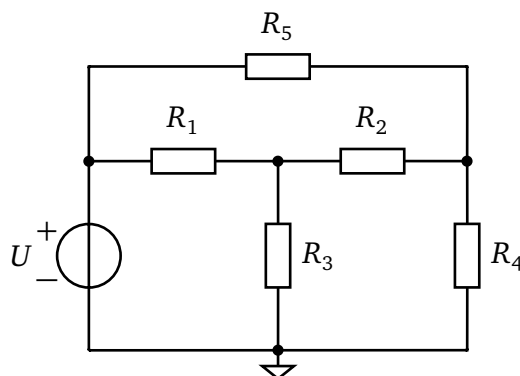


1

Gelijkstroomtheorie

1.1 Knooppuntspanningsmethode

De eerder besproken oplossingsmethoden kunnen niet voor alle netwerken gebruikt worden. Bekijk het netwerk in figuur 1.1. Op geen enkele wijze is een combinatie van weerstanden te vereenvoudigen als serie- of parallelweerstand. Dat betekent dat technieken als spanningsdeling en stroomdeling niet kunnen worden toegepast¹.



Figuur 1.1: Netwerk met spanningsbron en weerstanden.

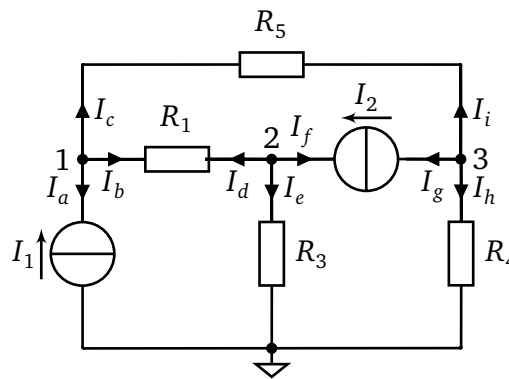
We zoeken dus naar een methode die systematisch het netwerk beschrijft. Met de *knooppuntspanningsmethode* gaan we uit van de stroomwet van Kirchhoff en de wet van Ohm. Een *knooppunt* is een punt waar twee of meer netwerkelementen met elkaar verbonden zijn. We nemen één knooppunt als referentiepunt. In principe kan elk knooppunt als referentiepunt dienen, maar het is handig om een uiteinde van een onafhankelijke spanningsbron te kiezen. De andere knooppunten hebben een bekende of onbekende spanning t.o.v. het referentieknooppunt. Vervolgens stellen we voor elk knooppunt met een onbekende spanning de stroomwet van Kirchhoff op: alle stromen naar een knooppunt toe zijn opgeteld 0, maar voor deze methode is het handiger om de stroomwet iets

¹ Overigens is dit netwerk wel met behulp van een Thévenin-vervangingscircuit te rekenen maar dat kost veel rekenwerk.

anders te definiëren: alle stromen van een knooppunt af zijn opgeteld 0. We krijgen zo een stelsel vergelijkingen met bekende en onbekende spanningen dat op te lossen is. Het voordeel van deze methode is dat het te implementeren is in een computerprogramma, bijvoorbeeld in een netwerksimulatieprogramma.

1.1.1 Onafhankelijke stroombronnen

Onafhankelijke stroombronnen kunnen zonder problemen in een netwerk ingepast worden. In de vergelijkingen die het netwerk beschrijven, komen dan de stromen van de stroombronnen te staan. Bij onafhankelijke stroombronnen zijn de stromen constant. In figuur 1.2 is een netwerk te zien met twee onafhankelijke stroombronnen en vier weerstanden.



Figuur 1.2: Netwerk met onafhankelijke stroombronnen.

