Bioestatística

M.I. Eng. Biomédica

2015-2016

Aula Teórica 4

Probabilidade

- Experiência aleatória
  - O conjunto de resultados é fixado antecipadamente;
  - O resultado da experiência nunca pode ser previsto de forma exacta, mesmo que se façam todos os esforços para controlar as circunstâncias relevantes;

Probabilidade

- Exemplos de experiências aleatórias
  - Lançamento de uma moeda ao ar;
  - Lançamento de um dado;
  - Tiragem de uma carta de um baralho;
  - Registo do número de sinistros viários durante um ano;
  - Taxa de inflação nos próximos anos;
  - Equipas vencedoras em casa na próxima jornada;
  - SMS... quem, quando, quanto,...

Probabilidade

- Espaço de resultados
  - Denomina-se espaço de resultados ou espaço-amostra, e representa-se por Ω, o conjunto fundamental (não vazio) formado por todos os resultados que hipoteticamente é possível obter quando se efectua determinada experiência aleatória.

Probabilidade

- Lançamento de 2 moedas ao ar
  - O espaço-amostra, Ω, é

$$\Omega = \{FF, FC, CF, CC\}$$

Probabilidade

- Nº de telefonemas recebidos por hora no INEM
  - O espaço-amostra, Ω, é o conjunto de todos os números inteiros não negativos;
  - Na prática considera-se um limite superior

$$\Omega = \{1,2,3,\cdots,H\}$$

Probabilidade

- Observação da duração da vida humana, medida em anos
  - O espaço-amostra, Ω, é contínuo

$$\Omega = \{x : x > 0\}$$

Probabilidade

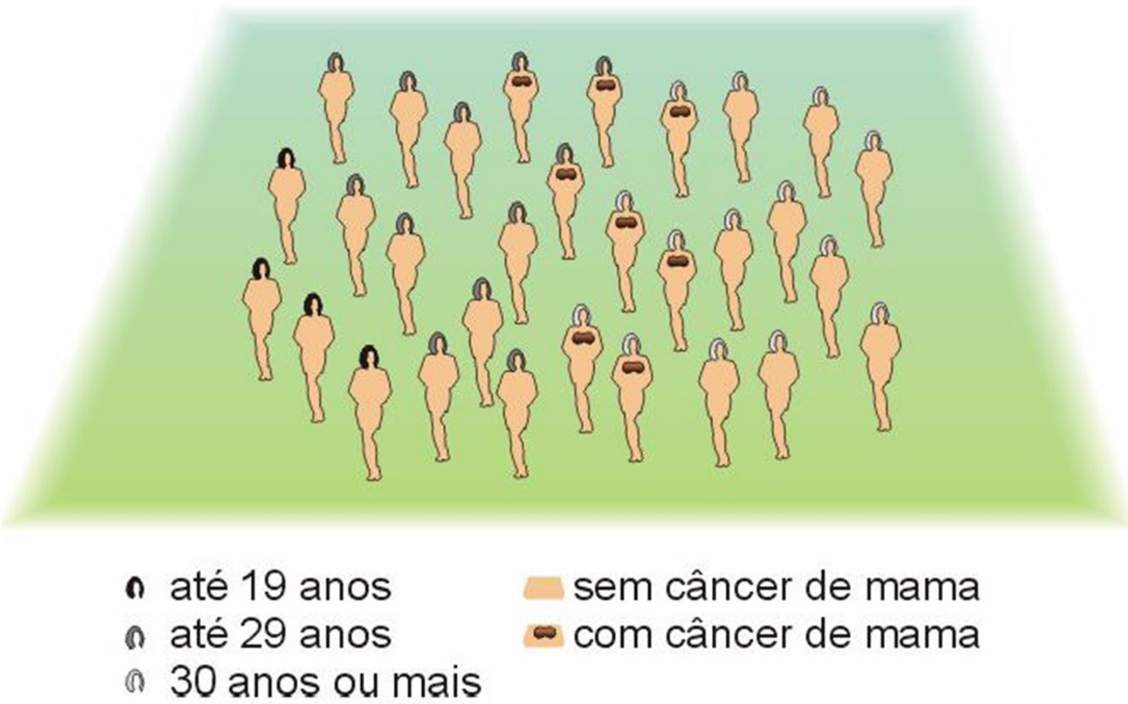
- Acontecimento
  - Designa-se por acontecimento um subconjunto do espaço-amostra, Ω.
  - Os subconjuntos $\{\omega\} \subset \Omega$ formados por um só elemento ou ponto dizem-se acontecimentos elementares;

