UNIDAD II VECTORES ALEATORIOS BIVARIADOS

1. VECTORES ALEATORIOS BIVARIADOS

Definición de Vector Aleatorio

Supóngase que se tiene un fenómeno aleatorio que involucra n variables aleatorias, $X_1, \ldots, X_n$ cuyo comportamiento se desea modelar. Estas variables aleatorias están definidas sobre un espacio de probabilidad común y conforman de manera conjunta un volumen en el espacio n dimensional.

Se dice que $(X_1, \ldots, X_n) = \vec{\mathrm{X}}$ es un vector aleatorio definido en un espacio de probabilidad n dimensional y el objetivo es asignar a los eventos que forman parte de la σ-algebra de interés (subconjuntos de $\mathbb{R}^n$), una medida de probabilidad.

Un ejemplo de este tipo de fenómeno sería un grupo de alumnos en el que se observan simultáneamente su edad, sus calificaciones y la asistencia a clase. Otro ejemplo sería una sala de cómputo en la que se observan simultáneamente los tiempos de ocupación de las computadoras y la duración de sus componentes.

Los vectores aleatorios pueden clasificarse como:

1. Discretos: Si las n variables aleatorias que los constituyen son todas discretas.
2. Continuos: Si las n variables aleatorias que los constituyen son todas continuas.
3. Mixtos: Si están constituidos tanto con variables aleatorias discretas como con continuas.[1]

Como en el caso de variables aleatorias unidimensionales, la definición de función de densidad no es la misma en el caso discreto que en el continuo, pero la función de distribución sí puede definirse de manera indistinta.

LA FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA Y SUS PROPIEDADES

La función de distribución conjunta de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$, definidas sobre un espacio de probabilidad común, está definida como:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n], \ \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Es decir, la función de distribución conjunta asigna una medida de probabilidad al volumen definido por la intersección de intervalos $(-\infty, x_i)$ de las n variables aleatorias que conforman el espacio de probabilidad. Es una función con dominio el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ y contradominio el intervalo [0,1].

[1] Los vectores aleatorios mixtos quedan fuera del alcance de este curso.

Las propiedades de la función de distribución son las siguientes:

i) $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \leq 0,\ \ \forall(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\lim\limits_{X_i \to \infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = 0,\ \ \forall i = 1,\dots,n$.

iii) $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ es continua por la derecha de cada variable aleatoria.

De acuerdo a la competencia indicada para esta unidad, en adelante se hará referencia únicamente a vectores bivariados, es decir, se considera n=2, denotando las variables aleatorias como X y Y (léase equis y ye).

A continuación, se explicará primero lo referente a las funciones de densidad y distribución de vectores aleatorios discretos y posteriormente se explicará lo correspondiente a las vectores aleatorios continuos.

VECTORES ALEATORIOS DISCRETOS

Un vector aleatorio bivariado $\vec{V} = (X, Y)$ es discreto si puede asumir únicamente un número contable de puntos (x, y) en el espacio real $\mathbb{R}^2$, donde la variable aleatoria X puede tomar los valores $\{x_1, x_2, \dots\}$ y la variable aleatoria Y puede tomar los valores $\{y_1, y_2, \dots\}$ en un mismo espacio de probabilidad, entonces se dice que las variables aleatorias discretas X y Y se distribuyen conjuntamente.

FUNCION DE DENSIDAD CONJUNTA

La función de densidad conjunta del vector aleatorio discreto $\vec{V} = (X, Y)$ se define como:

$$f_{X,Y}(x,y) = P[X = x, Y = y],\ \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Las propiedades de la función de densidad conjunta discreta son las siguientes:

$i)\ f_{X,Y}(x,y) \geq 0,\ \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$ii)\ \{(x,y) | f_{X,Y}(x,y) > 0\}$ es un conjunto contable de $\mathbb{R}^2$.

$$iii)\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$$

Es decir, la función de densidad conjunta asigna una medida de probabilidad a cada punto (x,y) del espacio real $\mathbb{R}^2$, siendo mayor que cero sólo en los puntos que el vector aleatorio puede asumir (resultados posibles).

Cuando el conjunto de puntos (x,y) que representa los resultados posibles del vector aleatorio es finito, se puede utilizar un arreglo para denotar la función de densidad conjunta de las variables X y Y, en el entendido que la función de densidad solo es positiva para los pares (x,y) que aparecen en dicho arreglo, siendo cero en cualquier otro caso.