Er is geen enkele spanning op voorhand bekend, U_1 , U_2 en U_3 zijn allemaal onbekend. Er zijn dus drie vergelijkingen nodig om het netwerk te beschrijven, voor elk knooppunt één. Voor een knooppunt moet gelden dat alle wegvloeiende stromen opgeteld 0 zijn. De vergelijking voor knooppunt 1 is dus:

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad (1.1)$$

Nu is I_a gelijk aan $-I_1$ (let op de richting van de stromen). De stroom I_b wordt gevonden door de spanning over R_1 te delen door R_1 . De stroom I_c wordt gevonden door de spanning over R_5 te delen door R_5 . De vergelijking voor knooppunt 1 wordt dan:

$$-I_1 + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_5} = 0 \quad (1.2)$$

De vergelijking voor knooppunt 2 is:

$$I_d + I_e + I_f = 0 \quad (1.3)$$

Na invullen van de spanningen, weerstanden en stroombron krijgen we:

$$\frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2 - 0}{R_3} - I_2 = 0 \quad (1.4)$$

De vergelijking voor knooppunt 3 is:

$$I_g + I_h + I_i = 0 \quad (1.5)$$

Na invullen krijgen we:

$$I_2 + \frac{U_3 - 0}{R_4} + \frac{U_3 - U_1}{R_5} = 0 \quad (1.6)$$

We vatten het stelsel van vergelijkingen even samen:

$$\begin{aligned} \text{Knooppunt 1:} \quad & -I_1 + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_1 - U_3}{R_5} = 0 \\ \text{Knooppunt 2:} \quad & \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2 - 0}{R_3} - I_2 = 0 \\ \text{Knooppunt 3:} \quad & I_2 + \frac{U_3 - 0}{R_4} + \frac{U_3 - U_1}{R_5} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

We herschrijven de vergelijkingen zodanig dat de onbekende spanningen links van het isgelijktteken staan en de bekende stromen rechts van het isgelijktteken staan:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}\right)U_1 - \frac{1}{R_1}U_2 - \frac{1}{R_5}U_3 &= I_1 \\ -\frac{1}{R_1}U_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)U_2 &= I_2 \\ -\frac{1}{R_5}U_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)U_3 &= -I_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Merk op dat in de vergelijking voor knooppunt 2 geen term met spanning U_3 voorkomt. Dit komt omdat de stroom van knooppunt 3 naar knooppunt 2 bekend is, namelijk $-I_2$ (maar rechts van het isgelijktteken natuurlijk I_2). In de vergelijking voor knooppunt 3 komt de spanning U_2 niet voor vanwege dezelfde stroombron, maar de stroom I_2 is nu positief gesteld (gaat van het knooppunt af, rechts van het isgelijktteken $-I_2$).

We kunnen het stelsel vergelijkingen in (1.8) in de matrixnotatie schrijven:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Merk op dat in de coëfficiëntenmatrix (links in de vergelijking) steeds de omgekeerden (of *reciproken*) van de weerstanden. De omgekeerde van de weerstandswaarde wordt geleiding genoemd. De coëfficiëntenmatrix wordt daarom ook wel de geleidingsmatrix genoemd. De vector met de spanningen wordt de onbekendenvector genoemd en de vector met de stromen (het rechterlid) wordt de bekendenvector genoemd.

De algemene gedaante voor dit stelsel van vergelijkingen is:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

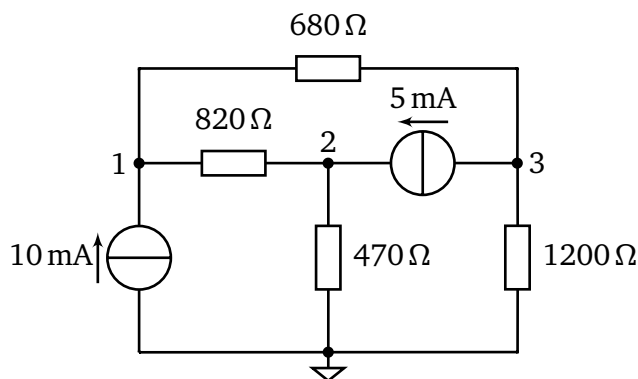
waarbij I_1 , I_2 en I_3 niet verward moeten worden met de stromen in (1.9). De kracht van de matrixnotatie komt goed naar voren bij het opstellen van de vergelijkingen:

