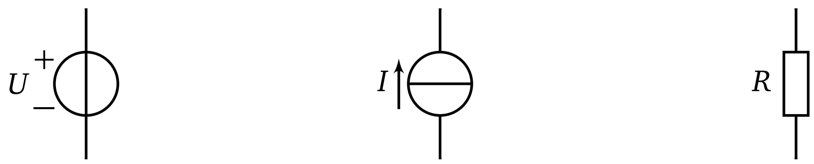
1

Gelijkstroomtheorie

In dit hoofdstuk behandelen we de gelijkstroomtheorie. Nu suggereert het woord gelijkstroomtheorie dat de theorie alleen de stromen betreft. Dat is echter niet het geval; het betreft ook de spanningen. We kunnen dus net zo goed spreken over gelijkspanningstheorie. De keuze voor gelijkstroomtheorie is ingegeven doordat de grootheid elektrische stroom als een van de zeven grondgrootheden in het SI-stelsel is gekozen.

In de gelijkstroomtheorie veronderstellen we dat de alle spanningen en stromen een constante waarden hebben over de tijd. De spanningen en stromen variëren dus niet als functie van de tijd[1]. Ze kunnen zowel positief als negatief zijn, of nul.

In de gelijkstroomtheorie hebben we drie componenten: de ideale spanningsbron, de ideale stroombron en de ideale weerstand. De symbolen die gebruikt worden in schakelschema's zijn te zien in figuur 1.1. Een ideale spanningsbron levert een constante spanning ongeacht de stroom die de bron levert. Een ideale stroombron levert een constante stroom ongeacht de spanning die over de bron staat. Een ideale weerstand heeft een constante waarde ongeacht de spanning over en de stroom door de weerstand. Verder merken we op dat de ideale spanningsbron een interne weerstand heeft van 0 Ohm. De interne weerstand van de ideale stroombron is oneindig.



(a) *Symbool ideale spanningsbron.* **(b)** *Symbool ideale stroombron.* **(c)** *Symbool ideale weerstand.*

Figuur 1.1: *Symbolen voor de ideale spanningsbron, de ideale stroombron en de ideale weerstand.*

[1] Formeel gezien is een spanning of stroom die niet van polariteit veranderd ook een gelijkspanning of gelijkstroom. We veronderstellen hier echter dat de spanningen en stromen constant zijn.

Voor het aangeven van spanningen gebruiken we de hoofdletter U. In Engelstalige boeken wordt de hoofdletter V gebruikt. Spanning worden uitgedrukt in V (volt). Stromen worden aangegeven met een hoofdletter I en worden uitgedrukt in A (ampère). Weerstanden geven we aan met de hoofdletter R (van het Engelse woord *resistor*) en worden uitgedrukt in Ω (ohm).

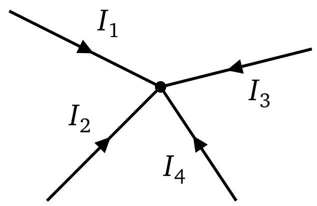
We kunnen de waarden van spanningen, stromen en weerstanden ook uitdrukken door er een letter voor te zetten, de zogenoemde SI-voorvoegsels: mV (millivolt), mA (milliampère), μA (microampère), kΩ (kilo-ohm), MΩ (megaohm).

1.1 Stroomwet van Kirchhof

De stroomwet van Kirchhoff zegt dat alle stromen naar een knooppunt toe opgeteld 0 zijn. Er kan dus geen stroom bijkomen of verloren gaan. In formulevorm:

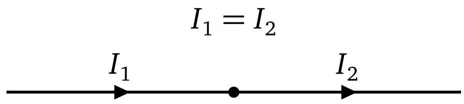
$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0 \tag{1.1}$$

Ander gezegd: de totale stroom die naar een knooppunt toevloeit is even groot als de totale stroom die van het knooppunt wegvloeit. In figuur 1.2 is de stroomwet uitgebeeld.



Figuur 1.2: *De stroomwet van Kirchhoff: de stromen naar een knooppunt toe zijn opgeteld 0.*

In het geval dat een knooppunt slechts twee aansluitingen heeft, is de ingaande stroom even groot als de uitgaande stroom. Zie figuur 1.3.



Figuur 1.3: *De ingaande stroom is even groot als de uitgaande stroom.*

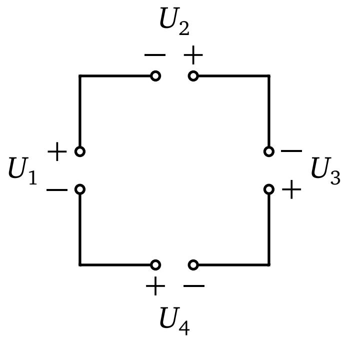
1.2 De spanningswet van Kirchhof

De spanningswet van Kirchhoff zegt dat alle spanningen in een gesloten kring opgeteld 0 zijn. Er kan dus geen spanning bijkomen of verloren gaan. In formulevorm:

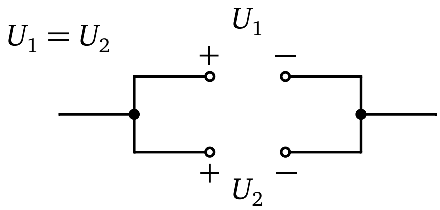
$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 0 \tag{1.2}$$

Anders gezegd: de totale spanning rechtsom opgeteld, is even groot als de totale spanning linksom opgeteld. In figuur 1.4 is de spanningswet uitgebeeld.

Als een verbinding zich vertakt over twee parallel geschakelde netwerkelementen is de spanning over de netwerkelementen gelijk. Dit is te zien in figuur 1.5.



