

Física II El so. Ones estacionàries. Exercicis resolts.

1. En un filferro de longitud 4,35 m i 137 g de massa es troba sota una tensió de 125 N s'ha generat una ona estacionària de 7 nodes incloent-hi els extrems.

a) De quin harmònic es tracta?

Solució El primer que hem de fer és dibuixar l'ona estacionària:

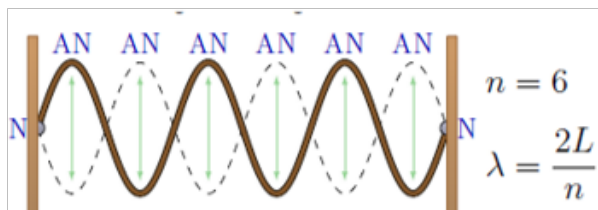


Figura 1: Ona estacionària filferro

Examinant el dibuix es pot veure que $n = \text{número nodes} - 1$ i, per tant, $n = 7 - 1 = 6$

b) Quina és la freqüència d'aquesta ona?

L'equació per a una corda fixa als dos extrems és $f_n = \frac{nv}{2L}$ i $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. Tot i que tenim la longitud de la corda, ens fa falta calcular la velocitat de propagació:

$$v = \sqrt{\frac{f_{tensio}}{\mu}} \text{ on } \mu \text{ és la densitat lineal de la corda. } \mu = \frac{137}{4,35} = 31,49 \frac{g}{m} \rightarrow \mu = 0,0315 \frac{Kg}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{125}{0,0315}} = 63 \frac{m}{s}$$

$$f_6 = \frac{6v}{2L} = \frac{3v}{L} = \frac{3 \times 63}{4,35} = 43,44 \text{ Hz}$$

c) Quina és la freqüència fonamental?

$$f_n = \frac{nv}{2L} \rightarrow f_1 = \frac{1v}{2L} = \frac{63}{2 \times 4,35} = 7,24 \text{ Hz}$$

d) La màxima amplitud en un antinode és 0,0075 m, Escriu una equació per aquesta ona estacionària.

Per a una ona amb n nodes l'expressió de l'equació és $y_n = A_n \sin(kx) \cos(\omega t)$

on $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ i $\omega = 2\pi f$ i per a $n = 6$ tenim:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \rightarrow \lambda_6 = \frac{2L}{6} = \frac{L}{3} \rightarrow \lambda_6 = \frac{4,35}{3} = 1,45 \text{ m} \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,45} = 4,33 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 43,44 = 273 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y_6 = A_6 \sin(kx) \cos(\omega t) \rightarrow y_6 = 0,0075 \sin(4,33x) \cos(273t)$$

2. Una corda fixa únicament a un dels seus extrems vibra en el seu tercer harmònic. La funció per aquest harmònic és:

$y(x, t) = 0,012 \sin(3,13x) \cos(512t)$, on x i y es troben en metres i t en segons.

Solució a) Quina és la longitud d'ona de la ona?

$$y(x, y) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \rightarrow k_3 = 3,13 \rightarrow \lambda_3 = \frac{2\pi}{k_3} \rightarrow \lambda_3 = \frac{2\pi}{3,13} = 2 \text{ m}^{-1}$$

b) Quina és la longitud corda?

Per a una corda amb un extrem final lliure tenim que: $\lambda_n = \frac{4L}{n} \rightarrow \lambda_3 = \frac{4L}{3} \rightarrow L = \frac{3}{4} \lambda_3 = \frac{3}{4} 2 = 1,5 \text{ m}$

c) Quina és la velocitat de propagació de l'ona en la corda?

$$v = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow v = \frac{2\pi \omega}{k 2\pi} \rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{512}{3,13} = 163,6 \frac{m}{s}.$$

3. Tres freqüències successives per a una determinada corda són 175, 245 i 315 Hz a) Troba la relació entre aquests modes de vibració

