s. 63.

Lemma 4.7. Kertoma $n!$ kasvaa nopeammin kuin $n^n e^{-n}$, mutta hitaammin kuin $n^{n+1}e^{-n}$.

Todistus: Huomataan[11], että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa epäyhtälö

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

Kertomalla vastaavat epäyhtälöt puolittain arvoilla $k = 1, 2, ..., n-1$ saadaan arvio

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!},$$

joka on uudelleen järjestettynä

$$en^n e^{-n} < n! < en^{n+1}e^{-n},$$

mikä haluttiinkin. □

Näin ollen on luonnollista tehdä yrite, että kertomafunktio on, vakiota vaille, muotoa

$$f(x) = x^{x-1/2}e^{-x}e^{\theta(x)}. \tag{10}$$

Pyrimme valitsemaan funktion $\theta(x)$ siten, että funktio $f(x)$ toteuttaisi Bohr-Mollerupin lauseen ehdot. Korvaamalla x muuttujalla $x+1$ kaavassa (10) ja jakamalla vastaavat f:n arvot keskenään saadaan

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} xe^{-1}e^{\theta(x+1)-\theta(x)}.$$

Tästä nähdään, että funktio f toteuttaa ehdon (II) Bohr-Mollerupin lauseessa jos ja vain jos kaikilla x pätee

$$\theta(x) - \theta(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1. \tag{11}$$

Merkitään yhtälön (11) oikeaa puolta $g(x)$:llä. Väitämme, että funktio

$$\theta(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \tag{12}$$

toteuttaa relaation (11). Tämä on selvää, kunhan todistetaan, että (12):n oikea puoli suppenee.

[11] Seuraa suoraan luonnollisen logaritmin määritelmästä.

Nyt kaikilla $|y| < 1$ voidaan kirjoittaa Taylorin kehitelmä

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots$$

Korvaamalla luvun y luvulla $1/(2x+1) < 1$, missä $x > 0$, saadaan

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + ...$$

Tätä voidaan arvioida ylöspäin suppenevalla geometrisella sarjalla

$$\frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{3(2x+1)^4} + \frac{1}{3(2x+1)^6} + ... = \frac{1}{12x(x+1)}.$$

Siispä $0 < g(x) < 1/12x(x+1)$. Näin ollen riittää enää todistaa, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12(x+n)(x+n+1)} \tag{13}$$

suppenee. Mutta tämä on selvää:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{M} \frac{1}{12(x+n)(x+n+1)} &= \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{1}{(x+n)} - \frac{1}{(x+n+1)}\right] = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+M+1}\right) \\ &\to \frac{1}{12x},\end{aligned}$$

kun $M \to \infty$. Siten summa (13) suppenee. Tämä antaa arvion

$$0 < \theta(x) < \frac{1}{12x},$$

ja siten

$$\theta(x) = \frac{C}{12x}$$

jollain vakiolla[12] $0 < C < 1$. Todistetaan sitten, että Bohr-Mollerupin lauseen ehto (III) toteutuu. Tekijä $x^{x-1/2}e^{-x}$ on log-konveksi, sillä sen logaritmin toinen derivaatta on $1/x + x^2/2$, mikä on positiivinen kun $x > 0$. Nyt pitää enää osoittaa, että $e^{\theta(x)}$ on log-konveksi, eli $\theta(x)$ on konveksi. Tämä seuraisi erityisesti siitä, että $g(x)$ on konveksi. Mutta näin onkin:

$$g''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0.$$

Nyt on osoitettu, että kun x on suuri, gammafunktiolle pätee approksimaatio

$$\Gamma(x) = C_1 x^{x-1/2} e^{x+C_2/12x},$$

[12] Vakio C ei riipu x:stä

joillain vakioilla C_1, C_2. Erityisesti kertomafunktiolle voidaan kirjoittaa

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+C/12n}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

On kuitenkin suhteellisen helppo osoittaa, että vakion C_1 tarkka arvo on $\sqrt{2\pi}$. Olkoon ℓ positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \ell^x \Gamma\left(\frac{x}{\ell}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{\ell}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x+\ell-1}{\ell}\right).$$

