Física II El so. Ones estacionàries. Exercicis resolts.

1. En un filferro de longitud 4.35 m i 137 g de massa es troba sota una tensió de 125 N s'ha generat una ona estacionària de 7 nodes incloent-hi els extrems.

   a) De quin harmònic es tracta?

   Solució El primer que hem de fer és dibuixar l'ona estacionària:

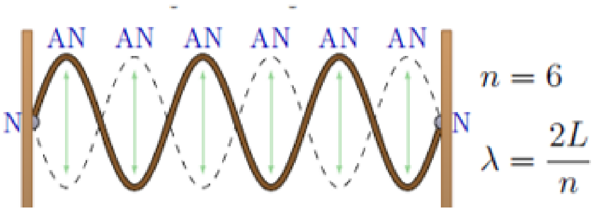
   

   Figura 1: Ona estacionària filferro

   Examinant el dibuix es pot veure que $n = número\, nodes - 1$ i , per tant, $n = 7 - 1 = 6$

   b) Quina és la freqüència d'aquesta ona?

   L'equació per a una corda fixa als dos extrems és $f_n = \frac{nv}{2L}$ i $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. Tot i que tenim la longitud de la corda, ens fa falta calcula la velocitat de propagació:

   $v = \sqrt{\frac{f_{tensio}}{\mu}}$ on mu es la densitat lineal de la corda. $\mu = \frac{137}{4{,}35} = 31{,}49\,\frac{g}{m} \to \mu = 0{,}0315\,\frac{Kg}{m}$

   $v = \sqrt{\frac{125}{0{,}0315}} = 63\,\frac{m}{s}$

   $f_6 = \frac{6v}{2L} = \frac{3v}{L} = \frac{3 \times 63}{4{,}35} = 43{,}44\,Hz$ c) Quina és la freqüència fonamental?

   $f_n = \frac{nv}{2L} \to f_1 = \frac{1v}{2L} = \frac{63}{2 \times 4{,}35} = 7{,}24\,Hz$

   d) La màxima amplitud en un antinode és $0{,}0075\,m$, Escriu una equació per aquesta ona estacionària.

   Per a una ona amb n nodes l'expressió de l'equació és $y_n = A_n \sin(kx)\cos(\omega t)$

   on $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ i $\omega = 2\pi f$ i per a $n = 6$ tenim:

   $\lambda_n = \frac{2L}{n} \to \lambda_6 = \frac{2L}{6} = \frac{L}{3} \to \lambda_6 = \frac{4{,}35}{3} = 1{,}45\,m \to k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}45} = 4{,}33\,m^{-1}$

   $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 43{,}44 = 273\,\frac{rad}{s}$

   $y_6 = A_6 \sin(kx)\cos(\omega t) \to y_6 = 0{,}0075 \sin(4{,}33x)\cos(273t)$

2. Una corda fixa únicament a un dels seus extrems vibra en el seu tercer harmònic. La funció per aquest harmònic és:

   $y(x,t) = 0{,}012 \sin(3{,}13x)\cos(512t)$, on x i y es troben en metres i t en segons.

   Solució a) Quina és la longitud d'ona de la ona?

   $y(x,y) = A\sin(kx)\cos(\omega t) \to k_3 = 3{,}13 \to \lambda_3 = \frac{2\pi}{k_3} \to \lambda_3 = \frac{2\pi}{3{,}13} = 2\,m^{-1}$

   b) Quina és la longitud corda?

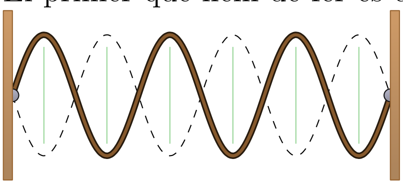
   Per a una corda amb un extrem final lliure tenim que: $\lambda_n = \frac{4L}{n} \to \lambda_3 = \frac{4L}{3} \to L = \frac{3}{4}\lambda_3 = \frac{3}{4}2 = 1,5\,m$

   c) Quina és la valocitat de propagació de l'ona en la corda?