Figuur 1.4: *De spanningswet van Kirchhoff: alle spanningen in een kring zijn opgeteld 0.*



Figuur 1.5: *De spanningen over twee parallel geschakelde elementen zijn gelijk.*

1.3 De wet van Ohm

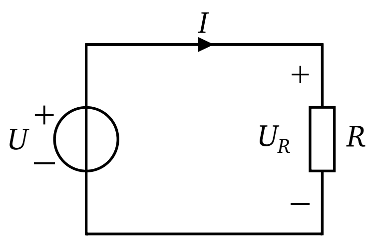
De verhouding tussen de spanning over een weerstand en de stroom door de weerstand is constant en wordt de wet van Ohm genoemd. De wet wordt meestal geschreven als:

$$U = I \cdot R \tag{1.3}$$

Gegeven een bepaalde spanning en stroom, dan kan de weerstandswaarde berekend worden met:

$$R = \frac{U}{I} \tag{1.4}$$

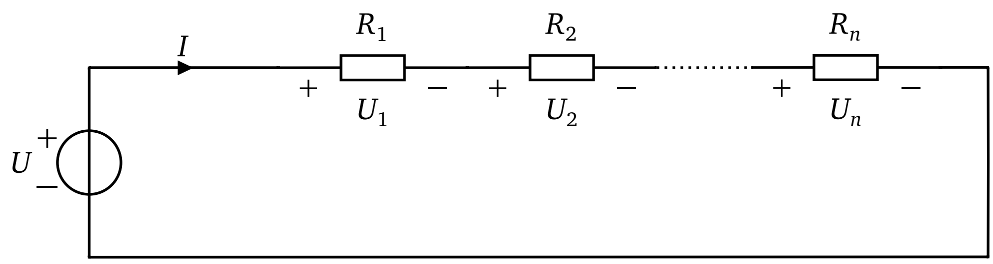
In figuur 1.6 is de wet van Ohm uitgebeeld. Aan de spanningsbron U wordt een weerstand R geplaatst. We spreken dan dat de spanningsbron wordt belast. Ook hier geldt de spanningswet van Kirchhoff: de spanning U van de bron is gelijk aan de spanning U_R over de weerstand. Bij de gegeven richting van de stroom I geldt dat het potentiaal bij de '+' groter is dan het potentiaal bij de '–'.



Figuur 1.6: *De spanning over en stroom door een weerstand is constant.*

1.4 Serieschakeling van weerstanden

In figuur 1.7 is een schakeling te zien waarbij de weerstanden in serie geschakeld zijn en gevoed worden door een spanningsbron. De spanningsbron levert een stroom I waardoor de spanningsbron een bepaalde weerstand ondervindt. We noemen deze weerstand R_s.



Figuur 1.7: *Serieschakeling van weerstanden.*

Vanuit de spanningswet van Kirchhoff volgt dat:

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \tag{1.5}$$

Vanuit stroomwet van Kirchhoff volgt dat:

$$I = I_1 = I_2 = \cdots = I_n \tag{1.6}$$

De stroom die de bron levert is dus even groot als de stromen door de weerstanden. De bron met spanning U levert een stroom I zodanig dat:

$$U = I \cdot R_s \tag{1.7}$$

Dus volgt dat:

$$I \cdot R_s = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \cdots + I \cdot R_n \tag{1.8}$$

We schappen aan beide kanten I zodat volgt dat:

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots R_n \tag{1.9}$$

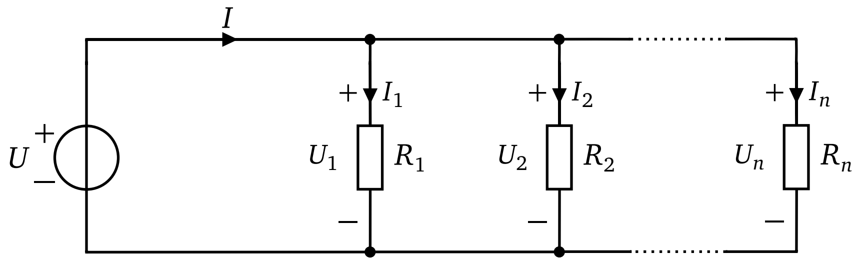
Hierbij is R_s de vervangingswaarde van de in serie geschakelde weerstanden.

1.5 Parallelschakeling van weerstanden

In figuur 1.8 is een parallelschakeling van een aantal weerstanden te zien. De schakeling wordt gevoed door de spanningsbron U. Als gevolg van de weerstanden zal de bron een bepaalde stroom leveren. Hierdoor ondervindt de spanningsbron een bepaalde weerstand. Deze weerstand noemen we R_p.

Vanuit de spanningswet van Kirchhoff vinden we dat:

$$U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n \tag{1.10}$$



Figuur 1.8: *Parallelschakeling van weerstanden.*

De spanningen over de weerstanden zijn even groot als de bronspanning. Vanuit de stroomwet van Kirchhoff vinden we dat:

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \tag{1.11}$$

We kunnen de stroomwet ook formuleren als:

$$\frac{U}{R_p} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n} \tag{1.12}$$

We schrappen aan beide zijden van de vergelijking de spanning U zodat we krijgen dat:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{1.13}$$

Hierin is R_p de vervangingswaarde van de parallel geschakelde weerstanden. Voor twee parallel geschakelde weerstanden geldt dat:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{1.14}$$

Dit kan worden omgewerkt tot:

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{1.15}$$

1.6 Spanningsdeling

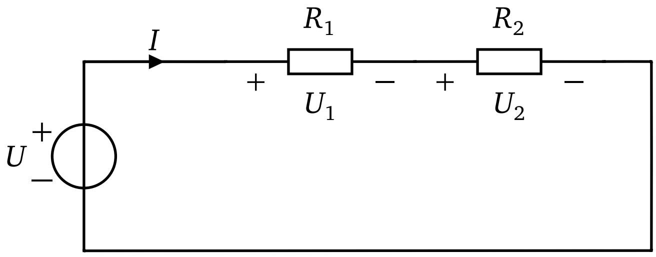
In figuur 1.9 is een schema te zien van een bron met twee in serie geschakelde weerstanden. De spanning U zal zich in een bepaalde verhouding verdelen over de twee weerstanden. Er is sprake van spanningsdeling.

De stroom I kunnen we berekenen met:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \tag{1.16}$$

Voor de spanningen U_1 en U_2 kunnen we schrijven dat:

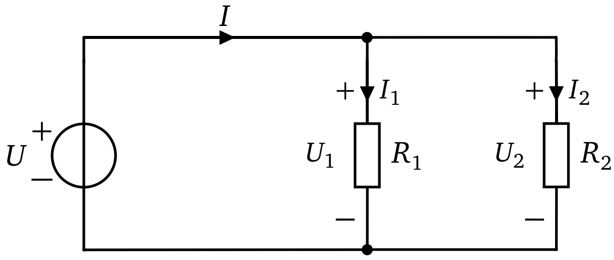
$$U_1 = I \cdot R_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U \qquad \text{en} \qquad U_2 = I \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U \tag{1.17}$$



Figuur 1.9: *Schema voor spanningsdeling.*

1.7 Stroomdeling

In figuur 1.10 is een schema te zien van een bron met twee parallel geschakelde weerstanden. De stroom I zal zich in een bepaalde verhouding verdelen over de twee weerstanden. Er is sprake van stroomdeling.



