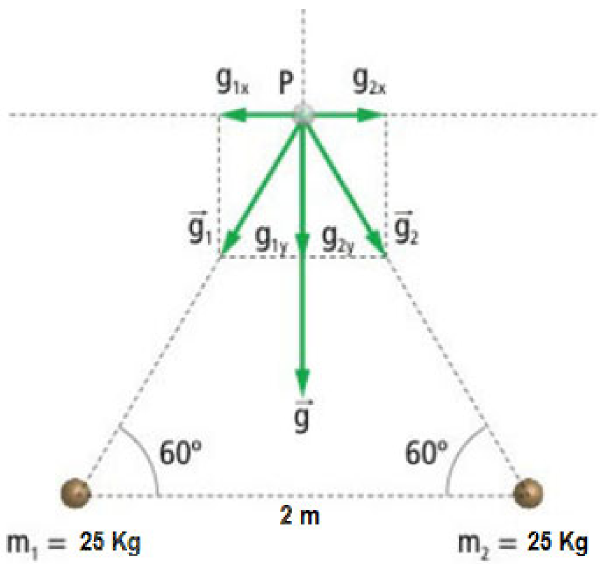
Unitat 2. Camp gravitatori. Examen 19102022 sol

1. Calcula la intensitat de camp que dues masses puntuals de 25 Kg situada als dos vèrtexs d'un triangle equilàter de 2 m de costat creen en el tercer vèrtex del triangle.

$$g_1 = G \cdot \frac{m_1}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{25}{2^2} = 4{,}17 \cdot 10^{-10}\ \frac{N}{Kg} \qquad g_2 = g_1$$



$$\vec{g}_1 = g_1 \cdot (-\sin 30\,\vec{\imath} - \cos 30\,\vec{\jmath})$$

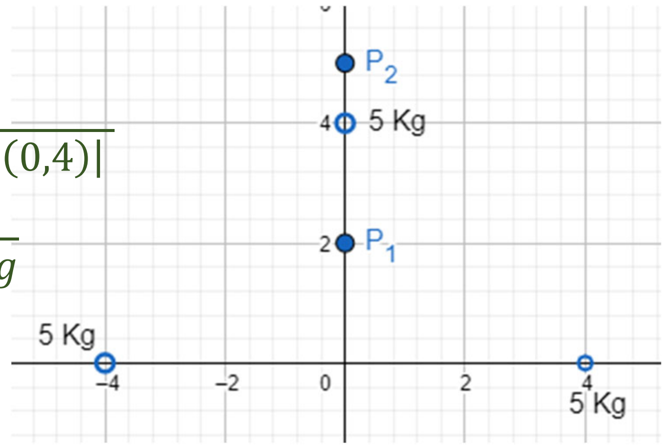
$$\vec{g}_2 = g_2 \cdot (\sin 30\,\vec{\imath} - \cos 30\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = g_1 \cdot (-\sin 30\,\vec{\imath} - \cos 30\,\vec{\jmath} + \sin 30\,\vec{\imath} - \cos 30\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{g}_1 + \vec{g}_2 = g_1 \cdot (-2\cos 30\,\vec{\jmath}) = -\sqrt{3} \cdot g_1\ \vec{\jmath} = -1{,}251 \cdot 10^{-9}\ \vec{\jmath}\ \frac{N}{Kg}$$

2. Tres masses iguals de 5 Kg es troben en els punts següents: (4,0), (-4,0) i (0,4). Determina:

a) El potencial gravitatori que les tres creen a P1 (0,2) i P2 (0,5).



$$V_{P_1} = V_1 + V_2 + V_3 = -G \cdot \frac{5}{|(0,2)-(4,0)|} - G \cdot \frac{5}{|(0,2)-(-4,0)|} - G \cdot \frac{5}{|(0,2)-(0,4)|}$$

$$V_{P_1} = -G \cdot \frac{5}{\sqrt{20}} - G \cdot \frac{5}{\sqrt{20}} - G \cdot \frac{5}{2} = -G \cdot \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + 1\right) = -3{,}158 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{Kg}$$

$$V_{P_1} = -3{,}158 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{Kg}$$

$$V_{P_2} = V_1 + V_2 + V_3 = -G \cdot \frac{5}{|(0,5)-(4,0)|} - G \cdot \frac{5}{|(0,5)-(-4,0)|} - G \cdot \frac{5}{|(0,5)-(0,4)|}$$

$$V_{P_2} = -G \cdot \frac{5}{|(-4,5)|} - G \cdot \frac{5}{|(4,5)|} - G \cdot \frac{5}{|(0,1)|} = -G \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} - G \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} - G \cdot \frac{5}{1}$$

$$V_{P_2} = -5G \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{41}} + 1\right) = -4{,}37 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{Kg}$$

