Representación de Conocimiento mediante Lógica de Proposiciones

1 Introducción

La **SINTAXIS** de un lenguaje viene dada por las reglas que determinan el conjunto de expresiones que se dice que *pertenecen* al lenguaje; es decir, las reglas que te dicen cómo combinar expresiones gramaticales del idioma para obtener nuevas expresiones gramaticales. La gramática del español nos dice cómo combinar palabras y frases del español para hacer expresiones más complejas, *oraciones*. Análogamente, la sintaxis formal de la lógica *proposicional* nos dice cómo combinar expresiones simples para elaborar expresiones más complejas, *fórmulas lógicas*. Mirándolo de otro modo, la sintaxis formal de la lógica *proposicional* también nos permite determinar, para cualquier expresión, si la expresión es o no una fórmula sintácticamente bien formada de la lógica *proposicional*.
En esta tarea interactiva, vamos a repasar la gramática de la lógica *proposicional,* y a reconocer y expresar la forma lógica de las oraciones en castellano, que a su vez nos permitirá traducir oraciones del castellano a fórmulas de lógica *proposicional* y viceversa.

Objetivos de la sesión:

- Comprender la estructura lógica de las oraciones en castellano.
- Aprender a simbolizar, es decir, a traducir oraciones en español a fórmulas de lógica *proposicional*.
- Repasar la gramática formal de la lógica *proposicional*.

1.1 Fórmulas atómicas y conectivas lógicas

Una de las primeras cosas que has aprendido sobre la gramática española/gallega en la escuela fueron las diferentes categorías de palabras, como sustantivos, verbos, adjetivos, etc. Vamos a comenzar exactamente de la misma manera con la sintaxis de la lógica proposicional.

Recordarás que en la lógica proposicional sólo hay dos categorías diferentes de palabras o palabras básicas: **FÓRMULAS ATÓMICAS** y **CONECTIVAS LÓGICAS**.

- Las **fórmulas atómicas** son fórmulas que no tienen partes interesantes, al menos desde nuestro punto de vista. Corresponden a ciertos tipos de oraciones en español/gallego (o cualquier otro idioma). En concreto, a oraciones que hacen afirmaciones o declaraciones expresas. Una afirmación es una oración que puede ser Verdadera o Falsa. Ejemplos son: "Está lloviendo", "Hoy es martes".
- **Las conectivas lógicas**, por otro lado, sirven para *conectar* fórmulas y crear fórmulas *nuevas* y más complejas. En nuestro sistema de lógica oracional, tenemos cuatro conectivas lógicas, llamados **CONJUNCIÓN ('y')**, **DISYUNCIÓN ('o')**, **CONDICIONAL (**'si ... entonces ....') Y **NEGACIÓN** ('no').

EJERCICIO 1: Sean las siguientes oraciones

---

1. Juan salió a correr.

2. María se rió.

3. Javi dijo que María se rió.

4. Juan piensa que María se rió de su carrera.

5. Juan salió a correr y María se rió.

6. O Juan salió a correr o María se rió.

7. Si María se reía, Juan salía a correr.

8. Juan no salió a correr.

9. Para qué seguir.

10: Que nadie sepa mi sufrir.

1.1 ¿Cuáles de estas oraciones son afirmaciones o declaraciones expresas (es decir, proposiciones?

1.2 ¿De las proposiciones, cuáles son oraciones atómicas y cuáles no?

1.3 Compara las oraciones 3 y 5. ¿Es necesario saber si se verifica la oración 2 para determinar si son verdaderas/falsas?

2 Fórmulas compuestas y simbolización

2.1 Conjunción

Ya hemos visto un ejemplo de conjunción en castellano:

Juan salió a correr y María se rió.

Aquí tenemos dos oraciones atómicas, conectadas por una conjunción 'y' entre ellas. Si reemplazamos la palabra 'y' con el símbolo & en la oración anterior, obtenemos lo siguiente:

Juan salió a correr & María se rió.