Ejemplos:

1. Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x.y)=\begin{cases}0.05^{x+y+2}, & x=0,1,\ldots,y=0,1,\ldots\\ 0, & e.o.c.\end{cases}$$

Para demostrar que esta función cumple con las propiedades de una función de densidad conjunta se tiene que:

$i)$ $f_{X,Y}(x.y)\geq 0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ya que es cero para todo punto de $\mathbb{R}^2$, excepto para los pares {(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),…} donde toma el valor $0.05^{x+y+2}>0$ por tratarse de un número positivo elevado a un exponente.

$ii)$ $f_{X,Y}(x.y)>0$ solamente en los pares {(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),…} que constituyen un conjunto infinito pero contable.

$$\text{iii)}\ \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}f_{X,Y}(x.y)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}0.05^{x+y+2}=\sum_{x=0}^{\infty}0.05^{x+1}\sum_{y=0}^{\infty}0.05^{y+1}$$

$$=0.05^2\sum_{x=1}^{\infty}0.05^{x-1}\sum_{y=1}^{\infty}0.05^{y-1}=\frac{0.05^2}{0.05^2}=1$$

2. En las sesiones de seminario para los alumnos de una escuela se ofrece café y galletas y se ha observado que el consumo en kilogramos de estos alimentos tiene un comportamiento acorde con la siguiente función de densidad conjunta en la que la variable aleatoria X corresponde a kilogramos de café y la variable aleatoria Y, a kilogramos de galletas.

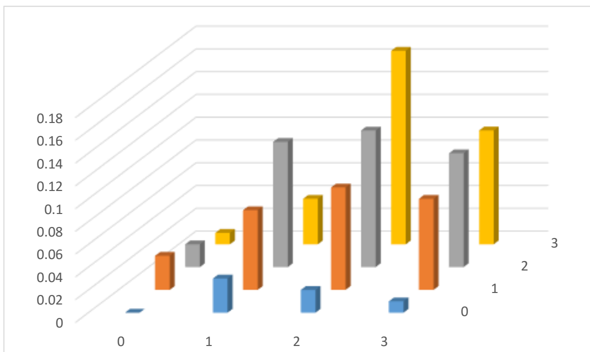
X \ Y	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0.00	0.03	0.02	0.01
1	0.03	0.07	0.11	0.04
2	0.02	0.09	0.12	0.17
3	0.01	0.08	0.10	0.10

De acuerdo con la función de densidad dada, los valores que puede asumir la variable aleatoria X son {0,1,2,3}, los valores que puede asumir la variable aleatoria Y son {0,1,2,3} y los valores que puede asumir el vector aleatorio $\vec{V}$ son {(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3)}.

La probabilidad de que se consuman un kilogramo de café y dos kilogramos de galletas está dada por $f_{X,Y}(1,1) = 0.11$, mientras que la probabilidad de que se consuman dos kilogramo de café y un kilogramo de galletas está dada por $f_{X,Y}(1,1) = 0.09$. Nótese que la suma de las probabilidades del arreglo es 1.

La probabilidad de cualquier otro punto que no esté en la tabla es cero (no es posible).

La gráfica en de esta función de densidad conjunta tendría un aspecto como se muestra a continuación:



•

FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA

La definición de esta función para el caso particular de un vector aleatorio bivariado discreto en términos de la función de densidad conjunta queda como sigue:

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{X,Y}(x_i, y_j), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Aunque esta función está definida para todo punto en $\mathbb{R}^2$, se puede utilizar un arreglo para definirla sólo en los puntos que toma el vector aleatorio.

Ejemplo:

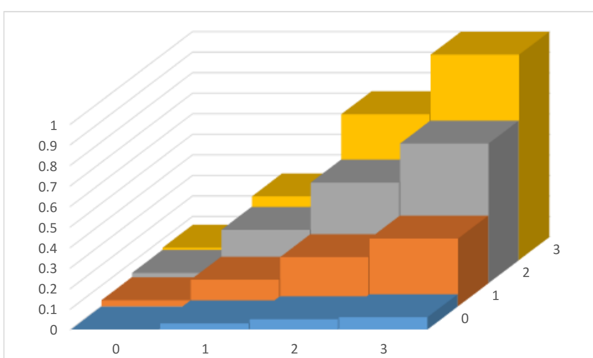
Considerando el vector aleatorio definido en el ejemplo anterior, la función de distribución conjunta para los puntos de $\mathbb{R}^2$ que asume el vector aleatorio toma los siguientes valores:

X \ Y	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0.00	0.03	0.05	0.06
1	0.03	0.13	0.26	0.31
2	0.05	0.24	0.49	0.71
3	0.06	0.33	0.68	1

Con base en estos valores, la función de distribución conjunta se define como sigue:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0 \text{ ó } -\infty < y < 0 \\ 0.00, \;\; 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 0.03, \;\; 1 \leq x < 2, 0 \leq y < 1 \\ 0.05, \;\; 2 \leq x < 3, 0 \leq y < 1 \\ 0.06, \;\; 3 \leq x, \qquad 0 \leq y < 1 \\ 0.03, \;\; 0 \leq x < 1, 1 \leq y < 2 \\ 0.13, \;\; 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2 \\ 0.24, \;\; 2 \leq x < 3, 1 \leq y < 2 \\ 0.33, \;\; 3 \leq x, \qquad 1 \leq y < 2 \\ 0.05, \;\; 0 \leq x < 1, 2 \leq y < 3 \\ 0.26, \;\; 1 \leq x < 2, 2 \leq y < 3 \\ 0.49, \;\; 2 \leq x < 3, 2 \leq y < 3 \\ 0.68, \;\; 3 \leq x, \qquad 2 \leq y < 3 \\ 0.06, \;\; 0 \leq x < 1, \qquad 3 \leq y \\ 0.31, \;\; 1 \leq x < 2, \qquad 3 \leq y \\ 0.71, \;\; 2 \leq x < 3, \qquad 3 \leq y \\ 1, \qquad 3 \leq x, \quad 3 \leq y \end{cases}$$

A continuación, se presenta la gráfica de esta función de distribución.



Nótese que esta función de distribución conjunta es positiva y escalonada para todos valores mayores a los mínimos que toman las variables aleatorias X y Y, cabe aclarar que los escalones se prolongarían hasta el infinito cuando $X \to \infty$ ó $Y \to \infty$.

•

LAS FUNCIONES DE DENSIDAD Y DISTRIBUCION MARGINALES

En algunas ocasiones, aunque el fenómeno observado involucra dos variables aleatorias y se conoce la función de densidad conjunta, nos interesa únicamente el comportamiento de una sola de estas dos variables, es decir, se deja al margen la otra variable. Entonces se puede obtener la función de densidad marginal de la variable de interés mediante:

$$f_X(x) = P[X = x] = \sum_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y) = P[Y = y] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)$$

Una vez que se tienen las funciones de densidad marginales, se pueden obtener las funciones de distribución marginales para cada variable de acuerdo a la definición habitual:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i]$$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \sum_{y_j \leq y} f_Y(y_j) = \sum_{y_j \leq y} P\left[Y = y_j\right]$$

Ejemplos:

1. Sean X y Y dos variables aleatorias cuya función de densidad conjunta está dada en la siguiente tabla:

X \Y	0.1	2	3.6	3.9
0.1	0	0	0.1	0.1
2.5	0	0.1	0.1	0.1
2.8	0.1	0.1	0.1	0.2

Para determinar la función de densidad marginal de X se procede como sigue:

$$f_X(0.1) = f_{X,Y}(0.1{,}0.1) + f_{X,Y}(0.1{,}2) + f_{X,Y}(0.1{,}3.6) + f_{X,Y}(0.1{,}3.9) = 0.2$$

$$f_X(2.5) = f_{X,Y}(2.5{,}0.1) + f_{X,Y}(2.5{,}2) + f_{X,Y}(2.5{,}3.6) + f_{X,Y}(2.5{,}3.9) = 0.3$$

$$f_X(2.8) = f_{X,Y}(2.8{,}0.1) + f_{X,Y}(2.8{,}2) + f_{X,Y}(2.8{,}3.6) + f_{X,Y}(2.8{,}3.9) = 0.5$$

Entonces se tiene que:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 0.1 \\ 0.3, & x = 2.5 \\ 0.5, & x = 2.8 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

