

Trabajo Fin de Grado - Curso 2024/2025

# Métodos matemáticos en finanzas cuantitativas

Autor: Jesús Calbo Berenguer

Tutor: SERGIO LÓPEZ UREÑA



Grado en Matemáticas

# Resumen

Este Trabajo Fin de Grado presenta un recorrido, riguroso y auto-contenido, por los fundamentos matemáticos que sustentan las finanzas cuantitativas y su aplicación práctica. Tras introducir la teoría de la probabilidad y la descripción estocástica de los precios de los activos mediante ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), se describe formalmente el movimiento browniano y los modelos de Bachelier, Black–Scholes y Vasicek, estableciendo el marco teórico para la valoración de instrumentos financieros y la gestión de riesgos.

En el plano computacional se analizan los esquemas numéricicos de Euler–Maruyama y Milstein, comparando sus órdenes de convergencia y su eficiencia en la simulación de trayectorias. Estos métodos se integran en un motor de simulación Monte Carlo que permite valorar derivados europeos y validar, empíricamente, la fórmula cerrada de Black–Scholes.

El trabajo aborda asimismo la optimización de carteras bajo el modelo media-varianza de Markowitz. Se estudia el impacto de restricciones prácticas (en particular, la prohibición de posiciones cortas) sobre la frontera eficiente, demostrándose numéricamente la pérdida de eficiencia que conllevan.

Las simulaciones implementadas en MATLAB confirman la coherencia entre los resultados teóricos y los experimentales, y ponen de manifiesto la utilidad de las herramientas estocásticas y numéricas en la toma de decisiones financieras. Finalmente, se señalan posibles extensiones, como la incorporación de volatilidad estocástica o la valoración de derivados exóticos, que abren nuevas líneas para la investigación futura y la práctica profesional.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales estocásticas, simulación Monte Carlo, optimización de carteras, Black-Scholes, Vasicek, frontera eficiente, valoración de opciones.

# Abstract

This Final Degree Project presents a rigorous, self-contained journey through the mathematical foundations that underpin quantitative finance and their practical application. After introducing probability theory and the stochastic modelling of asset prices via stochastic differential equations (SDEs), the dissertation formally describes Brownian motion together with the Bachelier, Black–Scholes and Vasicek models, thereby establishing the theoretical framework for pricing financial instruments and managing risk.

On the computational side, the Euler–Maruyama and Milstein numerical schemes are analysed, comparing their convergence orders and their efficiency in simulating price paths. These methods are integrated into a Monte Carlo simulation engine that makes it possible to value European derivatives and to validate empirically the closed-form Black–Scholes formula.

The study also tackles portfolio optimisation within Markowitz’s mean–variance model. Practical constraints—most notably the ban on short selling—are incorporated and shown to shift the efficient frontier upwards and to the right, evidencing a measurable loss of efficiency.

MATLAB-based simulations confirm the consistency between theoretical and empirical results and highlight the practical value of stochastic and numerical techniques for financial decision-making. Finally, the dissertation outlines potential extensions—such as incorporating stochastic volatility or valuing exotic derivatives—that pave the way for future research and professional applications.

**Keywords:** stochastic differential equations; Monte Carlo simulation; portfolio optimization; Black–Scholes; Vasicek; efficient frontier; option pricing.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>2</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Ámbitos y enfoque del trabajo . . . . .	6
1.2. Estructura del documento . . . . .	6
<b>2. Fundamentos Matemáticos Previos</b>	<b>8</b>
2.1. Conceptos de probabilidad . . . . .	8
2.1.1. Espacios de probabilidad . . . . .	8
2.1.2. Variables aleatorias . . . . .	9
2.1.3. Distribuciones de probabilidad . . . . .	9
2.1.4. Esperanza, momentos y varianza . . . . .	10
2.2. Procesos estocásticos . . . . .	11
2.2.1. Filtraciones y procesos adaptados . . . . .	11
2.2.2. Incrementos independientes y estacionarios . . . . .	12
2.2.3. Martingalas . . . . .	12
2.3. Movimiento browniano . . . . .	13
2.3.1. Aproximación del movimiento browniano mediante paseos aleatorios . . . . .	15
2.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) . . . . .	16
2.4.1. Modelo determinista y motivación estocástica . . . . .	17
2.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) . . . . .	17
2.6. Integral estocástica e identidad de Itô . . . . .	19
2.6.1. Lema de Itô . . . . .	20
<b>3. Modelos Estocásticos de Activos</b>	<b>22</b>
3.1. Modelo de Bachelier . . . . .	22
3.2. Modelo log-normal de Black–Scholes . . . . .	23
3.3. Modelo de Vasicek para tasas de interés . . . . .	25
<b>4. Métodos Numéricos para la Resolución de EDEs</b>	<b>27</b>
4.1. Método de Euler-Maruyama . . . . .	27
4.2. Método de Milstein . . . . .	28