Ahora estamos a medio camino de haber simbolizado nuestra primera oración. Lo único que queda es determinar qué hacer con las oraciones atómicas, que llamamos **CONJUNTOS**, ya que están conectadas por una conjunción. Para simbolizar los conjuntos, dejaremos que una sola letra mayúscula represente cada conjunto, lo que nos da la siguiente traducción:

J & M

Podríamos usar cualquier letra mayúscula que nos guste para representar cada oración atómica, pero es tradicional (y puramente convencional) para elegir una letra que tenga alguna relación con la oración correspondiente. Aquí fuimos con la primera letra del nombre de la persona mencionada en cada oración, pero podríamos haber usado la primera letra del verbo también:

C & L

Eso es prácticamente todo lo que hay para simbolizar una conjunción simple como esta. Reemplazamos la palabra 'y' con su símbolo & y simbolizan cada uno de los conjuntos, las oraciones atómicas, con una sola letra mayúscula cada una. Entonces, ¿eso es todo lo que hay en las conjunciones? Ni por asomo. Como bien sabes, las conjunciones pueden presentarse de muchas formas. Considera lo siguiente:

1. El gato bostezó y se estiró.

2. Hemos alimentado al gato y al perro.

Ambas oraciones contienen la palabra 'y', por lo que deben contar como conjunciones, en lugar de oraciones atómicas, ¿verdad? Correcto. Sin embargo, no consisten en dos oraciones atómicas pegadas con el palabra 'y', por lo que no está claro cómo debemos simbolizarlos. El truco con frases como estas es parafrasearlos, ponerlos en la forma de dos oraciones atómicas unidas por la palabra 'y':

1. El gato bostezó y el gato se estiró.

2. Hemos alimentado al gato y hemos alimentado al perro.

Ahora está claro cómo podemos simbolizarlos:

B & E

G & P

Genial, así que cada vez que vemos la palabra 'y' sabemos que tenemos una conjunción en nuestras manos, podríamos simplemente reescribir las frases como antes,
¿verdad? Desafortunadamente, no es tan simple.

EJERCICIO 2: Sea la siguiente oración. Intenta parafrasearla de la misma manera que hicimos con las oraciones anteriores. ¿Es la paráfrasis resultante correcta? Explica por qué. Como resultado, ¿es una oración atómica o compuesta?

Dos bolas de helado de vainilla y una ración abundante de sirope de chocolate es un helado riquísimo.

EJEMPLO:

1. El gato duerme, pero el perro persigue su cola.

2. Aunque el gato está afilando sus garras en el perro, el perro duerme profundamente.

3. El gato ronronea, aunque el perro aúlla.

4. María acaba de llevar al perro al veterinario; sin embargo, la cita del perro es mañana.

5. A María le gustan los gatos, mientras que a Juan le gustan los perros.

Cada una de estas oraciones consta de dos oraciones atómicas conectadas entre sí por alguna palabra que no es 'y.' Si parafraseamos cada oración quitando esa palabra y pegando 'y' entre las dos oraciones atómicas, las paráfrasis tienen el mismo significado funcional de verdad que las oraciones originales, aunque quizás se pierdan algunas de las sutilezas (no funcionales de la verdad) de los originales:

1. El gato duerme y el perro persigue su cola.

2. El gato está afilando sus garras en el perro y el perro duerme profundamente.

3. El gato ronronea y el perro aúlla.

4. María acaba de llevar al perro al veterinario y la cita del perro es mañana.

5. A María le gustan los gatos ya Juan le gustan los perros.

La moraleja aquí es que las conjunciones no siempre contienen la palabra 'y', aunque siempre constan de dos oraciones conectadas entre sí por medio de alguna palabra o frase que, cuando se reemplaza por 'y' da como resultado una paráfrasis que es verdad-funcionalmente equivalente en significado-, aunque es posible que se pierda parte de la sutileza original.

2.2 Disyunción

Identificar conjunciones puede ser un poco complicado, ya que tenemos que buscar más palabras además de 'y', además de no siempre poder contar con que alguna oración sea una conjunción solo porque la palabra 'y' aparece en ella. Las disyunciones son un poco más fáciles: la única palabra que debe buscar es 'o' más la ocasional 'o' junto con ella (es decir, la frase 'o ... o ...').

EJEMPLO:

O Juan salió a correr o María se rió.

Para simbolizar esta oración, tomaremos el mismo enfoque que hicimos con la conjunción, primero reemplazando la frase lógica con un símbolo. Para la disyunción usamos el símbolo $\vee$

Juan salió a correr $\vee$ María se rió.

