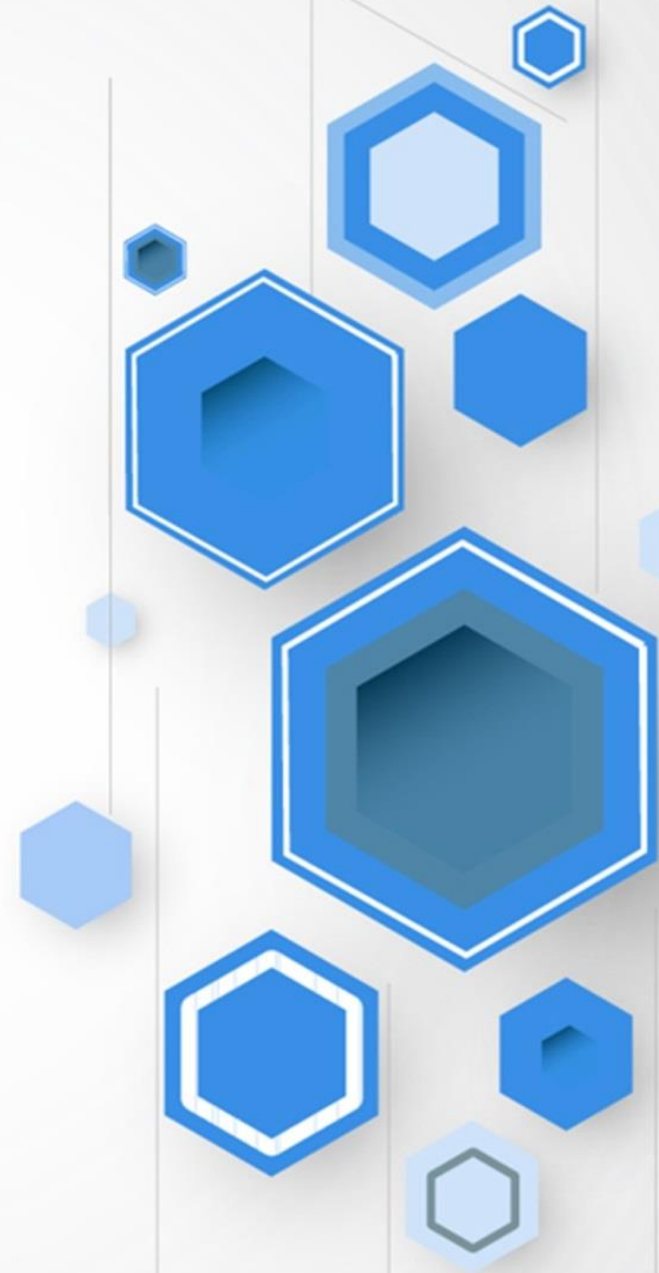




# 数字信号处理

## 实验二 离散傅里叶变换与分析

华东理工大学 信息科学与工程学院 万永菁





01

**熟悉应用MATLAB求解信号频谱的方法。**

02

**掌握应用FFT的方法求解系统输出的步骤。**

03

**对比分析利用线性卷积求解系统输出和利用FFT方法求解系统输出这两种方法的不同之处。**

04

**掌握系统分析方法和简单滤波器的设计方法。**



(1) 设输入信号  $x(n) = \sin(0.1\pi n) + \cos(0.5\pi n)$ ,  $0 \leq n \leq 199$ , 某 LSI 系统的单位脉冲响应为  $h(n) = \frac{1}{4}[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)]$ , 求:

- ① 利用线性卷积求输入信号  $x(n)$  通过系统后的输出  $y_l(n)$ 。
- ② 利用 FFT 的方法, 先求解输入信号  $x(n)$  的频谱  $X(k)$  以及单位脉冲响应  $h(n)$  的频谱  $H(k)$ , 通过计算  $\text{IFFT}[X(k) \cdot H(k)]$  求解系统的输出  $y(n)$ 。  
(可以调用 `conv()`、`fft()`、`ifft()` 等函数)

## 要点:

- (1) 注意卷积输入和输出序列的长度;
- (2) 注意利用FFT求系统输出时, 序列长度补零的问题;
- (3) 可以利用零极点图、频率响应曲线等分析系统的滤波特性。



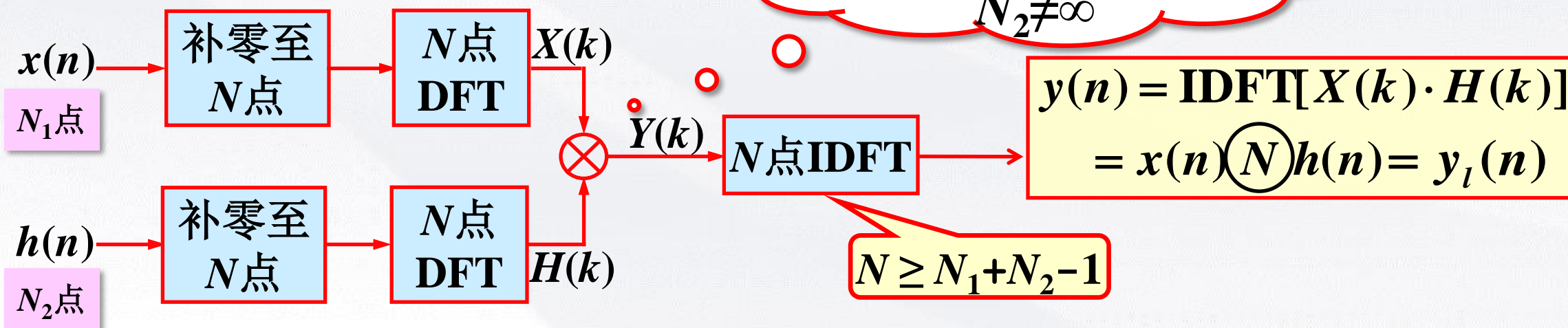
## ➤ 时域直接求解

$$y_l(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

## ➤ 频域解析法

$$y_l(n) = \text{IDTFT}[Y(e^{j\omega})] = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})]$$

## ➤ DFT求解法





(1) 设输入信号  $x(n) = \sin(0.1\pi n) + \cos(0.5\pi n)$ ,  $0 \leq n \leq 199$ , 某 LSI 系统的单位脉冲响应为  $h(n) = \frac{1}{4}[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)]$ , 求:

- ① 利用线性卷积求输入信号  $x(n)$  通过系统后的输出  $y_l(n)$ 。
- ② 利用 FFT 的方法, 先求解输入信号  $x(n)$  的频谱  $X(k)$  以及单位脉冲响应  $h(n)$  的频谱  $H(k)$ , 通过计算  $\text{IFFT}[X(k) \cdot H(k)]$  求解系统的输出  $y(n)$ 。

(可以调用 `conv()`、`fft()`、`ifft()` 等函数)

实验分析与讨论 (请手写):

(A) 请比较两种不同方法求得的输出及其它们的频谱  $Y_l(k)$  及  $Y(k)$ ;

(B) 试分析该系统的滤波特性, 并结合输出信号的频率成分进行分析。



(2) 已知某系统的系统函数为  $H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$ ，且系统稳定，试求：

(A) 求系统的零极点；（提示：可以用 `tf2zp()`函数）

(B) 画出系统的零极点图；（提示：可以用 `zplane()`函数）

(C) 画出系统的幅频响应、相频响应、群延迟。（提示：可以用 `freqz()`、`grpdelay()`函数）

## 要点：

- (1) 写出系统函数的“b系数”和“a系数”；
- (2) 理解`freqz`函数的使用；单独调用也可以画图，带返回值则自行按照返回的变量画图，注意横坐标的含义。



例1：某LSI系统的系统函数如下：

$$H(z) = 0.05 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

若系统的输入信号为：

$$x(n) = \sin(0.01\pi n)$$

试编程并分析系统的输出。

解：系统的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 0.05 \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$$