4.3.	Comparación de métodos numéricos . . . . .	30
4.3.1.	Análisis teórico . . . . .	30
4.3.2.	Experimento numérico . . . . .	30
4.3.3.	Implicaciones de coste . . . . .	31
<b>5.</b>	<b>Optimización de Carteras Financieras</b>	<b>32</b>
5.1.	Formulación matemática del problema de Markowitz . . . . .	32
5.2.	Solución del problema de Markowitz . . . . .	33
5.3.	Consideraciones prácticas . . . . .	35
5.3.1.	Observaciones finales . . . . .	36
<b>6.</b>	<b>Valoración de Derivados Financieros Básicos</b>	<b>37</b>
6.1.	Derivados financieros: definición y estructura matemática . . . . .	37
6.2.	Modelización estocástica del subyacente y cambio de medida . . . . .	38
6.3.	Valoración mediante simulación Monte Carlo . . . . .	40
6.3.1.	Aplicación a derivados con dependencias no estándar (extensiones) . . . . .	41
6.4.	Observaciones finales . . . . .	41
<b>7.</b>	<b>Implementación numérica de modelos financieros</b>	<b>42</b>
7.1.	Simulación de trayectorias bajo el modelo de Black–Scholes . . . . .	42
7.2.	Comparación de fronteras eficientes . . . . .	44
<b>8.</b>	<b>Conclusiones y Perspectivas Futuras</b>	<b>47</b>
<b>Índice de Figuras</b>		<b>49</b>
<b>Índice de tablas</b>		<b>50</b>
Anexo A: Códigos MATLAB utilizados . . . . .		51
A.1.	Simulación de trayectorias de un paseo aleatorio simple . . . . .	51
A.2.	Órdenes de convergencia Euler-Maruyama y Milstein . . . . .	52
A.3.	Frontera eficiente (ejemplo teoría) . . . . .	54
A.4.	Black-Scholes y no arbitraje . . . . .	55
A.5.	Optimización de carteras y generación de la frontera eficiente . . . . .	57

# Capítulo 1

## Introducción

Desde los inicios del siglo XX, el estudio cuantitativo de los mercados financieros ha evolucionado notablemente, pasando de modelos rudimentarios a estructuras matemáticas altamente sofisticadas. La tesis doctoral de Louis Bachelier en 1900 [1], considerada pionera en este ámbito, introdujo por primera vez una formulación estocástica para describir el comportamiento aleatorio de los precios en bolsa, anticipándose incluso al desarrollo riguroso del movimiento browniano por parte de Wiener y otros físicos-matemáticos. Décadas después, los trabajos de Black, Scholes y Merton consolidaron el uso de procesos estocásticos como herramienta principal en la valoración de derivados, marcando un hito fundacional en las finanzas cuantitativas modernas.

En el contexto actual, la evolución de los activos financieros no puede modelizarse mediante ecuaciones deterministas. La dinámica de los mercados está influida por una multiplicidad de factores inciertos (anuncios macroeconómicos, decisiones geopolíticas, innovaciones tecnológicas, entre otros), cuya interacción genera trayectorias de precios altamente volátiles. Esta inherente aleatoriedad convierte a la incertidumbre en un elemento estructural del sistema financiero.

Las finanzas cuantitativas surgen precisamente con el objetivo de representar y analizar, de forma matemática rigurosa, dicha incertidumbre. Combinando herramientas de la teoría de la probabilidad, los procesos estocásticos, la estadística matemática y el cálculo numérico, esta disciplina permite construir modelos capaces de capturar tanto las tendencias esperadas como las fluctuaciones aleatorias de los activos financieros.

Por ello, dentro del amplio abanico de aplicaciones de las finanzas cuantitativas se encuentran tareas fundamentales como la valoración de activos, la gestión de riesgos, la optimización de carteras, la cobertura de exposiciones o la modelización de tasas de interés. Este trabajo se centra en dos de estas aplicaciones que representan pilares fundamentales de la disciplina: la optimización de carteras y la valoración de derivados financieros básicos. La elección de estas áreas no responde únicamente a criterios didácticos, sino también al deseo de mostrar cómo las técnicas matemáticas desarrolladas a lo largo del trabajo pueden emplearse para resolver problemas concretos de interés práctico.

Para ello, se adoptará un enfoque basado en la modelización mediante ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), que permiten describir de manera coherente la evolución temporal de los precios bajo incertidumbre. Se presentarán las EDEs más representativas, a la vez que técnicas numéricas como los métodos de Euler–Maruyama o Milstein, ya que no todas las EDEs tiene solución explícita. Una vez terminada la parte teórica más general, se abordarán las dos aplicaciones principales: por un lado,

la construcción de carteras eficientes bajo la teoría media-varianza de Markowitz; por otro, la valoración de opciones europeas a través de simulación Monte Carlo. Cada aplicación irá precedida de la fundamentación teórica necesaria, lo que facilitará la interpretación de los resultados.

## 1.1. Ámbitos y enfoque del trabajo

El horizonte de las finanzas cuantitativas es muy extenso; por ello, este TFG acota su alcance con un itinerario progresivo que va de la teoría básica a la aplicación práctica.