$$v=\lambda f=\lambda\frac{\omega}{2\pi}\rightarrow\ v=\frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{2\pi}\rightarrow\ \ v=\frac{\omega}{k}=\frac{512}{3{,}13}=163{,}6\,\frac{m}{s}.$$

3. Tres freqüències successives per a una determinada corda són 175, 245 i 315 Hz a) Troba la relació entre aquests modes de vibració
Solució Les freqüències han de mantenir una relació entre sí i que es corresponen amb les seves resonàncies. $f_1=\frac{b}{a}f_2$; $f_1=\frac{c}{a}f_3$ i $f_2=\frac{c}{b}f_3\rightarrow 1=\frac{b\,f_2}{c\,f_3}\rightarrow\frac{b}{c}=\frac{f_3}{f_2}=\frac{315}{245}=\frac{63}{49}=\frac{9}{7}$
$\frac{b}{a}=\frac{f_2}{f_1}=\frac{245}{175}=\frac{49}{35}=\frac{7}{5}$
Per tant la relació és 5 : 7 : 9 b) Com es pot demostrar que aquesta corda té un antinode al final? **Solució** Per a una corda fixada per ambdos extrems la freqüència de resonància respon a l'expressió $f=n\,\frac{v}{2L}$ on $n=1,2,3,4,...$ Per a una corda fixada per un únic extrem la freqüència de resonància respon a l'expressió $f=n\,\frac{v}{4L}$ on $n=1,3,5,7...$ i com que la seqüència consecutiva conté únicament nombres senars, podrem concloure que la corda únicament té un extrem fix. c) Quina és la freqüència fonamental? **Solució** $f_n=n\,\frac{v}{4L}\rightarrow f_5=5\,\frac{v}{4L}\,i\,f_1=1\,\frac{v}{4L}\rightarrow\ f_1=\frac{1}{5}f_5\rightarrow$ $f_1=\frac{1}{5}175=35\,Hz$ d) Si la velocitat de les ones transversals en aquesta corda és de 125 $\frac{m}{s}$ troba la longitud de la corda. **Solució** $f_n=n\,\frac{v}{4L}\rightarrow L=\frac{v}{4f_1}=\frac{125}{4\times 35}\rightarrow\ L=0{,}89\,m$

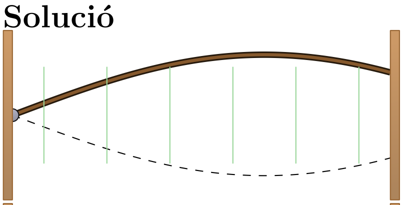
4. No tenim a ma un regle i hem decidit mesurar la longitud d'un tub amb els dos extrems oberts posocionant un dels extrems a una font sonora de la qual podem modificar la freqüència del so. La reqüència més petita que provoca resonància en el tub és de $f=420\,Hz$. Assumint que la veloitat del so és de $v=433\,\frac{m}{s}$, calcula la longitud del tub. **Solució**
El primer que hem de fer és dibuixar l'ona estacionària:



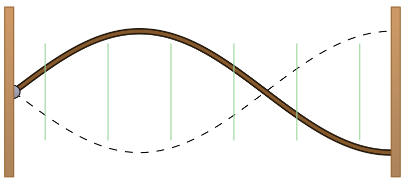
$\lambda=\frac{4L}{n}$

$$f_n=n\,\frac{v}{4L}\rightarrow f_1=1\,\frac{v}{4L}\ \rightarrow L=\frac{v}{4f_1}=\frac{343}{4\times 420}=0{,}2041\,m=20{,}41\,cm$$

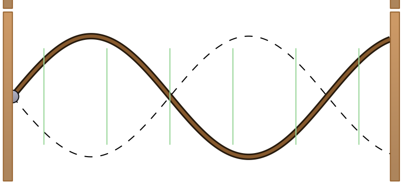
5. En un concurs de llançament amb arc una fletxa d'1,5 m assoleix el seu objectiu i comença a vibrar. Si la velocitat de l'ona en la fletxa és de 150 $\frac{m}{s}$ quines són es tres freqüències més petites d'aquesta vibració?
Solució