Solució Les freqüències han de mantenir una relació entre sí i que es corresponen amb les seves

$$\text{resonàncies. } f_1 = \frac{b}{a} f_2; f_1 = \frac{c}{a} f_3 \text{ i } f_2 = \frac{c}{b} f_3 \rightarrow 1 = \frac{b f_2}{c f_3} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{315}{245} = \frac{63}{49} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{245}{175} = \frac{49}{35} = \frac{7}{5}$$

Per tant la relació és 5 : 7 : 9 b) Com es pot demostrar que aquesta corda té un antinode al final? **Solució** Per a una corda fixada per ambdós extrems la freqüència de resonància respon a

l'expressió $f = n \frac{v}{2L}$ on $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Per a una corda fixada per un únic extrem la freqüència

de resonància respon a l'expressió $f = n \frac{v}{4L}$ on $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ i com que la seqüència consecutiva conté únicament nombres senars, podem concloure que la corda únicament té un extrem fix. c)

Quina és la freqüència fonamental? **Solució** $f_n = n \frac{v}{4L} \rightarrow f_5 = 5 \frac{v}{4L}$ i $f_1 = 1 \frac{v}{4L} \rightarrow f_1 = \frac{1}{5} f_5 \rightarrow$

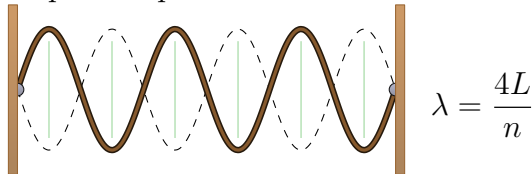
$$f_1 = \frac{1}{5} 175 = 35 \text{ Hz d) Si la velocitat de les ones transversals en aquesta corda és de } 125 \frac{m}{s} \text{ troba}$$

$$\text{la longitud de la corda. } \textbf{Solució} f_n = n \frac{v}{4L} \rightarrow L = \frac{v}{4f_1} = \frac{125}{4 \times 35} \rightarrow L = 0,89 \text{ m}$$

4. No tenim a mà un regle i hem decidit mesurar la longitud d'un tub amb els dos extrems oberts psocionant un dels extrems a una font sonora de la qual podem modificar la freqüència del so. La freqüència més petita que provoca resonància en el tub és de $f = 420 \text{ Hz}$. Assumint que la velocitat

del so és de $v = 433 \frac{m}{s}$, calcula la longitud del tub. **Solució**

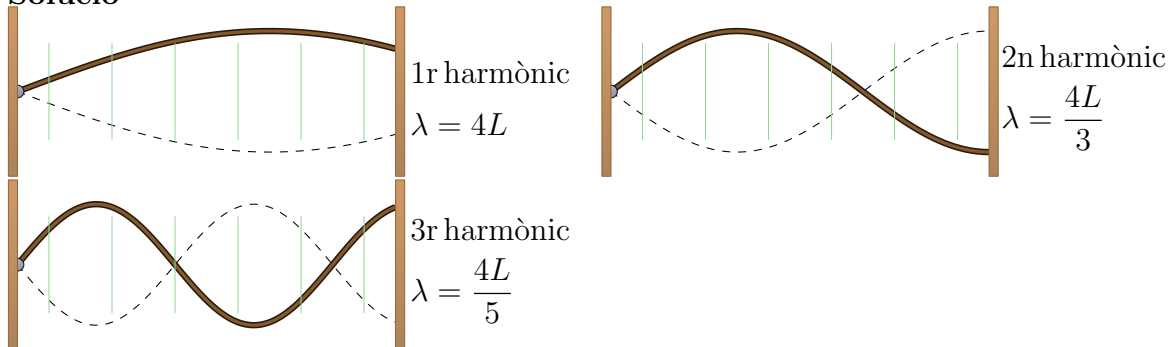
El primer que hem de fer és dibuixar l'ona estacionària:



$$f_n = n \frac{v}{4L} \rightarrow f_1 = 1 \frac{v}{4L} \rightarrow L = \frac{v}{4f_1} = \frac{343}{4 \times 420} = 0,2041 \text{ m} = 20,41 \text{ cm}$$

5. En un concurs de llançament amb arc una fletxa d'1,5 m assoleix el seu objectiu i comença a vibrar. Si la velocitat de l'ona en la fletxa és de $150 \frac{m}{s}$ quines són les tres freqüències més petites d'aquesta vibració?