En primer lugar se introducen los conceptos elementales de probabilidad continua —variables aleatorias, esperanza, varianza— que sirven de punto de partida para toda la exposición posterior. A continuación, se presentan los procesos estocásticos que modelizan la evolución temporal de la incertidumbre. Se introduce la noción de martingala y el movimiento browniano, estableciendo el marco sobre el que se construyen los modelos financieros modernos. Sobre esta base se aborda la transición de las ecuaciones diferenciales ordinarias a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Se expone la integral de Itô y se justifican los supuestos que permiten formular de forma rigurosa las EDE empleadas en finanzas.

En segundo lugar, una vez con la teoría introducida, se muestran los modelos clásicos con solución analítica —Bachelier, Black–Scholes y Vasicek—. Posteriormente, se introducen los método numéricos centrales en finanzas cuantitativas, como son Euler–Maruyama y Milstein, donde se estudia su consistencia local y su convergencia fuerte.

Finalmente, dado que las finanzas cuantitativas tienen diversas aplicaciones, decidimos elegir dos de ellas. Tratamos la optimización de carteras media-varianza de Markowitz y los derivados financieros. En este último bloque restringimos el análisis a las opciones europeas, ya que la valoración de derivados más complejos rebasa, por extensión y dificultad técnica, el alcance habitual de un TFG.

Esta secuencia —fundamentos, procesos, modelos y aplicaciones— muestra cómo la teoría estocástica y los algoritmos numéricos se traducen en herramientas concretas para el universo de las finanzas.

## 1.2. Estructura del documento

El presente trabajo se organiza en ocho capítulos, diseñados para guiar progresivamente al lector desde los fundamentos teóricos hasta las aplicaciones prácticas.

En el Capítulo 1 se introduce la motivación general del estudio, se presentan los objetivos principales del trabajo y se describe su estructura. Además, se contextualiza el ámbito de las finanzas cuantitativas y se justifican las áreas concretas que se abordarán en el proyecto.

El Capítulo 2 está dedicado a los fundamentos matemáticos necesarios para el posterior desarrollo. En él se revisan conceptos de probabilidad, procesos estocásticos y cálculo estocástico, prestando especial atención al movimiento browniano y a la integral de Itô, herramientas esenciales en el modelado financiero moderno.

En el Capítulo 3 se presentan distintos modelos estocásticos utilizados para describir la evolución de activos financieros. Se estudian el modelo de Bachelier, el modelo log-normal de Black–Scholes y el modelo de Vasicek para tasas de interés, analizando en cada caso su formulación, sus propiedades y su aplicabilidad.

El Capítulo 4 aborda los métodos numéricos empleados para la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Se describen los esquemas de Euler–Maruyama y Milstein, se analiza su precisión y se

discute su idoneidad en el contexto de las simulaciones financieras.

Posteriormente, en el Capítulo 5 se aplica la teoría de media-varianza de Markowitz para la optimización de carteras de inversión. Se introduce el problema clásico de Markowitz y se estudia su solución.

El Capítulo 6 está dedicado a la valoración de derivados financieros básicos. Se estudia la fórmula de Black-Scholes para opciones europeas y se implementa la simulación Monte Carlo como método alternativo de aproximación al precio teórico.

En el Capítulo 7 se recogen las implementaciones prácticas de los métodos desarrollados en capítulos anteriores. Se presentan simulaciones de trayectorias de precios, la optimización de carteras y la valoración de derivados, acompañadas de un análisis crítico de los resultados obtenidos.

Finalmente, el Capítulo 8 recoge las conclusiones generales del trabajo, discute las limitaciones de los modelos utilizados y sugiere posibles líneas de investigación futura.

El desarrollo del trabajo se apoya en un conjunto coherente de fuentes de referencia que cubren, de manera complementaria, los distintos pilares de las finanzas cuantitativas.

Para los *fundamentos matemáticos* se emplean, entre otros, los textos clásicos de Billingsley [3], Williams [28] y Çinlar [29]. El *cálculo estocástico* necesario para formalizar los modelos financieros se apoya en Karatzas y Shreve [13], Le Gall [16] y el tomo II de Shreve [25].

En cuanto a los *modelos de valoración de activos*, la obra de Björk [4] proporciona el marco de arbitraje continuo, mientras que las contribuciones seminales de Black y Scholes [5] y de Merton [20] sirven de base para la teoría moderna de opciones. La *simulación Monte Carlo* y los *métodos numéricos para EDE* se abordan con Glasserman [10], Øksendal [30] y Kloeden–Platen [15].

Para la *optimización* y la teoría de carteras se recurre a Boyd y Vandenberghe [6], Luenberger [18] y al trabajo fundacional de Markowitz [19]. Por último, Hull [12] se utiliza como guía práctica y panorámica de los instrumentos derivados, además de muchas otras referencias puntuales que se irán introduciendo a lo largo del trabajo.

Este corpus bibliográfico asegura la solidez teórica y numérica del proyecto y servirá de base para profundizar, cuando sea necesario, en aspectos especializados que pudieran surgir durante el desarrollo del TFG.

## Capítulo 2

# Fundamentos Matemáticos Previos

### 2.1. Conceptos de probabilidad

Para iniciar, es importante dejar claro que la incertidumbre es un componente esencial en los fenómenos financieros. Como hemos anticipado, para modelizar de manera rigurosa esta aleatoriedad, resulta necesario introducir primero los conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad. Siguiendo principalmente a [29] y [28], en esta sección se presentan los elementos básicos: espacios de probabilidad, variables aleatorias, distribuciones, esperanza y momentos.