Observará aquí que tanto la palabra 'o' entre las dos oraciones como la palabra 'o bien' delante de ellas se eliminan de la oración cuando simbolizamos el conectivo. Todo lo que nos queda por hacer ahora es simbolizar las oraciones atómicas, que en este caso llamamos **DISYUNTOS** , ya que están conectadas por una disyunción:

J ∨ M

EJERCICIO 3: Sean las siguientes oraciones. Intenta parafrasearla de la misma manera que hicimos con las oraciones anteriores. ¿La última oración se puede interpretar de formas diferentes? Explícalo.

---

1. O Juan o María se rieron.
2. María se rió o estornudó.
3. Dos bolas de helado de vainilla o una abundante porción de sirope de chocolate forman un helado riquísimo.
4. O María comprará helado o Juan comprará helado.

2.3 Condicionales

En castellano, la frase 'si ... entonces ...' conecta dos oraciones juntas para formar una oración **CONDICIONAL**.

EJEMPLO:

Si Juan lloraba, Mary se reía.

Podemos simbolizar esta oración de la siguiente manera:

J -> M

La oración 'si', que aparece a la izquierda del símbolo **->** se llama **ANTECEDENTE** , y la oración 'entonces', que está a la derecha, se llama **CONSECUENTE** . Así, en el ejemplo anterior, la oración **J** es el antecedente y **M** es el consecuente del condicional J->M.

Los condicionales, como las conjunciones, pueden ser un poco complicados, ya que pueden disfrazarse de varias maneras.

EJERCICIO 4: Sean las siguientes oraciones. Intenta parafrasearla de la misma manera que hicimos con las oraciones anteriores. Una vez que finalices, ¿qué te resulta curioso? Explícalo.

---

1. **María se reía, siempre que Juan lloraba.**
2. **Dado que Juan lloró, María se rió.**
3. **María se reía si Juan lloraba.**
4. **Juan lloraba solo si María se reía.**

Hoy en día, un buen número de filósofos y lógicos aún debaten sobre cómo interpretar condicionales. Más que profundizar en este debate aquí, sólo vamos a adoptar el punto de vista tradicional de que un enunciado condicional es verdadero si su antecedente es falso o si su consecuente es cierto.

2.4 Negación

Nuestro conectivo final es la negación. Puede parecer un poco extraño llamar a la negación un *conectivo* , ya que solo 'conecta' una oración. De hecho, llamamos negación a un conectivo **UNARIO** por esta misma razón, mientras que los otros conectivos se llaman todos **BINARIOS**, ya que conectan *dos* oraciones.

Ya hemos visto un ejemplo de negación en castellano:

Juan no lloró.

La negación es un poco diferente de las conjunciones, disyunciones y condicionales en que tiende a ocurrir en la mitad de las oraciones en castellano. Esto no solo hace que sea un poco difícil ver cómo simbolizar negaciones, también puede hacer que sea un poco difícil clasificar con precisión lo que se niega. Una vez más, tenemos un truco de paráfrasis que puede ayudar en ambos aspectos:

No sucedió que Juan llorase.

Si compara esta paráfrasis con nuestra oración original, está claro que el significado funcional de verdad se conserva, pero nuestra oración está ahora en una forma mucho más reconocible desde el punto de vista de la simbolización. Tomando nuestro frase atómica original 'Juan lloró' y pegar la expresión 'no sucedió que' delante de ella, más bien que pegar 'no' en el medio, terminamos con una paráfrasis que conserva la forma de la original.

Reemplacemos la expresión 'no sucedió que' con nuestro símbolo de negación, '¬':

¬Juan lloró.

Ahora está claro que todo lo que nos queda por hacer es simbolizar nuestra oración atómica como de costumbre:

¬J

EJERCICIO 5: Sean las siguientes oraciones. Intenta parafrasearla de la misma manera que hicimos con la oración anterior, utilizando la expresión 'no sucede que'/'no ocurre que'. Una vez que finalices, ¿has podido hacerlo en todos los casos? Explícalo.

---

1. El gato es *infeliz*.

2. El abogado de María es *deshonesto* .

3. Los contagios son *infrecuentes*.

4. María está *desconcertada*.

2.5 Combinación de Conectivas

EJERCICIO 6: Sean las siguientes oraciones. 1) Intenta parafrasearla de la misma manera que hicimos con las oraciones anteriores. ¿Cuál es el conectivo principal de la oración completa? Explica por qué. Una vez que finalices, ¿has podido hacerlo en todos los casos? Explícalo.

