BIOESTATÍSTICA

M.I. Eng. Biomédica

2015-2016

Aula Teórica 7

Testes de hipóteses

- Cálculo da probabilidade e "aferição":
  - A probabilidade é determinada a partir da distribuição de probabilidades da variável em estudo;
  - A probabilidade calculada é considerada baixa quando comparada com um determinado limiar (α)

- Resumo:
  - Formulação da hipótese nula;
  - Cálculo da probabilidade;
  - Decisão sobre o valor da probabilidade;

Testes de hipóteses

- Valor p
  - Dada uma distribuição de probabilidade é possível determinar a probabilidade de ocorrer um evento tão ou mais extremo em relação à hipótese nula que o observado, admitindo que a hipótese nula é verdadeira.
  - Este valor de probabilidade é conhecido como valor p.
  - Para calcular o valor p, é necessário seleccionar uma distribuição de probabilidades adequada e transformar o desvio verificado em relação ao valor esperado num valor específico de probabilidade;

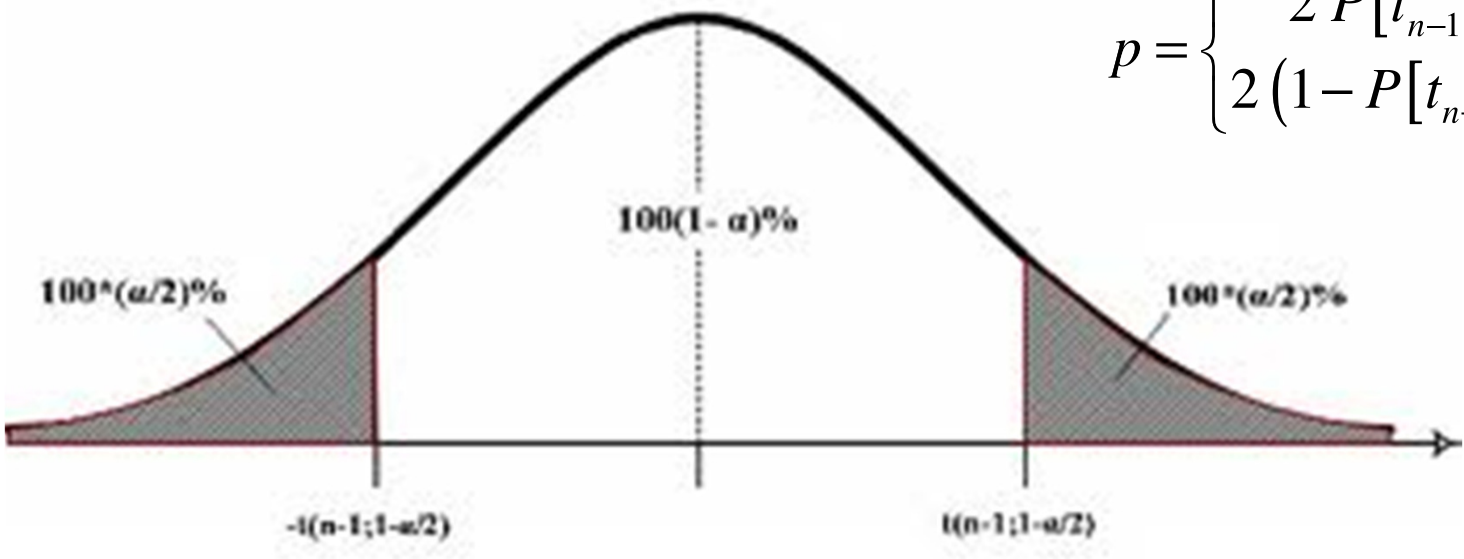
Testes de hipóteses

- Na maior parte das aplicações, a variância populacional não é conhecida.
  - O teste adequado nestes casos requer o uso de uma distribuição t-Student.
  - Seja:
    $$H_0 : \mu = \mu_0$$
    $$H_1 : \mu \neq \mu_0$$
  - Para o nível de significância igual a α, calcula-se
    $$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Testes de hipóteses

- Se $|t| > t_{n-1,1-\alpha/2}$, então rejeita-se H_o
- Se $|t| < t_{n-1,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

$$p = \begin{cases} 2\,P[t_{n-1} \le t],\ se\ t \le 0 \\ 2\,(1 - P[t_{n-1} \le t],\ se\ t > 0) \end{cases}$$



Testes de hipóteses

- IC *vs.* testes de hipóteses
  - O IC a (1-α)x100% é

$$\mu = (c_1, c_2) = \bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$$

  - Supondo que se rejeita H_o para nível α, significa que:

$$t < -t_{n-1,1-\alpha/2} \quad ou \quad t > t_{n-1,1-\alpha/2}$$

Para a inequação $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1,1-\alpha/2}$

Tem-se, então

$$\mu_0 < \bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\, s/\sqrt{n} = c_1 \qquad \mu_0 > \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\, s/\sqrt{n} = c_2$$

Testes de hipóteses

- O IC de confiança para a média contém todos os valores para os quais H_o é aceite se se fizer um teste bilateral, com

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- Por outro lado, o IC não contém nenhum dos valores μ_o para os quais se rejeita a H_o usando um teste bilateral.