Probabilidade

- Álgebra de acontecimentos
  - Implicação de acontecimentos
  - Identidade de acontecimentos
  - União de acontecimentos
  - Intersecção de acontecimentos
  - Acontecimentos incompatíveis

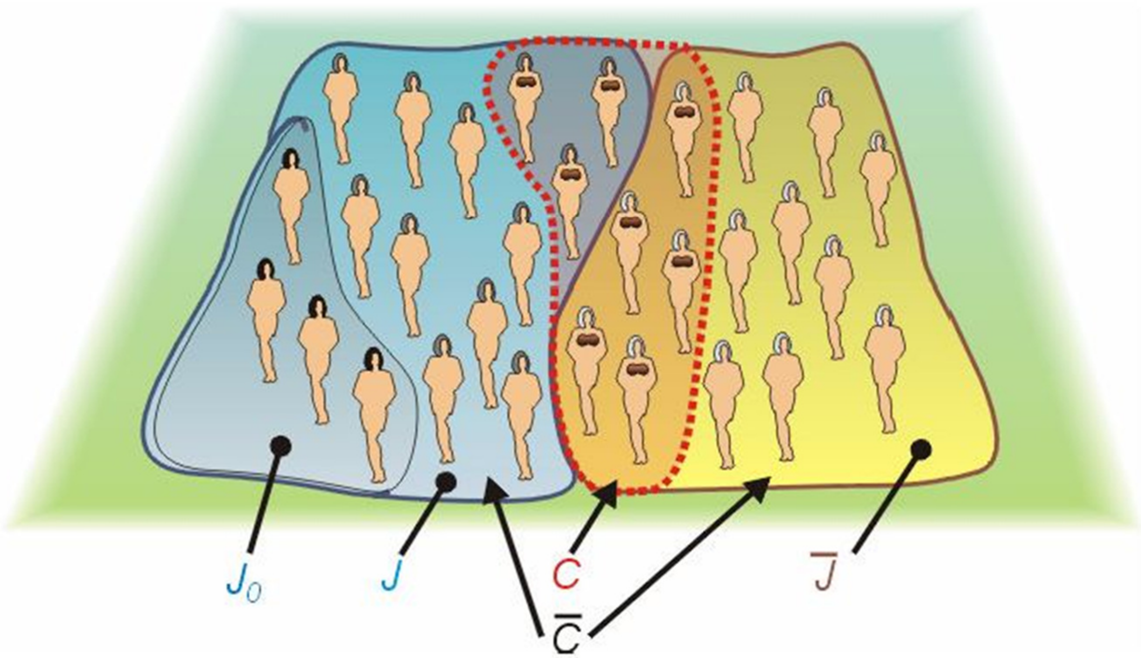
Probabilidade

População de mulheres que constitui o espaço amostral Ω, com conjuntos definidos pelos eventos J, $\overline{J}$, C, $\overline{C}$.