---

1. Belén dará de comer a los patos o dará de comer a las gallinas y recogerá sus huevos.

2. Si Belén recoge huevos, entonces no dará de comer a las gallinas o no dará de comer a los patos.

3. Lloverá y granizará o nevará.

Antes de proceder a revisar la sintaxis formal de la lógica proposicional, vamos a chequear una forma de expresar el sentido exclusivo de disyunción en términos del sentido inclusivo, una forma que corresponde a la frase `` cualquiera, pero no ambos ''.

O María comprará helado o Juan comprará helado.

Esta es la simbolización de la lectura exclusiva de esta oración:

(M ∨ J) & ¬ (M & J)

EJERCICIO 7: ¿Es esta simbolización correcta?. Chequéalo aplicando Morgan para el OR exclusivo (o EXOR).

2.6 Sintaxis formal

Todo lenguaje formal se define especificando las piezas más simples del lenguaje (primitivas) junto a todas las reglas que permiten crear nuevas expresiones combinando otras más sencillas. Las primitivas son:

- Las letras mayúsculas que usamos para simbolizar oraciones simples, llamadas simplemente **FÓRMULAS ATÓMICAS** : P , Q , R , F , G , etc.
- Los símbolos de las conectivas lógicas: & , ∨, ->, ¬
- Los paréntesis *()* que usamos como puntuación para dejar claro el alcance de los conectivos.

Las reglas que permiten crear nuevas expresiones combinando otras más sencillas son las expresiones gramaticales de la lógica proposicional; es decir, el conjunto de **FÓRMULAS BIEN FORMADAS** sintácticamente, o, simplemente, **FÓRMULAS.** Vamos a utilizar *letras mayúsculas*, como ***P*** y ***Q*** como **VARIABLES** que cubren el conjunto de todas las fórmulas de lógica proposicional. Las formatearemos de manera diferente a las letras de las fórmulas atómicas para distinguirlas.

El conjunto formal de reglas para nuestro lenguaje de lógica proposicional es el siguiente:

---

1. Cada letra ***P*** es una fórmula bien formada de la lógica de proposiciones.

2. Si ***P*** es una fórmula bien formada de la lógica de proposiciones, entonces también lo es ¬ ***P*** .

3. Si ***P*** y ***Q*** son fórmulas bien formadas de la lógica de proposiciones, entonces también lo son cada una de las siguientes:

- (***P*** & ***Q***)
- (***P*** ***V*** ***Q***)
- (***P*** -> ***Q***)

4. Ninguna expresión es una fórmula bien formada de la lógica de proposiciones a menos que siga una (o más de una) de las tres primeras reglas.

Como puede ver, la definición de estas reglas no dice nada sobre lo que significan estas expresiones. Esto se debe a que las reglas anteriores son reglas estrictamente sintácticas.

A continuación, veremos algunas reglas que necesitamos saber para insertar paréntesis en una fórmula en que algunos de los paréntesis hayan sido omitidos. Aquí está ese procedimiento:

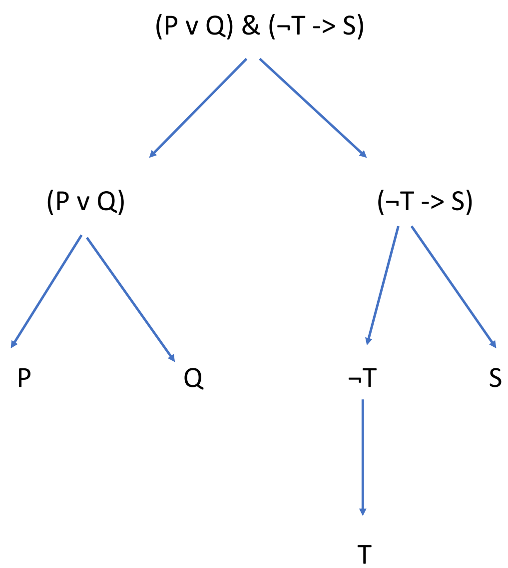
1. Primero inserte un par de paréntesis por cada aparición de &, englobando los dos conjuntos que une. Comience con el & que se encuentre más a la derecha de la expresión.
2. Luego inserte paréntesis de la misma manera para ***V***
3. Por último, inserte paréntesis para ->.
4. Los paréntesis de la derecha nunca deben insertarse dentro de otro par de paréntesis, es decir, no dividas un par de paréntesis existente.

