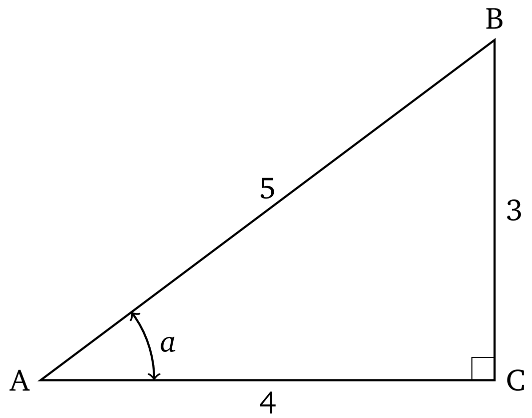
SOS-CAS-TOA

De sinus, cosinus en tangens van een hoek

In een rechthoekige driehoek ABC gelden de sinus- cosinus- en tangensregels.



SOS: Sinus is Overstaande zijde gedeeld door de Schuine zijde:

$$\boxed{\sin a = \frac{BC}{AB}} \tag{1}$$

CAS: Cosinus is Aanliggende zijde gedeeld door de Schuine zijde:

$$\boxed{\cos a = \frac{AC}{AB}} \tag{2}$$

TOA: Tangens is Overstaande zijde gedeeld door de Aanliggende zijde:

$$\boxed{\tan a = \frac{BC}{AC}} \tag{3}$$

Pythagoras:

$$\boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2} \tag{4}$$

Voor de sinus, cosinus en tangens in de figuur gelden:

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \\ \cos a &= \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \\ \tan a &= \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \end{aligned} \tag{5}$$

Dezelfde waarden voor de sinus, cosinus en tangens worden gevonden als we de driehoek vergroten of verkleinen met een vergrotingsfactor.

Voor de tangens geldt ook:

$$\tan a = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} \qquad \text{met } \frac{BC}{AB} = \sin a \text{ en } \frac{AC}{AB} = \cos a \tag{6}$$

Dus geldt:

$$\boxed{\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}} \tag{7}$$

Voor het vinden van een hoek moeten de inverse bewerkingen gedaan worden:

$$\begin{aligned} a &= \sin^{-1} 0{,}6 = 36{,}87^\circ \\ a &= \cos^{-1} 0{,}8 = 36{,}87^\circ \\ a &= \tan^{-1} 0{,}75 = 36{,}87^\circ \end{aligned} \tag{8}$$

Notatie

Een veel gebruikte notatie voor het berekenen van een hoek vanuit de sinus en cosinus is $\sin^{-1}$ en $\cos^{-1}$. Dat is formeel gezien niet juist. De afspraak is om een sinus-tot-de-macht aan te geven met $\sin^{macht}$. Dus dit zou betekenen dat:

$$\text{sinus-tot-de-macht-min-1} = \sin^{-1} = \frac{1}{\sin} \tag{9}$$

Dit geldt ook zo voor cosinus en tangens. De officiële notatie is *arcsinus*, *arccosinus* en *arctangens*:

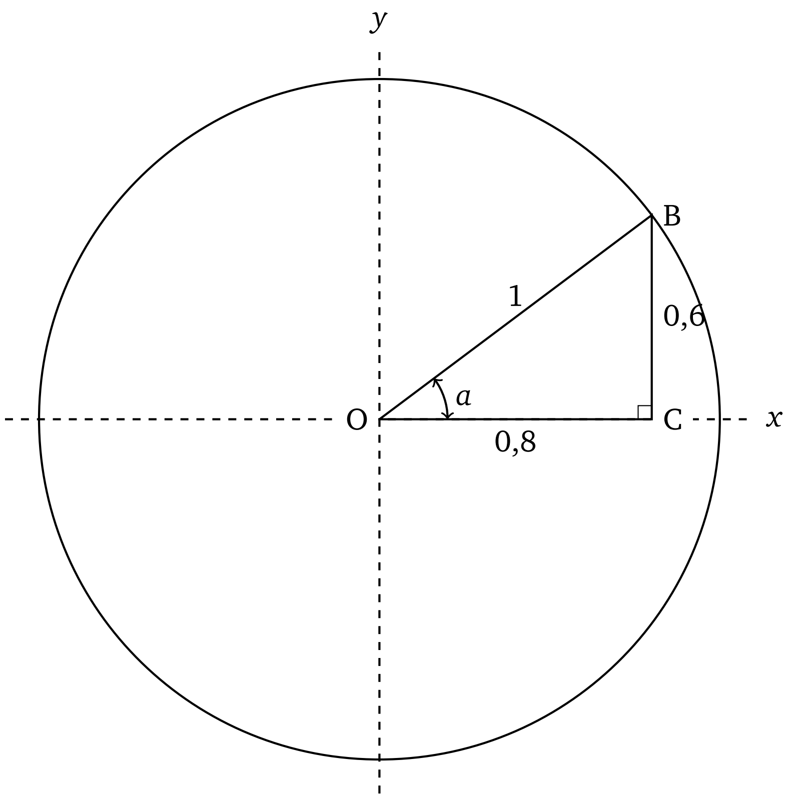
$$a = \arcsin x \qquad a = \arccos x \qquad a = \arctan x \tag{10}$$