`n = 0:199;` %`x(n)` 取200个点

`x = sin(0.01*pi*n);`  $x(n) = \sin(0.01\pi n)$

`b = [0.05, 0.05];` `a = [1, -0.9];`

`y = filter(b, a, x);`

求系统输出

`figure(1)`

`subplot(2,1,1); ylabel('x');`

`stem(n, x); grid on;`

`subplot(2,1,2);`

`stem(n, y); grid on; ylabel('y');`

$$H(z) = \frac{0.05 + 0.05z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.05x(n) + 0.05x(n-1)$$



```
figure(2);
```

```
[Fh,w] = freqz(b,a);  
[Gd,w] = grpdelay(b,a);
```

→ 求系统频率响应和群延迟

```
subplot(311) 幅频响应
```

```
plot(w/pi, abs(Fh)); ylabel(' |H(w)| '); grid on;
```

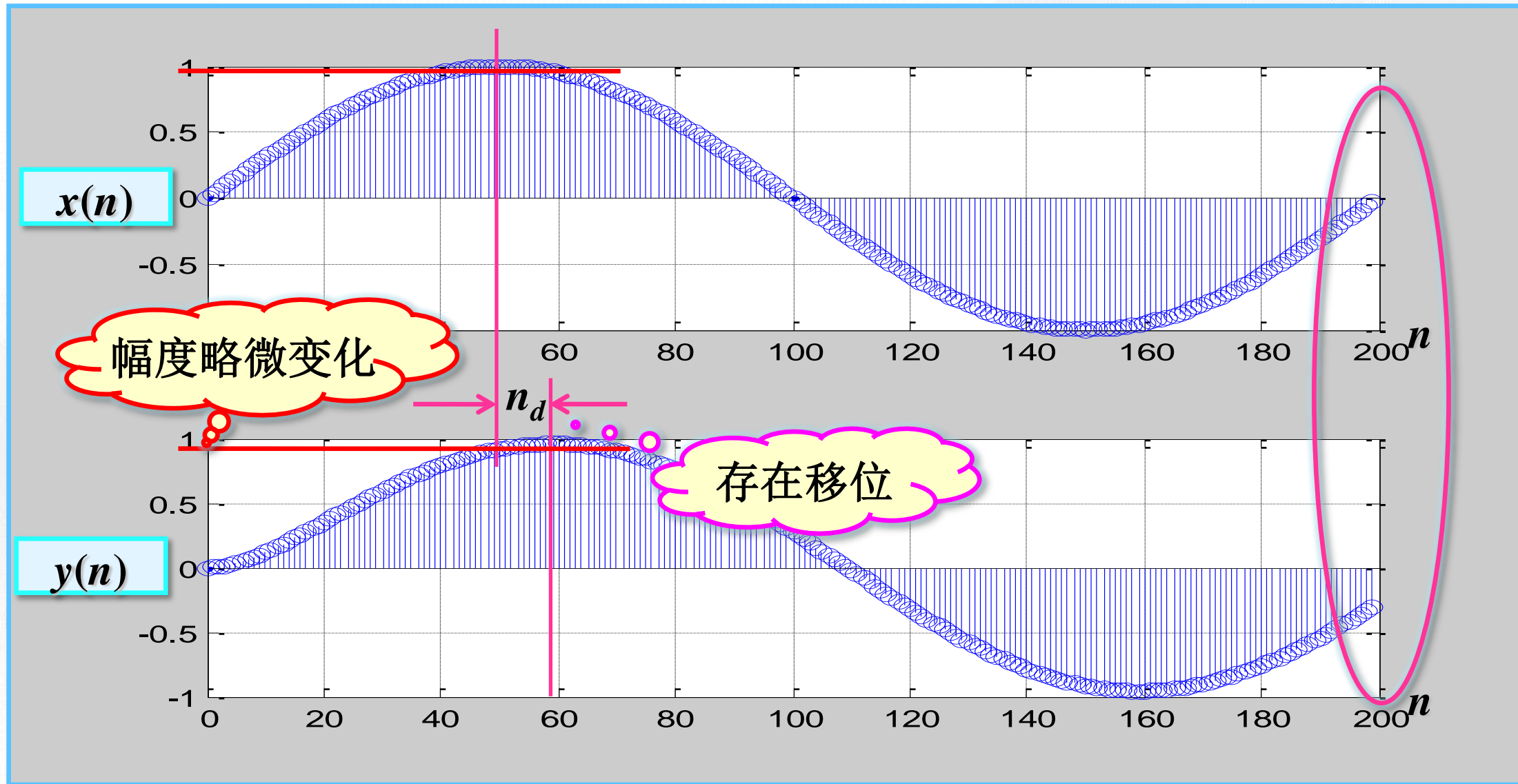
```
subplot(312) 相频响应
```

```
plot(w/pi, angle(Fh));
```

```
ylabel(' ang[H(w)] '); grid on;
```

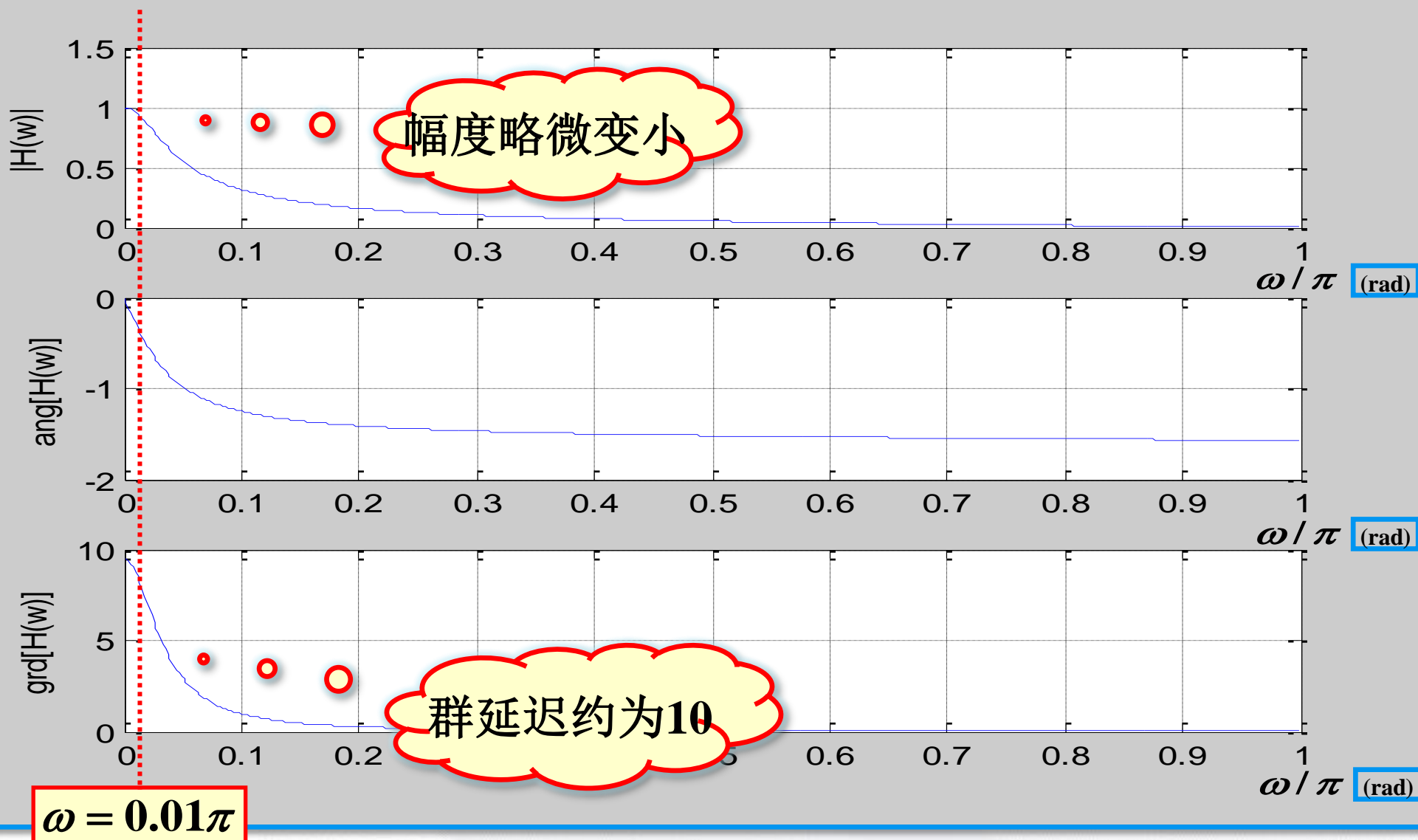
```
subplot(313) 群延迟
```

```
plot(w/pi, Gd); ylabel(' grd[H(w)] '); grid on;
```



