Bioestatística

M.I. Eng. Biomédica

2015-2016

Aula Teórica 8

Testes de hipóteses

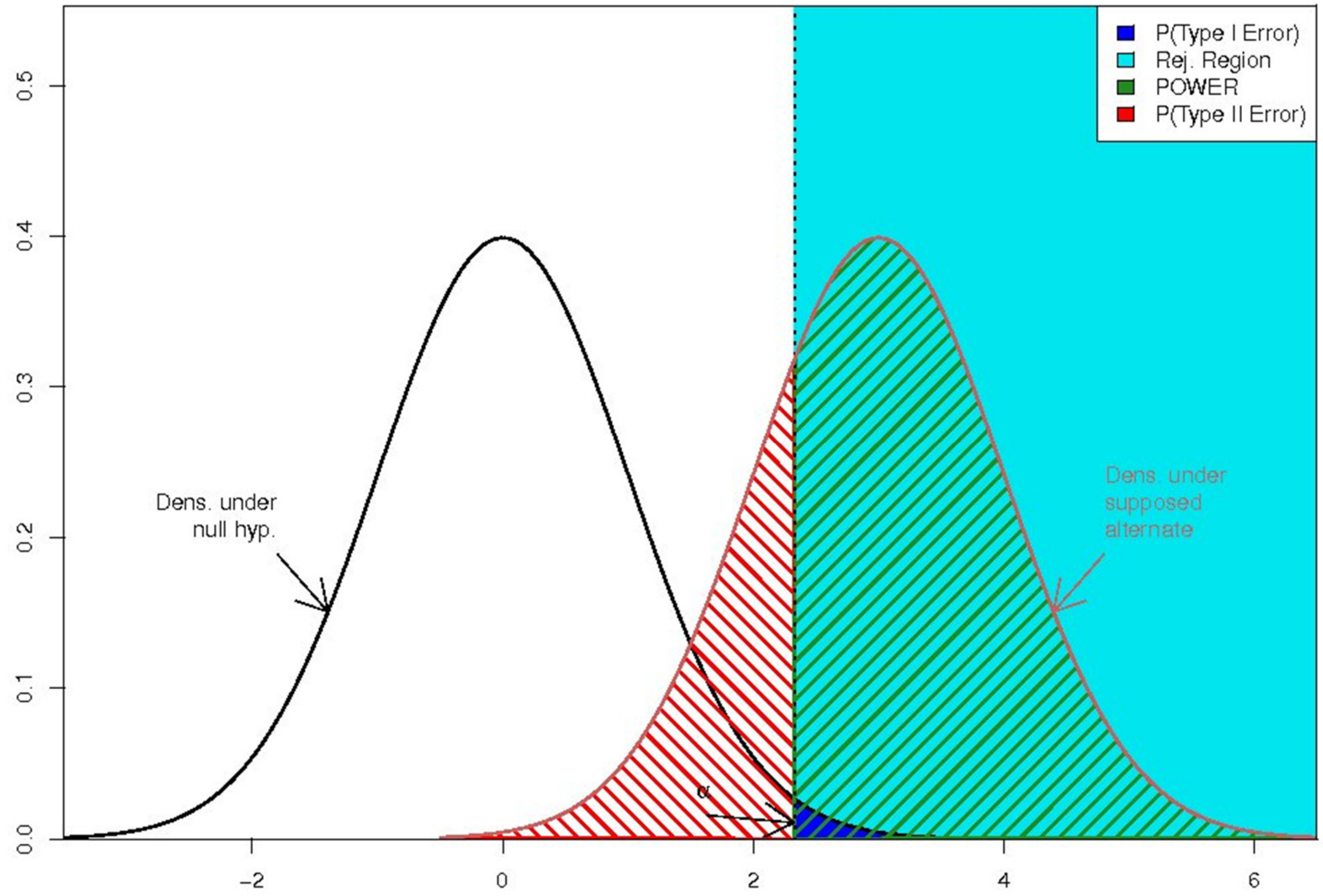
- Erros

H_0 / Decisão	**Verdadeira**	**Falsa**
Rejeitar H_0	Erro tipo I α	Potência do teste $1-\beta$
Aceitar H_0	Nível de confiança $1-\alpha$	Erro tipo II β

$$\alpha = P(rejeitar\ H_0 / H_0\ verdadeira)$$
$$1-\alpha = P(aceitar\ H_0 / H_0\ verdadeira)$$

$$\beta = P(aceitar\ H_0 / H_0\ falsa)$$
$$1-\beta = P(rejeitar\ H_0 / H_0\ falsa)$$