- Er zijn evenveel vergelijkingen nodig als dat er onbekende spanningen zijn;
- Elke regel bevat de vergelijking voor het betreffende knooppunt;
- Voor de elementen op de hoofddiagonaal (G_{11} , G_{22} en G_{33} , van linksboven naar rechtsonder) geldt dat dit de som is van de geleidingen die direct met het knooppunt van de onbekende spanning verbonden zijn;
- Voor de elementen niet op de hoofddiagonaal geldt dat dit de geleiding is die rechtstreeks tussen twee onbekende spanningen is verbonden en is altijd negatief. Deze elementen komen altijd in paren voor, gespiegeld in de hoofddiagonaal: zo is de waarde van knooppunt G_{32} hetzelfde als de waarde van G_{23} . De coëfficiëntenmatrix is dus symmetrisch t.o.v. de hoofddiagonaal;
- Een element niet op de hoofddiagonaal kan 0 zijn; er is dan geen geleiding tussen de twee knooppunten;
- Het elementen van het rechterlid van het stelsel (de bekendenvector) worden gevormd door de som van de stromen naar het desbetreffende knooppunt toe.

Als de matrixvorm van het stelsel van vergelijkingen is opgesteld, kunnen we gebruik maken van de matrixrekenkunde om tot een oplossing te komen. Zie hiervoor bijlage ??.

Voorbeeld 1.1: Netwerk met onafhankelijke stroombronnen

In figuur 1.3 is een netwerk te zien met twee onafhankelijke stroombronnen en vier weerstanden. Bepaal de spanningen op de knooppunten en de vermogens van de stroombronnen.



Figuur 1.3: Netwerk met onafhankelijke stroombronnen.

We kunnen voor het berekenen van de knooppuntspanningen de vergelijkingen van (1.8)

gebruiken:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{820} + \frac{1}{680}\right)U_1 - \frac{1}{820}U_2 - \frac{1}{680}U_3 &= 10 \times 10^{-3} \\
 -\frac{1}{820}U_1 + \left(\frac{1}{820} + \frac{1}{470}\right)U_2 &= 5 \times 10^{-3} \\
 -\frac{1}{680}U_1 + \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{680}\right)U_3 &= -5 \times 10^{-3}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

We rekenen de coëfficiënten links van de isgelijkttekens uit:

$$\begin{aligned}
 2,69 \times 10^{-3}U_1 - 1,22 \times 10^{-3}U_2 - 1,47 \times 10^{-3}U_3 &= 10 \times 10^{-3} \\
 -1,22 \times 10^{-3}U_1 + 3,35 \times 10^{-3}U_2 &= 5 \times 10^{-3} \\
 -1,47 \times 10^{-3}U_1 + 2,30 \times 10^{-3}U_3 &= -5 \times 10^{-3}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Door gebruik te maken van de matrixrekenkunde (zie hiervoor bijlage ??) volgt dat:

$$U_1 = 6,60 \text{ V} \quad U_2 = 3,90 \text{ V} \quad U_3 = 2,05 \text{ V} \tag{1.13}$$

We kunnen nu de vermogens van de stroombronnen uitrekenen. Hierbij moeten we letten op de stroomrichting van I_1 en I_2 :

$$\begin{aligned}
 P_{I1} &= (U_1 - 0) \cdot I_1 = 6,60 \cdot 10 \times 10^{-3} = 0,066 \times 10^{-3} \text{ W} = 66 \text{ mW} \\
 P_{I2} &= (U_2 - U_3) \cdot I_2 = 1,86 \cdot 5 \times 10^{-3} = 9,28 \times 10^{-3} \text{ W} = 9,28 \text{ mW}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.1.2 Onafhankelijke spanningsbronnen