Nyt $f(x)$ on log-konveksi kaikkien sen tekijöiden ollessa log-konvekseja. Funktio f toteuttaa ehdot (II) ja (III) Bohr-Mollerupin lauseessa. Siten

$$\ell^x \Gamma\left(\frac{x}{\ell}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{\ell}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x+\ell-1}{\ell}\right) = C_\ell \Gamma(x), \tag{15}$$

missä C_ℓ on ℓ:stä riippuva vakio. Sijoittamalla $x = 1$ kaava (15) saa muodon

$$\ell \Gamma\left(\frac{1}{\ell}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\ell}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\ell}{\ell}\right) = C_\ell.$$

Jos taas sijoitetaan $x = k/\ell$ Gaussin kaavaan saadaan

$$\Gamma\left(\frac{k}{\ell}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k/\ell} n! \ell^{n+1}}{k(k+\ell)(k+2\ell)\cdots(k+n\ell)}. \tag{16}$$

Kertomalla luvut $\Gamma(1/\ell), \Gamma(2/\ell), \cdots, \Gamma(\ell/\ell)$ keskenään saadaan

$$C_\ell = \ell \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(\ell+1)/2} (n!)^\ell \ell^{n\ell+1}}{(n\ell+\ell)!}. \tag{17}$$

Selvästi on voimassa identiteetti

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ell}\right)\left(1 + \frac{2}{n\ell}\right) \cdots \left(1 + \frac{\ell}{n\ell}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n\ell+\ell)!}{(n\ell)!(n\ell)^\ell}.$$

Kertomalla tämän ja kaavan (17) puolittain saadaan

$$C_\ell = \ell \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^\ell \ell^{n\ell}}{(n\ell)! n^{(\ell-1)/2}}. \tag{18}$$

Toisaalta kaavan (14) nojalla pätee

$$(n!)^\ell = C_1^\ell n^{n\ell+\ell/2} e^{-n\ell} e^{\rho_1 \ell/12n}$$

ja

$$(n\ell)! = C_1^\ell (n\ell)^{n\ell+1/2} e^{-n\ell} e^{\rho_2/12n\ell},$$

joillakin vakioilla $0 < \rho_1, \rho_2 < 1$. Sijoittamalla nämä kaavaan (18) saadaan

$$C_\ell = \sqrt{\ell} C^{\ell-1} \lim_{n\to\infty} e^{\rho_1 \ell/12n - \rho_2/12n\ell} = \sqrt{\ell} C^{\ell-1}.$$

Edellisen kaavan ja korollaarin 3.11. nojalla

$$C_2 = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi} = C\sqrt{2},$$

mistä ratkaistaan $C = \sqrt{2\pi}$ ja edelleen $C_\ell = \sqrt{\ell}(2\pi)^{(\ell-1)/2}$.

Huomautus 4.8. Edellisestä todistuksesta saadaan Legendren duplikaatiokaava suoraan sijoittamalla $\ell = 2$ kaavaan (15).

Lopuksi kokoamme saadut tulokset yhdeksi lauseeksi:

Lause 4.9. Seuraava kaavat ovat voimassa

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\theta(x)}$$

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right) - 1 = \frac{C}{12x},\ 0 < C < 1$$

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{C}{12n}}$$

Lauseen 4.9. kaavat tunnetaan Stirlingin kaavoina.

5 Hölderin lause

Tässä luvussa todistamme tutkielman varsinaisen päälauseen:

Lause 5.1. (Hölderin lause) Gammafunktio $\Gamma(z)$ ei toteuta mitään algebrallista differentiaaliyhtälöä, jonka kertoimet ovat rationaalifunktioita.

Otto Hölder, jonka mukaan lause on nimetty, oli ensimmäinen, joka todisti tämän [10] vuonna 1887. Tämän jälkeen uusia todistuksia on löytyt; Hausdorff [7], Moore [12], Ostrowski [13][14], Levin [11] ja Bank & Kaufmann [3]. Ennen varsinaiseen asiaan siirtymistä tarvitsemme muutaman määritelmän ja aputuloksen:

Määritelmä 5.2. Monen muuttujan polynomi[13] on muotoa

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_n \le \ell} \mathcal{A}_{(\alpha_0,...,\alpha_n)}(x_0)^{\alpha_0}\cdots(x_n)^{\alpha_n}.$$

[13]Kuten tavallista kutsumme sitä vain polynomiksi

Tällöin $\mathcal{A}_{(\alpha_0,\dots,\alpha_n)}$ on termin $(x_1)^{\alpha_1}\cdots(x_n)^{\alpha_n}$ kerroin. Tämän termin aste on $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. Polynomin aste on puolestaan $\ell := \max\{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\}$.

