一個關於剪紙的定理

Jesse C. Chen*

2023-12-12

定義 1（圖形）. 一個圖形是一個簡單多邊形, 亦即: 一個圖形沒有洞, 並且其邊不與自己相交。

討論 1. 簡單來說, 就是可以用一張紙剪出來且沒有洞的圖形。

定義 2（剪）. 剪指將一個圖形以一條直線分割成兩部分。

討論 2. 這個定義模仿的就是一把剪刀剪下去的概念。

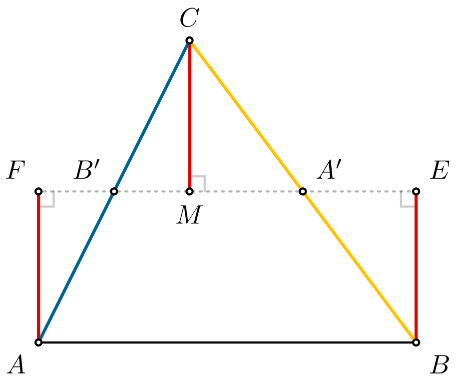
定義 3（貼）. 貼指的是把兩個圖形不重疊地合併再一起。

定義 4（剪貼）. 剪貼指的是對一個圖形先進行數個剪, 後執行數個貼, 最後產生一個圖形且沒有剩餘的塊。

討論 3. 任何一個圖形的面積在剪貼前後不會改變。

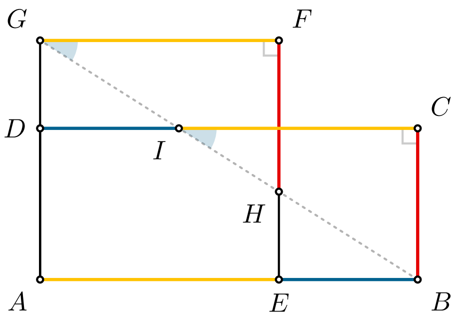
定理 1. 任何多邊形可以被分割爲多個三角形。

定理 2. 任何三角形可以剪貼成長方形。



定理 3. 任何長方形可以剪接成正方形。

證明. 考慮以下圖形:



我們想將 $\square ABCD$ 拼剪成正方形 $\square AEFG$。作法如下:

(1) 將 $\square ABCD$ 沿著 $\overline{BG}$ 切開。

(2) 將 $\triangle BCI$ 平移到 $\triangle HFG$。

(3) 將 $\triangle BHE$ 沿著 $\overline{HE}$ 剪下。

(4) 將 $\triangle BHE$ 平移到 $\triangle IGD$。

這個操作之所以可以執行, 建立在 $\triangle BCI \cong \triangle HFG$ 上。顯然地, 這兩個三角形相似, 所以我們只要證明他們其中一對對應的邊相等即可。首先注意到 $\triangle DGI \sim \triangle CBI$, 所以

$$\overline{DG} : \overline{BC} = \overline{DI} : \overline{CI} \implies \overline{DG} \cdot \overline{CI} = \overline{BC} \cdot \overline{DI}。 \qquad \odot$$

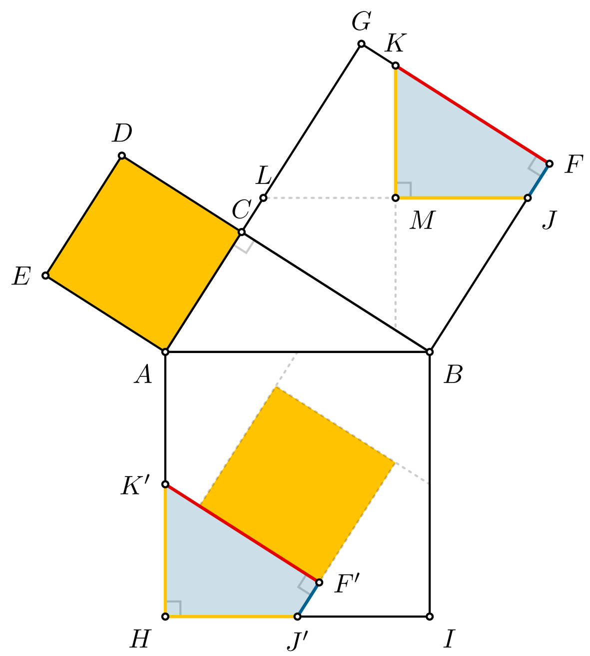
再注意到 $\square ABCD$ 與 $\square AEFG$ 的面積相等, 故

$$\begin{aligned}
(\overline{BC} + \overline{DG})^2 &= \overline{BC} \cdot (\overline{CI} + \overline{DI}) && \text{（面積相等）} \\
&= \overline{BC} \cdot \overline{CI} + \overline{BC} \cdot \overline{DI} \\
&= \overline{BC} \cdot \overline{CI} + \overline{DG} \cdot \overline{CI} && \text{（根據 } \odot \text{）} \\
&= (\overline{BC} + \overline{DG}) \cdot \overline{CI} \\
\implies \overline{CI} &= \overline{BC} + \overline{DG} && (\overline{BC} + \overline{DG} \neq 0) \\
&= \overline{EF} = \overline{FG}。
\end{aligned}$$

由於 $\overline{CI} = \overline{FG}$, 可知 $\triangle BCI \cong \triangle HFG$。 ■

討論 4. 考慮一個長寬比爲 $5:1$ 的長方形, 上述的作法還可行嗎？如果不可, 遇到的問題是什麼, 然後要怎麼修改作法呢？

定理 4. 任兩個正方形可以剪貼成一個正方形。



定理 5. 任何一個多邊形可以剪貼成任何一個多邊形。

2022 年 4 月 20 日

*Contact: jessekelighine.com