

河內塔是根據一個傳說形成的數學問題，內容如下：

有三根杆子A, B, C。A杆上有N個($N > 1$)穿孔圓盤，盤的尺寸由下到上依次變小。要求按下列規則將所有圓盤移至C杆：

1. 每次只能移動一個圓盤
2. 大盤不能疊在小盤上面

提示：可將圓盤臨時置於B杆，也可將從A杆移出的圓盤重新移回A杆，但都必須遵循上述兩條規則。

問：如何移，且最少要移動多少次？

這個傳說是來自於越南河內某間寺院，寺院裡有三根銀棒，上面串64個金盤。寺院裡的僧侶要依照一個古老的預言，以上述的規則移動這些盤子，預言說當這些盤子移動完畢，世界就會滅亡。這個傳說叫做梵天寺之塔問題。

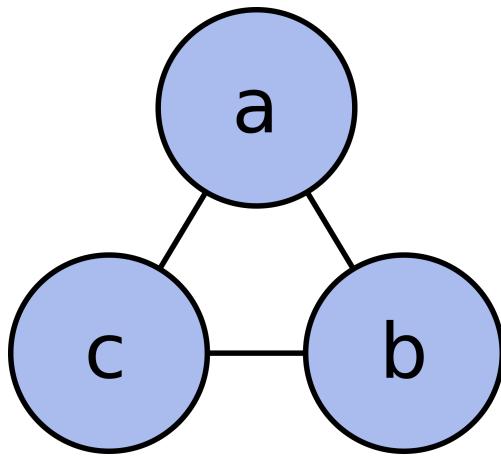
若傳說屬實，僧侶們需要 $2^6 - 1$ 步才能完成這個任務；若他們每秒可完成一個盤子的移動，就需要5849億年才能完成。整個宇宙現在也不過137億年。這個傳說有很多種不同的版本，像寺院換成修道院、僧侶換成修士等等。寺院的地點也眾說紛紜，其中一說是位於越南的河內，所以被命名為「河內塔」。另外亦有「金盤是創世時所造」、「僧侶們每天移動一盤」之類的背景設定。

最早發明這個問題的人是法國數學家愛德華·盧卡斯，但是不知道是盧卡斯自創的這個傳說，還是他受到他人的啟發。

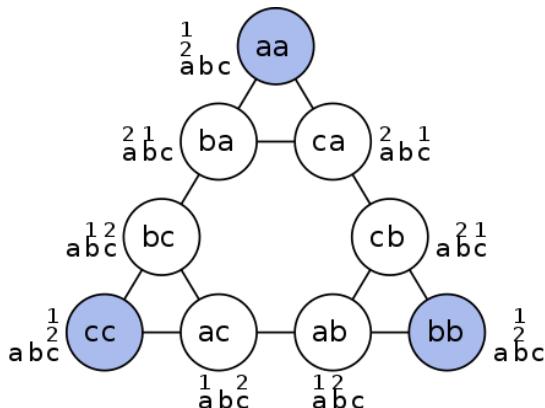
解法的基本思想是遞迴。假設有A、B、C三個塔，A塔有N塊盤，目標是把這些盤全部移到C塔。那麼先把A塔頂部的N-1塊盤移動到B塔，再把A塔剩下的大盤移到C，最後把B塔的N-1塊盤移到C。如此遞迴地使用下去，就可以求解。

可以用無向圖來表示河內塔，在表示的時候會更加地直觀和清晰，雖然說理解上有一點點小難度。現在規定，每一個節點表示盤子的位置一種可能性，每一條邊表示一種移動的方法。對於只有一個盤子的河內塔，可以表示為：

注: 這裡不考慮在兩個柱子之間的, 沒有意義的, 來回移動的情況.



對於有兩個盤子的河內塔, 相互連接的三個三角形, 組成了一個較大三角形的三個角。每一個節點的第二個字母表示更大的盤子, 且最初時沒有被移動。對於每一個頂端的小三角形, 表示兩個盤子的一種移動的方法:



```

int conf[HEIGHT]; /* Element conf[d] gives the current position
of disk d. */

void move(int d, int t) {
    /* move disk d to peg t */
    conf[d] = t;
}

void hanoi(int h, int t) {
    if (h > 0) {
        int f = conf[h-1];
        if (f != t) {
            int r = 3 - f - t ;
            hanoi(h-1, r);
            move(h-1, t);
        }
        hanoi(h-1, t);
    }
}

```