Testes de hipóteses



Testes de hipóteses

- Tamanho da amostra
  - Suponhamos que:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1$$

  - Em que os dados seguem uma distribuição normal com média μ e variância conhecida σ^2.
  - O tamanho da amostra necessário para executar um teste bilateral de nível de significância α e potência $1-\beta$ é

$$n = \frac{\sigma^2 \left(z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2} \right)^2}{\left(\mu_0 - \mu_1 \right)^2}$$

Testes de hipóteses

- Tamanho da amostra
  - O tamanho da amostra também pode ser determinado a partir do tamanho do intervalo de confiança. Assim, para que um intervalo de confiança tenha um tamanho não superior a L, é necessário que o tamanho da amostra seja

$$n = 4\, t^2_{n-1,1-\alpha/2}\; s^2 / L^2 = 4\, z^2_{1-\alpha/2}\; s^2 / L^2$$

Testes de normalidade

- Teste de Kolmogorov-Smirnov
  - n>20
- Teste de Shapiro-Wilk
  - n≤20

$$\begin{cases} H_0: \ Distribuição \ Amostral \sim N(\mu,\sigma^2) \\ H_1: \ Distribuição \ Amostral \nsim N(\mu,\sigma^2) \end{cases}, \quad \alpha = 0,05$$

Amostras emparelhadas

- Num problema de testes de hipóteses para duas amostras os parâmetros associados às distribuições são comparados.

- Duas amostras dizem-se <u>emparelhadas</u> se a cada ponto da primeira amostra corresponde um único ponto na segunda amostra.

- Duas amostras dizem-se <u>independentes</u> se os pontos numa das amostras não tem relação com os pontos da outra amostra.

Amostras emparelhadas

- O teste estatístico para amostras emparelhadas é

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

- com

$$s_d = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right)^2 \Big/ n \right] \Big/ (n-1)}$$

- Se $|t| > t_{n-1,1-\alpha/2}$, então rejeita-se H_o
- Se $|t| \leq t_{n-1,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

$$p = \begin{cases} 2\,P[t_{n-1} \leq t],\ se\ t \leq 0 \\ 2\,(1 - P[t_{n-1} \leq t],\ se\ t > 0) \end{cases}$$

Amostras emparelhadas

- O intervalo de confiança para a verdadeira diferença (D) entre as médias de duas amostras emparelhadas (bilateral) é:

$$\left(\bar{d} - t_{n-1,1-\alpha/2}\, s_d \big/ \sqrt{n}\ ,\ \bar{d} + t_{n-1,1-\alpha/2}\, s_d \big/ \sqrt{n}\right)$$

Amostras emparelhadas

- Exemplo:

SBP levels (mm Hg) in 10 women while not using (baseline) and while using (follow-up) OCs

i	SBP level while not using OCs (x_{i1})	SBP level while using OCs (x_{i2})	d_i^*
1	115	128	13
2	112	115	3
3	107	106	−1
4	119	128	9
5	115	122	7
6	138	145	7
7	126	132	6
8	105	109	4
9	104	102	−2
10	115	117	2

$^*d_i = x_{i2} - x_{i1}$

in Fundamentals of Biostatistics, p271
Bernard Rossner

Amostras emparelhadas

- Teste t:

$$\bar{d} = (13+3+\ldots+2)/10 = 4{,}80$$

$$s_d^2 = \left[(13-4{,}80)^2 + \ldots + (2-4{,}80)^2\right]/9 = 20{,}844$$

$$s_d = \sqrt{20{,}844} = 4{,}566$$

$$t = 4{,}80/\left(4{,}566/\sqrt{10}\right) = 3{,}32$$

- Como

$$t_{9,\,0{,}975} = 2{,}262$$

- Então H_0 pode ser rejeitado ($\alpha = 0{,}05$), e conclui-se que iniciar a toma de contraceptivos orais está associado a uma variação significativa da pressão arterial sistólica.

Amostras emparelhadas

- O intervalo de confiança para o mesmo exemplo vem:

$$\begin{aligned}\bar{d} \pm t_{n-1,\,0{,}975}\ s_d \,/\, \sqrt{n} &= 4{,}80 \pm t_{9,\,0{,}975}\ 1{,}444 \\ &= 4{,}80 \pm 2{,}262 \times 1{,}444 \\ &= 4{,}80 \pm 3{,}27\ mmHg\end{aligned}$$

- Assim a verdadeira variação de pressão arterial sistólica encontra-se com maior probabilidade entre 1,5mmHg e 8,1mmHg.