Figuur 1.10: *Schema voor stroomdeling.*

De spanning U kunnen kunnen we berekenen met:

$$U = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{1.18}$$

Natuurlijk geldt de stroomwet van Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \tag{1.19}$$

Voor I_1 geldt dan:

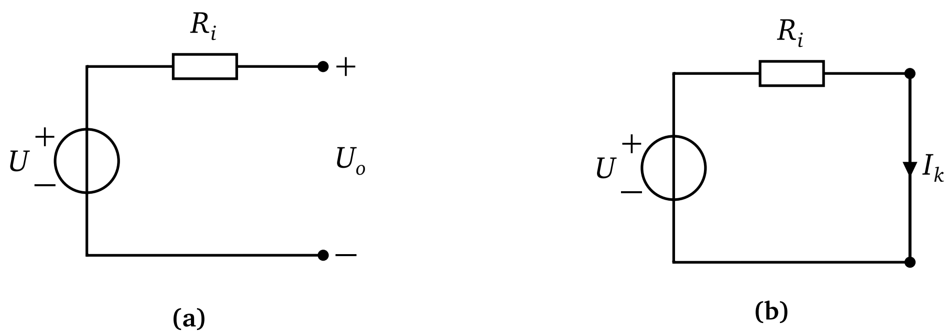
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot I = \frac{R_2}{R_! + R_2} \cdot I \tag{1.20}$$

Op vergelijkbare wijze vinden we voor I_2:

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot I = \frac{R_1}{R_! + R_2} \cdot I \tag{1.21}$$

1.8 De niet-ideale spanningsbron

In de praktijk hebben we te maken met niet-ideale spanningsbronnen. We kunnen zo'n bron weergeven met een ideale spanningsbron in serie met een ideale weerstand. De ideale weerstand wordt de *inwendige weerstand* genoemd. Dit is te zien in figuur 1.11.



Figuur 1.11: *Niet-ideale spanningsbron: (a) onbelast, (b) kortgesloten.*

In figuur 1.11(a) is te zien dat de niet-ideale spanningsbron onbelast is. De spanning U_o is even groot als de bronspanning U. Er loopt immers geen stroom zodat er geen spanningsval over de inwendige weerstand staat. Deze spanning wordt de *open klemspanning* genoemd. In figuur 1.11(b) is de niet-ideale spanningsbron kortgesloten. Over de inwendige weerstand staat nu de volledige bronspanning. Er loopt dan een zekere *kortsluitstroom* I_k. We kunnen de inwendige weerstand berekenen door de uitgangsspanning U_o te delen door de kortsluitstroom I_k.

Voor een goede spanningsbron moet de inwendige weerstand klein zijn. Praktische waarden van de inwendige weerstanden liggen tussen de enkele tientallen mΩ tot enkele Ω. Zo kan een autoaccu met een spanning van 12 V stromen van meer dan 100 A leveren. Het is dan ook niet aan te bevelen om dergelijke kortsluitstromen te meten. De inwendige weerstand van eenvoudige batterijen ligt in de orde van enkele Ω. Een laboratoriumvoeding moet natuurlijk ook een lage inwendige weerstand hebben om de uitgangsspanning zo constant mogelijk te houden. Veelal is de voeding beschermd tegen kortsluiting en wordt de kortsluitstroom begrensd.

1.9 De niet-ideale stroombron

In de praktijk hebben we ook te maken met niet-ideale stroombronnen. De niet-ideale stroombron is te modelleren als een ideale stroombron parallel geschakeld aan een ideale weerstand. Ook deze weerstand wordt de inwendige weerstand genoemd. Dit is te zien in figuur 1.12.

Figuur 1.12: *Niet-ideale stroombron: (a) onbelast, (b) kortgesloten.*

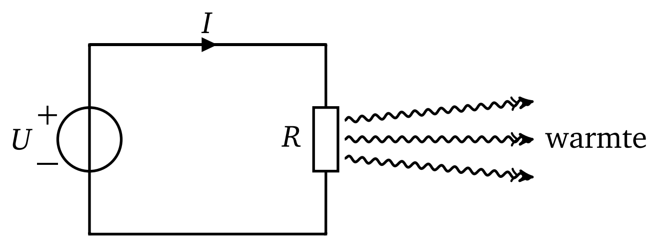
In figuur 1.12(a) is de niet-ideale stroombron onbelast. De stroom I loopt nu door de inwendige weerstand. Hierdoor zal over de bron een bepaalde spanning aanwezig zijn. We noemen die spanning de open klemspanning. In figuur 1.12(b) is de bron kortgesloten. De stroom I loopt nu volledig door de kortsluiting. We noemen de stroom de kortsluitstroom. We kunnen de inwendige weerstand berekenen door de uitgangsspanning U_o te delen door de kortsluitstroom I_k.

Voor een goede stroombron moet de inwendige weerstand zo groot mogelijk zijn. Praktische waarden voor R_i liggen tussen enkele honderden kΩ tot vele MΩ. Aan figuur 1.12(a) kunnen we nog iets ontdekken. De uitgangsspanning in onbelaste toestand zal zeer groot zijn. We kunnen nu inzien dat een stroombron dus nooit onbelast gelaten mag worden. Een laboratoriumvoeding zal de uitgangsspanning in onbelaste toestand begrenzen.

