MATRIZES INVERSAS

DEFINIÇÃO

- Seja A uma matriz de ordem n. Dizemos que A é inversível (ou invertível) se existir uma matriz B de ordem n tal que

$$A.B = I_n$$

Nesse caso, B é chamada inversa de A e denotada A^{-1}.

Caso a matriz B não exista, a matriz A é chamada singular.

Observações:

1: Se B é inversa de A então A é inversa de B, ou seja, $A.A^{-1}=I_n$

2. A é singular se, e somente se, det(A) = 0.

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS PARA CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA

- Dada uma matriz A de ordem n, para determinarmos a sua inversa escrevemos a matriz aumentada

$$[A|I_n].$$

- Através de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada a transformamos na matriz numa matriz tal que seu lado esquerdo seja a matriz I_n. Se esse procedimento for possível, obteremos à direita a matriz inversa de A:

$$[I_n|A^{-1}].$$

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS PARA CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA

- As operações elementares sobre as linhas de A são:

I. Trocar duas linhas da matriz aumentada de posição (Troca de linhas).

II. Substituir uma linha pela mesma linha multiplicada por um escalar diferente de 0.

III. Substituir uma linha pela mesma linha somada a outra linha multiplicada por um escalar (Combinação linear).

EXEMPLO 1

Seja $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Calcule, se possível, A^{-1}.

Primeiro escrevemos a matriz aumentada: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Utilizaremos a operação elementar III para introduzirmos zeros abaixo da primeira coluna. O elemento a_{11} é chamado pivô e deverá ser diferente de zero. Caso seja zero, devemos procurar abaixo dele, na mesma coluna, se há algum elemento diferente de zero. Caso haja, usamos a operação elementar I para trocar linhas de posições de forma que o novo a_{11} seja diferente de zero. Se não houver, a matriz é singular.

$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$ $\quad\quad L_2 \leftarrow L_2 + m_{21}L_1$

$m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$ $\quad\quad L_3 \leftarrow L_3 + m_{31}L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Utilizaremos a operação elementar III para introduzirmos zeros abaixo da segunda coluna. O elemento a_{22} é chamado pivô desta etapa e deverá ser diferente de zero. Caso seja zero, devemos procurar abaixo dele, na mesma coluna, se há algum elemento diferente de zero. Caso haja, usamos a operação elementar I para trocar linhas de posições de forma que o novo a_{22} seja diferente de zero. Se não houver, a matriz é singular.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}}$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Agora que já terminamos de zerar os elementos abaixo da diagonal, vamos zerar os elementos acima, da direita para a esquerda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -19 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$m_{23} = -\frac{a_{23}}{a_{33}}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + m_{23} L_3$

$m_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{33}}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + m_{13} L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -18 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 16 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -19 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$m_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + m_{12} L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 14 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 16 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -19 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 16 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Agora que já terminamos de zerar todos os elementos fora da diagonal, precisamos transformar seus elementos em no valor 1. Nesse caso, apenas o elemento é diferente de 1. Supondo um caso qualquer, as operações seriam:

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}} L_2$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{a_{33}} L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -16 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Sendo assim, a inversa de A é a matriz: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & -1 \\ -16 & 6 & 1 \\ -19 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

EXEMPLO 11

Seja $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule, se possível, A^{-1}.

Primeiro escrevemos a matriz aumentada: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$ $\qquad L_2 \leftarrow L_2 + m_{21}L_1$

$m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -3$ $\qquad L_3 \leftarrow L_3 + m_{31}L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Veja que o novo pivô será 3. Podemos, para facilitar nossos cálculos, trocar as duas últimas linhas, assim teremos novamente o valor do pivô igual a 1 e o multiplicador será um número inteiro. Essa passagem é opcional.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -3$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Agora que já terminamos de zerar os elementos abaixo da diagonal, vamos zerar os elementos acima, da direita para a esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{m}_{23} = -\frac{a_{23}}{a_{33}} = -\frac{4}{-10} = \frac{2}{5} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \mathrm{m}_{23} L_3$$

$$\mathrm{m}_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{33}} \; - \frac{-1}{-10} = -\frac{1}{10} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + \mathrm{m}_{13} L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3/10 & -1/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & -10 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{m}_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = 1 \qquad L_1 \leftarrow L_1 + \mathrm{m}_{12} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & -10 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10\\0 & 1 & 0 & -1/5 & 2/5 & -1/5\\0 & 0 & -10 & 7 & 1 & -3\end{array}\right]$$

Agora que já terminamos de zerar todos os elementos fora da diagonal, precisamos transformar seus elementos em no valor 1. Nesse caso, apenas o elemento é diferente de 1. Supondo um caso qualquer, as operações seriam:

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}} L_2$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{a_{33}} L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10\\0 & 1 & 0 & -1/5 & 2/5 & -1/5\\0 & 0 & 1 & -7/10 & -1/10 & 3/10\end{array}\right]$$

Sendo assim, a inversa de A é a matriz: $A^{-1} = \begin{bmatrix}1/10 & 3/10 & 1/10\\-1/5 & 2/5 & -1/5\\-7/10 & -1/10 & 3/10\end{bmatrix}$