Amostras independentes

- Existem várias situações para as quais se está interessado em testar a igualdade de duas populações normais independentes.
- Seja, então:

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \quad \text{e} \quad Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

- sendo as variáveis X e Y <u>independentes</u>.

- Testar a igualdade das distribuições equivale a testar a igualdade das médias ou a igualdade das variâncias. Recolhe-se então uma amostra casual com *m* observações da população X, e outra, com dimensão *n* da população Y.

Amostras independentes

- Para o teste da igualdade das duas médias tem-se:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

- Parece razoável basear o teste na diferença entre as duas médias amostrais. Se a diferença se encontra longe do zero a hipótese nula é rejeitada.

- Como X e Y, são distribuídas normalmente, com uma determinada média e variância, a sua diferença, X-Y, também seguirá uma distribuição normal de média igual a μ_X-μ_Y e variância $\sigma^2(1/m+1/n)$, supondo-se neste caso específico que

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$$

Amostras independentes

- Simbolicamente, vem:

$$X - Y \sim N\left[\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right]$$

- Sob H_o, assume-se que $\mu_X - \mu_Y = 0$, logo

$$X - Y \sim N\left[0, \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right]$$

- Se a variância for conhecida, então

$$\frac{X - Y}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim N[0,1]$$

Amostras independentes

- Infelizmente, σ^2 é geralmente desconhecida, sendo necessário por isso estimá-la a partir dos dados.

- As amostras apresentam variâncias s^2_X e s^2_Y cuja média poderia ser usada para estimar σ^2. No entanto, a média iria ponderar de forma igual as duas amostras que podem ter dimensões diferentes.

- A melhor estimativa é dada por:

$$s^2 = \frac{(m-1)\,s_X^2 + (n-1)\,s_Y^2}{m+n-2}$$

Amostras independentes

- O teste t para amostras independentes é:

$$t = \frac{\mu_X - \mu_Y}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t\left(m+n-2\right)$$

- Com

$$s = \sqrt{\frac{\left(m-1\right)s_X^2 + \left(n-1\right)s_Y^2}{m+n-2}}$$

- Se $|t| > t_{m+n-2,1-\alpha/2}$, então rejeita-se H_o
- Se $|t| \leq t_{m+n-2,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

$$p = \begin{cases} 2\,P\left[t_{m+n-2} \leq t\right],\ se\ t \leq 0 \\ 2\left(1 - P\left[t_{m+n-2} \leq t\right],\ se\ t > 0\right) \end{cases}$$

Amostras independentes

- Quando a variância das duas populações são desconhecidas e diferentes recorre-se à aproximação de Welch e considera-se a estatística-teste:

$$t = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\sqrt{\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}}} \sim t\left(r^*\right)$$

- Com

$$r^* = \frac{\left(\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_X^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s_Y^2}{n}\right)^2}$$

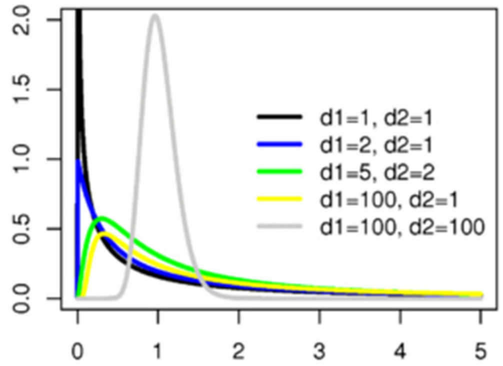
Amostras independentes

- O teste para a igualdade das variâncias apresenta como hipótese nula:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{ou alternativamente} \quad H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$$

- Sabe-se que o quociente de variâncias segue uma distribuição F, estudada por R.A. Fisher e G. Snedecor.
- Não existe apenas uma distribuição F, mas sim uma família de distribuições indexada aos graus de liberdade do numerador e do denominador.
- Para o nosso caso teríamos $F_{m-1,n-1}$.

Amostras independentes



- O teste F para a igualdade de variâncias é:

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2} \sim F\left(m-1, n-1\right)$$

- Se $F > F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}$, ou $F < F_{m-1,n-1,\alpha/2}$ então rejeita-se H_o
- Se $F_{m-1,n-1,\alpha/2} \leq F \leq F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}$, então aceita-se H_o

- Para o valor de p tem-se:
- Se $F \geq 1$ então $p = 2 \times P(F_{m-1,n-1} > F)$
- Se $F < 1$ então $p = 2 \times P(F_{m-1,n-1} < F)$