



UNIVERSITATEA POLITEHNICA BUCUREȘTI

TEHNICI AVANSATE DE OPTIMALITATE

Metoda Schur în modelul unui motor de curent continuu

Student:

ARIF Gesur

BUCUR Alexandru

GRIGORE Ștefan

13.06.2024

Cuprins

1	Informații ecuații	3
2	Modelul motorului de curent continuu și funcționarea acestuia	5
3	Introducere avarie	6
4	Schur	8
5	Rezultate	9
6	Concluzii	13

1 Informații ecuații

Modelul motorului de curent continuu utilizat pleacă de la ecuațiile acestuia:

1. Ecuațiile electrice:

$$U = L_A \frac{dI}{dt} + R_A I + E_b \quad (1)$$

unde:

U - tensiunea de pe armături

L_A - inductanța de pe armături

R_A - rezistența de pe armături

I - curentul din armături

E_b - tensiunea electromotoare

$$E_b = k_e * \Omega \quad (2)$$

unde:

k_e - constanta electromotoare

Ω - viteza unghiulară

$$T = k_t * i_a \quad (3)$$

T - cuplul dezvoltat de motor

K - constanta de cuplu

2. Ecuațiile mecanice:

Pentru un sistem cu reductor, momentul de inerție echivalent este:

$$J_{1eq} = J_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 * J_2 \quad (4)$$

unde:

J_{1eq} - momentul de inerție echivalent

n_1 - numărul de dinți de pe motr

n_2 - numărul de dinți de pe sarcină

$$T - T_L = J_{1eq} \frac{d\omega}{dt} + B * \Omega \quad (5)$$

unde:

T_L - cuplul de la sarcina motorului

B - coeficientul de pierderi din frecări

Din aceste ecuații putem determina funcția de transfer a motorului:

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{n_1}{n_2} K}{\{R_a[J_1 + (\frac{n_1}{n_2})^2 * J_2]s + K K_b\}s} \quad (6)$$

unde: $\theta(s)$ - poziția rotorului

E_a - tensiunea aplicată pe armături

Motorul de curent continuu cu reductor [1] are următoarele date tehnice:

$n_1 = 102.08$	(numărul de dinți de pe primul reductor)
$n_2 = 1$	(numărul de dinți de pe al 2lea reductor)
$T = 42 \times 9.81 \times 10^{-3} [Nm]$	(cuplul generat de motor)
$i_a = 0.2 [A]$	(Curentul dintre armături)
$K = \frac{T}{i_a} [\frac{Nm}{A}]$	(Constanta de cuplu a motorului)
$J_1 = 3.5 \times 10^{-6} [kg * m^2]$	(momentul de inerție al motorului)
$J_2 = 0.15625 \times 10^{-3} [kg * m^2]$	(momentul de inerție al sarcinii)
$e_a = 12 [V]$	(Tensiunea aplicată pe motor)
$w = 10.472 [\frac{rad}{s}]$	(viteza unghiulară)
$K_b = 0.014 [\frac{V}{rad/s}]$	(Constanta electromotoare,)
$e_b = K_b \cdot w [V]$	(tensiunea electromotoare)
$R_a = \frac{e_a - e_b}{i_a} [V]$	(Rezistența dintre armături)