EJERCICIO 8: Aplica el procedimiento anterior a las expresiones siguiente, mostrando detalladamente los diferentes pasos.

---

1. ¬A & B ***V*** C
2. A -> B –> C & D

La estructura interna de una expresión de lógica proposicional puede representa gráficamente mediante un **ÁRBOL**, que permite comprobar si la expresión está bien formada o no. Por ello, son una herramienta sintáctica importante. A continuación, se pone un ejemplo de árbol de análisis sintáctico.



3 Ejercicios globales del tema

3.1 **Ejercicio G1**

Usando las siguientes correspondencias de simbolización

B: Belén está jugando a las cartas.

C: Belén está programando en C.

D: Belén está programando en Python.

P: Python se está actualizando.

Simbolice cada una de las siguientes oraciones:

i. Belén está jugando a las cartas y Python se está actualizando.

ii. Si Belén está programando en Python y Python se está actualizando, entonces Belén está jugando a las cartas.
iii. O Belén está jugando a las cartas o Belén está programando en C y Python se está actualizando.
iv. Si Python se está actualizando, entonces Belén está programando en C o Belén está jugando a las cartas.
v. Belén no está programando en Python y Belén no está jugando a las cartas.
vi. Ni Belén está programando en Python, ni Python se está actualizando.
vii. Si Python se está actualizando, entonces Belén no está programando en Python.

3.2 **Ejercicio: G2**

Usando las siguientes correspondencias de simbolización

B: Belén está jugando a las cartas.
C: Belén está programando en C.
D: Belén está programando en Python.
F : Belén está depurando el programa.
P : Python se está actualizando.
Q : Python se ha colgado.
S : C se está actualizando.

Simbolice cada una de las siguientes oraciones, parafraseándolas primero si es necesario:

i. Belén está programando en C o en Python.
ii. Belén está programando en C y en Python, y si Python se ha colgado, entonces no se está actualizando.
iii. Si Python se está actualizando, entonces o Belén está programando en C o está jugando.
iv. Belén no está programando en C, pero está jugando a las cartas y C se está actualizando.
v. Python y C se están actualizando y Belén está jugando a las cartas.
vi. Si Belén está jugando a las cartas, entonces no está programando en C ni en Python.
vii. Si Belén no está jugando a las cartas, entonces está programando en C o en Python.
viii. Python no se está actualizando, pero C sí.

3.3 **Ejercicio: G3**

Para cada una de las siguientes oraciones, proporcione una traducción al castellano de acuerdo con la simbolización del ejercicio anterior:

i. S & (P & Q)

ii. F v (B y Q)

iii. ¬F ((C y D) B)

iv. ¬ (C v D)

v. ¬ (P & S)

vi. ¬S->C

vii. ¬P -> (¬D->Q)

viii. (C & D) & (B v F)

ix. ¬S v P

x. D -> (P v ¬Q)

3.4 **Ejercicio: G4**

Para cada una de las siguientes expresiones de lógica proposicional, determine si es o no un fórmula, y si no es así, explique por qué no.

i. P & ¬Q

ii. P ¬ & Q

iii. P & Q ¬

iv. P-> Q ¬S

v. v P-> Q

vi. ¬ (C v)

vii. P v ¬ (Q->R)

viii. (P & Q) v ¬ (R->Q)

ix. (P v Q) & R

X. PQ v R

3.5 **Ejercicio: G5**

Inserte los paréntesis que faltan en cada una de las siguientes fórmulas.

i. A->B & ¬K v D & E

ii. A & B & D->C v E ->¬M

iii. T & D v E v F v H->L->R

iv. P-> Q-> R-> S-> T & M v N

v. ¬A & B & C v D->E->F

3.6 Ejercicio: G6

Construya un árbol de análisis sintáctico para cada una de las siguientes fórmulas.

i. (P & (Q v R)) v ¬P

ii. P v (R v (T v (Q & S)))

iii. ((A & ¬P) v Q) v (S -> (¬L & T))

iv. (A & B) -> ¬ (D v (E ->¬F))

v. (((P & Q) & R) & (T v N)) -> G