Representación de Conocimiento mediante Lógica de Predicados

1 Introducción

Al igual que hicimos con la lógica proposicional, comenzaremos nuestro repaso de la lógica de predicados con una mirada a su **SINTAXIS** . Como habrás notado, la lógica proposicional no se preocupa por nada de lo que sucede *dentro de* sus fórmulas atómicas, solo se preocupa de las relaciones lógicas entre oraciones o fórmulas. En la lógica de predicados, no solo consideraremos estas mismas relaciones lógicas entre oraciones, sino que también comenzamos a mirar dentro de sus componentes atómicos. Dado este cambio de perspectiva, necesitamos agregar algunos conceptos a lo que ya sabemos de la lógica de proposiciones.
En concreto, las desventajas de la lógica de proposiciones son:

- Solamente permite representar hechos que son V o F.
- No permite representar objetos que tengan propiedades como color, tamaño, peso, etc.
- No permite representar relaciones entre objetos.
- No hay una fórmula para expresar *Todos los hombres son mortales.* Dado que solo disponemos de proposiciones y conectivas, con más de 7000 millones de habitantes, tendríamos que expresarlo como 7000 millones de proposiciones conectadas por un ‘&’.

Objetivos de la sesión:

- Comprender la estructura lógica de las oraciones en castellano.
- Aprender a simbolizar, es decir, a traducir oraciones en español a fórmulas de *lógica de predicados*.
- Repasar la gramática formal de la lógica *de predicados*.

2 Expresiones básicas

Considera el siguiente argumento (que te resultará familiar):

Todos los humanos son mortales.

Sócrates es humano.

–> *Sócrates es mortal.*

Este argumento no podemos representarlo en la lógica de proposiciones. Como mencionamos, en esta lógica nos conformamos con las proposiciones y las conectivas lógicas. Para representar este argumento seguiremos necesitando las conectivas lógicas, pero las proposiciones no nos llegan para representar la estructura interna de las oraciones. Necesitaremos varios tipos diferentes de expresiones básicas para lograr esto, incluyendo **PREDICADOS** , **CONSTANTES INDIVIDUALES**, **VARIABLES INDIVIDUALES** y **CUANTIFICADORES** .

2.1 Predicados y constantes individuales

Cuando se trata de la estructura interna de las oraciones, probablemente la distinción más importante que se puede hacer es entre 1) las personas/cosas de las que hablamos, y 2) qué es lo que tenemos que decir sobre estas personas/cosas. Considera lo siguiente:

EJEMPLO:

Juan se rio.

Juan es hablador.

Juan está en Francia.

A Juan le gusta María.

Juan se estudia con frecuencia en los textos de lógica.

Las cinco oraciones son sobre Juan, aunque cada una dice algo diferente sobre él. Si eliminamos el nombre de *Juan* de cada oración, lo que nos queda es lo que dice cada frase sobre Juan:

__________ Se rio.
__________ es hablador.
__________ está en Francia.
A __________ le gusta Mary.
__________se estudia con frecuencia en los textos de lógica.

Por supuesto, podemos crear un lote completamente nuevo de oraciones llenando cada uno de los huecos con un nombre, digamos *Antonia*:

Antonia se rio.
Antonia es habladora.
Antonia está en Francia.
A Antonia le gusta María.
Antonia se estudia con frecuencia en los textos de lógica.

Estas oraciones ahora dicen de Antonia precisamente las mismas cosas que nuestras oraciones originales decían de Juan. Ni siquiera estamos limitados a los nombres cuando se trata de llenar los huecos, podemos usar cualquier **TÉRMINO SINGULAR,** es decir, una expresión que denota una persona, lugar o cosa individual.

EJERCICIO 1: Rellena los huecos con un término singular:

_____________________ se rio.
______________________ es habladora.
_________está en Francia.
Al ____________________ le gusta María.
___________________ se estudia con frecuencia en los textos de lógica.

Entonces podemos decir las mismas cosas sobre diferentes personas y cosas, pero ¿qué tiene que ver todo esto con predicados y constantes individuales? Es simple:

- Las **constantes individuales** corresponden a términos singulares, es decir, expresiones que denotan **personas, lugares y cosas individuales**.
- Los **predicados** corresponden **a lo que puedo decir sobre constantes individuales**: las oraciones con "huecos" en ellas.