1.10 Vermogen ontwikkeld in een weerstand

Een weerstand waar een spanning over staat en een stroom door loopt dissipeert energie. Dit is weergegeven in figuur 1.13. Dat een weerstand energie dissipeert kunnen we merken doordat de weerstand warm wordt. Het *vermogen* dat ontwikkeld wordt in een weerstand is het product van de spanning over en de stroom door de weerstand:

$$P = U \cdot I \tag{1.22}$$



Figuur 1.13: *De weerstand levert energie en wordt warm.*

Vermogen wordt uitgedrukt in W (watt). Aangezien we voor U ook kunnen schrijven $U = I \cdot R$ kunnen we ook stellen dat:

$$P = I^2 \cdot R \tag{1.23}$$

Verder kunnen we voor I schrijven dat $I = \dfrac{U}{R}$ zodat we kunnen stellen dat:

$$P = \frac{U^2}{R} \tag{1.24}$$

De eenheid W (watt) kan ook geschreven worden als J/s (joules per seconde) en dat geeft precies aan wat het vermogen inhoudt: energieafgifte per seconde. Willen we de totale energieafgifte over een bepaalde tijd t berekenen dan moeten we het vermogen vermenigvuldigen met de tijd:

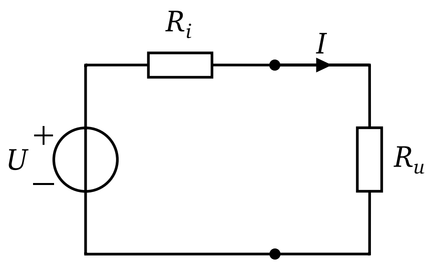
$$W = P \cdot t \tag{1.25}$$

De variabele W staat voor het Engelse woord *Work*. Een veel gebruikte eenheid van energie is de kWh (kilowattuur). Dit komt overeen met de energie als een component een vermogen van 1000 W een uur lang dissipeert. De hoeveelheid energie is:

$$1\ \mathrm{kWh} = 1000\ \mathrm{W} \times 1\ \mathrm{uur} = 1000\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \times 3600\ \mathrm{s} = 3.600.000\ \mathrm{J} = 3,6\ \mathrm{MJ} \tag{1.26}$$

1.11 Maximale vermogensoverdracht

In figuur 1.14 is te zien dat een niet-ideale spanningsbron met spanning U en inwendige weerstand R_i is verbonden met een uitwendige weerstand R_u. We willen graag maximale vermogensoverdracht vanuit de bron in R_u.



Figuur 1.14: *Een niet-ideale spanningsbron met inwendige weerstand wordt belast met een uitwendige weerstand.*

De stroom die de bron produceert is:

$$I = \frac{U}{R_i + R_u} \tag{1.27}$$

Het vermogen dat in de uitwendige weerstand wordt gedissipeerd is:

$$P_{Ru} = I^2 R_u = \left(\frac{U}{R_i + R_u}\right)^2 R_u = \frac{R_u}{(R_i + R_u)^2}\,U^2 \tag{1.28}$$

We kunnen inzien dat als R_u klein is de stroom groot zal zijn maar het vermogen in R_u is dan klein. Als R_u groot is dan zal de stroom klein zijn en ook dan is het vermogen in R_u klein. Ergens daartussen ligt een optimum waarbij het meeste vermogen wordt overgedragen in de uitwendige weerstand. Hiertoe differentiëren we de vergelijking (1.28) naar R_u:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P_{Ru}}{\mathrm{d}R_u} &= U^2 \frac{(R_i + R_u)^2 - R_u \cdot 2(R_i + R_u)}{(R_i + R_u)^4} \\
&= U^2 \frac{(R_i + R_u) - 2R_u}{(R_i + R_u)^3} \\
&= U^2 \frac{R_i - R_u}{(R_i + R_u)^3}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Vervolgens stellen de differentiaalquotiënt gelijk aan 0 om de extremen te vinden:

$$\frac{\mathrm{d}P_{Ru}}{\mathrm{d}R_u} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad U^2 \frac{R_i - R_u}{(R_i + R_u)^3} = 0 \tag{1.30}$$

Hieruit volgt dat de maximale vermogensoverdracht plaatsvindt als de uitwendige weerstand gelijk is aan de inwendige weerstand dus bij $R_u = R_i$. De maximale vermogensoverdracht is eenvoudig uit te rekenen door de uitwendige weerstand gelijk te stellen aan de inwendige weerstand. Daaruit volgt dat:

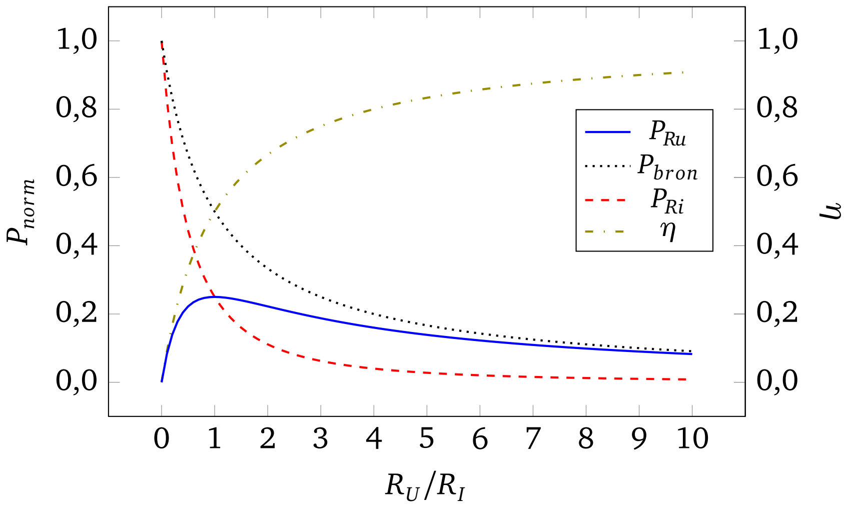
$$P_{Ru,max} = \frac{U^2}{4R_i} \tag{1.31}$$

Over de efficiëntie van de vermogensoverdracht kunnen we ook wat vertellen. De effiëntie is het getransporteerde vermogen gedeeld door het opgewekte vermogen:

$$\eta = \frac{P_{Ru}}{P_{bron}} = \frac{I^2 \cdot R_u}{I^2 \cdot (R_i + R_u)} = \frac{R_u}{R_i + R_u} \tag{1.32}$$

Bij maximale vermogensoverdracht ($R_i = R_u$) is de effiëntie dan 50%. De helft van het beschikbare vermogen wordt in de uitwendige weerstand gedissipeerd. Dat betekent dat de bron zelf evenveel vermogen dissipeert.

In figuur 1.15 zijn de diverse vermogens en efficiëntie van de vermogensoverdracht uitgebeeld. De vermogens zijn genormaliseerd op 1. Dat houdt in dat bij kortsluiting van de bron het beschikbare vermogen dat in de inwendige weerstand wordt gedissipeerd gelijk wordt gesteld aan 1. De vermogens zijn uitgezet tegen de verhouding van de uitwendige weerstand en de inwendige weerstand. Een verhouding van $R_u/R_i = 1$ betekent dat $R_u = R_i$.