De manera análoga se obtiene la función de densidad marginal de Y:

$$f_Y(0.1) = f_{X,Y}(0.1,0.1) + f_{X,Y}(2.5,0.1) + f_{X,Y}(2.8,0.1) = 0.1$$

$$f_Y(2) = f_{X,Y}(0.1,2) + f_{X,Y}(2.5,2) + f_{X,Y}(2.8,2) = 0.2$$

$$f_Y(3.6) = f_{X,Y}(0.1,3.6) + f_{X,Y}(2.5,3.6) + f_{X,Y}(2.8,3.6) = 0.3$$

$$f_Y(3.9) = f_{X,Y}(0.1,3.9) + f_{X,Y}(2.5,3.9) + f_{X,Y}(2.8,3.9) = 0.4$$

Por lo que

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.1, & y = 0.1 \\ 0.2, & y = 2 \\ 0.3, & y = 3.6 \\ 0.4, & y = 3.9 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Y a partir de las funciones de densidad marginales, se obtienen las funciones de distribución marginales:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.1 \\ 0.2, & 0.1 \le x < 2.5 \\ 0.5, & 2.5 \le x < 2.8 \\ 1, & x \le 2.8 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0.1 \\ 0.1, & 0.1 \le y < 2 \\ 0.3, & 2 \le y < 3.6 \\ 0.6, & 3.6 \le y < 3.9 \\ 1, & y \ge 3.9 \end{cases}$$

2. Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x.y) = \begin{cases} 0.05^{x+y+2}, & x = 0,1,\dots, y = 0,1,\dots \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Como las variables X y Y toman un número infinito de valores, se utilizan series infinitas para hallar las funciones de densidad marginales:

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = 0.05^{x+2} \sum_{y=0}^{\infty} 0.05^{y} = 0.05^{x+2} \sum_{y=1}^{\infty} 0.05^{y-1} = 0.05^{x+1}$$

Entonces $f_X(x) = \begin{cases} 0.05^{x+1}, & x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = 0.05^{y+2} \sum_{x=0}^{\infty} 0.05^{x} = 0.05^{y+2} \sum_{x=1}^{\infty} 0.05^{x-1} = 0.05^{y+1}$$

Entonces $f_Y(y) = \begin{cases} 0.05^{y+1}, & y = 0,1,2,\ldots \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$

Como se puede observar, X y Y están idénticamente distribuidas como Geométricas con parámetro p=0.5, entonces la función de distribución marginal de estas variables se define como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - 0.05^{[x]+1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - 0.05^{[y]+1}, & y \geq 0 \end{cases}$$

•

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE No. 1.

En equipos, proporcionar un ejemplo de un problema de la vida real en el que se utilice un vector aleatorio discreto, especificando los valores que puede tomar cada una de las variables aleatorias involucradas, definiendo sus funciones de densidad y de distribución conjuntas y marginales y presentando las gráficas correspondientes a estas funciones.

Ejercicio:

Sean X y Y dos variables aleatorias de las calificaciones obtenidas por los alumnos en las asignaturas de Probabilidad e Inferencia Estadística respectivamente, con función de densidad conjunta dada en el siguiente arreglo.

X \ Y	65	75	85	95
65	0.04	0.07	0.05	0.04
75	0.076	0.133	0.095	0.076
85	0.05	0.0875	0.0625	0.05
95	0.034	0.0595	0.0425	0.034

Determine las funciones de distribución conjunta y marginales.

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES E INDEPENDENCIA ESTOCASTICA

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas conjuntas con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$. La función de densidad condicional de X dado Y=y, se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} = P[X = x|Y = y], si\ f_Y(y) > 0$$

Si $f_Y(y) = 0$, $f_{X|Y}(x|y)$ está indefinida.

De manera análoga, la función de densidad condicional de Y dado X=x, se define como:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[X = x]} = P[Y = y|X = x], si\ f_X(x) > 0$$

Si $f_X(x) = 0$, $f_{Y|X}(y|x)$ está indefinida.

Nótese que la esta función de densidad discreta condicional denota una probabilidad debido a que tanto X como Y son variables aleatorias discretas; asimismo, lo que cumple con las propiedades de una función de densidad discreta.