Para representar las constantes individuales usaremos letras minúsculas:

---

juan : Juan

antonia : Antonia

maria : María

Representaremos predicados usando letras mayúsculas seguidas de un par de paréntesis:

Rio () : __ se rio

Hablador () :__ es hablador/a

Francia () :__ está en Francia

Gusta_maria () :__ le gusta María

Estudia_logica () :__ se estudia con frecuencia en los textos de lógica

---

Ahora ya podemos representar las oraciones. Todo lo que tenemos que hacer es insertar la constante adecuada en el espacio del predicado apropiado. Empecemos por simbolizar nuestro primer lote de oraciones sobre Juan:

Juan se rio.	Rio (juan)
Juan es hablador.	Hablador (juan)
Juan está en Francia.	Francia (juan)
A Juan le gusta María.	Gusta_maria(juan)
Juan se estudia con frecuencia en los textos de lógica.	Estudia_logica(juan)

EJERCICIO 2: Simboliza las constantes y las oraciones que has construido en el ejercicio 1.

Hay una cosa que quizás te estés preguntando en este momento. Hemos dicho que las constantes individuales corresponden a términos singulares, y los predicados corresponden a las propiedades que podemos atribuir a los individuos, y sin embargo tenemos un término singular, *María* , que aparece "dentro" de uno de nuestros predicados. ¿No podríamos también hacer otro agujero en el predicado donde aparece el nombre *María* ? Sí que podemos:

A _____ le gusta _____

Sin embargo, solo hay un problema posible con esto, y es que no hemos hecho ninguna distinción entre estos dos huecos. Considere el siguiente par de oraciones:

Al dentista de María le gusta María.

A María le gusta el dentista de María.

Estas dos oraciones significan cosas diferentes y, por lo tanto, puede suceder que una sea verdadera y la otra falsa. Si no hiciéramos distinción entre los dos huecos, entonces terminaríamos con una situación en la que no podríamos distinguir la diferencia entre las traducciones de las dos oraciones y, por lo tanto, no podría determinar con precisión su verdad o falsedad. Como no queremos que esto suceda, tendremos que hacer una distinción entre los "huecos" en los predicados. Para ello, usaremos las letras minúsculas de la ***u*** a la ***z***, en lugar de los espacios en blanco que hemos estado usando hasta ahora. Por lo tanto, deberíamos reescribir nuestra traducción para nuestros predicados de arriba como sigue:

Rio (x) : x se rio

Hablador (x) : x es hablador/a

Francia (x) : x está en Francia

Gusta_maria (x) : x le gusta María

Estudia_logica (x) : x se estudia con frecuencia en textos de lógica

Debemos tener en cuenta aquí que esta forma de traducción ***no*** forma parte de la lógica de predicados. Es solo una estrategia informal que usamos para realizar un seguimiento de la forma en que simbolizamos las expresiones del lenguaje natural, o la forma en que estamos interpretando los predicados. Si bien parte de ella puede parecer similar a la expresiones de la lógica de predicados, es importante tener en cuenta que no lo es.

Volviendo a los predicados con más de un hueco, como x le gusta y, podemos simbolizar estos de la siguiente manera:

L (x, y) : x le gusta y

Hemos distinguido los dos huecos usando una letra diferente para cada uno, para no mezclar el me gusta y lo gustado:

L (d, m) : Al dentista de María le gusta María

L (m, d) : A María le gusta el dentista de María

Por supuesto, es posible que las personas se gusten a sí mismas, por lo que siempre podríamos llenar ambos espacios con la misma constante individual:

L (m, m) : A María le gusta María / ella misma

2.2 Cuantificadores y variables individuales

Considere la siguiente oración:

A todo el mundo le gusta María.