Figuur 1.15: *Genormaliseerde ontwikkelde vermogens in de inwendige en uitwendige weerstand en de bron. Links is de efficiëntie van de vermogensoverdracht weergegeven.*

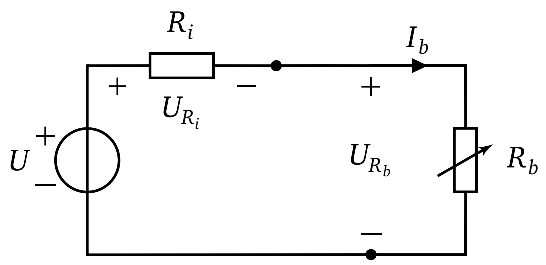
De ononderbroken kromme geeft de vermogensopname van de uitwendige weerstand weer. De gestreepte kromme geeft de vermogensopname van de inwendige weerstand weer. Het geleverde vermogen van de bron wordt door de gestippelde kromme weergegeven. Verder is te zien dat de gestippelde streepjes lijn de efficiëntie weergeeft.

We bespreken een drietal markante punten. Bij kortsluiting van de bron ($R_u/R_i = 0$) wordt het maximale vermogen van de bron in de inwendige weerstand gedissipeerd. Te zien is dat $P_{bron} = P_{Ri} = 1$ en $P_{Ru} = 0$. De efficiëntie is 0. Bij $R_u = R_i$ is het gedissipeerde vermogen in de inwendige en uitwendige weerstand $0,25$. Het geleverde bronvermogen is $0,5$ en de efficiëntie is $0,5$. Naar mate R_u groter wordt, neemt het geleverde en opgenomen vermogen af. Bijna al het vermogen wordt in R_u gedissipeerd. De effciëntie neemt toe maar zal nooit 1 worden.

1.12 De belastingskarakteristiek

In deze paragraaf bespreken we het begrip *belastingskarakteristiek*. We kunnen hiermee de stromen en spanningen in een netwerk bepalen via een grafische weg. Dit is met name bij het gebruik van niet-lineaire netwerkelementen zoals de diode erg handig.

In figuur 1.16 is een schakeling te zien met een spanningsbron U en een inwendige weerstand R_i. De bron wordt belast door de belastingsweerstand R_b. Deze weerstand is variabel gemaakt en kan variëren tussen $R_b = 0$ en $R_b \to \infty$.



Figuur 1.16: *Schema voor de belastingskarakteristiek.*

Voor de spanningen in het schema kunnen we opstellen dat:

$$U = U_{R_i} + U_{R_b} \tag{1.33}$$

Deze vergelijking kunnen we ook schrijven als:

$$U_{R_i} = -U_{R_b} + U \tag{1.34}$$

Vervolgens delen we alle spanningen door R_i:

$$\frac{U_{R_i}}{R_i} = -\frac{U_{R_b}}{R_i} + \frac{U}{R_i} \tag{1.35}$$

Nu is de term U_{R_i}/R_i gelijk aan de (bron-)stroom I_b. De term U/R_i is de stroom die de bron levert als de bron kortgesloten wordt, d.w.z. $R_b = 0$. Dit wordt de kortsluitstroom I_k genoemd. We kunnen de vergelijking dus schrijven als:

$$I_b = -\frac{1}{R_i} \cdot U_{R_b} + I_k \tag{1.36}$$

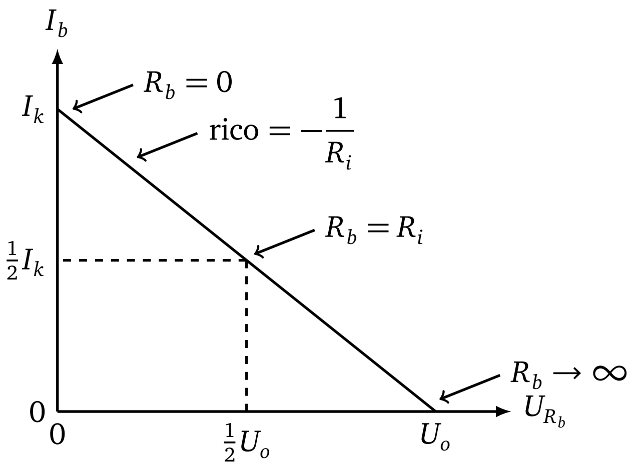
We hebben nu een rechte lijn gekregen met de algemene gedaante:

$$y = ax + b \tag{1.37}$$

De stroom I_b komt overeen met de afhankelijke variabele y. De spanning U_{R_b} komt overeen met de onafhankelijke variabele x. De factor $-1/R_i$ komt overeen met de constante a en wordt de richtingscoëfficiënt genoemd. De kortsluitstroom I_k komt overeen met het startgetal b.

We kunnen de lijn nu uitzetten in een grafiek, zie figuur 1.17. We onderscheiden twee markante punten op de lijn:

- Het kortsluitpunt. Dit doet zich voor als $R_b = 0$, dus als de bron is kortgesloten. De bron levert dan een maximale stroom, de kortsluitstroom I_k genoemd. De spanning over R_b is dan 0 V.
- Het nullastpunt. Dit doet zich voor als $R_b \to \infty$, dus als R_b uit de schakeling is verwijderd. Dan geldt dat $I_b = 0$ en $U_{R_b} = U$. Dit wordt de open klemspanning U_o genoemd.



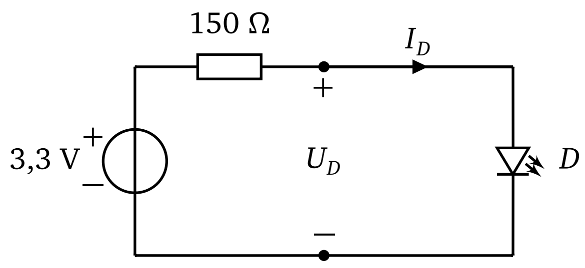
Figuur 1.17: *Belastingskarakteristiek.*

De belastingslijn in de grafiek loopt van het punt $(0{,}I_k)$ naar het punt $(U_o, 0)$. Dit komt overeen met respectievelijk $R_b = 0$ en $R_b \to \infty$. Naast de twee eerder genoemde punten is er nog een interessant punt op de lijn te vinden, namelijk waar $R_b = R_i$. Dit punt ligt op het midden van de belastingslijn. In dat punt geldt dat $I = \frac{1}{2}I_k$ en $U_{R_b} = \frac{1}{2}U_o$.