#### 2.1.1. Espacios de probabilidad

Un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado no puede preverse con certeza (no es determinista), pero sí puede describirse mediante un modelo matemático que asigne probabilidades a los distintos posibles resultados. Este modelo formal se basa en el concepto de espacio de probabilidad.

**Definición 2.1.1.** (*Espacio de probabilidad, [29, p. 49]*). Una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  constituye un espacio de probabilidad si:

- $\Omega$  es el conjunto de todos los posibles resultados, llamado espacio muestral.
- $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , cuyos elementos se denominan sucesos.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad que satisface:
  1.  $\mathbb{P}(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,
  2.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
  3. Para cualquier colección numerable de sucesos disjuntos  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Este marco asegura que podamos manejar situaciones donde los sucesos son infinitos o incluso no numerables, aspecto clave cuando tratamos con trayectorias de procesos estocásticos.

### 2.1.2. Variables aleatorias

No obstante, aunque la noción de suceso permite modelizar eventos del tipo "¿ocurre o no cierto fenómeno?", en aplicaciones prácticas (especialmente en el ámbito financiero) resulta más natural asociar valores numéricos a los resultados del experimento aleatorio. En lugar de limitarse a describir si un activo sube o baja, interesa cuantificar su variación, calcular su rendimiento o estimar el valor futuro de una inversión. Este paso de los sucesos al análisis cuantitativo se formaliza mediante el concepto de variable aleatoria, que asigna a cada posible resultado del experimento un valor real y permite construir herramientas estadísticas a partir de ellos.

**Definición 2.1.2.** (*Variable aleatoria, [29, p. 51]*). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo conjunto boreliano  $B \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Esta condición de  $\mathcal{F}$ -medibilidad es esencial para garantizar que la variable aleatoria esté correctamente integrada en el marco del espacio de probabilidad. En particular, asegura que la preimagen de cualquier intervalo boreliano  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , esto es

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\},$$

sea un suceso bien definido dentro de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ . Esto permite asignar de manera rigurosa una probabilidad a cualquier afirmación cuantitativa sobre  $X$ , como por ejemplo  $\mathbb{P}(X \leq x)$ , habilitando así el análisis estadístico de los modelos.

### 2.1.3. Distribuciones de probabilidad

Una vez introducida la noción de variable aleatoria, el siguiente paso natural consiste en describir cómo se distribuye la probabilidad sobre los valores numéricos que esta puede adoptar. Este reparto se formaliza mediante la distribución de probabilidad asociada, la cual permite cuantificar la probabilidad de que la variable caiga en un determinado conjunto de la recta real.

**Definición 2.1.3.** (*Distribución de probabilidad, [29, p. 51]*). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria. Su distribución de probabilidad es la medida  $\mathbb{P}_X$  definida sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mediante:

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Esta construcción traslada la medida abstracta  $\mathbb{P}$  definida sobre  $\Omega$  a una medida concreta sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , permitiendo analizar el comportamiento probabilístico de los valores de  $X$ . En el caso en que  $\mathbb{P}_X$  sea absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, existe una función de densidad  $f_X$  tal que:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x) dx, \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La función  $f_X$  contiene toda la información relevante sobre la distribución: simetría, dispersión, colas pesadas, etc. En el ámbito financiero, la distribución normal o gaussiana ha sido durante décadas el modelo de referencia para los rendimientos de activos. Esta elección se justifica en parte por el Teorema

Central del Límite, pero también por su tractabilidad analítica. No obstante, suponer normalidad puede subestimar la probabilidad de eventos extremos, como caídas abruptas de mercado, lo que ha motivado el estudio de distribuciones alternativas.

#### 2.1.4. Esperanza, momentos y varianza

La *esperanza matemática* (o valor esperado) es el promedio ponderado de los valores que puede tomar una variable aleatoria; puede interpretarse como el centro de gravedad de la distribución siempre que la esperanza exista. Los *momentos* (de orden superior), y en particular la *varianza*, cuantifican la dispersión y la forma de dicha distribución alrededor de su media.

**Definición 2.1.4.** (*Esperanza* [29, p. 58]). *Sea  $X$  una variable aleatoria integrable sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Su esperanza se define como*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

donde  $f_X$  es la densidad de  $X$  cuando existe. El  $n$ -ésimo momento es  $\mathbb{E}[X^n]$ , siempre que exista.

**Definición 2.1.5.** (*Varianza* [29, p. 60]). *Si  $X$  admite esperanza finita, su varianza se define como*

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Esta identidad, conocida como fórmula de König–Huygens, simplifica el cálculo práctico de la varianza.

**Proposición 2.1.6.** (*Propiedades básicas* [29, p. 60]). *Sean  $X, Y$  variables aleatorias y  $a, b \in \mathbb{R}$ .*

1.  $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$ .
2.  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ .
3. Si  $X$  y  $Y$  son independientes,  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .

Estas propiedades permiten descomponer el riesgo de combinaciones lineales de variables, hecho esencial en la construcción de carteras.