Määritelmä 5.3. Olkoot y funktio, $n\in\mathbb{N}$ ja f polynomi. Tällöin muotoa $f(z,y,y',...,y^{(n)})\equiv 0$ olevaa yhtälöä kutsutaan algebralliseksi differentiaaliyhtälöksi, jonka kertoimet ovat funktiot $y,y',...y^{(n)}$ (tässä $y^{(n)}$ tarkoittaa n:ttä derivaattaa). Erityisesti algebrallinen differentiaaliyhtälö voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$f(z,y,y',...,y^{(n)}) = \sum_{(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)} \mathcal{A}_{(\alpha_0,\alpha_1...,\alpha_n)}(z)(y)^{\alpha_0}(y')^{\alpha_1}\cdots(y^{(n)})^{\alpha_n}\equiv 0,$$

missä kerroin jonon $(\alpha_0,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ jäsenet juoksevat kaikkien luonnollisten lukujen yli ja niiden summa on äärellinen. Lisäksi $A_{(\alpha_0,...,\alpha_n)}(z)$:t ovat z:n polynomeja ja jokin polynomi $A_{(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)}(z)$ ei ole identtisesti nolla.

Määritelmästä nähdään suoraan, että algebrallisen differentiaaliyhtälön vasen puoli on aina hyvin määritelty meromorfinen funktio.

Esimerkki 5.4. $f(z,y,y',y'') = z^2y''+zy'+(z^2-v^2)y = 0$, missä v on vakio, on algebrallinen differentiaaliyhtälö. Tässä esimerkissä siis $\mathcal{A}_{(0,0,1)}(z)=z^2, \mathcal{A}_{(0,1,0)}(z)=z$, $\mathcal{A}_{(1,0,0)}(z)=z^2-v^2$ ja muut kertoimet ovat identtisesti nollia. Lisäksi yhtälön oikealla puolella olevan polynomin aste on yksi.

Nyt siirrymme Hölderin lauseen todistukseen. Olkoon $\mathcal{M}$ tasossa olevien meromorfisten funktioiden differentiaalikunta[14], joka sisältää kaikki rationaalifunktiot, joilla on seuraava ominaisuus: jos $h(z)\in\mathcal{M}$, niin myös $h_1(z)=h(z+1)\in\mathcal{M}$. Lisäksi käytetään merkintää $\phi(z)=1/z$. Lauseen 5.6. todistusta varten tarvitsemme seuraavan klassisen aputuloksen:

Lemma 5.5. Jos Γ toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön, jonka kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssä, niin myös sen logaritminen derivaatta Γ'/Γ toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön, jonka kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssä.

Todistus: Sivuutetaan; kts.[15] [4] s. $61-62$. $\square$

Nyt voimme siirtyä tutkielman varsinaiseen päätulokseen. Todistuksemme pohjautuu Bankin ja Kaufmanin artikkeliin vuodelta 1978 [3].

[14] Differentiaalikunta on kunta varustettuna derivaatiolla.

[15] Antamassamme viitteessä on todistettu väite yleisemmässä tilanteessa. Lemman väite löytyy myös artikkelista [12], mutta siellä sitä ei ole todistettu.

Lause 5.6. Välttämätön ehto sille, että $\Gamma(z)$ toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön, jonka kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssa, on seuraava: on olemassa alkiot $g, f_0, f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}$, joilla $f_0, f_1, ..., f_n$ ovat 1-periodisia, eivätkä kaikki identtisesti nollia, g ei ole 1-periodinen ja pätee