Nu is deze grafische methode niet erg interessant bij een netwerk met lineaire elementen, zoals weerstanden. We kunnen immers de stroom I en de spanning U_{R_b} ook analytisch oplossen:

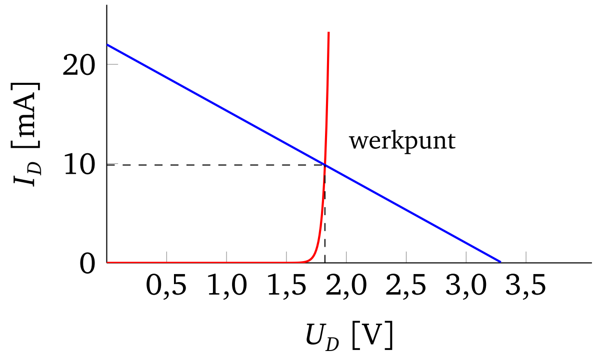
$$I = \frac{U}{R_i + R_b} \quad \text{en} \quad U_{R_b} = \frac{R_b}{R_i + R_b} \cdot U \tag{1.38}$$

Maar bij het gebruik van niet-lineaire elementen zoals de diode komt de methode goed tot zijn recht. In figuur 1.18 is een netwerk getekend met een weerstand in serie met een led. De led gedraagt zich als een diode. De spanning-stroomcurve van een led is sterk niet-lineair en een analytische oplossing van de spanningen en stromen in het netwerk is niet realiseerbaar.



Figuur 1.18: *Serieschakeling van een weerstand en een led.*

De open klemspanning bedraagt $3,3$ V. De kortsluitstroom is $3,3/150 = 22$ mA. We tekenen de belastingslijn in een grafiek, te zien in figuur 1.19. De rechte lijn wordt getrokken tussen het kortsluitpunt en het nullastpunt. De belastingslijn van de led wordt eveneens in de grafiek getrokken. Te zien is dat de ledstroom tot 1,5 V nagenoeg 0 is. Daarna stijgt de stroom zeer snel.

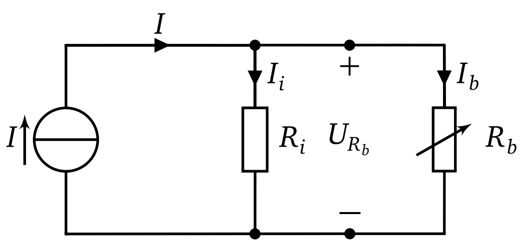


Figuur 1.19: *Belastingskarakteristiek van een serieschakeling van een weerstand en een led.*

Het snijpunt van de twee lijnen is het punt waarop het netwerk zich zal instellen. Dit wordt het werkpunt, belastingspunt of instelpunt genoemd. We lezen nu uit de grafiek af dat de diodespanning U_D zo'n 1,8 V bedraagt. De stroom bedraagt zo'n 10 mA.

Nauwkeurige analyse van het instelpunt toont aan dat de spanning over de diode 1,82 V is. De stroom door de diode (en dus ook de weerstand en de bron) is 9,86 mA.

Het is ook mogelijk om een belastingsweerstand aan te sturen met een stroombron met een inwendige weerstand. Dit is te zien in figuur 1.20.



Figuur 1.20: *Schema voor de belastingskarakteristiek.*

We kunnen voor dit netwerk de stroomvergelijking opstellen:

$$I = I_i + I_b \tag{1.39}$$

We brengen I_b links van het isgelijkteken:

$$I_b = -I_i + I \tag{1.40}$$

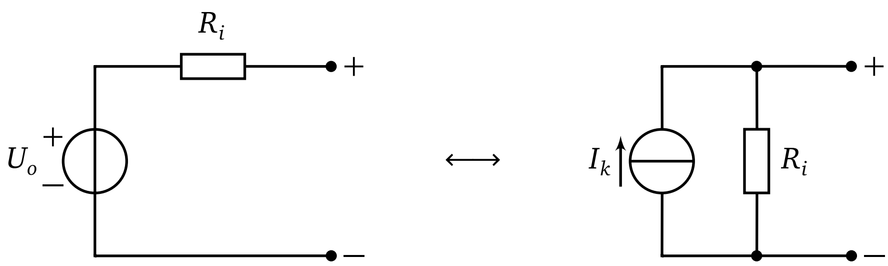
We kunnen I_i vervangen zodat volgt dat:

$$I_b = -\frac{1}{R_i} \cdot U_{R_b} + I \tag{1.41}$$

Verder volgt dat als R_b kortgesloten is, de spanning over de weerstanden 0 V is en dat de volledige bronstroom door de kortsluiting loopt. Dus geldt $I = I_k$. We kunnen de vergelijking dus ook schrijven als:

$$I_b = -\frac{1}{R_i} \cdot U_{R_b} + I_k \tag{1.42}$$

Dit is exact dezelfde vergelijking als (1.36). Het maakt voor de belastingsweerstand dus kennelijk niet uit of deze wordt gestuurd door een spanningsbron of door een stroombron waarvoor geldt dat beide dezelfde open klemspanning en kortsluitstroom hebben. De spanningsbron en stroombron zijn dus *uitwisselbaar*. Zie figuur 1.21.



Figuur 1.21: *De spanningsbron en stroombron zijn uitwisselbaar.*

Omdat de twee netwerken door de belasting als identiek worden gezien, moet gelden dat de open klemspanningen en kortsluitstromen gelijk zijn. Dus moet gelden dat:

$$U_o = I_k \cdot R_i \qquad \text{en} \qquad I_k = \frac{U_o}{R_i} \tag{1.43}$$

Hier volgt uit dat de inwendige weerstanden gelijk zijn.

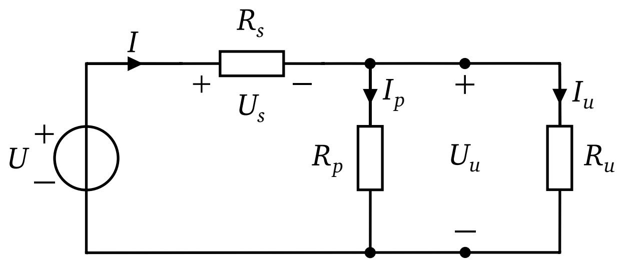
1.13 Het theorema van Thévenin

Aansluitend op de belastingskarakteristiek bespreken we nu het theorema van Thévenin. Dit theorema is bijzonder handig bij het vereenvoudigen van netwerken. Het bespaart veel rekenwerk door van een netwerk het théveningvervangingsschema op te stellen.

