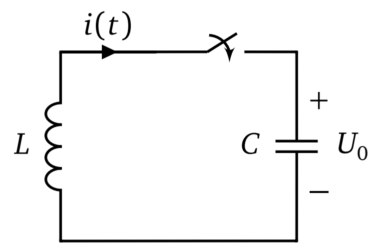
A

Rekenen met complexe getallen

In de elektrotechniek wordt gebruik gemaakt van complexe getallen. Dit is een uitbreiding op de verzameling reële getallen. Het gebruik van complexe getallen zorgt ervoor dat ingewikkelde berekeningen met *sinusvormige signalen* eenvoudig kunnen worden uitgewerkt. De oorsprong van de complexe getallen komt voor uit het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Stel, we hebben het volgende schema met een spoel, een condensator en een schakelaar. Dit wordt een LC-kring genoemd en is te zien in figuur A.1.



Figuur A.1: *Een simpele LC-kring.*

Op tijdstip $t = 0\,\mathrm{s}$ is de beginspanning van de condensator en spoel $u(0_+) = U_0$ V. Op hetzelfde tijdstip is beginstroom $i(0_+) = 0\,\mathrm{A}$. Dit zijn de beginvoorwaarden voor het netwerk.

Volgens de spanningswet van Kirchoff geldt:

$$u(t) = u_L(t) = u_C(t) \tag{A.1}$$

Volgens de stroomwet van Kirchoff geldt:

$$i(t) = i_L(t) = i_C(t) \tag{A.2}$$

Verder gelden de spanning-stroomrelaties van spoel en condensator:

$$u_L(t) = -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{en} \qquad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{A.3}$$

We willen graag een uitdrukking voor de spanning $u(t)$. Daarvoor moeten we de spanning-stroomrelatie van de spel anders opschrijven:

$$u_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt} \quad \longrightarrow \quad i(t) = -\frac{1}{L}\int u(t)dt \tag{A.4}$$

Zoals eerder vermeld, is de stroom door de spoel en de condensator identiek:

$$i(t) = i_L(t) = i_C(t) \tag{A.5}$$

We kunnen dus de volgende vergelijking voor de spanning opstellen:

$$-\frac{1}{L}\int u(t)dt = C\frac{du_C(t)}{dt} \tag{A.6}$$

Beide kanten eenmaal differentiëren en delen door C:

$$-\frac{1}{LC}u(t) = \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} \tag{A.7}$$

Nu brengen we de term aan de rechterkant van het isgelijkteken naar de linkerkant en schrappen het minteken:

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}u(t) = 0 \tag{A.8}$$

De algemene oplossing voor deze lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten is:

$$u(t) = C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{\lambda_2} \tag{A.9}$$

Voor het vinden van λ_1 en λ_2 moeten we de wortels bepalen van de karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 = -\frac{1}{LC} \tag{A.10}$$

Helaas heeft deze vergelijking geen reële oplossingen. We kunnen $\lambda_{1,2}$ niet bepalen.

A.1 Imaginaire getallen

Bij het vinden van de wortels van de vergelijking:

$$a^2 - b^2 = 0 \tag{A.11}$$

kunnen we de vergelijking factoriseren in:

$$(a+b)(a-b) = 0 \tag{A.12}$$

Hierdoor krijgen we twee oplossingen:

$$a = b \quad \vee \quad a = -b \tag{A.13}$$

We hebben echter een probleem bij de vergelijking:

$$a^2 + b^2 = 0 \tag{A.14}$$

die, zoals bekend is, geen reële oplossingen heeft. We introduceren nu een constante j zodanig dat geldt dat:

$$\boxed{\mathrm{j}^2 = -1} \tag{A.15}$$

De vergelijking wordt nu:

$$a^b - \mathrm{j}^2 b^2 = 0 \tag{A.16}$$

We kunnen de vergelijking nu alsnog ontbinden:

$$(a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b) = 0 \tag{A.17}$$

Aldus volgt de oplossing:

$$a = \mathrm{j}b \quad \vee \quad a = -\mathrm{j}b \tag{A.18}$$

Maar wat stelt de constante j nu eigenlijk voor? De constante j stelt een getal voor zodanig dat $\mathrm{j}^2 = -1$. Er is echter geen reëel getal waarvoor dat geldt. Dat betekent dat $\mathrm{j}b$ ook geen reëel getal voorstelt. We noemen $\mathrm{j}b$ daarom een *imaginair getal* en j noemen we de *imaginaire eenheid*[1]. Het blijkt dat we met behulp van imaginaire getallen berekeningen aan elektrische netwerken kunnen verrichten.