Unitat 2. Camp gravitatori. Examen 19102022 sol

2. Tres masses iguals de 5 Kg es troben en els punts següents: (4,0), (-4,0) i (0,4). Determina:

b) El treball que cal per portar una massa M de 25 Kg des de P_1 fins a P_2. Analitza qui fa aquest treball a partir del signe.

$$V_{P_2} = -4{,}37 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{Kg} \qquad V_{P_1} = -3{,}158 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{Kg}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -4{,}37 \cdot 10^{-10} - (-3{,}158 \cdot 10^{-10}) = -1{,}21 \cdot 10^{-10}\,\frac{J}{Kg}$$

$$\Delta E_p = m \cdot \Delta V = 25 \cdot (-1{,}21 \cdot 10^{-10}) = -3{,}3 \cdot 10^{-9}\,J \;\; \rightarrow W = -\Delta E_p = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\,J$$

Un treball positiu indica que la massa es desplaça en contra de les forces del camp.

Per tant el desplaçament s'ha de fer amb la participació d'una força externa.

3. Un satèl·lit artificial de massa 1500 Kg descriu una trajectòria circular a una altura de 600 Km de la superfície terrestre. Calcula:

a) La velocitat amb què ha estat llançat des de la superfície de la Terra.

$$F = G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\cdot\frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$E_{M_{\grave{o}rbita}} = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r} + \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r} + \frac{1}{2}\cdot m\cdot G\frac{M}{r} = -\frac{1}{2}\cdot\ G\frac{M\cdot m}{r}$$

$$E_{M_{\grave{o}rbita}} = -\frac{1}{2}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1500}{6{,}378\cdot 10^{6} + 6\cdot 10^{5}} = -\frac{1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{8970\cdot 10^{24}}{6{,}978\cdot 10^{6}} = -4{,}287\cdot 10^{10}J$$

$$E_{P_{terra}} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1500}{6{,}378\cdot 10^{6}} = -9{,}381\cdot 10^{10}J$$

$$E_{M_{terra}} = E_{c_{terra}} + E_{P_{terra}} = E_{M_{\grave{o}rbita}} \rightarrow E_{c_{terra}} = E_{M_{\grave{o}rbita}} - E_{P_{terra}} = -4{,}287\cdot 10^{10} + 9{,}381\cdot 10^{10} = 5{,}094\cdot 10^{10}J$$

$$v_{ini} = \sqrt{\frac{2\cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5{,}094\cdot 10^{10}}{1500}} = \sqrt{6{,}792\cdot 10^{7}} = 8{,}24\cdot 10^{3}\,\frac{m}{s}$$

3. Un satèl·lit artificial de massa 1500 Kg descriu una trajectòria circular a una altura de 600 Km de la superfície terrestre. Calcula:

b) La velocitat orbital.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R_t + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}978 \cdot 10^6}} = 7{,}56 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$$

c) Les energies cinètica, potencial i mecànica.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot (7{,}56 \cdot 10^3)^2 = 4{,}29 \cdot 10^{10}\ J$$

$$E_P = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R_t + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1500}{6{,}978 \cdot 10^6} = -8{,}57 \cdot 10^{10}\ J$$

$$E_m = E_C + E_P = 4{,}29 \cdot 10^{10} - 8{,}57 \cdot 10^{10} = -4{,}29 \cdot 10^{10}\ J$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{També: } Si\ E_m = \frac{1}{2} E_p \rightarrow E_c = -\frac{1}{2} E_p = -E_m \\ E_c = -E_m = 4{,}29 \cdot 10^{10}\ J \\ E_P = 2E_m = -8{,}57 \cdot 10^{10}\ J \\ E_m = -4{,}29 \cdot 10^{10}\ J \end{array}}$$

d) L'energia cinètica mínima que caldria perquè s'allunyés indefinidament de la Terra.

$$Si\ E_C = 4{,}29 \cdot 10^{10}\ J \rightarrow E_m = 4{,}29 \cdot 10^{10} - 4{,}29 \cdot 10^{10} = 0$$

e) La velocitat d'escapament des de l'altura on es troba.

$$E_{M_{\grave{o}rbita}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_{orbital} = \sqrt{2} \cdot 7{,}56 \cdot 10^3 = 15{,}12 \frac{Km}{s}$$