Voor het *kwadraat* (en hogere machten) kunnen we de macht bij de sinus, cosinus of tangens schrijven:

$$\boxed{(\sin a) \cdot (\sin a) = \sin^2 a} \tag{11}$$

Cirkel en driehoek

We kunnen een driehoek ook tekenen in een cirkel. De cirkel tekenen we in een xy-vlak. We nemen voor het gemak een cirkel met de straal 1. Dit wordt de eenheidscirkel genoemd. De driehoek OBC wordt zo getekend dat punt O op de oorsprong ligt én het middelpunt is van de cirkel. Punt B ligt onder een hoek a op de cirkel. Punt C ligt loodrecht onder punt B op de x-as. Lijnstukken OC en BC vormen dus een rechte hoek. Zie onderstaande figuur.



Omdat de schuine zijde nu de lengte 1 heeft, vereenvoudigen de functies voor sinus en cosinus.

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{BC}{OB} = \frac{0,6}{1} = 0,6 \\ \cos a &= \frac{OC}{OB} = \frac{0,8}{1} = 0,8 \\ \tan a &= \frac{BC}{OC} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75 \end{aligned} \tag{12}$$

Ook nu geldt de stelling van Pythagoras:

$$OB^2 = OC^2 + BC^2 \tag{13}$$

Dus geldt:

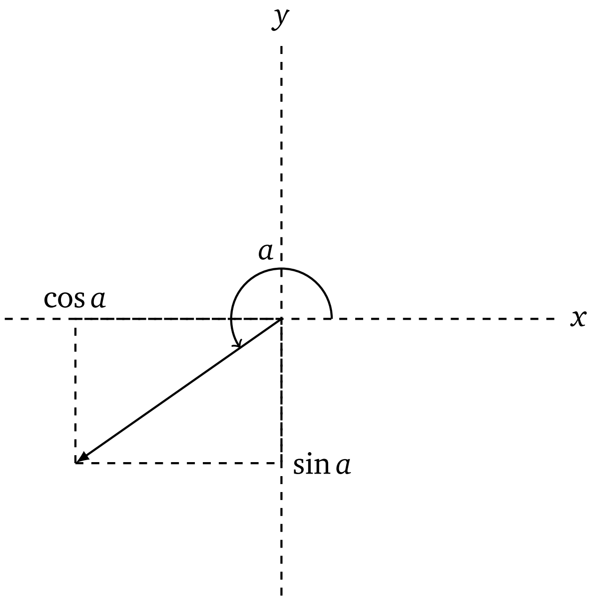
$$1^2 = 0,6^2 + 0,8^2 \tag{14}$$

Maar de waarde 0,6 volgt uit $\sin a$ en de waarde 0,8 volgt uit $\cos a$. Dus moet gelden:

$$\boxed{\sin^2 a + \cos^2 a = 1} \tag{15}$$

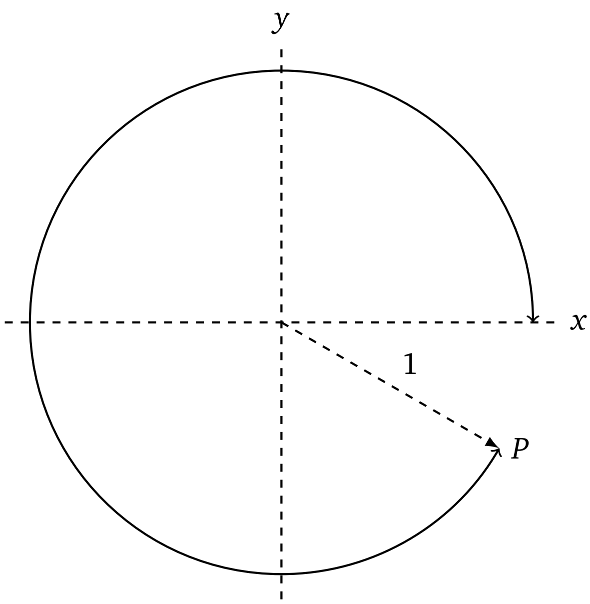
Dit wordt de *hoofdstelling van de goniometrie* genoemd.

De waarden van de sinus, cosinus en tangens kunnen ook negatief zijn. Dit is te zien in de onderstaande figuur. Zo is $\sin 215^\circ \approx -0{,}5736$ en $\cos 215^\circ \approx -0{,}8191$.