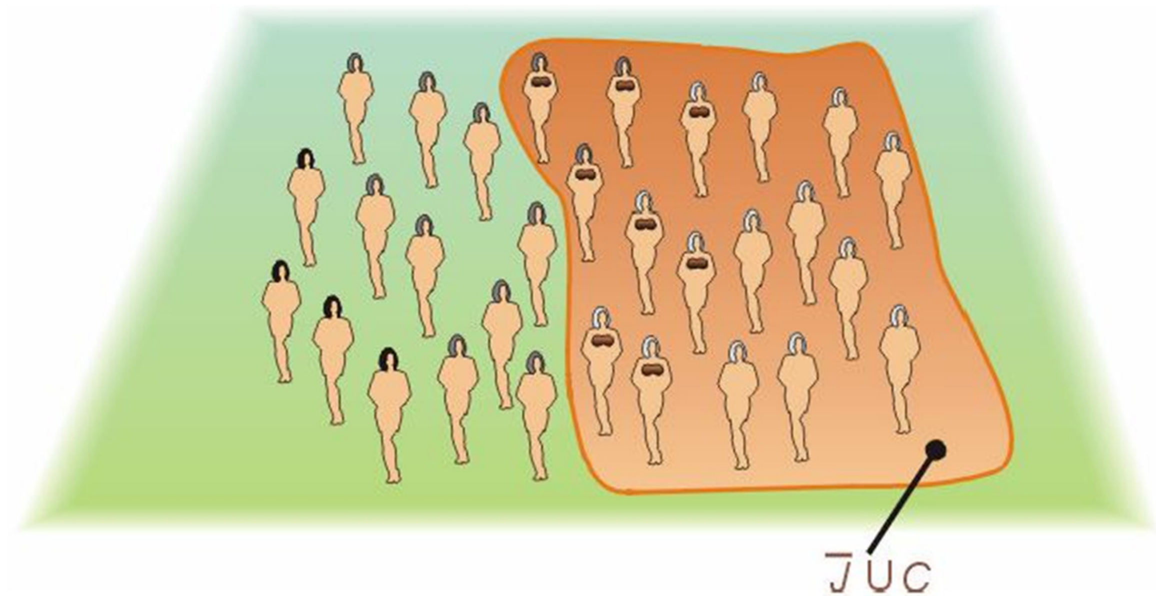
Probabilidade

População de mulheres, mostrando o subconjunto J_0 e J.



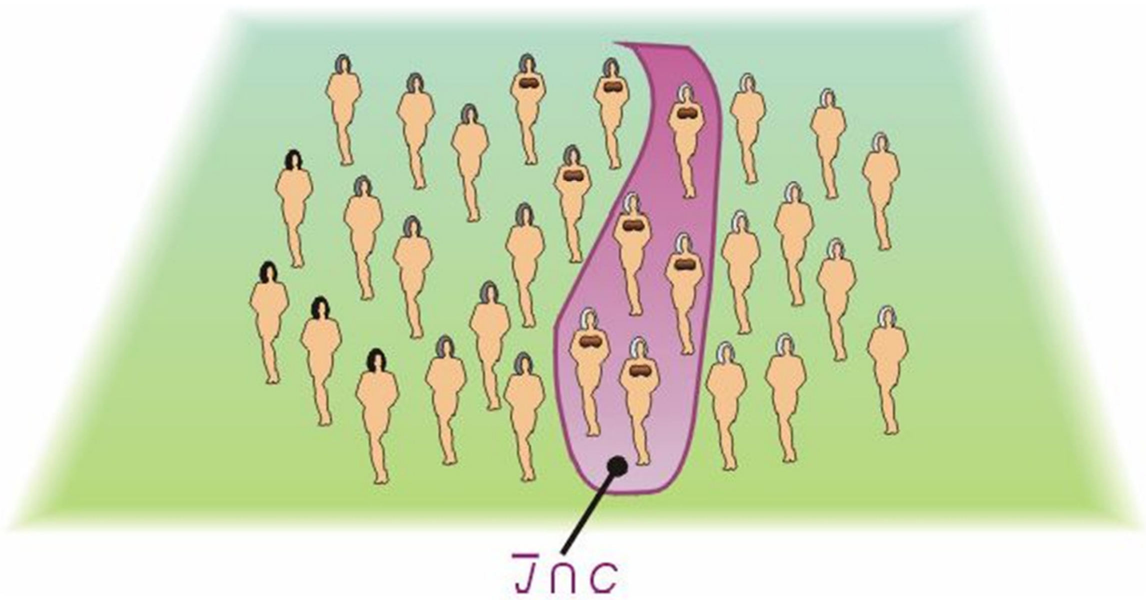
Probabilidade

População de mulheres, ilustrando a união dos conjuntos *C* e $\overline{J}$,
que corresponde ao evento [ter câncer de mama ou ter 30 anos ou mais].



Probabilidade

População de mulheres, ilustrando a intersecção dos conjuntos C e $\overline{J}$, que corresponde ao evento [ter câncer de mama e ter 30 anos ou mais].