2 Modelul motorului de curent continuu și funcționarea acestuia

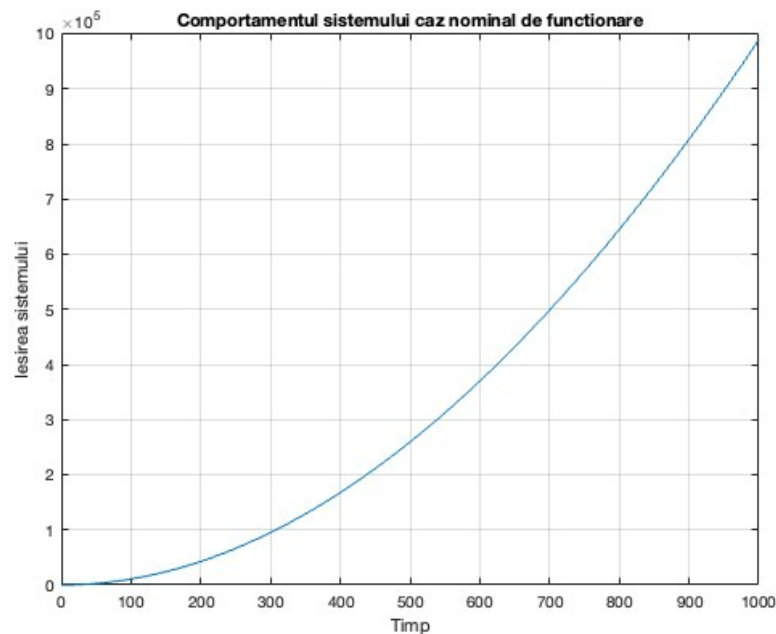


Figura 1: Comportamentul dinamic al motorului de curent continuu

Comportamentul dinamic al motorului de curent continuu indică o instabilitate a sistemului, determinată de prezența unui pol în zero. Această instabilitate se traduce prin tendința motorului de a accelera necontrolat și de a atinge turații foarte mari atunci când este supus unei tensiuni. Această situație poate duce la distrugerea fizică a motorului.

Orice perturbație sau variație în parametri poate determina o creștere nelimitată a răspunsului sistemului. Acest lucru explică comportamentul necontrolat al motorului și necesitatea implementării unor măsuri de control adecvate pentru a asigura stabilitatea și siguranța sistemului.

3 Introducere avarie

Defectul pe care l-am considerat în funcționarea motorului este uzura la periile colector. Această uzură la colector se resimte ca și o creștere a rezistenței pe care o simte circuitul electric al motorului.

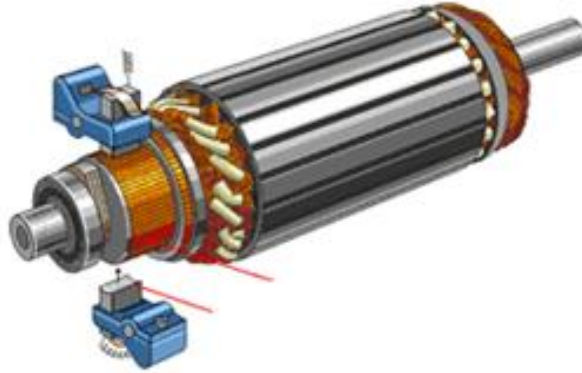


Figura 2: Motorul cu periile

Acest tip de uzură este cel mai întâlnit în domeniu, iar majoritatea utilizatorilor renunță la folosirea motoarelor de curent continuu în schimbul altor tipuri de motoare. Este necesară schimbarea acestor inele, deoarece randamentul motorului începe să scadă.

Randamentul unui motor electric este dat de:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} * 100 \quad (7)$$

unde: P_{gen} - puterea mecanică generată de motor

P_{cons} - puterea electrică consumată de motor

$$P_{gen} = P_{cons} - P_{pierderi} \quad (8)$$

unde:

$$P_{pierderi} = R * I^2.$$

Odată cu uzura periilor, cresc pierderile prin încălzire, iar puterea debitată de motor scade.