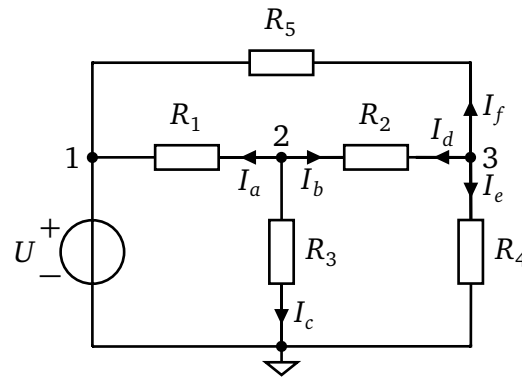
In figuur 1.4 is een netwerk te zien met een onafhankelijke spanningsbron en vijf weerstanden. Om tot een oplossing te komen van de spanningen moeten we een aantal stappen doorlopen. De eerste stap is het kiezen van het referentieknooppunt. In de figuur is dit het knooppunt onderaan, gekozen aan een uiteinde van de onafhankelijke spanningsbron. Vervolgens geven we de knooppunten een nummer en een bijbehorende bekende of onbekende spanningswaarde. De spanning op knooppunt 1 is bekend; die is U V. De spanningen op de knooppunten 2 (U_2) en 3 (U_3) zijn onbekend. Er zijn twee onbekende spanningen dus we moeten twee vergelijkingen opstellen.

We stellen nu de stroomvergelijkingen op voor de knooppunten 2 en 3. De vergelijking voor knooppunt 2 is.

$$I_a + I_b + I_c = 0 \tag{1.15}$$

We kunnen de stroom I_a uitdrukken in de spanningen U_1 en U_2 en de weerstand R_1 . Iets dergelijks geldt ook voor I_b en I_c . Dus geldt:

$$I_a = \frac{U_2 - U_1}{R_1} \quad I_b = \frac{U_2 - U_3}{R_2} \quad I_c = \frac{U_2 - 0}{R_3} \tag{1.16}$$



Figuur 1.4: *Netwerk voor knooppuntspanningsmethode.*

We vullen dit in en krijgen dan:

$$\frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2 - U_3}{R_2} + \frac{U_2 - 0}{R_3} = 0 \quad (1.17)$$

De vergelijking voor knooppunt 3 is:

$$I_d + I_e + I_f = 0 \quad (1.18)$$

met:

$$I_d = \frac{U_3 - U_2}{R_2} \quad I_e = \frac{U_3 - 0}{R_4} \quad I_f = \frac{U_3 - U_1}{R_5} \quad (1.19)$$

De vergelijking voor knooppunt 3 is dus:

$$\frac{U_3 - U_2}{R_2} + \frac{U_3 - 0}{R_4} + \frac{U_3 - U_1}{R_5} = 0 \quad (1.20)$$

We hebben nu een stelsel van twee vergelijkingen en twee onbekenden (U_2 en U_3 , U_1 is een bekende spanning):

$$\begin{aligned} \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2 - U_3}{R_2} + \frac{U_2 - 0}{R_3} &= 0 \\ \frac{U_3 - U_2}{R_2} + \frac{U_3 - 0}{R_4} + \frac{U_3 - U_1}{R_5} &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

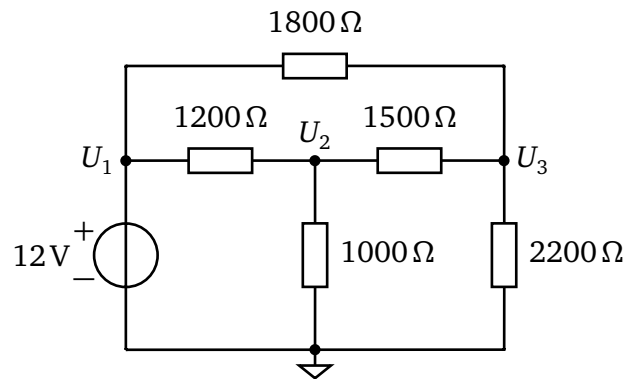
We schrijven de onbekende spanningen nu expliciet op als functie van de weerstanden en brengen alle bekende spanningen naar de rechterkant van het isgelijktteken:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_2 - \frac{1}{R_2} U_3 &= \frac{U_1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} U_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) U_3 &= \frac{U_1}{R_5} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dit stelsel vergelijkingen is op te lossen met technieken uit de matrixrekenkunde, zie hiervoor bijlage ?? . Nadat de spanningen U_2 en U_3 berekend zijn, kunnen de stromen en vermogens in het netwerk berekend worden.