Si quisiéramos intentar representar esta oración usando solo un predicado y constantes individuales, lo primero que necesitaríamos saber es quiénes son ***todo el mundo*** *(o todos)* . Supongamos un grupo de personas sentadas en una mesa en un restaurante, un grupo formado por María, Juan, Humberto, la directora del banco y el dentista de María. Usando las mismas constantes individuales para cada persona como hicimos antes, entonces podríamos representarlo así:

(((Gusta_maria (maria, maria) & Gusta_maria (juan, maria)) & Gusta_maria (humberto, maria)) & Gusta_maria (directora_banco, maria)) & Gusta_maria (dentista, maria)

Del mismo modo, si estuviéramos hablando del mismo grupo, pero quisiéramos representar la oración:

A alguien le gusta María

podríamos usar la misma técnica básica, usando solo disyunción en lugar de conjunción:

(((Gusta_maria (maria, maria) v Gusta_maria (juan, maria)) v Gusta_maria (humberto, maria)) v Gusta_maria (directora_banco, maria)) v Gusta_maria (dentista, maria)

Este método es muy engorroso cuando el número de personas es muy elevado, y además es imposible usarlo cuando estamos hablando de un número infinito de cosas. Considere las siguientes oraciones:

Todos los números pares son divisibles por dos.

Algunos números pares son primos.

Ningún número es tanto par como impar.

Si queremos ser capaces de representar oraciones como la anterior que involucran términos cuantitativos como *todas/os* , *algunas/os* , *alguien* , *ninguna/o* , *nadie* , etc., vamos a necesitar algo más que constantes individuales. Aquí, por supuesto, es donde entran en **juego los CUANTIFICADORES** y **VARIABLES INDIVIDUALES**.

Comenzamos por las *variables individuales*. Hasta ahora solo hemos usado *constantes individuales*, como un nombre u otro término singular. Cada una de ellas designa un elemento *particular*. Una variable individual, por otro lado, no designa un elemento, sino que **TOMA COMO VALOR** cualquier elemento considerado. Por lo tanto, las variables individuales se parecen mucho a los pronombres (él, ella, eso) del lenguaje natural, en que estas expresiones pueden tomar diferentes valores en diferentes ocasiones de uso. Vamos a usar las letras minúsculas (de la *u* a la *z*) como variables individuales.

Por su parte, los *cuantificadores* representan términos asociados a *cantidad* en lenguaje natural. Estos términos tienes dos funcione: 1) indicar de *cuántos* elementos estamos hablando; 2) junto con un predicado nos describen lo que estamos diciendo acerca de los elementos seleccionados en 1).

Los dos símbolos cuantificadores que usaremos son $\forall$ y $\exists$. Usamos $\forall$ para indicar que estamos hablando de *todos* o *cada* elemento en consideración, y $\exists$ para indicar que estamos hablando de *algún* elemento bajo consideración, es decir, *al menos uno* de los elementos, posiblemente más. Para hacer un cuantificador, combinamos uno de estos símbolos cuantificadores con una variable individual. Por tanto, $\forall$x, $\exists$x, $\forall$y, $\exists$y son todos cuantificadores. Llamaremos cuantificadores **UNIVERSALES** a los cuantificadores que contienen $\forall$, y cuantificadores **EXISTENCIALES** a los que contienen $\exists$. Esto explica cómo logramos el primer punto anterior: indicar de *cuántos* elementos estamos hablando.
Para el segundo punto - vincular lo anterior con el predicado- es donde entran en juego las variables. Usamos la misma variable individual que la contenida en el cuantificador para completar el lugar apropiado en el predicado con el fin último de indicar lo que estamos diciendo acerca de las cosas seleccionadas por el cuantificador. Ejemplos:

$\forall$x **L**(x, m) : A todos les gusta María

$\exists$y **L**(y, m) : A alguien le gusta María

$\forall$x ¬**L**(x, m) : A nadie le gusta María

2.4 Sintaxis formal de la lógica de predicados

Resumiendo, las expresiones básicas del lenguaje de la lógica de predicados son las siguientes:

1. **Términos**, que hacen referencia a objetos. Pueden ser:
   a. **Símbolos constantes,** que hacen referencia a objetos específicos.
   b. **Variables,** que hacen referencia a algún objeto inespecífico que será determinado por los cuantificadores.
   c. **Funciones,** que se pueden aplicar a un conjunto de argumentos que son, a su vez, términos.
2. **Fórmulas**, que hacen referencia a valores de verdad. Pueden ser:
   a. **Fórmulas atómicas,** que son predicados aplicados a términos. Por ej.,
      Sabe (maria, logica)
   b. **Conectivas aplicadas a fórmulas**. Por ej.,
      Amiga/o (carlos, maria) -> Amiga/o (maria, carlos)
   c. **Cuantificadores aplicados a fórmulas.** Por ej.,
      ∀x Estudiante_4GrEI (x) -> Sabe (x, logica)

      El conector principal del cuantificador universal (∀) suele ser -> (como en el ejemplo anterior). El conector principal del cuantificador existencial () suele ser &. Por ejemplo, existen humanos que son jóvenes:

      ∃x Humano(x) & Joven(x)

EJERCICIO 3: ¿Qué significa la siguiente expresión?:

∀x Estudiante_4GrEI (x) & Sabe (x, logica)

EJERCICIO 4: ¿Para qué casos se verifica la siguiente expresión?:

∃x Humano(x) -> Joven(x)

EJERCICIO 5: ¿Significa lo mismo las siguientes expresiones? Explica por qué intentado traducirlo a lenguaje natural. Pista: expresa en lenguaje natural "Quiere(nacho,laura)", comenzando la frase por "nacho". Repite comenzando la frase por "laura" (y manteniendo el significado de quien quiere a quien).

∀x ∀y Quiere (x,y)

∀y ∀x Quiere (x,y)

EJERCICIO 6: ¿Significa lo mismo las siguientes expresiones? Explica por qué intentado traducirlo a lenguaje natural.

$\forall x \; \exists y$ Quiere (x,y)

$\exists y \; \forall x$ Quiere (x,y)

EJERCICIO 7: ¿Significa lo mismo las siguientes expresiones? Explica por qué intentado traducirlo a lenguaje natural.

$\forall x$ Gustar(x,Helado)

$\neg \exists x \; \neg$Gustar(x,Helado)

EJERCICIO 8: Convertir las siguientes sentencias a LPO.

- Luis es un pescado
- América le compró Alaska a Rusia
- Juan colecciona de todo

Ten en cuenta las diferentes formas de expresar en castellano:

- **Todo** para cosas: cualquier cosa, todas las cosas, cualquiera
- **Todo** para personas: cualquiera, todo el mundo, cada uno, quienquiera
- **Alguno** (al menos uno) para cosas: algo
- **Alguno** (al menos uno) para personas: alguien, alguno
- **Ninguno** para cosas: nada
- **Ninguno** para personas: nadie, ninguno

EJERCICIO 9: Convertir las siguientes sentencias a LPO

- Alguien colecciona algo
- Todos los zapatos cerrados están permitidos
- Ningún zapato cerrado está permitido
- Los zapatos cerrados están permitidos
- Nadie colecciona cualquier cosa
- Cualquiera no colecciona algo
- Cualquier buen amateur puede vencer a algún profesional
- Algunos profesionales pueden vencer a todos los amateur
- Los coleccionistas coleccionan las cosas de valor

EJERCICIO 10: Convertir las siguientes sentencias que conforman una base de conocimiento a LPO:

Lucio era un hombre

Lucio era un Herculano

Todos los Herculanos eran Romanos
César era un líder.
Todos los Romanos eran o leales a César o lo odiaban.
Todo el mundo es leal a alguien.
Los hombres solo intentan asesinar a los líderes a los que no son leales.
Lucio intentó asesinar a César.

EJERCICIO 10: ¿Puedes responder a las siguientes preguntas con la base de conocimiento anterior? Explica tu respuesta.

- ¿Era Lucio un Romano?
- ¿Era Lucio leal a César?
- ¿A quién era Lucio leal?
- ¿Era Marcos un líder?
- ¿Será el examen fácil?

EJERCICIO 11: Usando los predicados Padre(x,y), Madre(x,y), Hermano(x,y), Hermana(x,y), definir en lógica de predicados las siguientes relaciones:

Abuelo (x,y)
Abuela (x,y)
Tío (x,y)
Primo (x,y)