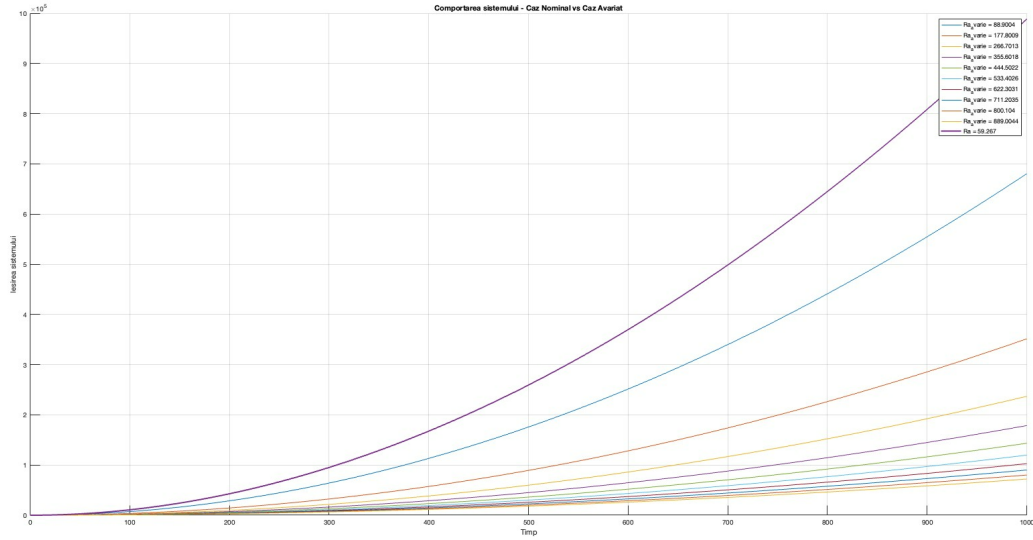


Figura 3: Comportamentul dinamic al motorului Nominal vs. Avariat

Funcția de transfer a sistemului neavariat este:

$$H(s) = \frac{210.3}{96.5s^2 + 0.02884s} \quad (9)$$

Prin creșterea rezistenței se observă o diminuare a răspunsului sistemului. Acest comportament este atribuit uzurii periilor, care conduce la o creștere a rezistenței electrice. În aceste condiții, motorul necesită o cantitate suplimentară de energie pentru a funcționa eficient.

Astfel, performanța motorului se deteriorează, acesta fiind supus unei sarcini suplimentare. Creșterea rezistenței provoacă o reducere a curentului disponibil pentru alimentarea motorului, rezultând într-o diminuare a cuplului și a vitezei acestuia. Această situație se traduce printr-o reacție mai lentă a sistemului la comenzi și o performanță generală scăzută.

În plus, sarcina suplimentară impusă motorului poate duce la supraîncălzirea acestuia. Supraîncălzirea poate determina degradarea izolației bobinajelor și a altor componente interne, accelerând astfel uzura și crescând riscul de defectare prematură. Pe termen lung, această stare poate afecta fiabilitatea și durata de viață a motorului.

De asemenea, creșterea rezistenței datorate uzurii periilor poate genera fluctuații și instabilități în funcționarea motorului, afectând astfel precizia și consistența în aplicațiile unde controlul este esențial. În context industrial, acest lucru poate provoca probleme de producție și creșterea costurilor de întreținere și reparații.

4 Schur

Idei asociate Metodei Vectorilor Schur

Metoda Vectorilor Schur reprezintă un instrument esențial în analiza și proiectarea sistemelor de control liniare. În cadrul acestei metode, o atenție deosebită este acordată descompunerii matricilor în blocuri triunghiulare, ceea ce facilitează analiza și manipularea acestora în contextul controlului sistemelor. Un aspect crucial al Metodei Vectorilor Schur este stabilizarea sistemelor liniare. Prin determinarea unei matrice de stare stabilizatoare, sistemul poate fi menținut într-o stare controlabilă și stabilă. De asemenea, metoda este utilizată pentru determinarea valorilor și vectorilor proprii ai unei matrici, oferind informații cruciale despre comportamentul dinamic al sistemului.

Ecuatii relevante

1. **Sistem LTI:**

$$Mf : \dot{x}(t) = A_f x(t) + B_f u_f(t), \quad \text{cu } x_{tf} = x(t_f) \triangleq x_f,$$

2. **Matricea Hamilton:**

$$H_f = \begin{bmatrix} A_f & -G_f \\ -Q_n & -A_f^\top \end{bmatrix} \parallel G_f = B_f R^{-1} B_f^\top$$

3. **Forma Schur reala:** Dată fiind matricea $H_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, există o matrice ortogonală U_f astfel încât $S_f = U_f H_f U_f^\top$ este în formă (cvasi-)triangulară

$$S_f = \begin{bmatrix} S_{f11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & S_{fpp} \end{bmatrix}$$