In figuur 1.22 is een netwerk getekend met een spanningsbron U, serieweerstand R_s en parallelweerstand weerstand R_p. Het netwerk wordt belast met uitwendige R_u.

We willen voor de weerstand R_u de belastingskarakteristiek opstellen. Hiervoor onderzoeken we de spanning-stroomrelatie van U_u en I_u. Voor de spanningen in het netwerk kunnen we opstellen dat:

$$U = U_s + U_u \tag{1.44}$$



Figuur 1.22: *Netwerk.*

We delen alle spanningen door R_s:

$$\frac{U}{R_s} = \frac{U_s}{R_s} + \frac{U_u}{R_s} \tag{1.45}$$

Als we R_u vervangen door een kortsluiting, dan staat de spanning U volledig over R_s. De stroom I vloeit alleen door R_s want R_p is immers kortgesloten. De bron levert nu een kortsluitstroom I_k. Dus geldt:

$$I_k = \frac{U}{R_s} \tag{1.46}$$

Verder geldt voor elke waarde van R_u dat:

$$I = \frac{U_s}{R_s} \tag{1.47}$$

We vullen dit in de vergelijking (1.45) in zodat we krijgen:

$$I_k = I + \frac{U_u}{R_s} \tag{1.48}$$

We vervangen de stroom I door de takstromen I_p en I_u:

$$I_k = I_p + I_u + \frac{U_u}{R_s} \tag{1.49}$$

We brengen I_u voor het isgelijkteken:

$$I_u = -I_p - \frac{U_u}{R_s} + I_k \tag{1.50}$$

De stroom I_p vervangen we door $\frac{U_u}{R_p}$:

$$I_u = -\frac{U_u}{R_p} - \frac{U_u}{R_s} + I_k \tag{1.51}$$

We halen U_u buiten de haakjes:

$$I_u = -\left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s}\right) \cdot U_u + I_k \tag{1.52}$$

De vergelijking heeft dezelfde vorm als vergelijking (1.36) van de belastingskarakteristiek. De vergelijking beschrijft weer een rechte lijn. De richtingscoëfficiënt van de lijn is:

$$\text{rico} = -\left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s}\right) \tag{1.53}$$

We werken deze uitdrukking om:

$$-\left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s}\right) = -\left(\frac{R_s}{R_p \cdot R_s} + \frac{R_p}{R_p \cdot R_s}\right) = -\frac{R_p + R_s}{R_p \cdot R_s} = -\frac{1}{\dfrac{R_p \cdot R_s}{R_p + R_s}} = -\frac{1}{R_p//R_s} \tag{1.54}$$

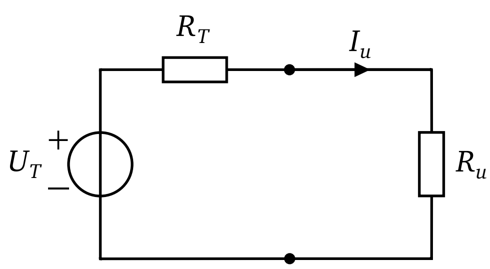
In de uitdrukking staat $R_p//R_s$ voor de parallelvervangingsweerstand van R_p en R_s. We kunnen de belastingkarakteristiek dus schrijven als:

$$I_u = -\frac{1}{R_p//R_s} \cdot U_u + I_k \tag{1.55}$$

Vergelijken we dit met vergelijking (1.36) dan zien we dat R_i overeenkomt met de parallelschakeling van R_p en R_s. De parallelschakeling en R_i vervullen dezelfde functie. We onderzoeken twee markante punten van de belastingskarakteristiek: het kortsluitpunt en het nullastpunt. Het kortsluitpunt, waar de bron de kortsluitstroom I_k levert is al bekend, zie vergelijking (1.46). Voor het nullastpunt geldt dat $I_u = 0$, dus als R_u is verwijderd. De spanning U_u is nu gelijk aan de open klemspanning U_o:

$$U_o = \frac{R_p}{R_p + R_s} \cdot U \tag{1.56}$$

We zijn nu zover gekomen dat we een theoretisch model kunnen opstellen voor het netwerk in figuur 1.22. Dit wordt het *théveninvervangingsschema* genoemd. Het vervangingsschema is te zien in figuur 1.23. We vervangen bron U door een bron met de open klemspanning. Deze spanning wordt de théveninspanning U_T genoemd. De weerstanden R_s en R_p worden vervangen door de parallelweerstandswaarde van R_s en R_p. Dit wordt de théveninweerstand R_T genoemd.



Figuur 1.23: *Théveninvervangingsnetwerk.*

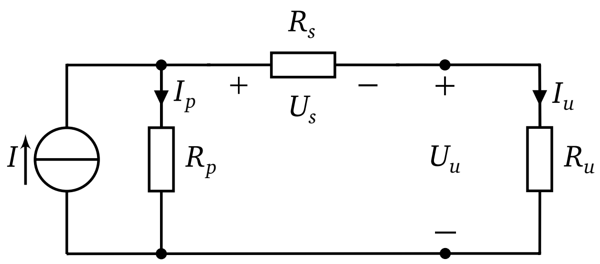
We kunnen de théveninweerstand R_T ook vinden door de open klemspanning te delen door de kortsluitstroom. Dus geldt:

$$R_T = \frac{U_o}{I_k} \tag{1.57}$$

Thévenin heeft aangetoond dat een netwerk gevormd door een willekeurig aantal spanningsbronnen, stroombronnen en weerstanden kan worden vervangen door een netwerk met spanningsbron U_T en serieweerstand R_T.

1.14 Het theorema van Norton

In figuur 1.24 is een netwerk te zien met een stroombron I, een parallelweerstand R_p en een serieweerstand R_s. Het netwerk wordt belast met een uitwendige weerstand R_u. We willen van dit netwerk de belastingskarakteristiek opstellen en onderzoeken hiervoor de spanning-stroomrelatie van U_u en I_u.