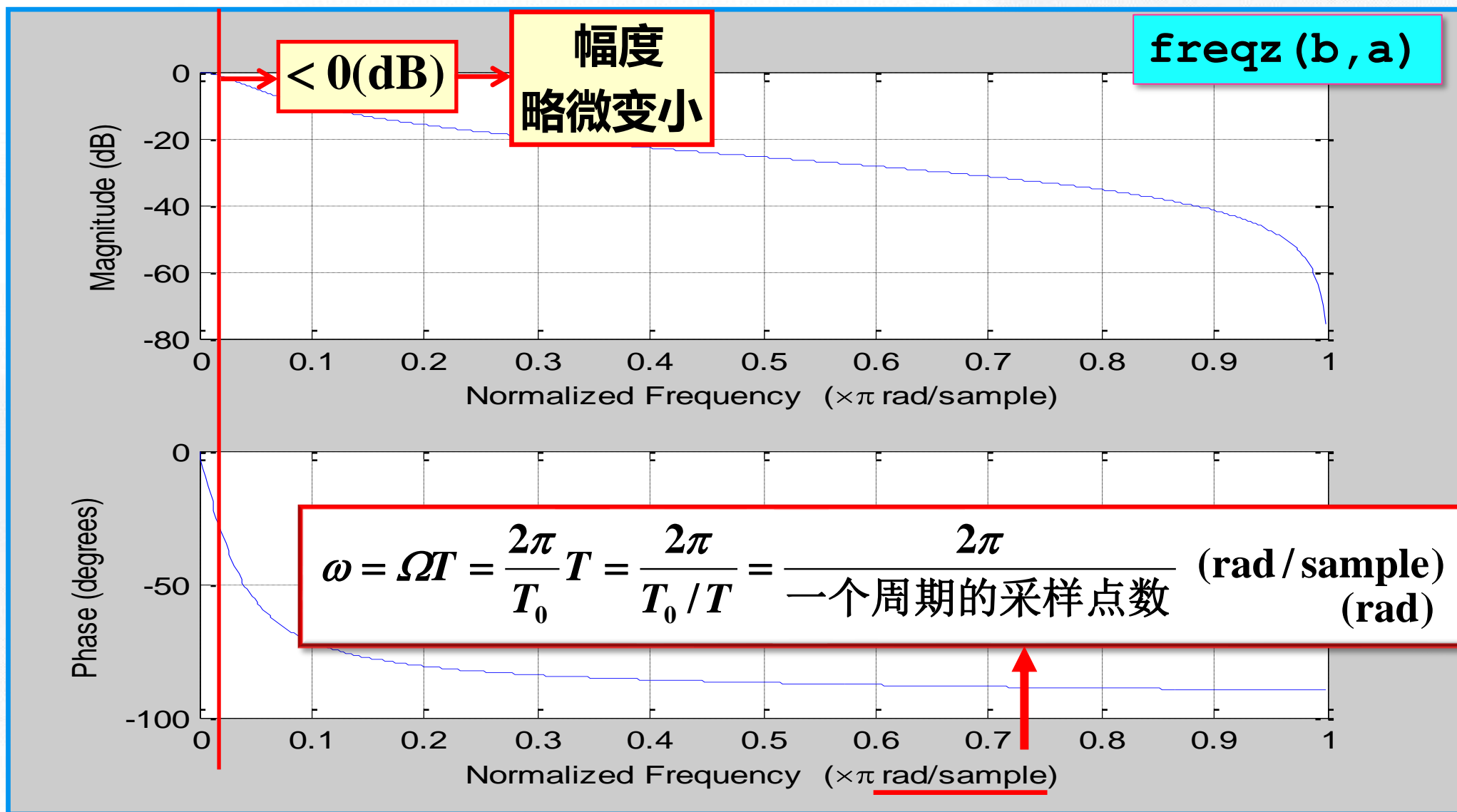


# 参考例程 (第二章讲义)





# 参考例程 (第二章讲义)





(2) 已知某系统的系统函数为  $H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$ ，且系统稳定，试求：

(A) 求系统的零极点；（提示：可以用 `tf2zp()`函数）

(B) 画出系统的零极点图；（提示：可以用 `zplane()`函数）

(C) 画出系统的幅频响应、相频响应、群延迟。（提示：可以用 `freqz()`、`grpdelay()`函数）

实验分析与讨论（请手写）：

(A) 试求该系统的 ROC，并说明系统的因果性；

(B) 试分析该系统的滤波特性；

(C) 该滤波器是 IIR 滤波器还是 FIR 滤波器？该滤波器具有线性相位吗？

(3) 一个 LSI 系统由下面的差分方程描述：

$$y(n) = 0.8y(n-1) - 0.64y(n-2) + 0.3125x(n)$$

- ① 用 filter 函数计算并画出在  $0 \leq n \leq 100$  内的系统单位脉冲响应，由画出的单位脉冲响应判断系统的稳定性。 `imp=[1 zeros(1,100)] ;`
- ② 画出系统零极点图及系统的幅频和相频响应曲线。
- ③ 如果这个系统的输入是  $x(n) = \left[ 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right] u(n)$ ，利用 filter 函数求在  $0 \leq n \leq 200$  内的系统输出。分析输出信号，观察  $x(n)$  中的直流分量和  $\pi/3$  频率成份分量的通过情况。
- ④ 如果希望将  $x(n)$  中的直流分量完全滤除，而  $\pi/3$  频率成份分量仍然保留，应该怎样修改该系统的差分方程，用实验的方法验证你的结论。

(3) 一个 LSI 系统由下面的差分方程描述：

$$y(n) = 0.8y(n-1) - 0.64y(n-2) + 0.3125x(n)$$

- ① 用 `filter` 函数计算并画出在  $0 \leq n \leq 100$  内的系统单位脉冲响应，由画出的单位脉冲响应判断系统的稳定性。
- ② 画出系统零极点图及系统的幅频和相频响应曲线。
- ③ 如果这个系统的输入是  $x(n) = \left[ 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right] u(n)$ ，利用 `filter` 函数求在  $0 \leq n \leq 200$  内的系统输出。分析输出信号，观察  $x(n)$  中的直流分量和  $\pi/3$  频率成份分量的通过情况。
- ④ 如果希望将  $x(n)$  中的直流分量完全滤除，而  $\pi/3$  频率成份分量仍然保留，应该怎样修改该系统的差分方程，用实验的方法验证你的结论。