Opmerking
In de literatuur wordt ook wel geschreven dat:

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1} \tag{A.19}$$

Dat is echter niet juist. Bij het uitwerken van een kwadraat zijn namelijk twee oplossingen mogelijk:

$$\mathrm{j}^2 = -1 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{j} = +\sqrt{-1} \quad \vee \quad \mathrm{j} = -\sqrt{-1} \tag{A.20}$$

Wiskundigen hanteren daarom ook liever de definitie $\mathrm{j}^2 = -1$. Toch is de wortelschrijfwijze nuttig, bijvoorbeeld bij het oplossen bij vierkantsvergelijkingen (de discriminant is dan kleiner dan 0).

A.2 Complexe getallen

Laten we nu eens de volgende kwadratische vergelijking bekijken:

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \tag{A.21}$$

[1] In de wiskunde wordt de letter i gebruikt voor de imaginaire eenheid. In de elektrotechniek wordt echter de letter j gebruikt omdat de letter i doorgaans wordt gebruikt voor stroom(sterkte).

We kunnen deze vergelijking als volgt ontbinden in factoren:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + 1 &= 0 \\ (x-2)(x-2) + 1 &= 0 \\ (x-2)^2 - (-1) &= 0 \\ (x-2)^2 - \mathrm{j}^2 &= 0 \\ (x-2+\mathrm{j})(x-2-\mathrm{j}) &= 0 \end{aligned} \tag{A.22}$$

De wortels zijn dus:

$$x = 2 + \mathrm{j} \quad \vee \quad x = 2 - \mathrm{j} \tag{A.23}$$

Het kan ook via de wortelformule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+4 \pm \sqrt{4\cdot 4 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4\cdot \mathrm{j}^2}}{2} = \frac{+4 \pm \mathrm{j}2}{2} \tag{A.24}$$

Voor x volgt dan:

$$x = +2 + \mathrm{j} \quad \vee \quad x = +2 - \mathrm{j} \tag{A.25}$$

Een getal dat is samengesteld uit een reëel deel en een imaginair deel wordt een *complex getal* genoemd. Een complex getal $\underline{z}$ heeft de vorm:

$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b \qquad (\text{met } a, b \in \mathbb{R}) \tag{A.26}$$

waarbij a en b reële getallen zijn. Om het verschil aan te duiden met een reële variabele wordt een complexe variabele onderstreept. De verzameling van complexe getallen wordt met $\mathbb{C}$ aangeduid.

A.3 Complex toegevoegde getal

Als voor een complex getal $\underline{z}$ geldt dat:

$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b \tag{A.27}$$

dan is het *complex toegevoegde* of *complex geconjungeerde* getal $\underline{z}^*$:

$$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b \tag{A.28}$$

Het reële deel is hetzelfde, maar het imaginaire deel is tegengesteld. Dan geldt vervolgens:

$$\begin{aligned} \underline{z} + \underline{z}^* &= a + \mathrm{j}b + a - \mathrm{j}b = 2a \\ \underline{z} - \underline{z}^* &= a + \mathrm{j}b - (a - \mathrm{j}b) = 2\mathrm{j}b \\ \underline{z} \cdot \underline{z}^* &= (a + \mathrm{j}b)(a - \mathrm{j}b) = a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{A.29}$$

A.4 Rekenregels voor complexe getallen

Voor complexe getallen gelden de gewone rekenregels voor optellen en aftrekken:

$$\begin{aligned}(a+jb)+(c+jd)&=(a+c)+j(b+d)\\(a+jb)-(c+jd)&=(a-c)+j(b-d)\end{aligned} \tag{A.30}$$

De reële delen en imaginaire delen moeten dus apart worden opgeteld of afgetrokken. Ook voor vermenigvuldigen gelden de gewone rekenregels:

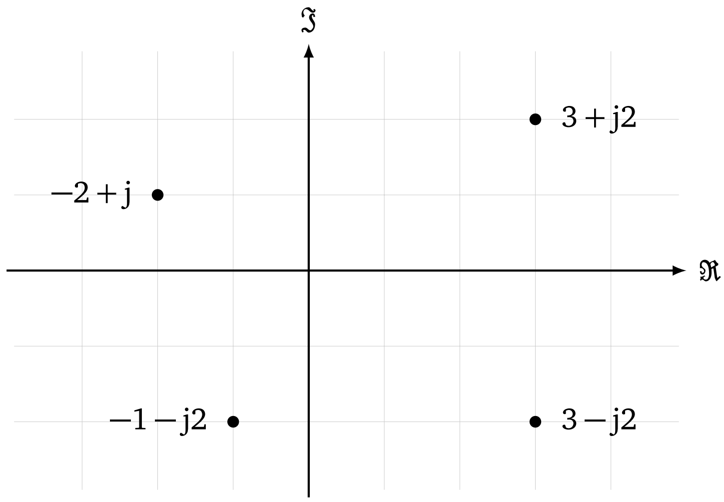
$$(a+jb)\cdot(c+jd)=ac+jad+jbc+j^2bd=(ac-bd)+j(ad+bc) \tag{A.31}$$