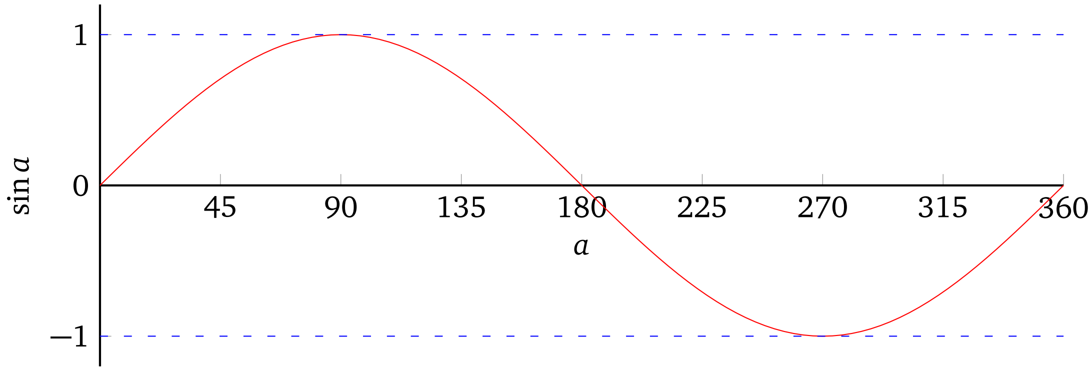
Als we in een xy-vlak een punt P aangeven met de x-coördinaat afhankelijk van de cosinus en de y-coördinaat van de sinus van de hoek, en we laten de hoek oplopen van 0° tot en met 360°, dan krijgen we een *cirkel*. De straal van de cirkel is 1. Dus geldt:

$$P(x,y) = \begin{cases} x = \cos a \\ y = \sin a \end{cases} \tag{16}$$

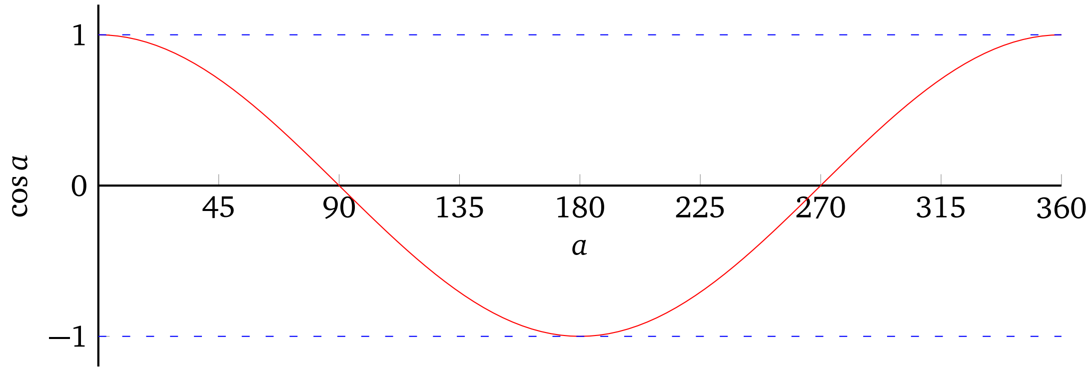


Grafieken sinus en cosinus

Als we de waarde van de sinus uitzetten (op de y-as) als functie van de hoek (op de x-as) dan krijgen we een zogenoemde *golfvorm*:



Als we de waarde van de cosinus uitzetten (op de y-as) als functie van de hoek (op de x-as) dan krijgen we een zogenoemde *golfvorm*:



De sinus en cosinus zijn zogenoemde periodieke functies: ze herhalen zich om de 360°. De sinus en cosinus zijn zogenoemde harmonische signalen. Dit zijn signaalvormen die voorkomen in veel natuurkundige processen.

Enkele formules:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(\alpha + 360^\circ) \\ \cos\alpha &= \cos(\alpha + 360^\circ) \\ \tan\alpha &= \tan(\alpha + 180^\circ) \end{aligned} \tag{17}$$

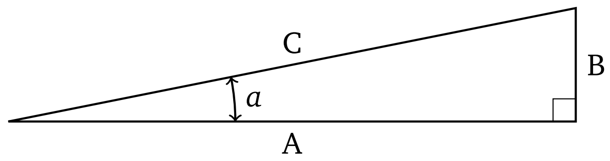
Verder is te zien dat de cosinus en sinus 90° verschoven zijn:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \sin(\alpha + 90^\circ) \\ \sin\alpha &= \cos(\alpha - 90^\circ) \end{aligned} \tag{18}$$

Stijgingspercentage en hellingshoek

De stijgingspercentage wordt aangegeven in procenten, bijvoorbeeld 14%.

$$\text{stijgingspercentage} = 100\% \times \frac{B}{A} \tag{19}$$



en

$$\text{stijgingspercentage} = 100\% \times \tan a \tag{20}$$

De hellingshoek is:

$$a = \tan^{-1} \frac{\text{stijgingspercentage}}{100\%} \tag{21}$$

Voorbeeld:

Stijgingspercentage is 14%. Dan is de hoek:

$$a = \tan^{-1} \frac{14\%}{100\%} = \tan^{-1} 0{,}14 = 8^\circ \tag{22}$$

Voorbeeld:

Een skipiste is 2 km lang en overbrugt een hoogteverschil van 100 m. Dus $C = 2000$ en $B = 100$. Nu de hoek a berekenen:

$$a = \sin^{-1} \frac{B}{C} = \sin^{-1} \frac{100}{2000} = 2{,}866^\circ \tag{23}$$

Het stijgingspercentage is dan:

$$\text{stijgingspercentage} = 100\% \times \tan a = 100\% \times \tan 2{,}886 = 5\% \tag{24}$$