实验分析与讨论（请手写）：

(A) 请通过实验分析该系统的稳定性；

(B) 请分析解释第③问中输入信号不同频率成份的通过情况，并解释原因；

(C) 请描述第④问的设计思路。

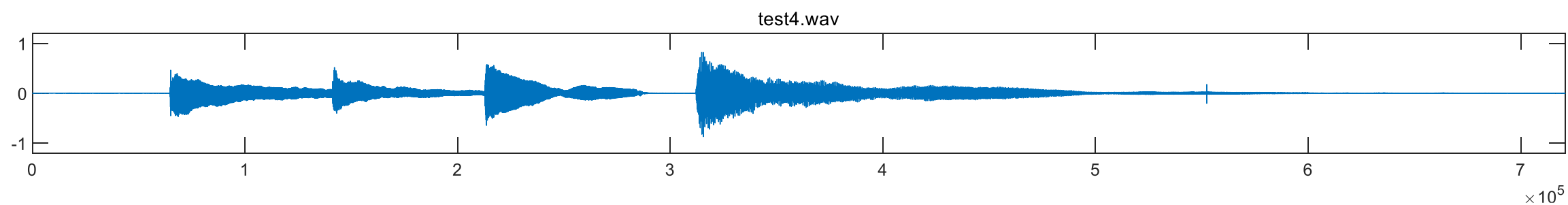
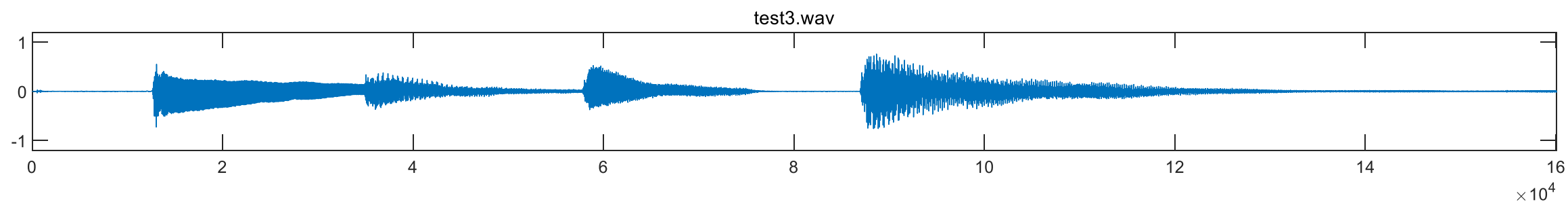
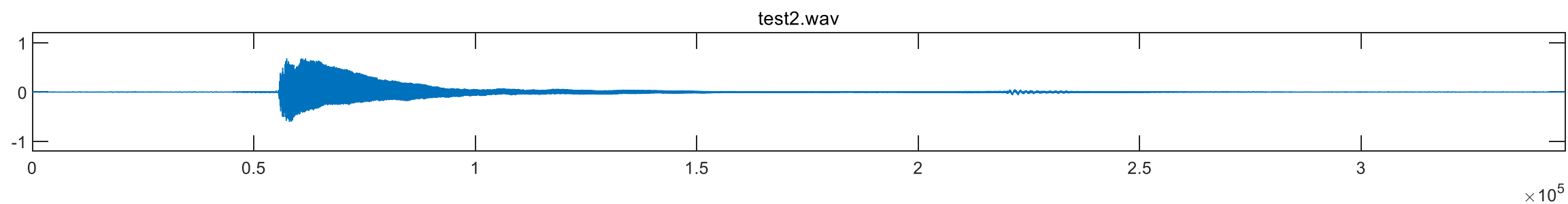
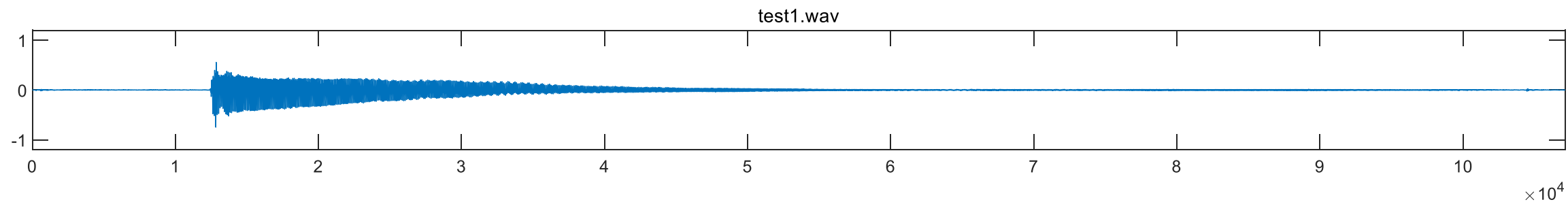
(4) 音频文件 test1.wav ~ test4.wav 中录制了钢琴上的一些按键音，其中，请用 FFT 的方法识别出每段音频文件中含有那几个音符。

(注:  $\underset{\cdot}{6}$  (la)=220Hz    $\underset{\cdot}{7}$  (ci)=246.94Hz   1 (do)=261.63Hz   2(rui)=293.66Hz  
3 (mi)=329.63Hz   4(fa)=349.23Hz   5(so)=392Hz )

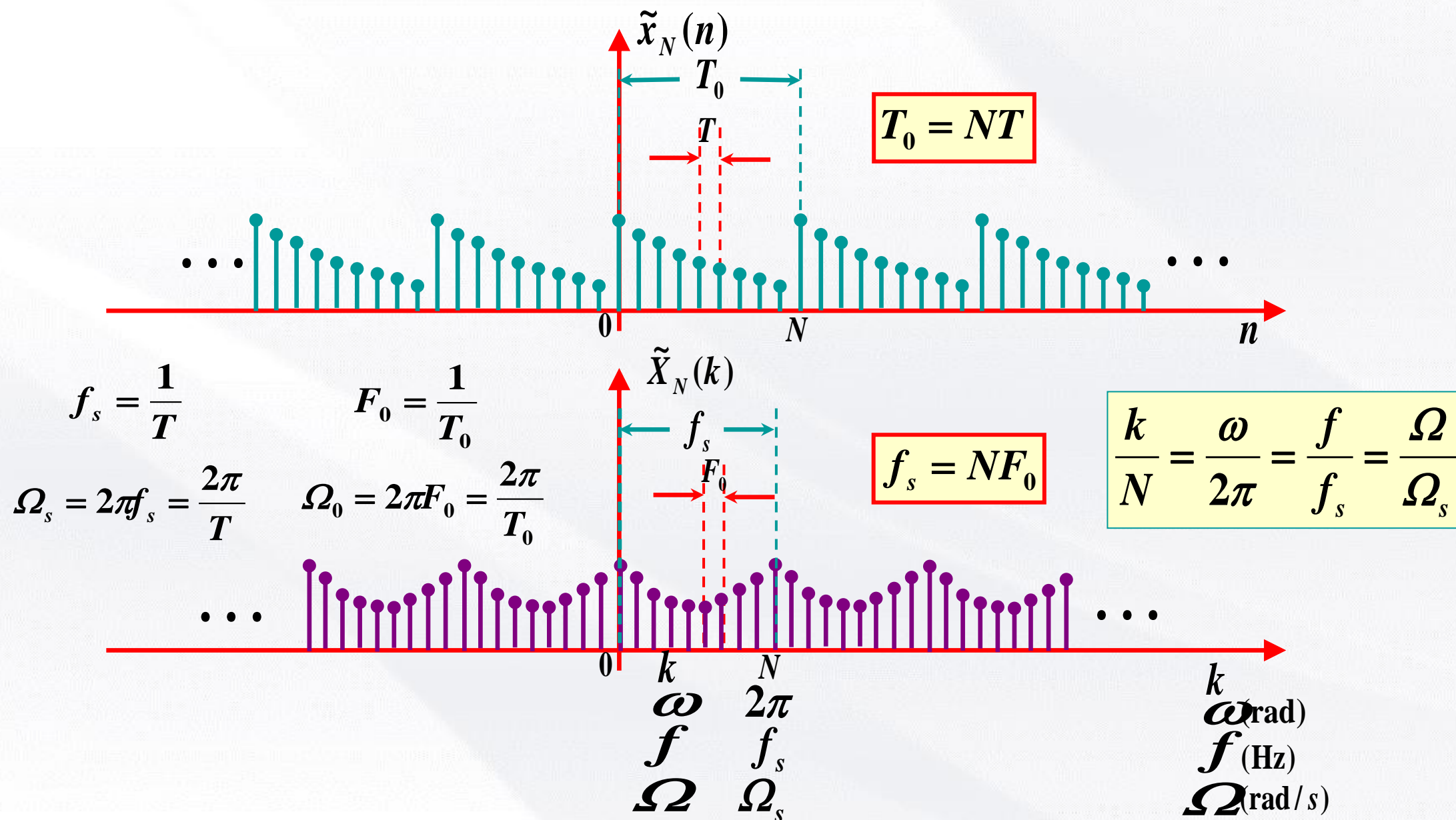
- ① 请读入 test1.wav ~ test4.wav 音频文件，画出音频信号的时域图。
- ② 请识别 test1.wav 和 test2.wav 两个音频文件中弹奏的是哪个音符（请对音频信号中的有效音符区间进行谱分析，建议尝试使用不同的窗函数进行谱分析，以缓解频谱泄漏现象）。
- ③ 请识别 test3.wav 和 test4.wav 两个音频文件中弹奏了哪些音符；
- ④ （拓展部分）test3.wav 和 test4.wav 两个音频文件有多个音符，且在最后有三音和弦，请尝试切分这些音符，并对其中的单音或和弦进行识别。