Para contextualizar el ejemplo que presentaremos a continuación, aclaramos primero la terminología básica.

**Nota 2.1.7.** *En finanzas, un activo es cualquier instrumento susceptible de inversión. La rentabilidad de un activo en un periodo se modeliza mediante una variable aleatoria  $R$ . Su esperanza  $\mathbb{E}[R]$  cuantifica el rendimiento (o retorno) medio, mientras que su varianza  $\text{Var}(R)$  mide el riesgo asociado.*

**Ejemplo 2.1.8.** (*Rentabilidad y riesgo de una cartera*) *Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  el vector de rentabilidades de  $n$  activos y  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  un vector de pesos con  $\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1$ . Denotando  $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$  y  $\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{X})$ , la rentabilidad de la cartera es  $R = \mathbf{w}^T \mathbf{X}$  y se verifica*

$$\mathbb{E}[R] = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \quad \text{Var}(R) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}.$$

Para  $n = 3$ ,

$$\text{Var}(R) = \sum_{i=1}^3 w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

donde  $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$  y  $\rho_{ij} = \text{Cor}(X_i, X_j)$ . Esta expresión muestra que correlaciones negativas pueden reducir la varianza total (beneficio de la diversificación), mientras que correlaciones positivas cercanas a uno anulan dicho efecto.

## 2.2. Procesos estocásticos

Siguiendo principalmente a [29, 28], introducimos la noción de *proceso estocástico*

**Definición 2.2.1.** (*Proceso estocástico* [29, pp. 53–54]). *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y  $T \subseteq \mathbb{R}_+$  un conjunto de índices temporales. Un proceso estocástico real es una aplicación*

$$X : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R},$$

*tal que, para cada  $t \in T$ , la función  $\omega \mapsto X(\omega, t)$  es  $\mathcal{F}$ -medible. De forma equivalente, escribimos la familia  $\{X(t)\}_{t \in T}$ , donde  $X(t) := X(\cdot, t)$  es una variable aleatoria, y para  $\omega \in \Omega$  la trayectoria  $t \mapsto X(t, \omega)$  describe una posible evolución del fenómeno.*

Esta doble lectura proporciona el marco adecuado para introducir filtraciones, adaptabilidad e incrementos independientes y estacionarios, herramientas necesarias en el cálculo de Itô que desarrollaremos más adelante.

### 2.2.1. Filtraciones y procesos adaptados

La modelización de la incertidumbre temporal no se limita a describir cómo evolucionan las variables aleatorias a lo largo del tiempo; también exige representar de forma precisa la evolución de la información disponible. En los modelos financieros, resulta esencial diferenciar entre lo que puede conocerse en un instante dado y lo que permanece oculto hasta el futuro. Esta necesidad se formaliza mediante el concepto de filtración.

**Definición 2.2.2.** (*Filtración*, [16, p. 41]). *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras tal que:*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t.$$

La idea intuitiva es que  $\mathcal{F}_t$  reúne todos los eventos observables antes (e incluyendo) el instante  $t$ .

El crecimiento de la filtración refleja que, a medida que pasa el tiempo, disponemos de más información sobre el sistema aleatorio.

**Definición 2.2.3.** (*Proceso adaptado*, [29, p. 172]). *Un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  es adaptado a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si, para cada  $t \geq 0$ , la variable aleatoria  $X(t)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.*

La noción de adaptabilidad será esencial cuando estudiemos más adelante los modelos de precios de activos, ya que en finanzas un inversor no puede conocer el futuro con certeza. Toda estrategia de inversión debe construirse a partir de la información disponible hasta ese instante.

### 2.2.2. Incrementos independientes y estacionarios

Dentro de los procesos estocásticos, una clase particularmente relevante está constituida por aquellos que presentan incrementos independientes y estacionarios. Estas propiedades estructurales permiten construir modelos donde la dinámica aleatoria no depende del instante de observación, sino únicamente del tiempo transcurrido, y donde los cambios en distintos intervalos temporales no interfieren entre sí.

**Definición 2.2.4.** (*Incrementos independientes y estacionarios, [29, p. 279]*). Sea  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico. Se dice que posee:

- *Incrementos independientes si, dados instantes  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias*

$$X(t_1) - X(t_0), \quad X(t_2) - X(t_1), \quad \dots, \quad X(t_n) - X(t_{n-1}),$$

*son mutuamente independientes.*

- *Incrementos estacionarios si, para todo  $s, t \geq 0$ , la distribución de  $X(t + s) - X(s)$  depende únicamente de  $t$ , y no del punto de inicio  $s$ .*

**Observación 2.2.5.** De la definición anterior se deduce que, si  $0 \leq s < t < u$ , entonces  $X(t) - X(s)$  y  $X(u) - X(t)$  son independientes.

Esta propiedad se utilizará explícitamente en el análisis de trayectorias simuladas, así como en la deducción de fórmulas de valoración en modelos financieros donde se asume independencia entre los pasos temporales de un activo subyacente. El movimiento browniano, que será desarrollado en la siguiente sección, constituye el paradigma de un proceso con incrementos independientes y estacionarios, y es el núcleo sobre el que se construyen numerosos modelos estocásticos en finanzas cuantitativas.