Figuur 1.24: *Netwerk.*

We gaan uit van de stroomvergelijking:

$$I = I_p + I_u \tag{1.58}$$

We schrijven I_u expliciet:

$$I_u = -I_p + I \tag{1.59}$$

We kunnen dit schrijven als:

$$I_u = \frac{-I_p \cdot (R_s + R_p)}{R_s + R_p} + \frac{I \cdot (R_s + R_p)}{R_s + R_p} \tag{1.60}$$

We vermenigvuldigen de rechterzijde uit:

$$I_u = \frac{-I_p \cdot R_s - I_p \cdot R_p + I \cdot R_s + I \cdot R_p}{R_s + R_p} \tag{1.61}$$

We schrijven $I \cdot R_p$ los:

$$I_u = \frac{-I_p \cdot R_s - I_p \cdot R_p + I \cdot R_s}{R_s + R_p} + \frac{I \cdot R_p}{R_s + R_p} \tag{1.62}$$

De term geheel rechts stelt de kortsluitstroom I_k voor zodat we kunnen schrijven dat:

$$I_u = \frac{-I_p \cdot R_s - I_p \cdot R_p + I \cdot R_s}{R_s + R_p} + I_k \tag{1.63}$$

Dit kunnen we omwerken tot:

$$I_u = \frac{-I_p \cdot R_p}{R_s + R_p} + \frac{(I - I_p) \cdot R_s}{R_s + R_p} + I_k \tag{1.64}$$

Nu stelt $I - I_p$ de stroom I_u voor zodat volgt dat:

$$I_u = \frac{-I_p \cdot R_p}{R_s + R_p} + \frac{I_u \cdot R_s}{R_s + R_p} + I_k \tag{1.65}$$

In deze vergelijking stelt $I_p \cdot R_p$ de spanning U_p over R_p (en de stroombron) voor en stelt $I_u \cdot R_s$ de spanning over R_s voor:

$$I_u = \frac{-U_p}{R_s + R_p} + \frac{U_s}{R_s + R_p} + I_k \tag{1.66}$$

Dit kunnen we schrijven als:

$$I_u = \frac{-(U_p - U_s)}{R_s + R_p} + I_k \tag{1.67}$$

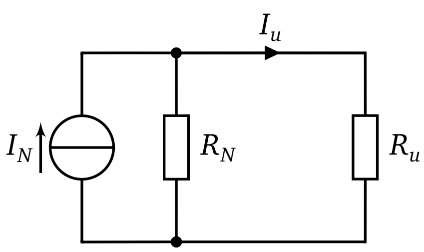
Nu stelt $U_p - U_s$ de spanning U_u voor zodat volgt dat:

$$I_u = -\frac{1}{R_s + R_p} \cdot U_u + I_k \tag{1.68}$$

De vergelijking heeft dezelfde vorm als vergelijking (1.36) van de belastingskarakteristiek. De vergelijking beschrijft weer een rechte lijn. De richtingscoëfficiënt van de lijn is:

$$\text{rico} = -\frac{1}{R_s + R_p} \tag{1.69}$$

Verder geldt dat bij kortsluiting van R_u (of anders: $R_u = 0\ \Omega$) de volledige bronstroom door de kortsluiting vloeit. We kunnen het netwerk in figuur 1.24 dus vervangen door een stroombron met stroom I_k en een parallelweerstand van $R_s + R_p$, zie figuur 1.25. Dit wordt het *nortonvervangingsschema* genoemd. De kortsluitstroom wordt de nortonstroom I_N genoemd. De parallelweerstand wordt de nortonweerstand R_N genoemd.



Figuur 1.25: *Nortonvervangingsschema.*

We kunnen de nortonweerstand ook vinden door de open klemspanning te delen door de kortsluitstroom:

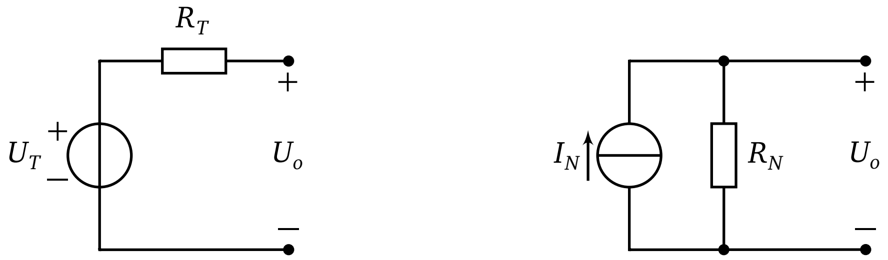
$$R_N = \frac{U_o}{I_k} \tag{1.70}$$

Norton heeft aangetoond dat een netwerk gevormd door een willekeurig aantal spanningsbronnen, stroombronnen en weerstanden kan worden vervangen door een netwerk met stroombron I_N en parallelweerstand R_N.

1.15 Thévenen versus Norton

We hebben in paragraaf 1.12 dat een spanningsbron met serieweerstand en een stroombron met parallelweerstand uitwisselbaar zijn. Voor de belasting is er geen verschil. We kunnen nu de relatie tussen het théveninvervangingsschema en nortonvervangingschema onderzoeken.

In figuur 1.26 zijn de vervangingsschema's van Thévenin en Norton te zien met betrekking tot de open klemspanning.

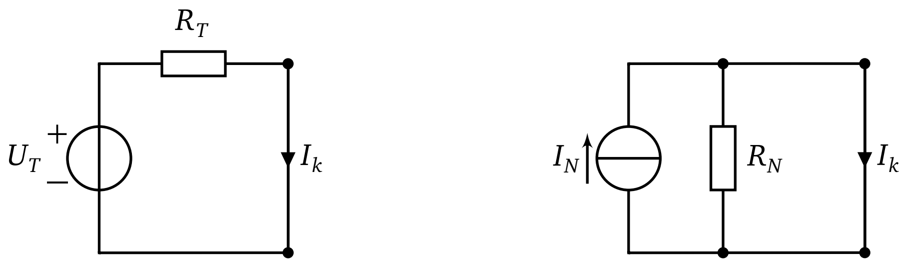


Figuur 1.26: *Open klemspanning bij Thévenin en Norton.*

Als voor de belasting geldt dat er geen onderscheid kan worden gemaakt tussen de twee netwerken dan moet gelden dat de open klemspanningen gelijk zijn. Dus geldt:

$$U_T = I_N \cdot R_N \tag{1.71}$$

In figuur 1.27 zijn beide netwerken in kortsluitsituatie getekend. Ook nu moet gelden dat beide kortsluitstromen gelijk zijn.



Figuur 1.27: *Kortsluitstromen bij Thévenin en Norton.*

Dus geldt:

$$I_N = \frac{U_T}{R_T} \tag{1.72}$$

Willen we aan de bovenstaande voorwaarden voldoen dan volgt automatisch dat:

$$R_T = R_N \tag{1.73}$$