可以使用的窗函数有：boxcar()、triang()、hanning()、hamming()、blackman()等

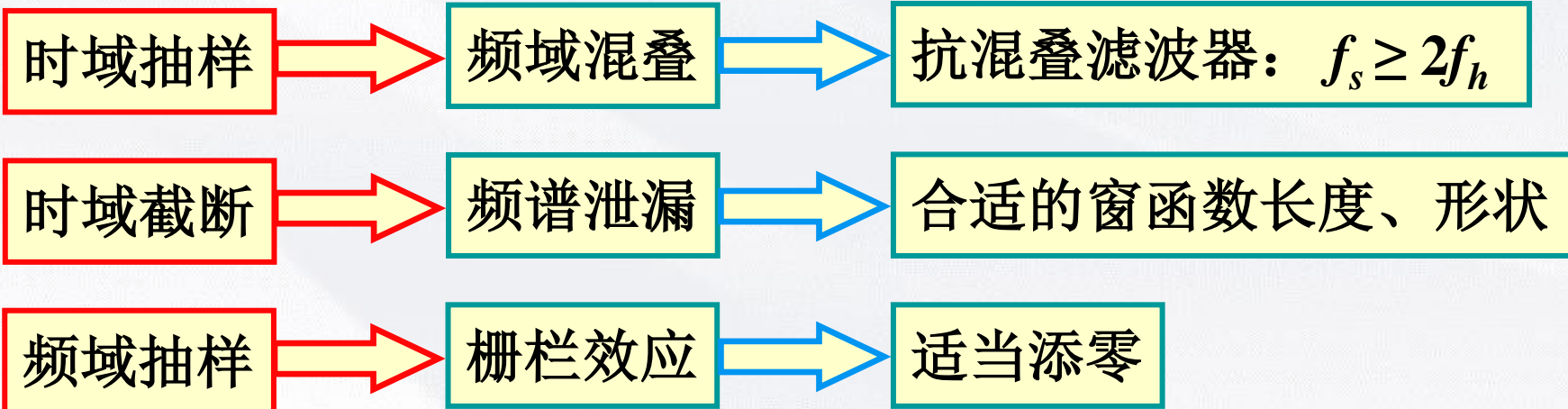
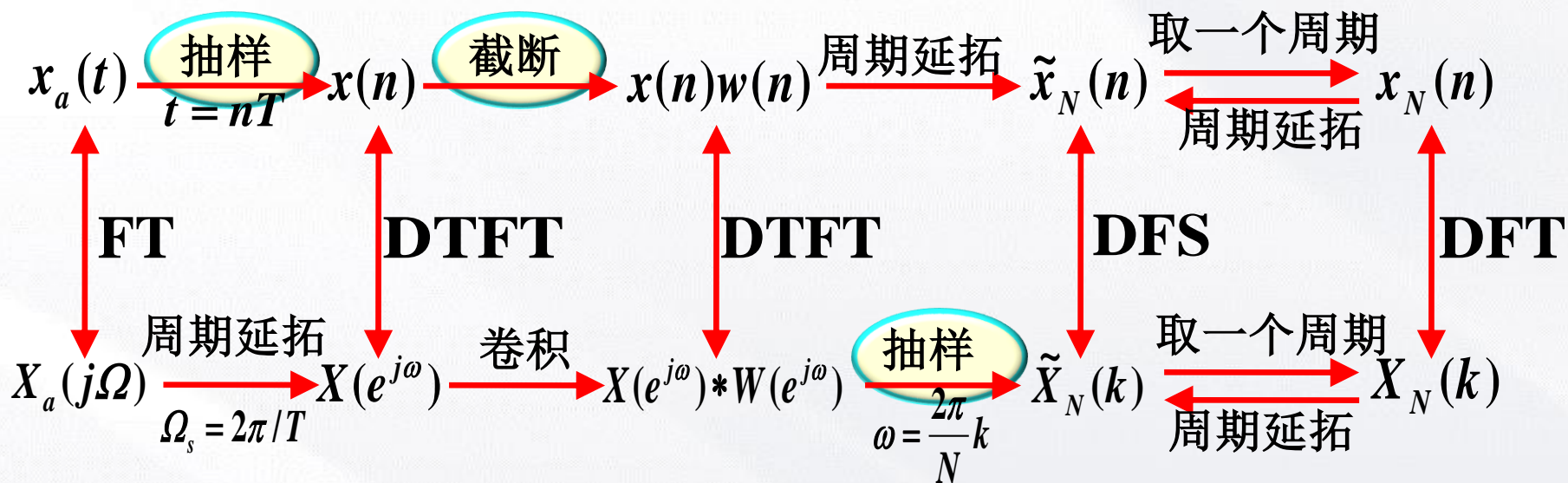