**Nota 2.2.6.** Los procesos con incrementos independientes y estacionarios —como el movimiento browniano o el proceso de Poisson— forman parte de una clase más general conocida como procesos de Lévy. Estos procesos permiten modelar trayectorias con saltos y son fundamentales en la teoría moderna de precios de activos. Su desarrollo detallado excede el alcance de este trabajo; el lector interesado puede consultar, por ejemplo, [23].

### 2.2.3. Martingalas

Una martingala formaliza un “juego justo”: con la información disponible hasta un instante  $s$ , la esperanza condicional del proceso en un instante posterior  $t > s$  coincide con su valor en  $s$ .

**Definición 2.2.7.** (*Martingala [29, p. 181]*) Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado y  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso adaptado tal que  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$  para todo  $t \geq 0$ . Decimos que  $X$  es una martingala si, para todo  $0 \leq s < t$ ,

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s.$$

Cuando la desigualdad es  $\geq$  (resp.  $\leq$ ) hablamos de submartingala (resp. supermartingala).

Concretamente, la noción de martingala nos interesa para la Sección 6, de modo que introducimos el siguiente resultado:

**Corolario 2.2.8.** (*Valoración neutral al riesgo*[4, p. 103]) Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un mercado financiero sin arbitraje. Entonces existe una medida de probabilidad  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ , denominada medida neutral al riesgo, tal que para todo activo negociable  $S$  con precio descontado  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  se cumple

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Es decir,  $\tilde{S}$  es una martingala bajo  $\mathbb{Q}$ .

El Corolario 2.2.8 será la piedra angular de la Sección 6, donde, trabajando bajo  $\mathbb{Q}$ , obtendremos la fórmula de Black-Scholes para opciones europeas. Sin embargo, hay muchos conceptos que merece la pena aclarar.

**Nota 2.2.9.** (*Guía rápida de conceptos*)

- Sin arbitraje. Un mercado es sin arbitraje si no existe una estrategia autofinanciada con coste inicial cero cuyo valor final  $V_T$  satisface  $V_T \geq 0$  c.s. y  $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$ . En otras palabras, un mercado sin arbitraje es aquel en el que no existe ninguna forma de obtener ganancias seguras sin invertir capital ni asumir riesgo.
- Medidas equivalentes. Escribimos  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$  cuando ambas medidas asignan probabilidad cero a los mismos sucesos (comparten los conjuntos nulos).
- Medida neutral al riesgo. Una medida equivalente  $\mathbb{Q}$  es neutral al riesgo si los precios descontados  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  de todo activo negociable verifican

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s, \quad 0 \leq s \leq t,$$

es decir,  $\tilde{S}$  es martingala bajo  $\mathbb{Q}$ .

Entonces, tras presentar el concepto de martingala —procesos “justos” cuyo valor medio no cambia con la información acumulada— conviene mostrar un ejemplo continuo que encarne todas sus propiedades y que, además, se utilice habitualmente en finanzas. Ese ejemplo es el movimiento browniano.

El browniano es la martingala más sencilla y, a la vez, más versátil: tiene incrementos independientes y estacionarios, surge como límite difusivo de paseos aleatorios y constituye el bloque de ruido que aparece en la mayoría de ecuaciones diferenciales estocásticas empleadas para modelizar precios.

## 2.3. Movimiento browniano

El movimiento browniano (o proceso de Wiener) es el prototipo de proceso continuo con incrementos independientes y estacionarios. Fue observado por primera vez en suspensión de granos de polen por Robert Brown (1828) y explicado desde la física estadística por Einstein (1905). La construcción matemática rigurosa se debe a Norbert Wiener (1923) [7, 8, 27]. A lo largo de esta sección seguiremos principalmente a [16], [29], [28] y [3].

**Definición 2.3.1.** (*Movimiento browniano estándar*, [16, p. 20, 27]). Un proceso estocástico  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar si cumple:

1.  $W(0) = 0$  casi seguro.
2. Las trayectorias  $t \mapsto W(t)$  son continuas casi seguro.

3. Para todo  $0 \leq s < t$ , el incremento  $W(t) - W(s)$  sigue una distribución normal con media cero y varianza  $t - s$ :

$$W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

4. Los incrementos sobre intervalos disjuntos son independientes.

Este proceso es gaussiano, de media cero, con incrementos independientes y estacionarios.

Además de sus propiedades básicas, el browniano posee características avanzadas que resultan cruciales en teoría estocástica.

**Definición 2.3.2** (Variación cuadrática [13]). *Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico continuo y  $t \geq 0$ . Para una partición*

$$\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\} \subset [0, t], \quad |\Pi| = \max_k (t_{k+1} - t_k),$$

definimos la suma de cuadrados de los incrementos sobre  $\Pi$  como

$$V(X, \Pi)_t = \sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2.$$

Decimos que  $X$  admite variación cuadrática si, al refinar la partición,

$$V(X, \Pi)_t \xrightarrow[|\Pi| \rightarrow 0]{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t,$$

donde  $\langle X \rangle = \{\langle X \rangle_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso adaptado y continuo creciente. A este límite lo llamamos variación cuadrática de  $X$  hasta el instante  $t$ .