$$g(z) - g(z+1) = \sum_{j=0}^{n} f_j(z)\phi^{(j)}(z) \tag{19}$$

Todistus: Tehdään vastaoletus: oletetaan, että gammafunktio toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön, jonka kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssa. Merkitään gammafunktion logaritmista derivaattaa Ψ:llä. Edellisen nojalla Ψ toteuttaa jonkin algebrallisen differentiaaliyhtälön, jonka kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssä. Tarkastellaan muotoa $\Omega(z, y_0, y_1, ..., y_n)$, olevia polynomeja[16], missä $y_0, y_1, ..., y_n \in \mathcal{M}$, joilla Ψ toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön $\Omega(z, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. Tarkastellaan niitä tämän joukon polynomeja, joilla on pienin mahdollinen aste d muuttujien $y_0, y_1, ..., y_n$ suhteen. Näistä polynomeista valitaan se $\Omega(z, y_0, y_1, ..., y_n)$, jolla on vähiten astetta d olevia termejä. Voimme olettaa, että jonkin muotoa $(y_0)^{j_0}(y_1)^{j_1}...(y_n)^{j_n}$, missä $j_0 + j_1 + ... + j_n = d$, olevan termin kerroin on yksi. Koska $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, niin Ψ toteuttaa yhtälön $y(z+1) = y(z) + \phi(z)$. Siten Ψ toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön

$$\Omega(z+1, y+\phi, y'+\phi', ..., y^{(n)} + \phi^{(n)}) = 0$$

Koska polynomin $\Phi := \Omega(z+1, y_0+\phi, y_1+\phi', ..., y_n+\phi^{(n)})$ kertoimet ovat myös $\mathcal{M}$:ssa, niin polynomin $\Phi-\Omega$ kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssä. Kuitenkin koska jokin polynomin Ω astetta d olevan termin kerroin on identtisesti yksi, niin myös polynomissa Φ on astetta d oleva termi, jonka kerroin on identtisesti yksi. Näin ollen erotuspolynomissa $\Phi - \Omega$ on vähemmän astetta d olevia termejä kuin polynomissa Ω. Koska funktio Ψ toteuttaa molemmat yhtälöt $\Phi - \Omega \equiv 0$ ja $\Omega \equiv 0$, niin Ω:n minimaaliominaisuudesta seuraa, että $\Phi - \Omega$ on nollapolynomi $\mathcal{M}$:ssa. Siten

$$\Omega(z+1, y_0+\phi, y_1+\phi', ..., y_n+\phi^{(n)}) = \Omega(z, y_0, y_1, ..., y_n) \tag{20}$$

alkioiden $y_0, ..., y_n \in \mathcal{M}$ polynomeina. Suora derivointi osoittaa, että jos Ω toteuttaa yhtälön (20), niin tekee myös $\frac{\partial\Omega}{\partial y_k}$ jokaisella k. Toistamalla tätä argumenttia saadaan, että jos m on suurin indeksi k, jolla $j_k > 0$ jossakin astetta d olevassa termissä $(y_0)^{j_0}(y_1)^{j_1}...(y_n)^{j_n}$ niin polynomi

$$\frac{\partial^{j_0+j_1+...+j_m-1}\Omega}{\partial y_0^{j_0}...\partial y_{m-1}^{j_{m-1}}\partial y_m^{j_m-1}}$$

toteuttaa yhtälön (20). Koska tämän polynomin aste on yksi ja sen kertoimet ovat $\mathcal{M}$:ssä niin se on muotoa

$$g(z) + \sum_{j=0}^{n} f_j(z)y_j \tag{21}$$

[16]Luonnollisesti oletamme, että Ω ei ole identtisesti nolla

missä $g, f_0, f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}$ ja alkio f_m ei ole identtisesti nolla. Koska funktio (21) toteuttaa yhtälön (20), niin helposti nähdään, että f_j:t ovat 1-periodisia ja (19) pätee. On siis enää osoitettava, että g ei ole 1-periodinen. Tehdään vastaoletus. Tällöin (19) ja f_j:den 1-periodisuuden nojalla pätee

$$\sum_{j=0}^{n} f_j(z)\phi^{(j)}(z+k) = 0$$

kaikilla $k = 0, 1, ..., n$. Siis kiinteällä k funktiot $\phi(z+k), \phi'(z+k), \cdots, \phi^{(n)}(z+k)$ ovat lineaarisesti riippuvia kunnan $\mathcal{M}$ alkoiden yli. Näin ollen matriisin

$$\begin{pmatrix} \phi(z) & \phi(z+1) & \cdots & \phi(z+n) \\ \phi'(z) & \phi'(z+1) & \cdots & \phi'(z+n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{(n-1)}(z) & \phi^{(n-1)}(z+1) & \cdots & \phi^{(n-1)}(z+n) \end{pmatrix} \tag{22}$$

determinantti on identtisesti nolla. Mutta matriisi (22) on funktioiden $\phi(z), \phi(z+1), \cdots, \phi(z+n)$ Wronskin matriisi. Koska sen determinantti on identtisesti nolla, niin funktiot $\phi(z), \phi(z+1), \cdots, \phi(z+n)$:n ovat lineaarisesti riippuvia kompleksilukujen yli. Tämä on selvästi mahdotonta, sillä rationaalifunktiolla $\phi(z)$ on äärellinen napa pisteessä $z = 0$. Siis vastaoletus oli väärä ja niinpä $g(z)$ ei ole 1-periodinen. Siten väite seuraa. $\square$