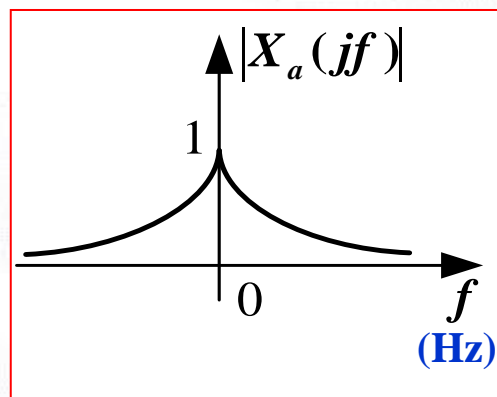
## 二、由DTFT推出离散傅立叶级数(DFS)的表达式



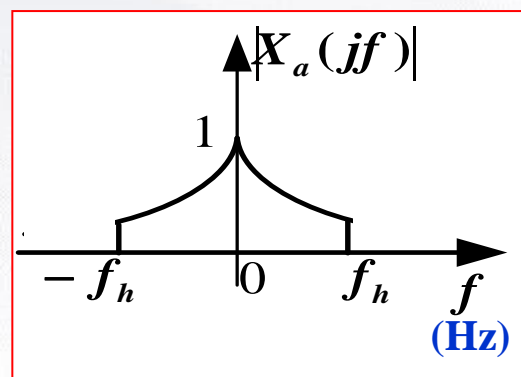
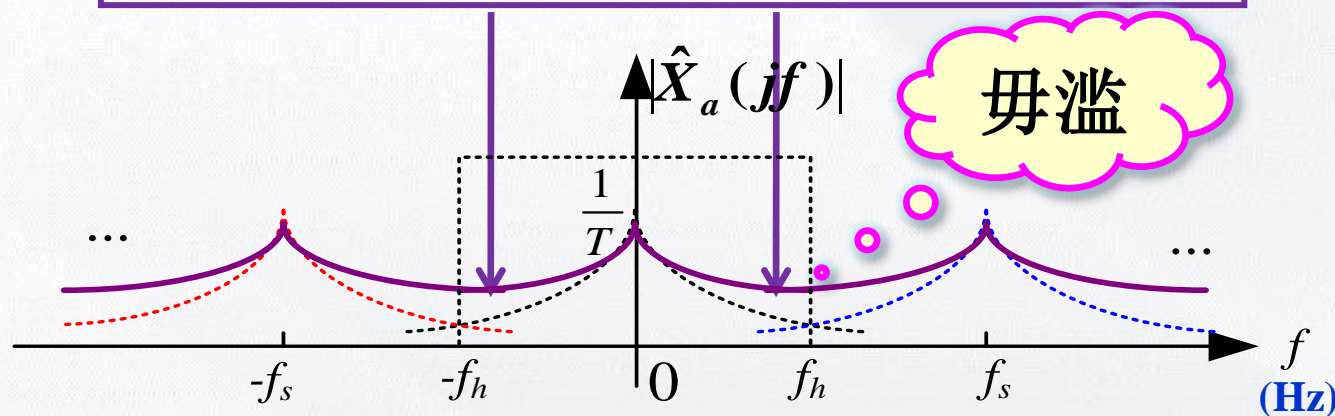
# ➤ 用DFT对模拟信号进行谱分析存在的问题及应对措施小结