**Proposición 2.3.3.** (Variación cuadrática del movimiento browniano, [16, p. 84]). *Sea  $W(t)$  un movimiento browniano estándar. Entonces:*

$$\langle W \rangle_t = t$$

donde  $\langle W \rangle_t$  denota la variación cuadrática del proceso hasta el instante  $t$ .

Esta propiedad será clave al construir la integral de Itô en el próximo capítulo.

**Proposición 2.3.4.** (Irregularidad de trayectorias, [28, p. 27]). *Casi seguro, las trayectorias de  $W(t)$  no son diferenciables en ningún punto.*

Este resultado explica por qué el movimiento browniano no puede tratarse como una función suave y anticipa la necesidad de desarrollar un nuevo tipo de cálculo —el cálculo estocástico— para tratar con integrales respecto a  $W(t)$ .

### 2.3.1. Aproximación del movimiento browniano mediante paseos aleatorios

Aunque el movimiento browniano estándar se define como un proceso continuo en el tiempo, es posible aproximararlo mediante modelos discretos más sencillos. Esta aproximación resulta particularmente valiosa desde el punto de vista teórico, ya que permite justificar rigurosamente su aparición como límite de procesos aleatorios elementales.

La construcción se basa en un paseo aleatorio simétrico de pasos  $\pm 1$ , definido como:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

donde  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con  $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = \mathbb{P}(\xi_k = -1) = \frac{1}{2}$ . Este proceso, aunque definido en tiempo discreto, puede ser transformado en una función continua mediante un reescalado adecuado y una interpolación lineal entre los puntos enteros.

Definimos así el proceso interpolado

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}, \quad t \in [0, T],$$

que representa la trayectoria continua aproximada del sistema, a partir de los pasos discretos.

El resultado clave es que esta familia de procesos  $\{W_n(t)\}_{t \in [0, T]}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , converge en distribución hacia un movimiento browniano estándar. Esto queda formalizado en el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.5** (Teorema de Donsker, [3, p. 90]). *Sea  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  una sucesión i.i.d. con  $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$  y  $\text{Var}(\xi_k) = 1$ , y sea  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . Para  $n \geq 1$  y  $t \in [0, 1]$  definimos*

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}.$$

*Entonces  $X^n$  converge en distribución al movimiento browniano estándar  $W$  en el espacio  $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$*

Este teorema, también conocido como el *principio del límite funcional*, puede considerarse como una generalización funcional del teorema central del límite. Mientras que este último describe la convergencia de una suma de variables aleatorias a una distribución normal, Donsker garantiza la convergencia de procesos estocásticos a un proceso gaussiano continuo.

Desde una perspectiva financiera, esta aproximación fundamenta la legitimidad de emplear modelos continuos (como los basados en ecuaciones diferenciales estocásticas) a partir de fenómenos esencialmente discretos, como la evolución diaria del precio de un activo. Además, su estructura se utiliza explícitamente en simulaciones Monte Carlo, como veremos en los capítulos prácticos posteriores.

Esta aproximación permite realizar simulaciones numéricas, que serán de gran utilidad cuando valoremos derivados o generaremos escenarios de evolución de precios.

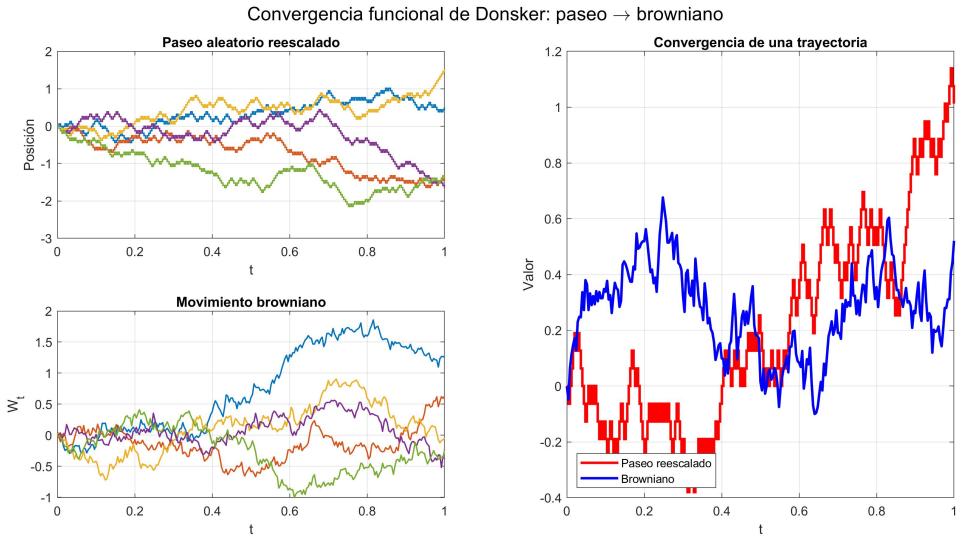


Figura 2.1: Convergencia difusiva ilustrada. Arriba-izquierda: cinco paseos aleatorios simétricos reescalados ( $\Delta S_k = \pm 1$ ) con pasos  $N = 250$ . Abajo-izquierdo: cinco trayectorias de un movimiento browniano estándar. Derecha: una trayectoria de cada proceso superpuesta. La similitud visual apoya el Teorema de Donsker–Kolmogórov: el paseo reescalado converge en distribución a  $W_t$  en  $\mathcal{C}[0, 1]$ .