La función de distribución acumulada discreta condicional de X dado Y=y se define como:

$$F_{X|Y}(x|y) = \sum_{x_i \leq x} f_{X|Y}(x_i|y) = P[X \leq x|Y = y]\ si\ f_Y(y) > 0$$

Similarmente, la función de distribución acumulada discreta condicional de Y dado X=x se define como:

$$F_{Y|X}(y|x) = \sum_{y_j \leq y} f_{Y|X}(y_j|x) = P[Y \leq y|X = x]\ si\ f_X(x) > 0$$

Si la función de densidad discreta condicional de una variable aleatoria dada otra variable aleatoria, coincide con la función de densidad marginal de la primera variable aleatoria, quiere decir que la probabilidad de ocurrencia de dicha variable aleatoria no se altera por lo que ocurra con la otra, entonces se dice que estas variables aleatorias son estocásticamente independientes[2].

Es decir, si se cumple que:

[2] En adelante, se omite el término “estocásticamente”.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \quad \text{ó} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

entonces X y Y son independientes.

Las equivalencias anteriores conducen al siguiente resultado:

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ si y solo si X y Y son variables aleatorias discretas independientes.

Esta igualdad se debe cumplir para todos los puntos en los que las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X y Y tienen un valor mayor a cero.

También se puede definir la independencia con base a las funciones de distribución:

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ si y solo si X y Y son variables aleatorias discretas independientes.

Ejemplos:

1. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

X \ Y	0.1	2.0	3.6	3.9
0.1	0.02	0.04	0.06	0.08
2.5	0.03	0.06	0.09	0.12
2.8	0.05	0.10	0.15	0.20

De acuerdo con la definición de probabilidad condicional, se obtienen las siguientes probabilidades:

$$P[X = 2.8|Y = 3.6] = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$

$$P[X \leq 2.5|Y = 2] = \frac{0.04 + 0.06}{0.2} = 0.5$$

$$P[Y > 3|X = 2.5] = \frac{0.09 + 0.12}{0.3} = 0.7$$

$$P[Y \leq 2|X > 2] = \frac{0.03 + 0.05 + 0.06 + 0.1}{0.3 + 0.5} = 0.1875$$

2. En el ejercicio anterior, se proponen dos variables aleatorias X y Y, que denotan las calificaciones obtenidas por los alumnos en las asignaturas de Probabilidad e Inferencia Estadística respectivamente, con función de densidad conjunta dada por:

X \ Y	65	75	85	95
65	0.04	0.07	0.05	0.04
75	0.076	0.133	0.095	0.076
85	0.05	0.0875	0.0625	0.05
95	0.034	0.0595	0.0425	0.034

La función de densidad marginal de X para x=65 es $f_X(65) = 0.2$, mientras que la función de densidad marginal de Y para y=65 es $f_Y(65) = 0.2$.

La función de densidad marginal de X para x=75 es $f_X(5) = 0.38$, mientras que la función de densidad marginal de Y para y=65 es $f_Y(65) = 0.076$.

De la misma manera, para cualquier pareja (x,y) de este arreglo se cumple que la multiplicación de las funciones de densidad marginales es igual a la función de densidad conjunta, por lo que se concluye que las variables aleatorias X y Y son independientes.

•

Ejercicio:

A continuación, se da la función de probabilidad conjunta asociada con datos obtenidos en un estudio sobre accidentes automovilísticos en los que un niño de menos de 5 años de edad estaba en el auto y hubo al menos una persona muerta. Las variables aleatorias X y Y y su función de densidad conjunta se definen como sigue:

X=0, el niño sobrevivió
X=1, el niño no sobrevivió
.

Y=0, el niño no usaba cinturón
Y=1, el niño usaba cinturón para adulto
Y=2, el niño usaba cinturón del asiento del auto

X \ Y	0	1	2
0	0.38	0.14	0.24
1	0.17	0.02	0.05

Obtenga las funciones de densidad y de distribución marginales y determine si las variables son independientes.

VECTORES ALEATORIOS CONTINUOS

Un vector aleatorio bivariado $\vec{V} = (X, Y)$ es continuo si puede asumir cualquier valor de R_V, un subconjunto infinito de puntos (x, y) en el espacio real $\mathbb{R}^2$, y cada una de las variables aleatorias que lo componen son continuas.

