AKSHAY VENKATESH JA L-FUNKTIOIDEN ALIKONVEKSISUUS

JESSE JÄÄSAARI

Akshay Venkateshille myönnettiin viime elokuussa Fieldsin mitali "analyyttisen lukuteorian, homogeenisen dynamiikan, topologian, ja esitysteorian synteesistä, joka on johtanut esimerkiksi monien aritmeettisten objektien tasajaukautumista koskevien avointen ongelmien ratkaisuihin". Tässä tekstissä käsitellään syvällisesti ainoastaan yhtä Venkateshin monista läpimurtotuloksista, ryhmän GL(2) automorfisten L-funktioiden alikonveksisuusongelman täydellistä ratkaisua.

Ensimmäinen esimerkki (ryhmän GL(1)) automorfisesta L-funktiosta on Riemannin ζ-funktio, joka määritellään puolitasossa $\Re(s) > 1$ suppenevana sarjana

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

ja jatketaan sitten meromorfiseksi funktioksi koko kompleksitasoon. Tunnetun Riemannin hypoteesin eräs seuraus on Lindelöfin hypoteesi, joka liittyy ζ-funktion kasvuun kriittisellä suoralla $\{s = 1/2+it,\ t \in \mathbb{R}\}$; sen mukaan $\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon (1 + |t|)^\varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$ (merkintä $f \ll_\delta g$ tarkoittaa samaa kuin $f = O(g)$ ja $\ll_\delta$ merkitsee implisiittisen vakio riippuvan parametrista δ). Riemannin ζ-funktion funktionaaliyhtälöstä ja Phragmén-Lindelöfin periaatteesta seuraa helposti niin sanottu konveksisuusarvio: $\zeta(1/2 + it) \ll_\varepsilon (1 + |t|)^{1/4+\varepsilon}$. Riemannin ζ-funktion alikoveksisuusongelma (t-aspektissa) on parantaa eksponenttia 1/4. Lindelöfin hypoteesi siis ennustaa, että eksponentin 1/4 voi korvata nollalla. Ensimmäisinä alikonveksisuusongelman tässä tilanteessa ratkaisivat Hardy ja Littlewood, jotka saivat eksponentiksi 1/6. Nykyisin paras tunnettu eksponentti 13/84 on Bourgainin käsialaa vuodelta 2014, eli olemme vielä kaukana Lindelöfin hypoteesista.

Samanlainen konjektuuri pätee myös yleisemmille L-funktioille. Tällaisille L-funktioille alikonveksisuutta voidaan mitata myös muiden parametrien kuin pelkästään t:n suhteen; esimerkiksi primitiivisen Dirichlet'n karakterin $\chi \pmod q$ L-funktiolle konveksisuusraja q-aspektissa on $L(1/2+it, \chi) \ll_{t,\varepsilon} q^{1/4+\varepsilon}$ ja jälleen eksponentin 1/4 voi konjekturaalisesti korvata nollalla. Tietysti sama konjektuurin oletetaan pitävän paikkansa myös t-aspektissa.

Alikonveksisuusongelma on erityisen mielenkiintoinen, koska esimerkiksi monet lukuteorian tasajakautumisongelmista palautuvat oleellisesti jonkun L-funktion alikonveksisuuteen. On hämmästyttävää miten lähes aina (ei kuitenkaan jokaisessa tapauksessa) pelkkä konveksisuuden rikkominen johtaa hyvin epätriviaaleihin tuloksiin, mutta pelkkä konveksisuusarvio itsessään ei.

Riemannin ζ-funktio ja Dirichlet'n L-funktiot ovat esikoistapauksia automorfisista L-funktioista. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku, F lukukunta, ja $\mathbb{A}_F$ sen adeléiden rengas. Jokaiseen ryhmän $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ kärkimuotoon π voidaan liittää L-funktio $L(s, \pi)$ (tämän konstruktion yksityiskohtainen selittäminen vaatisi jonkin verran esitysteoriaa ja se sivuutetaan tässä). Tällaisen L-funktion monimutkaisuutta mittaa niin kutsuttu analyyttinen johtaja $C(\pi, t)$ (engl. analytic conductor), jonka tarkka määritelmä löytyy viitteestä [3]. Analogisesti ylläolevan kanssa voidaan helposti osoittaa, että arvio $L(1/2 + it, \pi) \ll_{\varepsilon,F} C(\pi, t)^{1/4+\varepsilon}$ pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, ja alikonveksisuusongelma koskee eksponentin 1/4 parantamista. Lindelöfin hypoteesin yleistyksen arvellaan taas pätevän: pitäisi olla $L(1/2 + it, \pi) \ll_{\varepsilon,F} C(\pi, t)^\varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$.

Tapauksessa $n = 1$ alikonveksisuusongelma ratkaistiin täysin 1970-luvulla ja tapauksessa $n = 2$ se ratkaistiin monissa eri tilanteissa 1990-luvun alkupuoliskolla. Mutta 2000-luvun ensimmäisen vuosikymmenen puolivälissä Venkatesh kehitti yhdessä Philippe Michelin kanssa [4] uuden ergodia- ja esitysteoriaan perustuvan lähestymistavan, joka mahdollisti alikonveksisuusongelman täydellisen ratkaisun (kaikissa aspekteissa ja kaikkien lukukuntien yli) myös tapauksessa $n = 2$. He todistivat, että millä tahansa lukukunnalla F on olemassa absoluuttinen vakio $\delta > 0$ siten, että jokaisella ryhmän $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_F)$ kärkimuodolla π pätee $L(1/2 + it, \pi) \ll_{\varepsilon,\delta,F} C(\pi, t)^{1/4-\delta+\varepsilon}$, kaikilla $\varepsilon > 0$.

Mainitaan vielä lopuksi, että Venkateshin muita läpimurtoja ovat esimerkiksi hänen edistysaskeleensa kohti Hilbertin 11. ongelman ratkaisua (yhdessä Jordan Ellenbergin kanssa) [1] ja hänen työnsä funktiokuntien Cohen-Lenstra heuristiikkaan liittyen (yhdessä Ellenbergin ja Craig Westerlandin kanssa) [2].

Viitteet

[1] Ellenberg, J., ja A. Venkatesh: *Local-global principles for representations of quadratic forms*, Invent. Math. 171 (2008), no. 2, 257–279.

[2] Ellenberg, J., A. Venkatesh ja C. Westerland: *Homological stability for Hurwitz spaces and the Cohen-Lenstra conjecture over function fields*, Ann. of Math. (2) 183 (2016), no. 3, 729–786.

[3] Iwaniec, H. ja P. Sarnak: *Perspectives on the analytic theory of L-functions*, Geom. Funct. Anal., Special Volume (2000), 705–741.

[4] Michel, P. ja A.Venkatesh: *The subconvexity problem for* GL(2), Publ. math. de l'IHES, No. 111 (2010), 171–271.