4. **Soluția stabilizatoare:**

$$S_f = \begin{bmatrix} S_{f11} & S_{f12} \\ O & S_{f22} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad U_f = \begin{bmatrix} U_{f11} & U_{f12} \\ U_{f21} & U_{f22} \end{bmatrix}$$

Soluția stabilizatoare pentru $CARE_f$ se calculează ca $X_f = U_{f21} U_{f11}^{-1}$ și

$$\Lambda(S_{f11}) = \Lambda(A_f - G_f X_f) \equiv \Lambda(A_f - B_f K_f) \subset \mathbb{C}$$

5 Rezultate

Caz nominal

Ecuatia reprezentării pe stare a sistemului este:

$$Mn : \dot{x}(t) = A_n x(t) + B_n u(t) \quad (10)$$

Matricile A_n și B_n sunt:

$$A_n = \begin{pmatrix} -0.0003 & 0 \\ 1.0000 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

În cazul nominal, sistemul în buclă închisă \hat{M}_n va avea matricea în buclă închisă (Riccati) $\hat{A}_n = A_n - B_n K_n$.

$$\Lambda_{cl} = \{-0.0224 + 0.0224i, -0.0224 - 0.0224i\}$$

Valorile proprii ale soluției Riccati (sol. pozitiv definită):

$$\lambda_1 = 1.0 \times 10^3 \times 0.0022 \lambda_2 = 1.0 \times 10^3 \times 4.4457$$

Norma diferenței între soluțiile obținute cu metoda Schur și care():

$$\|X - X_{\text{schur}}\| = 4.1063 \times 10^{-9}$$

În cazul nominal, sistemul în buclă închisă \hat{M}_n va avea matricea în buclă închisă $\hat{A}_n = A_n - B_n K_n$ (Metoda Schur).

Sistemul în buclă închisă :

$$\hat{M}_n : \dot{x}(t) = \hat{A}_n x(t) \quad (11)$$

$$\Lambda_{cl} = \{-0.0224 + 0.0224i, -0.0224 - 0.0224i\}$$

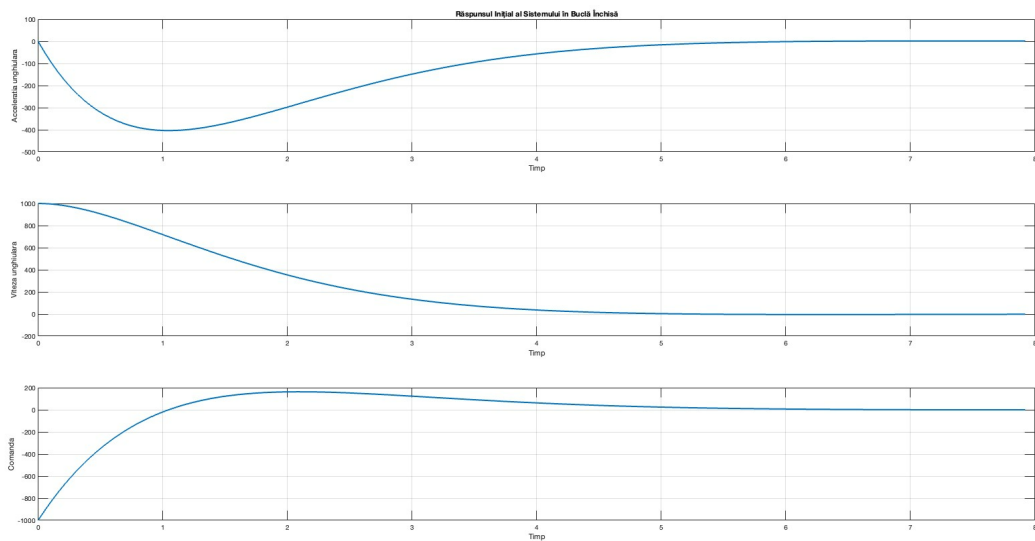


Figura 4: Răspunsul sistemului în buclă închisă

Analiza graficului relevă că sistemul a fost supus unei comenzi de intensitate extrem de mare, deoarece matricile de ponderare nu au fost ajustate, lipsind orice formă de penalizare. Timpul tranzitoriu pentru atingerea stabilității este foarte scurt, fiind mai puțin de 10 secunde, pornind de la o valoare inițială a vitezei unghiulare de 1000 rad/s și o accelerație unghiulară de 0 rad/s². Această comandă de mare intensitate este nerealistă în contextul practic.