FUNCION DE DENSIDAD CONJUNTA

Se dice que el vector $\vec{V} = (X, Y)$ es un vector aleatorio continuo bivariado si y sólo si existe una función $f_{X,Y}(x, y)$ que cumple las siguientes propiedades:

$i)\ f_{X,Y}(x, y) \geq 0, \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$ii)\ \iint\limits_{R_V} f_{X,Y}(x, y) dy dx = 1$$

Esta función $f_{X,Y}(x, y)$ recibe el nombre de función de densidad conjunta continua.

Como en el caso de las variables aleatorias continuas unidimensionales, la función de densidad conjunta continua no denota una probabilidad.

La probabilidad de un evento $A \subset R_V$ se define como:

$$P[(X, Y) \in A] = \iint\limits_{A} f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

Nótese que la probabilidad de un evento A está dada por el volumen en $\mathbb{R}^3$ comprendido bajo la función de densidad conjunta para la región definida por A en $\mathbb{R}^2$.

En particular, la probabilidad de que cada variable aleatoria del vector $\vec{V}$, se encuentre en un intervalo se define de la siguiente manera:

$$P[a < X < b, c < Y < d] = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

Recuérdese que, para el caso de variables aleatorias continuas, es indistinto que el intervalo sea abierto o cerrado ya que la probabilidad de que la variable aleatoria tome un punto en particular es cero.

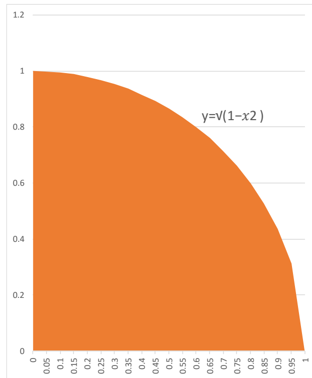
Ejemplos:

1. Suponga un experimento que consiste en elegir un punto al azar de un círculo de radio 1 centrado en el origen del plano cartesiano. Este experimento se puede modelar definiendo las variables aleatorias continuas X y Y como las coordenadas aleatorias del punto elegido y la región R_V se define como $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Como todos los puntos se suponen igualmente probables de ser elegidos, se define:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Para hallar la probabilidad de que el punto elegido se encuentre en el primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$), primero definimos la región que representa este evento para definir los límites de integración:



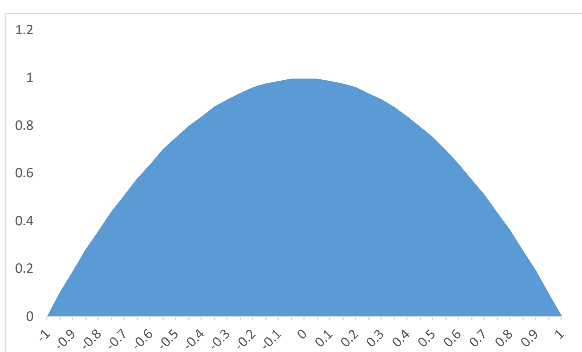
Entonces se procede a calcular la integral para hallar la probabilidad deseada.

$$P[(X,Y) \in A] = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dydx = \int_0^1 \left(\frac{y}{\pi} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} arc\ sen\ x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2. Supóngase que la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias es la siguiente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y), & 0 \leq y \leq 1-x^2 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

El área en $\mathbb{R}^2$ para la cual la densidad es diferente de 0 es la siguiente:



Para determinar el valor de la constante c para el cual $f_{X,Y}(x,y)$ cumple las propiedades de una función de densidad continua conjunta se procede de la siguiente manera:

Como $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ y $(x^2+y) > 0$ en la región dada, c debe ser mayor que cero. Además se debe cumplir que:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} c(x^2+y)dydx = c\int_{-1}^{1}\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1-x^2} dx = c\int_{-1}^{1}\frac{1-x^4}{2}dx = c\left(\frac{x}{2}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$= c\left(\frac{8}{10}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{5}{4}$$

•

FUNCION DE DISTRIBUCION CONJUNTA

La definición de esta función para el caso particular de un vector aleatorio bivariado continuo en términos de la función de densidad conjunta queda como sigue:

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds\,, \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Como se establece en esta definición, la función de distribución conjunta sí denota una probabilidad.