Solució



$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{150}{4 \times 1,15} = 32,6 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{3v}{4L} = \frac{3 \times 150}{4 \times 1,15} = 97,82 \text{ Hz}$$

$$f_3 = \frac{5v}{4L} = \frac{5 \times 150}{4 \times 1,15} = 163 \text{ Hz}$$

6. Un tub prim i buit de longitud $L = 3,5 \text{ m}$ es troba obert als dos extrems i descansa sobre dos cavallets. Comença a bufar vent i el tub comença a sonar. Calcula la freqüència més petita possible i dibuixa l'ona estacionària si tenim en compte que la velocitat del so és $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

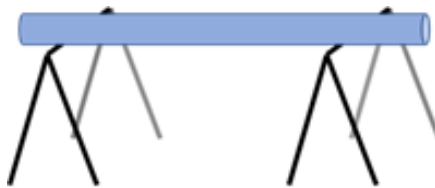


Figura 2: Tub sobre cavallets

L'ona estacionària troba el seu fonament en la vibració del material. Per tant, mentre que el final i principi del tub es correspondran amb antinodes, la posició dels cavallets correspondran a nodes.



Figura 3: tub amb harmònics

Que es correspon amb el segon harmoni. La freqüència de l'ona estacionària és per tant:

$$f = \frac{nv}{2L} = \frac{2 \times 340}{2 \times L} = \frac{2 \times 340}{2 \times 3,5} = 97,14 \text{ Hz}$$

7. Mentre observem l'exhibició de llançament amb arc comentat amb anterioritat ens adonem que quan una fletxa d' $1,05 \text{ m}$ assoleix l'objectiu amb el següent patró de vibració:

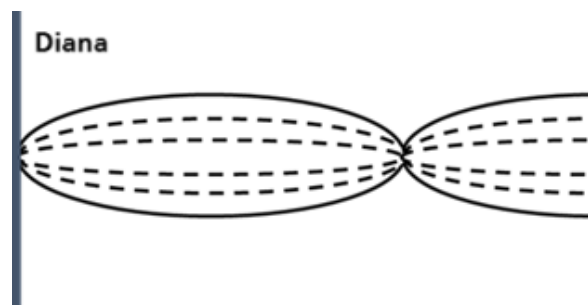


Figura 4: Harmònic de la fletxa

S'ha grabat l'impacte de la fletxa amb una càmera i visualitzant el video frame a frame arribem a la conclusió que la fletxa vibra fent 110 cicles per segon. Calcula la velocitat de l'ona que viatja al llarg de la fletxa.

Com es pot veure a la figura $L = \frac{3}{4}\lambda \rightarrow$ que respon a la relació $f_n = n \times \frac{v}{4L}$ on $n = 1, 3, 5, 7 \dots$

$$v = \frac{4L \times f_n}{n} = \frac{4 \times 1,05}{3} = 154 \frac{m}{s}$$

8. El diaframa d'un altaveu vibra amb un desplaçament màxim de $\Delta x = 2 \text{ mm}$. Assumint que aquest és també el desplaçament màxim de les molècules gasoses que l'envolten, troba la màxima amplitud de la pressió considerant $v_s = 340 \frac{m}{s}$, ($d_{aire} = 1,29 \frac{Kg}{m^3}$) i que la freqüència de l'altaveu és de $f = 3000 \text{ Hz}$. **Solució**

$$P_0 = d \times \omega \times f \times \Delta x = 1,29 \frac{Kg}{m^3} \times 2\pi \times 3000 \text{ Hz} \times 340 \frac{m}{s} \times 0,002 \text{ m} = 16,5 \times 10^3 \text{ Pa}$$

