

1. Troba les següents derivades:

Com derivar un polinomi:

Si $f(x) = \text{constant} \rightarrow f'(x) = 0$ Exemple $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

Si $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$ Exemple $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

Si $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$ Exemple $f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$

Si $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ Exemple $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$

Si $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ Exemple $f(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

Si $f(x) = g(x) + h(x) + i(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) + i'(x)$ Exemple $f(x) = 4x^3 + 2x + 1 \rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2$

Amb aquestes definicions ja estem en condicions de poder derivar les dues primeres funcions proposades a l'examen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x - 6 \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{9}{2}x^2 - \frac{5}{4}$$

$$g(x) = 2x^4 + \frac{1}{3}x - 3 \rightarrow g'(x) = 2 \cdot 4 \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 0 = 8x^3 + \frac{1}{3}$$

En les funcions racionals, aquelles que són fraccions de dues funcions o, millor dit, les que es corresponen amb una funció on els termes en x es troben en un denominador, es procedeix de la següent manera:

Si $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) = x^{-1}$ i $f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ Exemple $f(x) = \frac{2}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

Si $f(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow f(x) = (x-1)^{-1}$ i $f'(x) = -1 \cdot (x-1)^{-1-1} = -1 \cdot (x-1)^{-2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$

En general se segueix el que s'anomena la regla de la cadena. Si $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$. La derivada de la funció és: la derivada de la primera per la segona, més la primera per la derivada de la segona.

Suposem $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \rightarrow f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x-1} \rightarrow g(x) = x^2$ i $h(x) = \frac{1}{x-1}$

$g'(x) = 2x$ i $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ Ara apliquem la regla del producte $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$. I tenim:

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x-1} + x^2 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Per a divisions de polinomis, aplicant la regla del producte tenim l'expressió general:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

Si fem ara el problema de l'examen:

$$h(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x + 1} \rightarrow h'(x) = \frac{(6x - 5)(2x + 1) - (3x^2 - 5x + 2)(2)}{(2x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{12x^2 + 6x - 10x - 5 - 6x^2 - 10x + 4}{(2x + 1)^2} = \frac{6x^2 - 14x - 1}{(2x + 1)^2}$$

En el següent problema s'aplica directament la regla del producte:

$$i'(x) = \left(3x + \frac{2}{3}\right) \cdot (2x - 3) \rightarrow i'(x) = 3(2x - 3) + \left(3x + \frac{2}{3}\right) \cdot 2 = 6x - 9 + 3x + \frac{2}{3}$$

$$i(x) = 3x - 9 + \frac{2}{3} = 3x - \frac{27}{3} + \frac{2}{3} = 3x - \frac{25}{3}$$

Regla de la cadena:

$$\text{Si } f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \text{ Exemple } f(x) = \sqrt{3x^2} \rightarrow$$

$$\text{Si } g(x) = \sqrt{h(x)} \text{ i } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{h(x)}} \text{ on } h(x) = 3x^2 \text{ i } h'(x) = 6x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{h(x)}} \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2}}$$

Per al cas del nostre problema de l'examen:

$$j(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 6} \rightarrow j'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 6}} \cdot 6x - 4$$

2. Donada la funció

$$f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 5$$

Troba l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 1$

Com ja es va explicar a l'aula, l'equació de la recta tangent en un punt d'una funció ve donada per l'expressió:

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ on $f'(a)$ és el valor de la derivada de $f(x)$ en el punt a

Fem primer la derivada de la funció en el punt que ens donen $x = 1$

$$f'(x) = -3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x + 2 = -9x^2 + 8x + 2$$

I en el punt $x = 1$

$$f'(1) = -9(1)^2 + 8 \cdot 1 + 2 = -9 + 8 + 2 = 1$$

Ara trobem el valor de $f(1)$:

$$f(1) = -3(1)^3 + 4(1)^2 + 2 \cdot 1 - 5 = -3 + 4 + 2 - 5 = -2$$

Aplicant l'expressió de la recta abans esmentada:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \rightarrow y = 1(x - 1) - 2 \rightarrow y = x - 1 - 2 = x - 3$$

3. El cost total de fabricació, expressat en euros, de cer producte ve donat per l'expressió $C_{Total}(x) = 2x^2 + 60x + 15000$ on x representa el nombre d'unitats fabricades.