Para una función de distribución $F_{X,Y}(x,y)$ dada, se puede obtener una función de densidad como sigue:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Ejemplos:

1. Supóngase que la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias es la siguiente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{4}(x^2+y), & 0 \leq y \leq 1-x^2 \\ \quad 0, & \quad e.o.c. \end{cases}$$

Para hallar la función de distribución conjunta de las variables aleatorias X y Y para los puntos que están en la región $0 \leq y \leq 1-x^2$, se deben considerar dos subregiones $-1 \leq x \leq 0$ y $0 < x \leq 1$:

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^y\int_{\sqrt{1-t}}^x\frac{5}{4}(s^2+t)dsdt$$
$$=\frac{5}{4}\left(\frac{x^3y}{3}+\frac{xy^2}{2}-\frac{2}{15}\left[(1-y)^{2/5}+(2+3y)(1-y)^{3/2}\right]+\frac{2}{5}\right),\quad -1\le x\le 0$$

$F_{X,Y}(x,y)=1-F_{X,Y}(-x,y),\ \ 0<x\le 1$, por simetría.

Entonces se puede calcular directamente $F_{X,Y}(-0.5,0.5)=0.104535$

Para calcular $F_{X,Y}(a,b)$ para un punto que no esté en la región para la cual $f_{X,Y}(x,y)>0$, se tendría que calcular el valor de la integral correspondiente a la intersección de dicha región con la región definida por {(x,y)|x<a,y<b}.

2. Un profesor permite la entrada a su clase hasta con una hora de retraso a partir de la hora de inicio. Si X denota el tiempo de retraso del primer alumno que llega y Y, el del último, y la función de distribución conjunta para estas dos variables está dada por:

$$F_{X,Y}(x,y)=6(xy-0.5xy^2),\ \ 0\le x\le y\le 1$$

Para hallar la probabilidad de que el tiempo de retraso con el que llega el último alumno sea menor al doble del tiempo de retraso del primer alumno, $P[Y\le 2X]$ se halla primero la función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2F_{X,Y}(x,y)}{\partial y\partial x}=6(1-y),\ \ 0\le x\le y\le 1$$

Entonces se halla la probabilidad deseada resolviendo la siguiente integral:

$$P[Y\le 2X]=\int_0^1\int_{y/2}^y 6(1-y)dxdy=6\int_0^1(x-xy)|_{y/2}^y\,dy=6\int_0^1\frac{y-y^2}{2}dy$$
$$=3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=0.5$$

•

LAS FUNCIONES DE DENSIDAD Y DISTRIBUCION MARGINALES

A partir de la función de densidad conjunta de un vector aleatorio continuo se puede obtener las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias que lo integran mediante:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Una vez que se tienen las funciones de densidad marginales, se pueden obtener las funciones de distribución marginales para cada variable de acuerdo a la definición habitual:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds$$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$$

Ejemplo:

Supóngase que la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias es la siguiente:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{4}(x^2 + y), & 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Las funciones de densidad marginales se obtienen como sigue:

$$f_X(x) = \int_0^{1-x^2} \frac{5}{4}(x^2 + y)dy = \frac{5}{4}\left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x^2} = \frac{5}{8}(1 - x^4)$$

Por lo que:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{8}(1 - x^4), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{5}{4}(x^2 + y)dx = \frac{5}{4}\left(\frac{x^3}{3} + xy\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} = 5\left(\frac{2(1-y)^{3/2}}{3} + 2y\sqrt{1-y}\right)$$

Por lo que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5\left(\dfrac{2(1-y)^{3/2}}{3} + 2y\sqrt{1-y}\right), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

•

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE No. 2.

En equipos, proporcionar un ejemplo de un problema de la vida real en el que se utilice un vector aleatorio continuo, especificando los valores que puede tomar cada una de las variables aleatorias involucradas, definiendo sus funciones de densidad y de distribución conjuntas y marginales.

Ejercicios:

1. Un profesor que imparte la misma clase en dos grupos ha notado que al aplicar un examen, el tiempo en horas que toma que todos los alumnos terminen de resolver dicho examen siempre es menor en el grupo Y que en el grupo X y que la función de distribución conjunta de estos tiempos está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x, & 0 \le y \le x \le 2 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Calcule e interprete $F_{X,Y}(1.5,1)$ y $P\left[Y \le \frac{X}{2}\right]$.

2. Sean X y Y variables aleatorias para las cuales se define la siguiente función:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9\alpha^6}{x^4y^4}x, & \alpha < x, \alpha < y \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Verifique que se trata de una función de densidad conjunta y encuentre las funciones de densidad marginales de X y Y.