Probabilidade

- Propriedades
  - Associatividade
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Comutatividade
    - $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$
  - Distributividade
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - Leis de De Morgan
    - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Probabilidade

- Medida
  - A medida de probabilidade é uma função P que a cada acontecimento A, $A \subset \Omega$, faz corresponder um número real, $P(A)$, probabilidade do acontecimento A, que verifica os três axiomas seguintes:
    - P1) $P(A) \geq 0$
    - P2) $P(\Omega) = 1$
    - P3) Se A e B forem acontecimentos incompatíveis, $A \cap B = \emptyset, então\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidade

- Propriedades da medida
  - $P(A) = 1 - P(\bar{A});$
  - $P(\emptyset) = 0;$
  - $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
  - $P(A) \leq 1$

Probabilidade

- Probabilidade à priori:
  - quociente entre o número de ocorrências favoráveis à realização do acontecimento e o número de ocorrências possíveis da experiência – pressupondo um espaço amostral conhecido

Probabilidade

- Probabilidade à priori:
  - A probabilidade sair face par de um dado é de 1/2:
    - espaço amostral = 6 faces; número de faces par = 3 faces;
    - logo a probabilidade de sair face par = 3/6 = 1/2.
  - A probabilidade de se extrair um rei num baralho é de 1/13:
    - espaço amostral = 52 cartas; número de reis = 4;
    - logo a probabilidade de sair um rei = 4/52 = 1/13

Probabilidade

- Probabilidade à priori:
  - A probabilidade do evento A no espaço amostral Ω é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(\Omega)} \qquad \text{com } n(A) = \#\{A\} \quad N(\Omega) = \#\{\Omega\}$$

Probabilidade

- Probabilidade à posteriori:
  - quociente entre o número de vezes que A ocorre (k) e o número de experiências ou tentativas realizadas (n):

$$p = P(A) = \frac{k}{n}$$

Probabilidade

- Probabilidade à posteriori:
  - a probabilidade do acontecimento contrário, ou seja, a probabilidade de A não acontecer será:

$$q = P\left(\overline{A}\right) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P\left(A\right)$$

Probabilidade

- Probabilidade à posteriori:
  - a probabilidade do acontecimento A se verificar ou não se verificar:

$$p + q = 1$$

Probabilidade

- Lei dos grandes números:
  - Quando n se torna muito grande a frequência relativa é igual à probabilidade

$$\lim_{n \to +\infty} P(f_n(A) - P(A)) = 1$$

Probabilidade

- Probabilidade condicionada
  - Sejam dois acontecimentos, A e B, subconjuntos do mesmo espaço de resultados Ω. A probabilidade de A se realizar sabendo-se que B se realizou – ou a probabilidade de A condicionada por B, designada por $P(A|B)$ – é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade

Classificação de peças de vulcanite quanto à porosidade e ao dimensionamento

Dimensionamento	Porosas	Não porosas	Totais
Defeituoso	2,1%	4,9%	7%
Não defeituoso	18,1%	74,9%	93%
Totais	20,2%	79,8%	100%

Introdução à Estatística, Bento Murteira et. al., Escolar Editora

Probabilidade

- Probabilidade de obter uma peça porosa $P(A) = 0{,}202$;
- Probabilidade de obter uma peça não porosa $P(\bar{A}) = 0{,}798$;
- Probabilidade de obter uma peça 'defeituosa' $P(B) = 0{,}070$
- Probabilidade de obter uma peça 'não defeituosa' $P(\bar{B}) = 0{,}930$
- Probabilidade de obter uma peça porosa e 'não defeituosa' …

Probabilidade

- Acontecimentos independentes
  - Dois acontecimentos, A e B, do mesmo espaço de resultados, dizem-se independentes sse

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Probabilidade

- Acontecimentos independentes
  - Se A e B forem acontecimentos independentes, então

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0$$

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0$$

Distribuições

- Distribuições discretas
  - Uniforme
  - Bernoulli
  - Binomial
  - Poisson
- Distribuições contínuas
  - Normal
  - Exponencial
  - Qui-quadrado

Uniforme

- Definição
  - Seja X uma varável aleatória com $D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Diz-se que X segue uma distribuição uniforme nos pontos x_k sse

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

Uniforme

- Propriedades
  - $E(X) = \mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j;$
  - $Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \mu\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2 - \mu$

Uniforme

- Exemplo
  - Lançamento de um dado 'perfeito'.
    - $n = 6$
    - $P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \cdots, 6$