1r harmònic
$\lambda=4L$



2n harmònic
$\lambda=\frac{4L}{3}$



3r harmònic
$\lambda=\frac{4L}{5}$

$$f_1=\frac{v}{4L}=\frac{150}{4\times 1,15}=32,6\,Hz$$

$$f_2 = \frac{3v}{4L} = \frac{3 \times 150}{4 \times 1,15} = 97,82\,Hz$$
$$f_3 = \frac{5v}{4L} = \frac{5 \times 150}{4 \times 1,15} = 163\,Hz$$

6. Un tub prim i buit de longitud $L = 3,5\,m$ es troba obert als dos extrems i descansa sobre dos caballets. Comença a bufar vent i el tub comença a sonar.
   Calcula la freqüència més petita possible i dibuixa l'ona estacionària si tenim en compte que la velocitat del so és $v = 340\,\frac{m}{s}$.

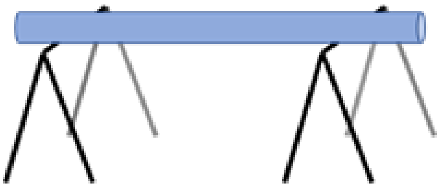


Figura 2: Tub sobre cavalllets

L'ona estacionaria troba el seu fonament en la vibració del material. Per tant, mentre que el final i principi del tub es correspondran amb antinodes, la posició dels cavallets correspondran a nodes.

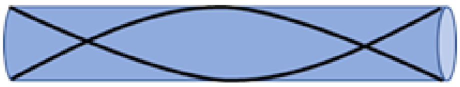


Figura 3: tub amb harmònics

Que es correspon amb el segon harmonic. La freqüència de l'ona estacionària és per tant:
$$f = \frac{nv}{2L} = \frac{2 \times 340}{2 \times L} = \frac{2 \times 340}{2 \times 3,5} = 97{,}14\,Hz$$

7. Mentre observem l'exhibició de llançament amb arc comentat amb anterioritat ens adonem que quan una fletxa d'1,05 m assoleix l'objectiu amb el següent patró de vibració:

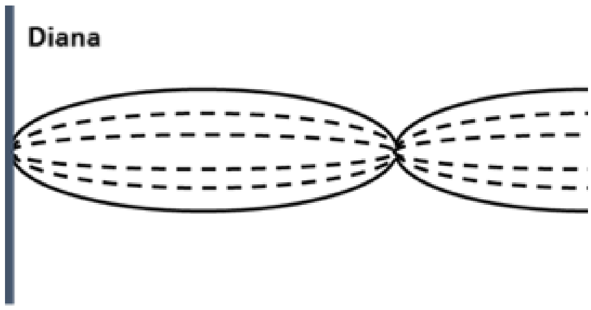


Figura 4: Harmònic de la fletxa

S'ha grabat l'impacte de la flexta amb una càmara i vitsualitzant el video frame a frame arribem a la conclusió que la fletxa vibra fent 110 cicles per segon. Calcula la velocitat de l'ona que viatja al llarg de la fletxa.

Com es pot veure a la figura $L = \frac{3}{4}\lambda \rightarrow$ que respon a la relació $f_n = n \times \frac{v}{4L}$ on $n = 1, 3, 5, 7...$

$v = \frac{4L \times f_n}{n} = \frac{4 \times 1{,}05}{3} = 154\,\frac{m}{s}$

8. El diaframa d'un altaveu vibra amb un desplaçament màxim de $\Delta x = 2\,mm$. Assumint que aquest és també el desplaçament màxim de les molècules gasoses que l'envolten, troba la màxima amplitud de la pressió considerant $v_s = 340\,\frac{m}{s}$, $(d_{aire} = 1,29\,\frac{Kg}{m^3})$ i que la freqüència de l'altaveu és de $f = 3000\,Hz$. **Solució**

   $P_0 = d \times \omega \times f \times \Delta x = 1{,}29\frac{Kg}{m^3} \times 2\pi \times 3000\,Hz \times 340\frac{m}{s} \times 0{,}002\,m = 16{,}5 \times 10^3\,Pa$