Het delen van twee complexe getallen vergt wat meer werk:

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{a+jb}{c+jd}\cdot\frac{c-jd}{c-jd}=\frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2} \qquad (\text{met } c^2+d^2\neq 0) \tag{A.32}$$

A.5 Het complexe vlak

Een getal dat is samengesteld uit een reëel deel en een imaginair deel wordt een complex getal genoemd. Een complex getal kan worden afgebeeld als punt op het *complexe vlak*. In het complexe vlak worden de reële getallen afgebeeld op de reële as die gelijk loopt met de x-as. Imaginaire getallen worden worden afgebeeld op de imaginaire as die loodrecht staat op de reële as. Een complex getal is dus een punt ergens in het complexe vlak In figuur A.2 zijn enkele complexe getallen afgebeeld in het complexe vlak.

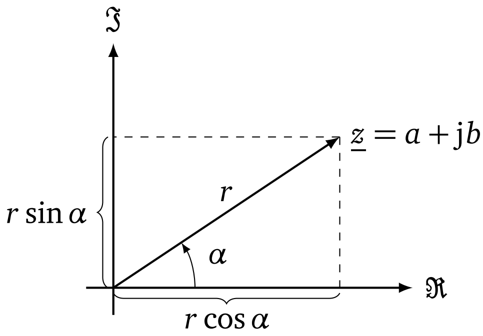


Figuur A.2: *Vier punten in het complexe vlak.*

Als we nu in het complexe vlak een *wijzer* tekenen vanuit de oorsprong (het complexe getal $0+j0$) naar het complexe punt $\underline{z}$, dan kunnen we het punt $\underline{z}$ ook uitdrukken in *poolcoördinaten*. Hierbij worden een lengte vanuit de oorsprong tot aan het punt $\underline{z}$ en een hoek t.o.v de x-as opgegeven. In figuur A.3 zijn de wijzer en het punt $\underline{z}$ getekend.

De lengte van de wijzer is r en de hoek van de wijzer ten opzichte van de reële as is α. We kunnen het punt $\underline{z}$ nu ook beschrijven met behulp van de lengte en de hoek:

$$\underline{z}=a+jb=r\cos\alpha+jr\sin\alpha=r(\cos\alpha+j\sin\alpha) \tag{A.33}$$



Figuur A.3: *Een punt in het complexe vlak.*

We kunnen nu een aantal conversieregels beschrijven. Vanuit poolcoördinaten naar rechthoekcoördinaten:

$$\begin{aligned} a &= r \cos \alpha \\ b &= r \sin \alpha \end{aligned} \tag{A.34}$$

En vanuit rechthoekcoördinaten naar rechthoekcoördinaten:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \tag{A.35}$$

Merk op dat de hoek α doorgaans in radialen wordt gegeven. Ten aanzien van de poolcoördinaten kunnen we nog het volgende melden:

- Bij een gelijkblijvende lengte r en een oplopende hoek α beschrijft het punt $\underline{z}$ een *cirkel* in het complexe vlak.
- Bij het punt $\underline{z} = 0 + \mathrm{j}0$ is de lengte 0 en de hoek is *onbepaald*.
- Voor de hoek α geldt:

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{voor } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{voor } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{voor } a < 0, b < 0 \\ +\frac{1}{2}\pi & \text{voor } a = 0, b > 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{voor } a = 0, b < 0 \\ \text{onbepaald} & \text{voor } a = 0, b = 0 \end{cases} \tag{A.36}$$

Voor de imaginaire eenheid gelden een aantal interessante machtsregels:

$$\begin{aligned}
&j^0 = 1 \\
&j^1 = j \\
&j^2 = -1 \\
&j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j \\
&j^4 = j^2 \cdot j^2 = -1 \cdot -1 = 1 \\
&j^5 = j^4 \cdot j = 1 \cdot j = j
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned}
&j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j \\
&j^{-2} = \frac{1}{j^2} = -1 \\
&j^{-3} = \frac{1}{j^3} = \frac{1}{j^3} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{1} = j
\end{aligned} \tag{A.38}$$