Testes de Kolmogorov-Smirnov

$$\begin{cases} H_0 : \ Distribuição \ Amostral \sim N(\mu, \sigma^2) \\ H_1 : \ Distribuição \ Amostral \not\sim N(\mu, \sigma^2) \end{cases} , \quad \alpha = 0,05$$

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Respiração (Tempo 1)	Respiração (Tempo 2)	Pulso (Tempo 1)	Pulso (Tempo 2)
N		30	30	30	30
Normal Parameters[a,b]	Mean	3.303	3.320	2.387	2.457
	Std. Deviation	.0765	.0761	.2501	.3202
Most Extreme Differences	Absolute	.217	.253	.236	.192
	Positive	.217	.204	.236	.189
	Negative	-.216	-.253	-.203	-.192
Kolmogorov-Smirnov Z		1.191	1.388	1.290	1.049
Asymp. Sig. (2-tailed)		.117	.042	.072	.221

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Amostras emparelhadas

- Num problema de testes de hipóteses para duas amostras os parâmetros associados às distribuições são comparados.

- Duas amostras dizem-se <u>emparelhadas</u> se a cada ponto da primeira amostra corresponde um único ponto na segunda amostra.

- Duas amostras dizem-se <u>independentes</u> se os pontos numa das amostras não tem relação com os pontos da outra amostra.

Amostras emparelhadas

- O teste estatístico para amostras emparelhadas é

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

- com

$$s_d = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right)^2 \Big/ n \right] \Big/ (n-1)}$$

- Se $|t| > t_{n-1,1-\alpha/2}$, então rejeita-se H_o
- Se $|t| \leq t_{n-1,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

$$p = \begin{cases} 2\,P[t_{n-1} \leq t],\ se\ t \leq 0 \\ 2\left(1 - P[t_{n-1} \leq t],\ se\ t > 0\right) \end{cases}$$

Amostras emparelhadas

- O intervalo de confiança para a verdadeira diferença (D) entre as médias de duas amostras emparelhadas (bilateral) é:

$$\left(\bar{d} - t_{n-1,1-\alpha/2}\, s_d \big/ \sqrt{n}\, ,\, \bar{d} + t_{n-1,1-\alpha/2}\, s_d \big/ \sqrt{n}\right)$$

Amostras emparelhadas

- Exemplo:

SBP levels (mm Hg) in 10 women while not using (baseline) and while using (follow-up) OCs

i	SBP level while not using OCs (x_{i1})	SBP level while using OCs (x_{i2})	d_i^*
1	115	128	13
2	112	115	3
3	107	106	−1
4	119	128	9
5	115	122	7
6	138	145	7
7	126	132	6
8	105	109	4
9	104	102	−2
10	115	117	2

$^*d_i = x_{i2} - x_{i1}$

in Fundamentals of Biostatistics, p271
Bernard Rossner

Amostras emparelhadas

- Teste t:

$$\bar{d} = (13 + 3 + \ldots + 2)/10 = 4,80$$

$$s_d^2 = \left[(13 - 4,80)^2 + \ldots + (2 - 4,80)^2 \right]/9 = 20,844$$

$$s_d = \sqrt{20,844} = 4,566$$

$$t = 4,80 / \left(4,566 / \sqrt{10} \right) = 3,32$$

- Como

$$t_{9,\,0,975} = 2,262$$

- Então H_0 pode ser rejeitado (α = 0,05), e conclui-se que iniciar a toma de contraceptivos orais está associado a uma variação significativa da pressão arterial sistólica.

Amostras emparelhadas

- O intervalo de confiança para o mesmo exemplo vem:

$$
\begin{aligned}
\bar{d} \pm t_{n-1,0,975}\, s_d / \sqrt{n} &= 4,80 \pm t_{9,0,975}\, 1,444 \\
&= 4,80 \pm 2,262 \times 1,444 \\
&= 4,80 \pm 3,27\ mmHg
\end{aligned}
$$

- Assim a verdadeira variação de pressão arterial sistólica encontra-se com maior probabilidade entre 1,5mmHg e 8,1mmHg.