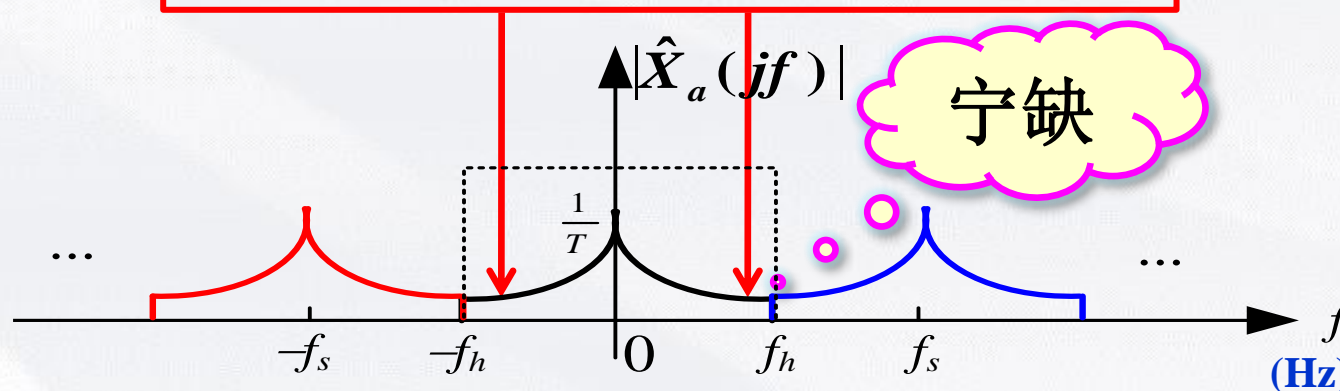
# ➤ 频谱混叠现象的解决方案 —— 抗混叠滤波器



未经抗混叠滤波器，产生频域混叠现象

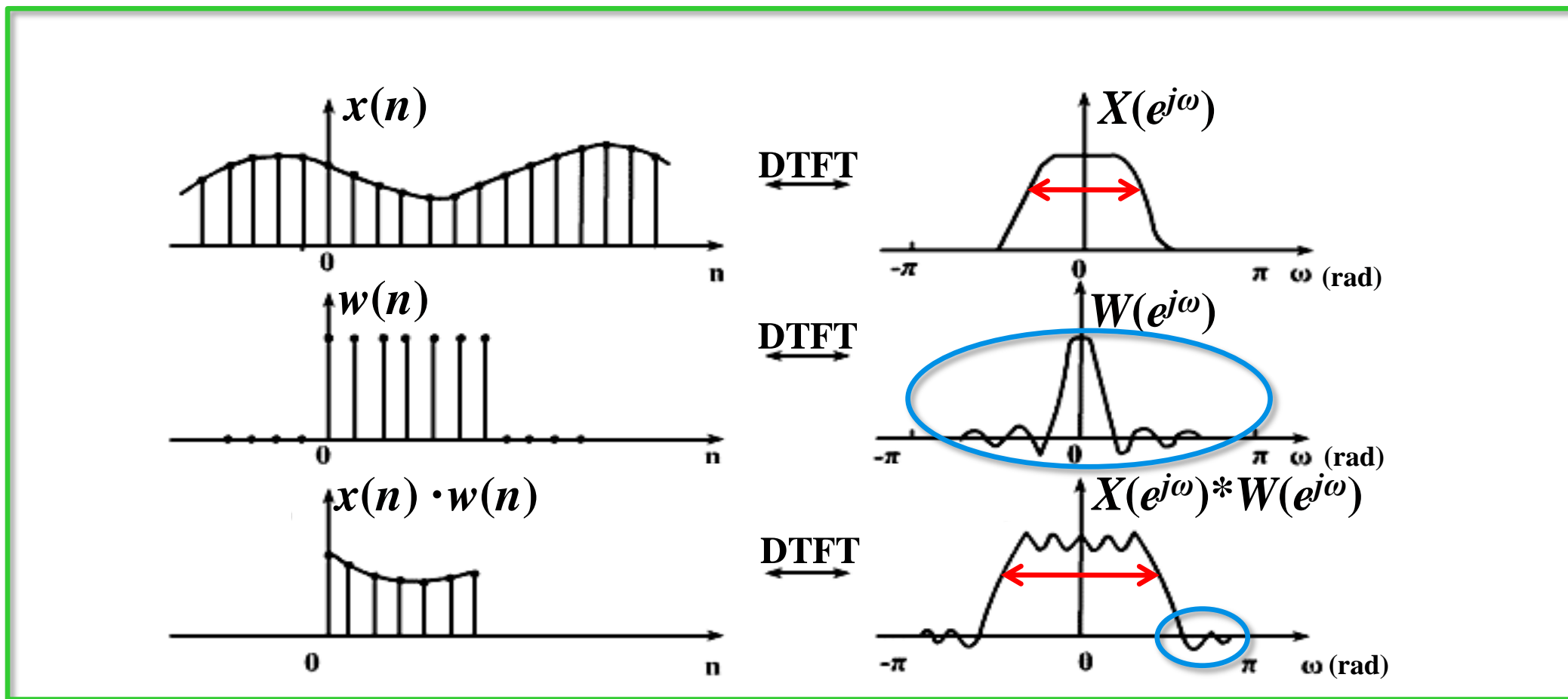


经抗混叠滤波器后，频域不再混叠





# 时域截断可能带来的问题及解决方法

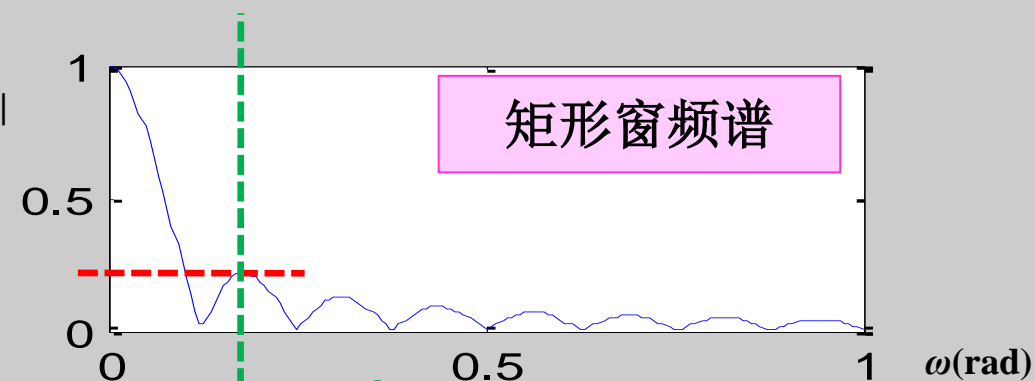
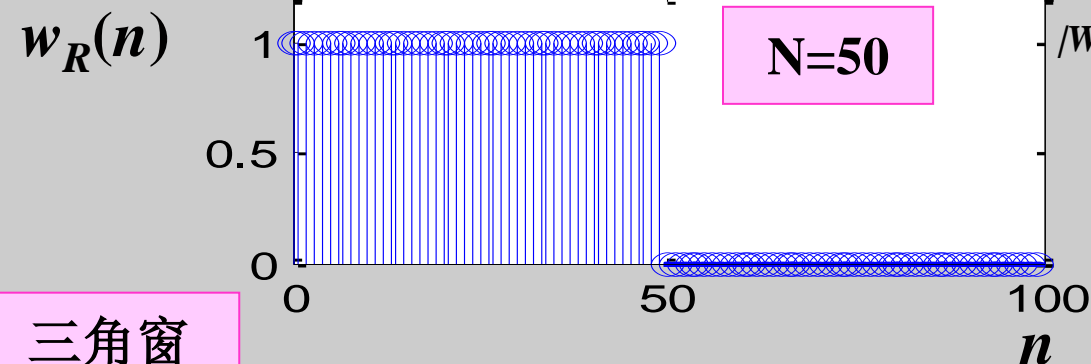


信号的频谱与窗函数的卷积后必然产生拖尾、变宽的现象，从而造成截断效应 —— 频谱泄漏现象。

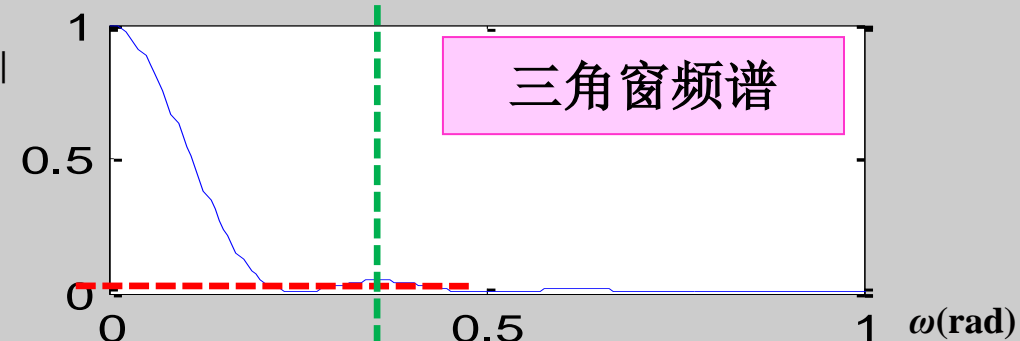
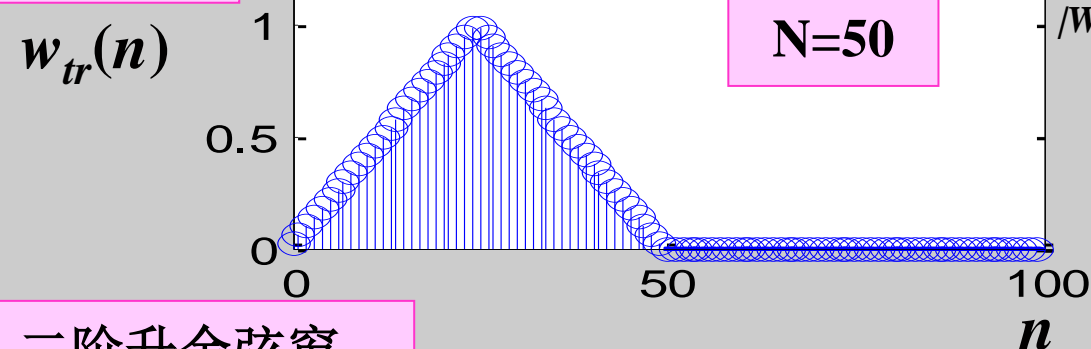
选好窗函数

# ➤ 不同窗函数 $w(n)$ 及其它们的频谱 $W(e^{j\omega})$

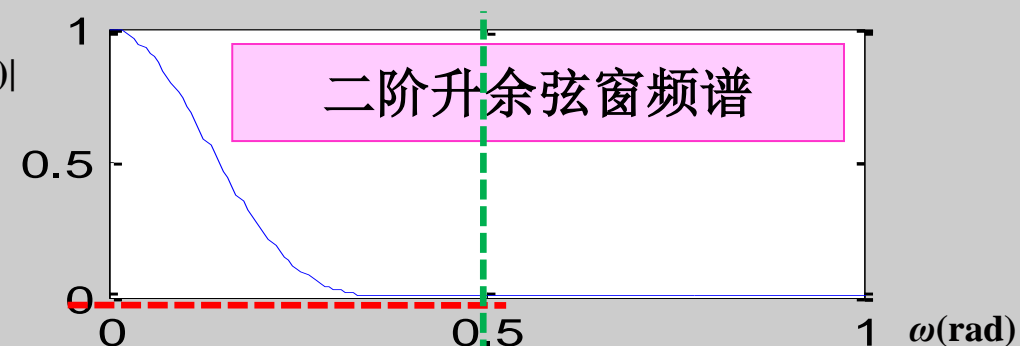
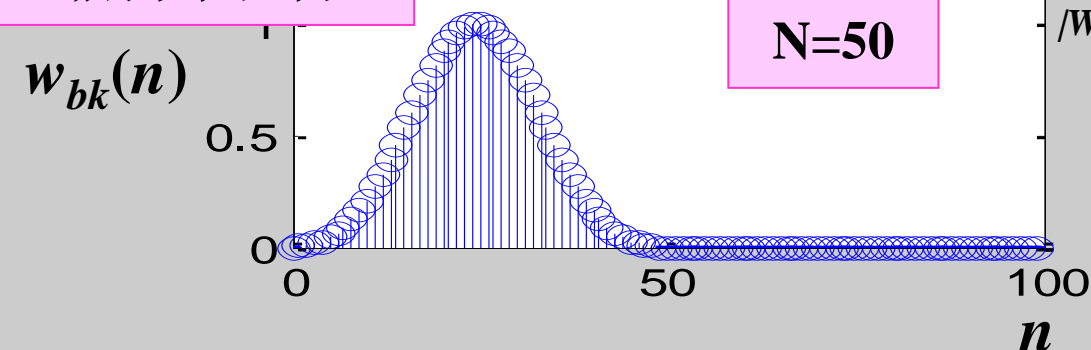
矩形窗