Voorbeeld 1.2: Netwerk voor berekenen knooppuntspanningen

Gegeven is het netwerk in figuur 1.5. Bereken de spanningen U_2 en U_3 en de stroom die door de spanningsbron geleverd wordt.



Figuur 1.5: Netwerk met spanningsbron en weerstanden.

We stellen eerst de stroomwet op voor knooppunt 2:

$$\frac{U_2 - 12}{1200} + \frac{U_2 - 0}{1000} + \frac{U_2 - U_3}{1500} = 0 \quad (1.23)$$

En voor knooppunt 3:

$$\frac{U_3 - U_2}{1500} + \frac{U_3 - 0}{2200} + \frac{U_3 - 12}{1800} = 0 \quad (1.24)$$

We herschrijven de twee vergelijkingen zodat U_2 en U_3 expliciet worden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{1500} + \frac{1}{1000} \right) U_2 - \frac{1}{1500} U_3 &= \frac{12}{1200} \\ -\frac{1}{1500} U_2 + \left(\frac{1}{2200} + \frac{1}{1800} + \frac{1}{1500} \right) U_3 &= \frac{12}{1800} \end{aligned} \quad (1.25)$$

We rekenen alle bekende waarden uit:

$$\begin{aligned} 2,500 \times 10^{-3} U_2 - 0,667 \times 10^{-3} U_3 &= 10,000 \times 10^{-3} \\ -0,667 \times 10^{-3} U_2 + 1,677 \times 10^{-3} U_3 &= 6,667 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (1.26)$$

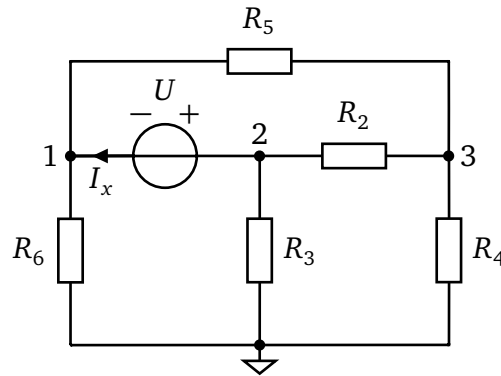
Met behulp van matrixrekenmethoden vinden we voor $U_2 = 5,67\text{V}$ en $U_3 = 6,27\text{V}$. Om de stroom die de spanningsbron levert te bepalen, moeten we de stromen uitrekenen door de weerstanden van 1200Ω en 1800Ω :

$$\begin{aligned} I_{12V} &= I_{2200\Omega} + I_{1800\Omega} = \frac{12 - 5,67}{1200} + \frac{12 - 6,27}{1800} \\ &= 5,275 \times 10^{-3} + 3,183 \times 10^{-3} \\ &= 8,458 \text{ mA} \end{aligned} \quad (1.27)$$

We hebben nu gezien dat een onafhankelijke spanningsbron met één uiteinde aan de referentie ervoor zorgt dat het aantal benodigde vergelijkingen met één verminderd

wordt. Als er echter een “zwevende” spanningsbron in het netwerk geplaatst is, een spanningsbron tussen twee onbekende knooppuntspanningen, dan is er een extra vergelijking nodig voor het vinden van de knooppuntspanningen. Die extra vergelijking is nodig omdat de stroom die de spanningsbron levert onbekend is.