   Atès que la pressió atmosfèrica és de l'ordre de 1×10^5, aquest canvi suposa aproximadament un 16

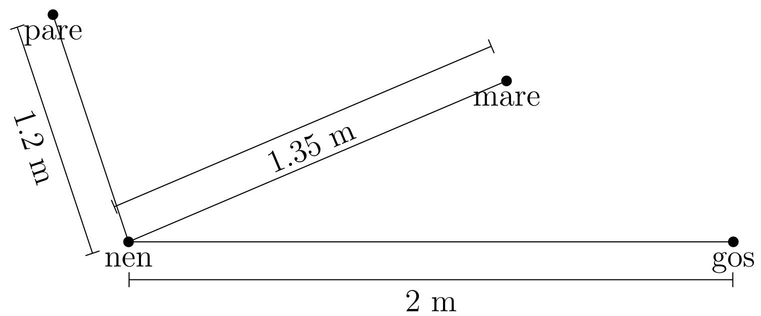
9. Quan un estudiant està realitzant un examen en un aula suposadament silenciosa el nivell del so arriba a $45\,dB$.

   a) Quina és la intensitat del so? $\beta = 10 \times log\frac{I}{I_0} \rightarrow log\frac{I}{I_0} = \frac{\beta}{10} \rightarrow I = I_0 \times 10^{\frac{\beta}{10}}$

   $I = 10^{-12} \times 10^{\frac{45}{10}} = 10^{-12} \times 10^{4{,}5} = 10^{-12} \times 10^4 \times \sqrt{10} = 3{,}162 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2}$

   b) Si tenim 30 estudiants igualment sorollosos i ens trobem a la mateixa distància de cadascun d'ells, quin serà el nou nivell de soroll? $I_{nove} = I_{un} \cdot 30 = 3,162 \cdot 10^{-8} \cdot 30 = 94{,}87 \cdot 10^{-8} = 9{,}5 \cdot 10^{-7} \rightarrow$
   $\beta = 10 \cdot log\frac{9{,}5 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \cdot log(9{,}5 \cdot 10^5) = 59{,}8\,dB.$

10. Has arribat molt tard a casa i els teus pares, que esperen per sopar, et comencen a recriminar per la tardança en tornar. Els gos comença a estar molt negitós i li dona per bordar. El diagrama de sota mostra les posicions del gos i els teus pares respecte a la teva que es correspon al punt del centre. Les distàncies de cadascun són $r_{pare} = 1{,}20\,m$, $r_{mare} = 1{,}35\,m\ i\ r_{gos} = 2\,m$. La potència en les seves veus són, respectivament: $P_{pare} = 1{,}25\,mW$, $P_{mare} = 0{,}85\,mW\ i\ P_{gos} = 1\,mW$. Troba la intensitat del so, a partir de les de cada font, en la teva posició. Suposant que les fonts són incoherents, troba el nivell de sonoritat assegurant-te d'incloure l'efecte del soroll de fons que és de $60\,dB$. $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$.



Si les fonts de so són incoherents les intensitats s'han de sumar.
$I_{Total} = I_{mare} + I_{pare} + I_{gos} + I_{soroll\,de\,fons}$

Assumint que estem tractant amb ones esfèriques, $I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2}$:

$I_{mare} = \frac{0{,}85 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 1{,}35^2} = 3{,}711 \cdot 10^{-5}\frac{W}{m^2}$

$I_{pare} = \frac{1{,}25 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 1{,}2^2} = 6{,}908 \cdot 10^{-5}\frac{W}{m^2}$

$I_{gos} = \dfrac{1 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 2^2} = 1{,}989 \cdot 10^{-5} \dfrac{W}{m^2}$

La intensitat del soroll del fons s'obté a partir del nivell del soroll de fons:

$I_{soroll\,de\,fons} = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-6} \dfrac{W}{m^2}$

Així, la intensitat total serà:

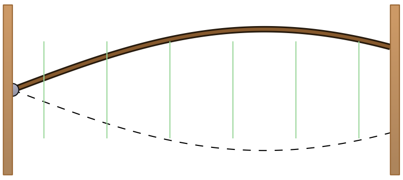
$I_{Total} = 3{,}711 \cdot 10^{-5} + 6{,}908 \cdot 10^{-5} + 1{,}989 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-6} = 12{,}71 \cdot 10^{-5} \dfrac{W}{m^2}$

$\beta = 10 \cdot log(\dfrac{I}{I_0}) = 10 \cdot log \dfrac{12{,}71 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-12}} = 81\, dB$

11. Un estudiant fa servir un oscil·lador d'audio de freqüència adjustable per a mesurar la profunditat d'un pou d'aigua. L'estudiant escolta dues resonàncies successives de $51{,}5\, Hz$ i $60\, Hz$. Quina profunditat té el pou?

Solució

Un pou és una columna d'aire tancada per un extrem i oberta per l'altre. Per tant ha de tenir un antinode al final i un node al principi (on es troba el nivell de l'aigua)



1r harmònic

$\lambda = 4L$

Pel següent harmònic tindrem dos nodes (comptant l'inicial) i dos ventres i per tant $L = \dfrac{3}{4}\lambda$

Si n ha de ser imparell podriem expressar la fórmula anterior com a:

$L_n = \dfrac{2n+1}{4}\lambda_{n+1}$ on $n = 0, 1, 2, 3, ...$, i per al següent harmònic:

$L = \dfrac{2n+2}{4}\lambda$ on $n = 1, 2, 3, ...$

Podem veure que, per qualsevol harmònic, $L = \dfrac{n}{4}\lambda$, que, posada en funció de la velocitat del so serà $L = \dfrac{n \cdot v}{4 \cdot f_n}$. Per al següent harmònic l'expressió serà $L = \dfrac{(n+1) \cdot v}{4 \cdot f_{n+1}}$

Dividint totes dues expressions tindrem:

$\dfrac{(n+1) \cdot v}{4 \cdot f_{n+1}} \dfrac{\cdot 4 \cdot f_n}{n \cdot v} = 1 \rightarrow \dfrac{(n+1)}{f_{n+1}} \dfrac{f_n}{n} = 1 \rightarrow \dfrac{(n+1)}{n} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ on $\dfrac{(n+1)}{n} = \dfrac{3}{1}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{9}{7}.....\ \dfrac{(n+1)}{n} = \dfrac{60}{51{,}5} = 1{,}165$

Podem trobar que $\dfrac{15}{13} = 1{,}154$ Si $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \rightarrow n = 13$ i subtituïnt: $L = \dfrac{n}{4}\lambda \rightarrow \dfrac{13 \cdot v}{4 \cdot f_1}$

$L = \dfrac{13 \cdot 343}{4 \cdot 51{,}5} = 21{,}64\, m$

Si prenem la freqüència més alta obtindrem: $L = \dfrac{15 \cdot 343}{4 \cdot 60} = 21{,}43\, m$

Se n'agafen la mitjana de les dues: $L = \dfrac{21{,}64 + 21{,}43}{2} = 21{,}5\, m$

12. Quan un tub metàl·lic buit es talla en dues peces la freqüència de ressonància més baixa en una peça és de $256\, Hz$ i en l'altra $440\, Hz$.

a) Quina freqüència de resonància hauria d'haver produït el tub original?

Solució

Per a cada tros de tub $L_1 = \dfrac{\lambda_1}{2} = \dfrac{v}{2 \cdot f_1}$ i $L_2 = \dfrac{\lambda_2}{2} = \dfrac{v}{2 \cdot f_2}$

$L = L_1 + L_2 = \dfrac{v}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} \right) \rightarrow \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} \rightarrow f = \dfrac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2}$

$f = \dfrac{256 \cdot 440}{256 + 440} = 161{,}84\, Hz$

b) Quina longitud tenia el tub original?

Solució

$L = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{v}{2 \cdot f} = \dfrac{343}{2 \cdot 161{,}84} = 1{,}06\, m$