Amostras independentes

- Existem várias situações para as quais se está interessado em testar a igualdade de duas populações normais independentes.
- Seja, então:

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \quad \text{e} \quad Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

- sendo as variáveis X e Y <u>independentes</u>.

- Testar a igualdade das distribuições equivale a testar a igualdade das médias ou a igualdade das variâncias. Recolhe-se então uma amostra casual com m observações da população X, e outra, com dimensão n da população Y.

Amostras independentes

- Para o teste da igualdade das duas médias tem-se:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

- Parece razoável basear o teste na diferença entre as duas médias amostrais. Se a diferença se encontra longe do zero a hipótese nula é rejeitada.

- Como X e Y, são distribuídas normalmente, com uma determinada média e variância, a sua diferença, X-Y, também seguirá uma distribuição normal de média igual a μ_X-μ_Y e variância σ^2(1/m+1/n), supondo-se neste caso específico que

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$$

Amostras independentes

- Simbolicamente, vem:

$$X - Y \sim N\left[\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right]$$

- Sob H_o, assume-se que μ_X-μ_Y = 0, logo

$$X - Y \sim N\left[0, \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right]$$

- Se a variância for conhecida, então

$$\frac{X - Y}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim N[0,1]$$

Amostras independentes

- Infelizmente, σ^2 é geralmente desconhecida, sendo necessário por isso estimá-la a partir dos dados.

- As amostras apresentam variâncias s^2_X e s^2_Y cuja média poderia ser usada para estimar σ^2. No entanto, a média iria ponderar de forma igual as duas amostras que podem ter dimensões diferentes.

- A melhor estimativa é dada por:

$$s^2 = \frac{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}{m+n-2}$$

Amostras independentes

- O teste t para amostras independentes é:

$$t = \frac{\mu_X - \mu_Y}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t\left(m+n-2\right)$$

- Com

$$s = \sqrt{\frac{\left(m-1\right)s_X^2 + \left(n-1\right)s_Y^2}{m+n-2}}$$

- Se $|t| > t_{m+n-2,1-\alpha/2}$, então rejeita-se H_o
- Se $|t| \leq t_{m+n-2,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

$$p = \begin{cases} 2\,P\left[t_{m+n-2} \leq t\right],\ se\ t \leq 0 \\ 2\left(1 - P\left[t_{m+n-2} \leq t\right],\ se\ t > 0\right) \end{cases}$$

Amostras independentes

- Quando a variância das duas populações são desconhecidas e diferentes recorre-se à aproximação de Welch e considera-se a estatística-teste:

$$t = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}} \sim t\left(r^*\right)$$

- Com

$$r^* = \frac{\left(\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_X^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s_Y^2}{n}\right)^2}$$

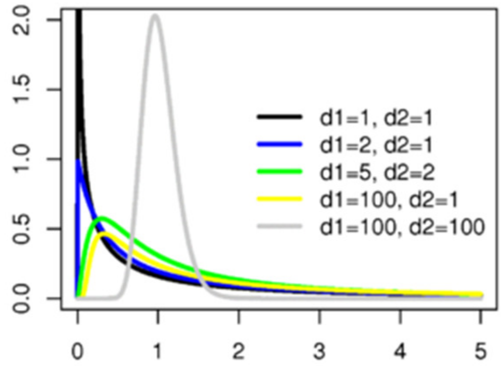
Amostras independentes

- O teste para a igualdade das variâncias apresenta como hipótese nula:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{ou alternativamente} \quad H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$$

- Sabe-se que o quociente de variâncias segue uma distribuição F, estudada por R.A. Fisher e G. Snedecor.
- Não existe apenas uma distribuição F, mas sim uma família de distribuições indexada aos graus de liberdade do numerador e do denominador.
- Para o nosso caso teríamos $F_{m-1,n-1}$.

Amostras independentes



- O teste F para a igualdade de variâncias é:

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

- Se $F > F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}$, ou $F < F_{m-1,n-1,\alpha/2}$ então rejeita-se H_o
- Se $F_{m-1,n-1,\alpha/2} \leq F \leq F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

- Para o valor de p tem-se:
- Se $F \geq 1$ então $p = 2 \times P(F_{m-1,n-1} > F)$
- Se $F < 1$ então $p = 2 \times P(F_{m-1,n-1} < F)$

Amostras independentes

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Me			
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference
Pulso (Tempo 2)	Equal variances assumed	11.830	.002	-13.790	28	.000	-.6000
	Equal variances not assumed			-15.537	26.763	.000	-.6000

Teste de LEVENE

Não há homogeneidade de variância