In figuur 1.6 is een netwerk te zien met een zwevende spanningsbron. Geen van de uiteinden van de bron is verbonden met het referentieknooppunt. Dat betekent dat alle spanningen in het netwerk onbekend zijn. Verder is de stroom die bron levert onbekend. Deze stroom stellen we I_x . Merk op dat I_x gezien moet worden als een bronstroom en dat de referentierichting van de bronstroom van de ‘+’ naar de ‘−’ is genomen.



Figuur 1.6: Netwerk voor knooppuntspanningsmethode.

We stellen nu de stroomvergelijkingen op voor de knooppunten. Voor knooppunt 1:

$$\frac{U_1 - 0}{R_6} + \frac{U_1 - U_3}{R_5} - I_x = 0 \quad (1.28)$$

Voor knooppunt 2:

$$\frac{U_2 - 0}{R_3} + \frac{U_2 - U_3}{R_2} + I_x = 0 \quad (1.29)$$

Voor knooppunt 3:

$$\frac{U_3 - U_1}{R_5} + \frac{U_3 - U_2}{R_2} + \frac{U_3 - 0}{R_4} = 0 \quad (1.30)$$

We hebben nu drie vergelijkingen maar er zijn vier onbekenden: U_1 , U_2 , U_3 en I_x . Er is dus nog één vergelijking nodig om tot een oplossing te komen. We weten wel wat de spanning is tussen U_2 en U_1 : die is U V. De vierde vergelijking is dus:

$$U_2 - U_1 = U \quad (1.31)$$

Merk op dat deze laatste vergelijking geen stroomvergelijking is maar een spanningsver-

gelijking. Het stelsel van vergelijkingen wordt dus:

$$\begin{array}{rcl}
 \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5}\right)U_1 & -\frac{1}{R_5}U_3 & -I_x = 0 \\
 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_2 & -\frac{1}{R_2}U_3 & +I_x = 0 \\
 -\frac{1}{R_5}U_1 & -\frac{1}{R_2}U_2 & +\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)U_3 = 0 \\
 -U_1 & +U_2 & = U
 \end{array} \quad (1.32)$$

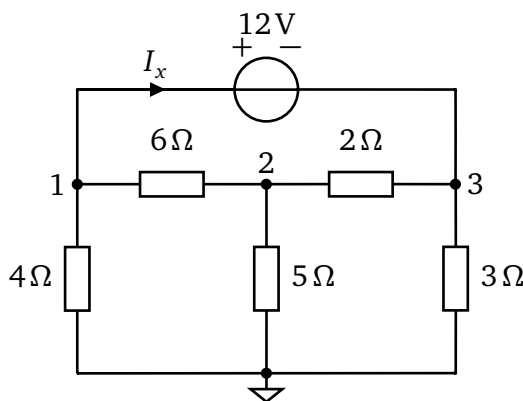
In matrixnotatie wordt dit:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5} & 0 & -\frac{1}{R_5} & -1 \\ 0 & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Merk op dat niet alle elementen uit de coëfficiëntenmatrix nu de dimensie geleiding hebben, maar dat enkele elementen dimensieloos zijn. Door de keuze van de richting van I_x is de matrix echter wel symmetrisch ten opzichte van de hoofddiagonaal. In de onbekendenvector is naast onbekende spanningen ook een onbekende stroom te vinden.

Voorbeeld 1.3: Netwerk met zwevende, onafhankelijke spanningsbron

In figuur 1.7 is een netwerk te zien met een zwevende spanningsbron. Er zijn drie onbekende spanningen en één onbekende bronstroom. Er zijn dus vier vergelijkingen nodig voor het vinden van de onbekende spanningen en stroom.



Figuur 1.7: Netwerk voor knooppuntspanningsmethode.

We stellen direct de matrixvergelijking uit het netwerk op:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Met behulp van de matrixrekenkunde vinden we voor de spanningen en de stroom: $U_1 = 7,30\text{ V}$, $U_2 = -1,30\text{ V}$, $U_3 = -4,70\text{ V}$ en $I_x = -3,26\text{ A}$. Merk op dat de bronstroom I_x negatief is door de keuze van de richting van de stroom.