Pentru a remedia această situație, am intervenit ajustând matricile de ponderare și introducând o penalizare asupra comenzii. Acest lucru a permis obținerea unei performanțe mai realiste, evitând solicitările excesive ale componentelor sistemului. Prin ajustare, s-a obținut un echilibru între performanță și cost.

În procesul de optimizare, s-a aplicat și metoda Riccati pentru a obține soluția optimă a controlului. Această soluție a fost comparată cu soluția obținută prin Metoda Vectorilor Schur, iar norma 2 dintre cele două soluții a fost de ordinul 10^{-9} , indicând o concordanță foarte mare între ele.

De asemenea, s-a efectuat o analiză a stabilității sistemului în buclă închisă. Valorile proprii ale matricei $A - B \cdot K_{schur}$ au fost determinate și s-au constatat că partea lor reală este negativă, confirmând astfel stabilitatea sistemului. Această concluzie este confirmată și de comportamentul observat în grafic, unde se poate observa că sistemul evoluează către o stare stabilă într-un timp relativ scurt.

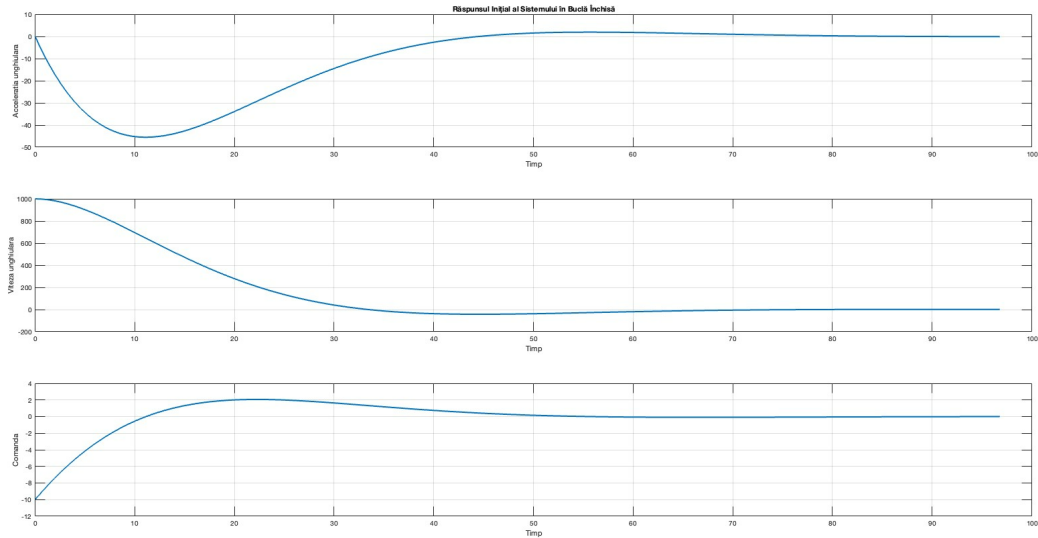


Figura 5: Răspunsul sistemului cu matricile de ponderare modificate

Prin ajustarea matricilor de ponderare $Q = Q * 1.5$ și $R = R * 100000$, răspunsul comenzii devine mult mai adecvat și realist. Deși timpul tranzitoriu crește, acest fenomen este perfect normal, întrucât comanda devine aplicabilă în condiții reale de operare.

Această ajustare permite obținerea unui echilibru optim între performanță și cost. Creșterea timpului tranzitoriu este o consecință firească a penalizării comenzii, ceea ce previne solicitările excesive și asigură funcționarea sistemului. Rezultatele obținute după modificarea matricilor Q și R sunt satisfăcătoare.