- a) Si cada unitat es ven a 300 €, planteja la funció benefici (ingressos menys costos) en funció de x suposant que es venen totes les unitats que es fabriquen.

Si es venen x unitats els ingressos seran $I(x) = 300x$

Els beneficis seran els ingressos menys els costos.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 300x - (2x^2 + 60x + 15000)$$

$$B(x) = 300x - 2x^2 - 60x - 15000$$

$$B(x) = -2x^2 + 240x - 15000$$

- b) Determineu el nombre d'unitats del producte que cal vendre perquè el benefici sigui màxim. Quant és aquest benefici màxim?

Per veure si alguna vegada els beneficis poden ser positius podríem veure com tendeix la funció fent 4 càlculs molt senzills, $B(10)$, $B(100)$, $B(1000)$ i $B(10000)$.

$$B(10) = -2(10)^2 + 240 \cdot 10 - 15000 = -200 + 2400 - 15000 = -12800 \text{ €}$$

$$B(100) = -2(100)^2 + 240 \cdot 100 - 15000 = -20000 + 24000 - 15000 = -11000 \text{ €}$$

$$B(1000) = -2(1000)^2 + 240 \cdot 1000 - 15000 = -2000000 + 240000 - 15000 = -11000 \text{ €}$$

$$B(10000) = -2(10000)^2 + 240 \cdot 10000 - 15000 = -200000000 + 2400000 - 15000 \\ = -19761500 \text{ €}$$

Com es pot veure, sempre hi ha pèrdues. El preu per unitat ha estat una errada del propietari del negoci.

Si intentem treu el màxim a partir de la derivada tindrem:

$$B'(x) = -4x + 240 = 0 \rightarrow 4x = 240 \rightarrow x = \frac{240}{4} = 60 \\ B(60) = -2(60)^2 + 240 \cdot 60 - 15000 = 0 \rightarrow B(60) = -7200 + 14400 - 15000 \\ = -7800 \text{ €}$$

En el millors dels casos hi hauran pèrdues per un muntant de 7800€.

No hi hauran beneficis.

Si s'hagués preguntat quin seria el preu mínim per tal de que puguin haver beneficis s'hauria de fer el següent anàlisi:

Si el preu per unitat fos a € per unitat venuda tindriem:

$$B(x) = ax - (2x^2 + 60x + 15000) = -2x^2 + (a - 60)x - 15000$$

I hauríem de plantejar en quins punts aquesta funció comença a ser positiva. Però seria millor trobar el màxim de la funció:

$$B'(x) = -4x + (a - 60) = 0 \rightarrow x = \frac{a - 60}{4}$$

Substituint aquest valor en la funció benefici tenim:

$$B\left(\frac{a - 60}{4}\right) = -2\left(\frac{a - 60}{4}\right)^2 + (a - 60)\frac{a - 60}{4} - 15000 > 0 \\ -2\left(\frac{a - 60}{4}\right)^2 + \frac{(a - 60)^2}{4} - 15000 > 0 \rightarrow -2\frac{(a - 60)^2}{16} + \frac{(a - 60)^2}{4} - 15000 > 0 \\ -\frac{(a - 60)^2}{8} + \frac{(a - 60)^2}{4} - 15000 > 0 \rightarrow -\frac{(a - 60)^2}{8} + \frac{2(a - 60)^2}{8} - 15000 > 0 \\ \frac{(a - 60)^2}{8} - 15000 > 0 \rightarrow \frac{(a - 60)^2}{8} > 15000 \rightarrow (a - 60)^2 > 8 \cdot 15000 \rightarrow (a - 60)^2 > 120000 \\ a - 60 > \sqrt{120000} \rightarrow a > 60 + 346,41 \rightarrow a > 406,41 \text{ €}$$

El preu mínim per poder obtenir beneficis hauria de ser de 406.41€.