三角窗

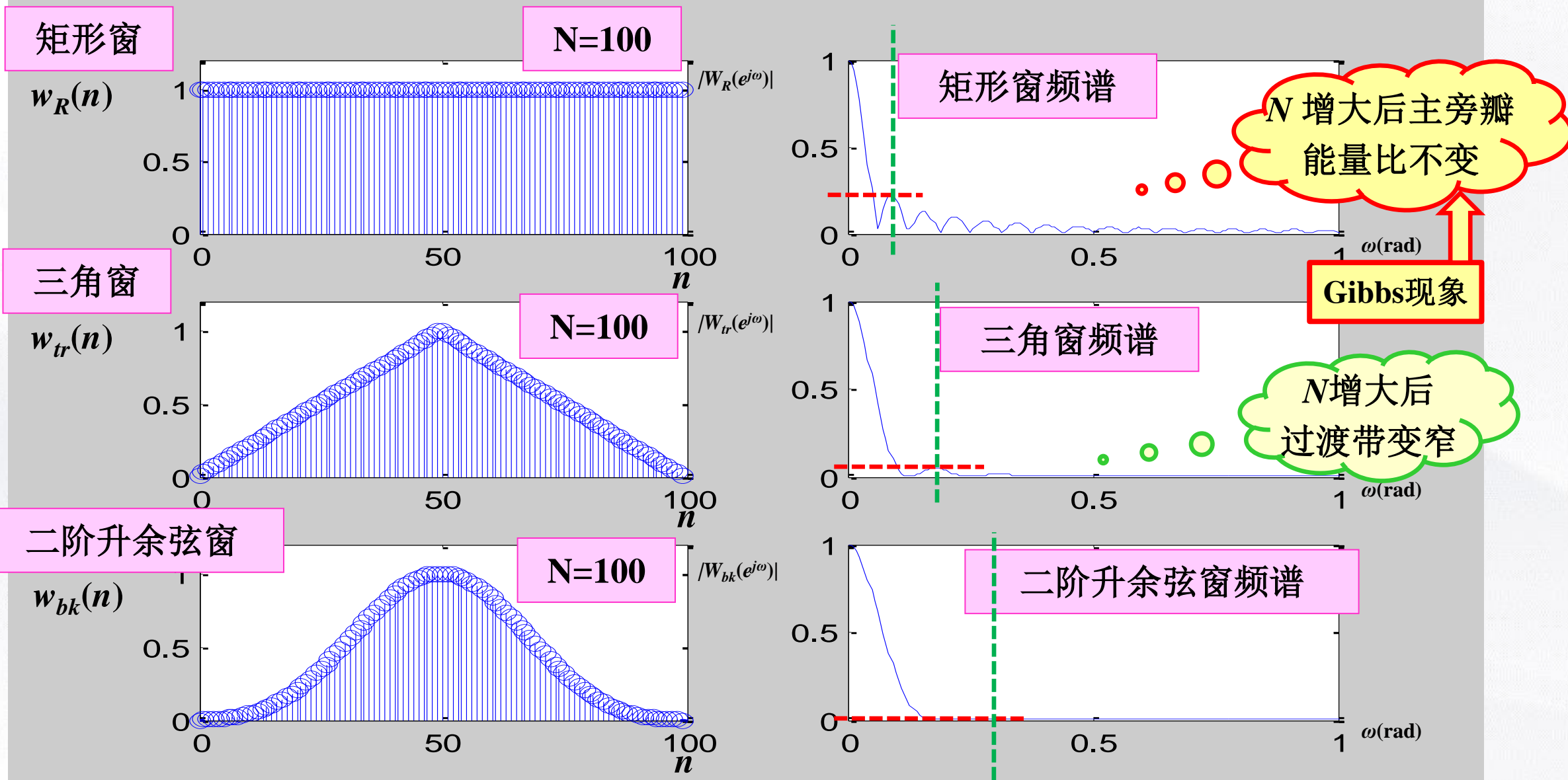


二阶升余弦窗





# ➤ 增加窗函数长度后，窗函数 $w(n)$ 及其它们的频谱 $W(e^{j\omega})$



## ➤ 时域截断产生频谱泄漏现象的改善措施

### ◆ 频谱泄漏产生的原因

时域乘窗函数



频域卷积窗函数的谱

### ◆ 窗函数及其参数的选择

**窗形状**：选择缓慢截断的窗函数。

**窗长度**：延长窗的长度  $N$  可减小过渡带宽。





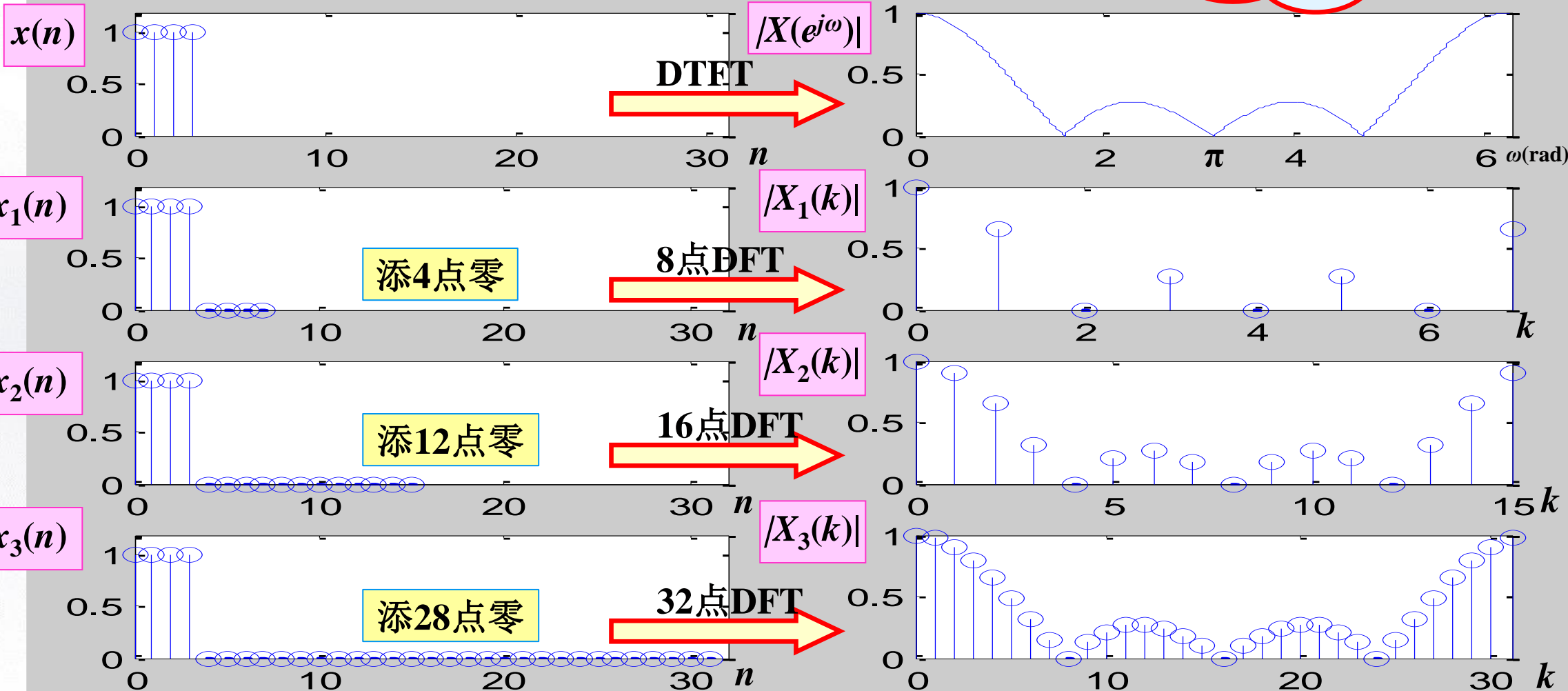
# 频域抽样可能带来的问题及解决方法



频域抽样

栅栏效应

时域添零增加  
观察分辨率





- (1) 对有效的音频信号段做FFT，注意FFT的长度与频谱分辨率的关系；
- (2) 使用窗函数减少频谱泄漏；
- (3) 从FFT结果中分析音频文件中的音符是钢琴上哪个按键；

本次实验允许手动截取音频有效段

注意采样频率、双声道等问题

注意窗函数矩阵形式，与原始信号点积后再做FFT

注意频谱结果作图时的横坐标需要转换为 $f(\text{Hz})$ 单位