Hölderin lause saadaan edellisestä lauseesta seurauksena:

Hölderin lauseen todistus: Tehdään vastaoletus: gammafunktio Γ toteuttaa algebrallisen differentiaaliyhtälön. Tällöin edellisen lauseen kaava (19) pätee tilanteessa, jossa g on rationaalifunktio ja f_j:t ovat vakiofunktioita. Väitämme, että $g(z)$:lla ei ole äärellisiä napoja. Tehdään vastaoletus. Olkoon z_0 $g(z)$:n napa, jolla on pienin mahdollinen reaaliosa. Koska yhtälön (19) oikean puolen ainoa napa on pisteessä nolla, niin jos $z_0 \neq 1$, g:llä olisi napa pisteessä $z_0 - 1$, mikä on ristiriita z_0:n minimaalisuusoletuksen kanssa. Jos taas $z_0 = 1$, niin (19) nojalla g:llä olisi napa jokaisessa pisteessä $n \in \mathbb{N}$ (Siis kaavasta (19) nähdään suoraan, että tässä tapauksessa oletuksesta "pisteessä $z = n$ on napa"seuraa, että pisteessä $z = n + 1$ on napa), mikä on myös mahdotonta: rationaalifunktiolla voi olla vain äärellisen monta napaa. Siten vastaoletus oli väärä ja g:llä ei ole äärellisiä napoja. Mutta tällöin g on polynomi. Tästä puolestaan seuraa, että (19) oikea puoli on polynomi. Tämä on ristiriita, sillä yhtälön (19) oikea puoli ei voi olla polynomi siellä esiintyessä funktiota $\phi(z)$. Siten väite seuraa. $\square$

Viitteet

[1] Ahlfors, Lars: Complex Analysis. McGraw-Hill, inc. (1966).

[2] Artin, Emil: The Gamma function. Holt, Rinehart and Winston. (1964).

[3] Bank, Steven B. and Kaufman, Robert P: A note on Hölder's Theorem Concerning the Gamma function. Math. Ann. 232 p. 115 – 120 (1978).

[4] Bank, Steven B. and Kaufman, Robert P: An extension of Hölder's theorem concerning the Gamma function. Funkcialaj Ekvacioj 19, p. 53 – 63 (1976).

[5] Bohr, Harald and Mollerup, Johannes: Laerobog i Kompleks Analyse vol. III, Copenhagen (1922).

[6] Davis, Philip J: Leonhard Euler's integral: a historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly vol 66 p. 849 – 869 (1959).

[7] Hausdorff, Felix: Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(z)$. Math Ann. 94, p. 244 – 247 (1925).

[8] Hurri-Syrjänen, Ritva: Differentiaali - ja integraalilaskenta I (luentomoniste, Helsingin yliopisto, syksy 1999).

[9] Hurri-Syrjänen, Ritva: Kompleksianalyysi I (luentomoniste, Helsingin yliopisto, syksy 2011).

[10] Hölder, Otto: Über die Eigenschaft der Γ-Funktion, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen. Math. Ann. 28, p. 1 – 13 (1887).

[11] Levin, Beppo: A generalization of the theorem of Hölder on the hypertranscedence of $\Gamma(x)$. Rostov.-na-Donu Gos. Univ. Ucen. Zap. 1, p. 79 – 98 (1934).

[12] Moore, Eliakim: Concerning transcendentally transcendental functions. Math. Ann. 48, p. 49 – 74 (1896).

[13] Ostrowski, Alexander: Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, dass die Γ-Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Math. Ann. 79 p. 286 – 288 (1919).

[14] Ostrowski, Alexander: Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$. Math. Ann. 94, p. 248 – 251 (1925).

[15] Rudin, Walter: Real & Complex analysis. Mcgraw-Hill Series in higher mathematics, Third edition (1966).

[16] Saksman, Eero: Complex Analysis II (lecture notes, University of Helsinki, spring 2012).