Caz avariāt

Matricile A_f și B_f sunt:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

În cazul avariāt, sistemul în buclă închisă \hat{M}_f va avea matricea în buclă închisă $\hat{A}_f = A_f - B_f K_f$ (Metoda Schur).

$$\hat{M}_f : \dot{x}(t) = \hat{A}_f x(t) \quad (12)$$

$$(13)$$

$$\Lambda_{cl} = \{-0.0224 + 0.0224i, -0.0224 - 0.0224i\}$$

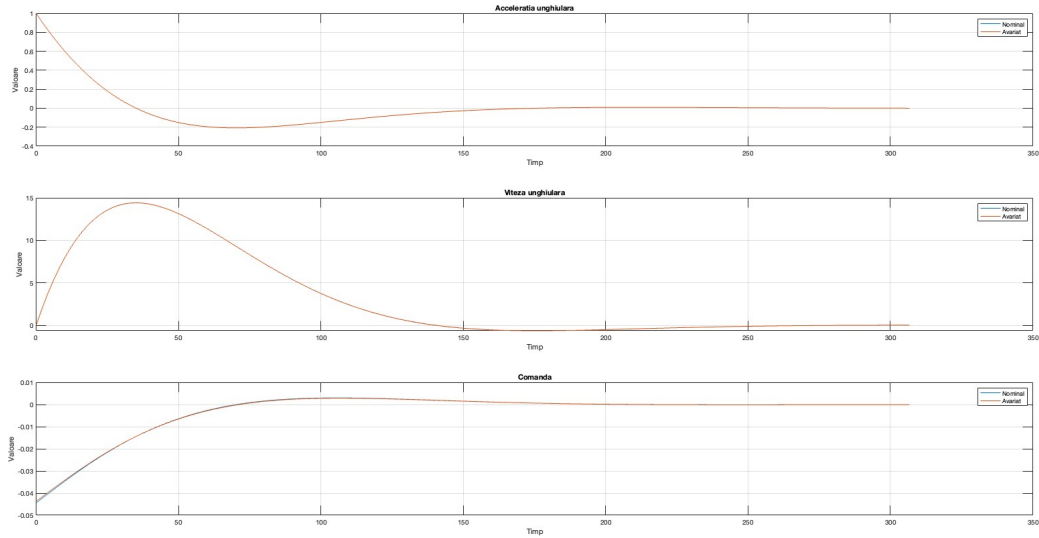


Figura 6: Răspunsul sistemului avariāt în buclă închisă

În analiza efectuată asupra metodei vectorilor Schur în cazul unei avarii a motorului, s-a considerat o incrementare semnificativă a rezistenței, asociată uzurii periilor acestuia.

Prin incrementarea rezistenței la niveluri considerabile, s-a simulat efectul uzurii periilor și impactul acesteia asupra comportamentului sistemului. Cu toate acestea, rezultatele analizei au relevat că diferențele între cele două răspunsuri (obținute cu și fără avarie) sunt aproape insesizabile la nivelul de 0.1. Mai exact, răspunsul sistemului și comanda asociată au fost aproximativ identice în ambele cazuri, cu o variație neglijabilă.

Această observație subliniază eficacitatea Metodei Vectorilor Schur în fața avariilor motorului. Chiar și în condiții extreme, precum cele simulate prin incrementarea rezistenței, metoda rămâne capabilă să ofere soluții precise și consistente.

Caz avariat nerealist

Matricile A_f și B_f sunt:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0.0150 & 0 \\ 1.0000 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

În cazul avariat, sistemul în buclă închisă \hat{M}_n va avea matricea în buclă închisă $\hat{A}_f = A_f - B_f K_f$ (Metoda Schur).