Atès que la pressió atmosfèrica és de l'ordre de 1×10^5 , aquest canvi suposa aproximadament un 16

9. Quan un estudiant està realitzant un examen en un aula suposadament silenciosa el nivell del so arriba a 45 dB.

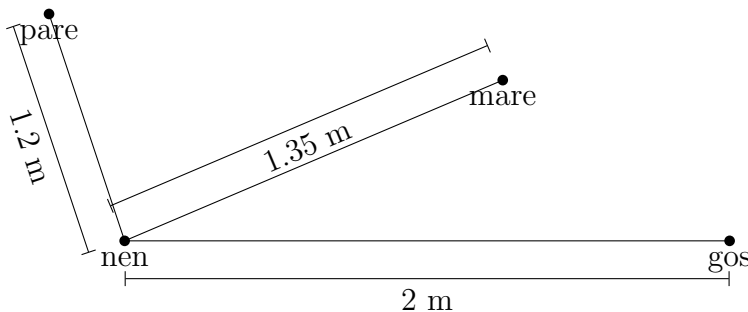
a) Quina és la intensitat del so? $\beta = 10 \times \log \frac{I}{I_0} \rightarrow \log \frac{I}{I_0} = \frac{\beta}{10} \rightarrow I = I_0 \times 10^{\frac{\beta}{10}}$

$$I = 10^{-12} \times 10^{\frac{45}{10}} = 10^{-12} \times 10^{4,5} = 10^{-12} \times 10^4 \times \sqrt{10} = 3,162 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2}$$

b) Si tenim 30 estudiants igualment sorollosos i ens trobem a la mateixa distància de cadascun d'ells, quin serà el nou nivell de soroll? $I_{nove} = I_{un} \cdot 30 = 3,162 \cdot 10^{-8} \cdot 30 = 94,87 \cdot 10^{-8} = 9,5 \cdot 10^{-7} \rightarrow$

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{9,5 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log(9,5 \cdot 10^5) = 59,8 \text{ dB}.$$

10. Has arribat molt tard a casa i els teus pares, que esperen per sopar, et comencen a recriminar per la tardança en tornar. Els gos comença a estar molt negitiós i li dona per bordar. El diagrama de sota mostra les posicions del gos i els teus pares respecte a la teva que es correspon al punt del centre. Les distàncies de cadascun són $r_{pare} = 1,20 \text{ m}$, $r_{mare} = 1,35 \text{ m}$ i $r_{gos} = 2 \text{ m}$. La potència en les seves veus són, respectivament: $P_{pare} = 1,25 \text{ mW}$, $P_{mare} = 0,85 \text{ mW}$ i $P_{gos} = 1 \text{ mW}$. Troba la intensitat del so, a partir de les de cada font, en la teva posició. Suposant que les fonts són incoherents, troba el nivell de sonoritat assegurant-te d'incloure l'efecte del soroll de fons que és de 60 dB. $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$.



Si les fonts de so són incoherents les intensitats s'han de sumar.

$$I_{Total} = I_{mare} + I_{pare} + I_{gos} + I_{soroll \text{ de fons}}$$

Assumint que estem tractant amb ones esfèriques, $I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2}$:

$$I_{mare} = \frac{0,85 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 1,35^2} = 3,711 \cdot 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

$$I_{pare} = \frac{1,25 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 1,2^2} = 6,908 \cdot 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

$$I_{gos} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 2^2} = 1,989 \cdot 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

La intensitat del soroll del fons s'obté a partir del nivell del soroll de fons:

$$I_{soroll\ de\ fons} = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{W}{m^2}$$

Així, la intensitat total serà:

$$I_{Total} = 3,711 \cdot 10^{-5} + 6,908 \cdot 10^{-5} + 1,989 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-6} = 12,71 \cdot 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\frac{12,71 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-12}} = 81\ dB$$