$$\text{Acl} = \{-0.0236 + 0.0211i, -0.0236 - 0.0211i\}$$

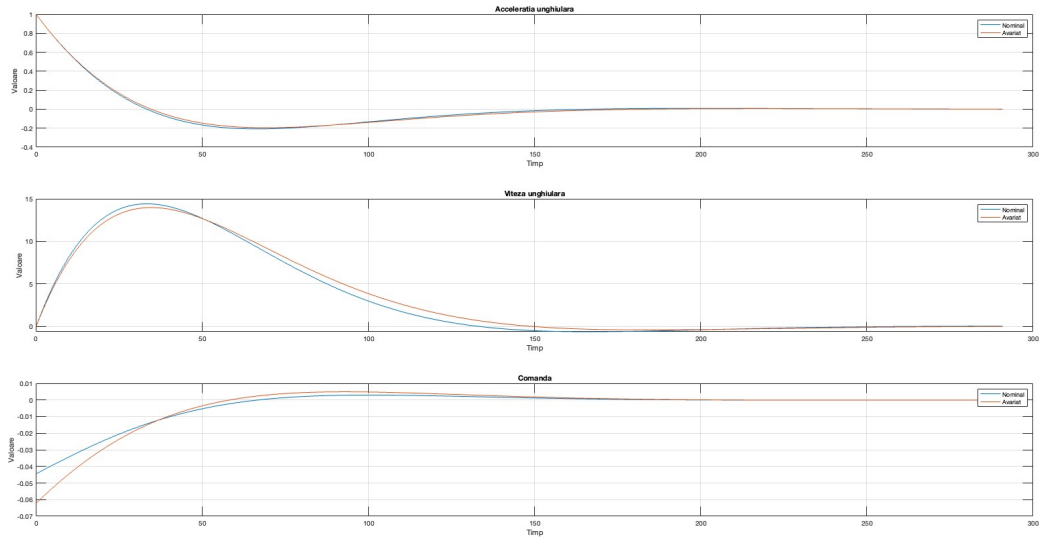


Figura 7: Răspunsul sistemului avariat nerealist în buclă închisă

În analiza noastră, am investigat comportamentul sistemului în cazul în care un pol este mutat din semiplanul stâng al planului complex în semiplanul drept. Această avarie fictivă, deși nu reflectă o situație reală, ne permite să înțelegem mai bine modul în care compensatorul acționează pentru a menține stabilitatea sistemului.

Atunci când un pol este mutat în semiplanul drept, sistemul devine instabil și începe să prezinte comportamente nedorite.

Compensatorul acționează pentru a readuce polul în semiplanul stâng al planului complex și pentru a restabili stabilitatea sistemului. Acest proces implică ajustarea parametrilor compensatorului pentru a contrabalansa efectele avariei și pentru a asigura că sistemul rămâne stabil și controlabil.

Observăm că, în ciuda avariei fictive și a mutării polului în semiplanul drept, intervenția compensatorului este eficientă.

6 Concluzii

În cadrul proiectului, Metoda Vectorilor Schur a constituit o componentă esențială în analiza și proiectarea sistemelor de control. Această metodă, a fost utilizată pentru investigarea stabilității și a comportamentului dinamic al sistemelor liniare, atât în condiții nominale, cât și în situații de avarie. Aplicarea Metodei Vectorilor Schur a implicat determinarea unei matrice de stare stabilizatoare pentru sistem, un aspect crucial în asigurarea unui comportament controlabil și stabil. Cu toate acestea, rezultatele experimentale au evidențiat că, în unele cazuri, aplicarea acestei metode nu a dus la modificări semnificative în comportamentul sistemului, chiar și în prezența unor avarii reale. Această observație poate fi interpretată în diverse moduri. O interpretare firească fiind că avariile în sine nu au fost suficient de pronunțate pentru a influența semnificativ comportamentul sistemului în buclă închisă.

În paralel, Metoda Riccati a fost menționată într-o măsură mai mică în cadrul proiectului. Această metodă, care se bazează pe rezolvarea ecuațiilor Riccati, are ca scop găsirea soluțiilor optime pentru diverse probleme de control, inclusiv stabilizarea sistemelor și proiectarea reguletoarelor optime.

De asemenea, este demn de menționat că, prin introducerea manuală a unui pol în semiplanul drept al sistemului, comportamentul compensatorului a fost predictibil, sistemul rămânând în continuare stabil. Această observație poate indica eficacitatea compensatorului în gestionarea schimbărilor în dinamica sistemului.

Referințe

- [1] Pololu. „37D Metal Gearmotors”. (), adresa: <https://www.pololu.com/file/0J1736/pololu-37d-metal-gearmotors-rev-1-2.pdf>.
- [2] P. Education, „System Dynamics”, vol. 4, p. 285, 2014.