## 2.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

Antes de introducir las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), conviene repasar brevemente el concepto de ecuación diferencial ordinaria (EDO), base del análisis de sistemas dinámicos deterministas. A pesar de que el enfoque determinista resulta insuficiente para describir la evolución de los mercados financieros, su comprensión es esencial para entender posteriormente la generalización al caso estocástico.

**Definición 2.4.1.** (*Ecuación diferencial ordinaria*). *Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto y sea  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una relación de la forma:*

$$\left( \frac{dy}{dt} \right) (t) = f(t, y(t)),$$

donde  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  es la función incógnita.

Un caso de interés fundamental es el denominado problema de valor inicial (PVI), en el que además se prescribe el valor de la solución en un punto concreto del dominio. Escribimos la definición formal de este problema.

**Definición 2.4.2.** (*Problema de valor inicial*). *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y sea  $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua. Dado un punto  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ , llamamos problema de valor inicial (PVI) al sistema*

$$\left( \frac{dy}{dt} \right) (t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

**Definición 2.4.3.** (*Solución clásica del PVI*, [21, p. 15]) Sea  $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^m$  un dominio que contiene  $(t_0, y_0)$ . Decimos que una función  $y : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^m$  (con  $\mathcal{J} \subset I$  intervalo) es solución clásica del PVI (2.4.2) si se cumplen:

1.  $y$  es continua en  $\mathcal{J}$  y derivable en  $\text{int}(\mathcal{J})$ .
2.  $(t, y(t)) \in \Omega \forall t \in \text{int}(\mathcal{J})$ .
3.  $y'(t) = f(t, y(t)) \forall t \in \text{int}(\mathcal{J})$ .
4.  $t_0 \in \mathcal{J}$  y  $y(t_0) = y_0$ .

Los resultados clásicos de existencia y unicidad, como el teorema de Picard–Lindelöf (véase, por ejemplo, [26, p. 38]), aseguran que si  $f$  es continua y satisface una condición de Lipschitz respecto a la segunda variable, entonces el problema tiene una única solución local.

#### 2.4.1. Modelo determinista y motivación estocástica

Como ejemplo representativo de EDO en el contexto financiero, consideramos el modelo de capitalización continua, donde el valor de un activo evoluciona de forma determinista bajo una tasa de interés constante.

Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo abierto, y supongamos que una función  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  representa el valor de un activo financiero en el instante  $t \in I$ . El modelo de capitalización compuesta postula que  $S$  satisface la ecuación:

$$S'(t) = rS(t), \quad \forall t \in I, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Por resultados estándar del cálculo diferencial,

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tal que } S(t) = Ke^{rt}, \quad \forall t \in I.$$

Si además se impone una condición inicial del tipo  $S(0) = S_0 > 0$ , la unicidad de la solución del problema de valor inicial garantiza que:

$$S(t) = S_0 e^{rt}, \quad \forall t \in I.$$

Esta dinámica refleja un crecimiento exponencial continuo y determinista, y constituye la solución de una EDO lineal autónoma de primer orden. Aunque este modelo resulta útil para ilustrar la estructura funcional de una EDO, presenta limitaciones severas en el ámbito financiero real, al no incorporar ninguna fuente de aleatoriedad ni permitir fluctuaciones de mercado.

Este contraste entre comportamiento determinista y comportamiento aleatorio será el punto de partida para la formulación estocástica que introduciremos en la siguiente sección.

### 2.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs)

Partiendo de la motivación expuesta en la sección anterior, formalizamos ahora las EDEs en el entorno probabilístico introducido en el Capítulo 2.

De manera general, una EDE permite modelizar la evolución de un proceso aleatorio  $X(t)$  cuya dinámica viene determinada por dos funciones: una *deriva*, que describe la evolución media del proceso, y una *difusión*, que cuantifica la intensidad del componente aleatorio.

**Definición 2.5.1.** (*Ecuación diferencial estocástica*, [16, p. 132]). Sea  $W(t)$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Una ecuación diferencial estocástica es una relación de la forma:

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t), \quad X(0) = x_0,$$

donde:

- $\mu : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de derivación;
- $\sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es el coeficiente de difusión;
- $X(t)$  es un proceso estocástico adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ .

Esta ecuación debe interpretarse en sentido integral:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dW(s),$$

donde la segunda integral se define como una *integral de Itô*, que requiere una construcción específica debido a la falta de regularidad del movimiento browniano (posteriormente lo veremos).

Para garantizar el buen planteamiento del problema impondremos las dos condiciones clásicas siguientes:

(H1) (Lipschitz global) Existe  $L > 0$  tal que  $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y| \forall t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}$ .

(H2) (Crecimiento lineal) Existe  $K > 0$  con  $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|) \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ .

Dependiendo del contexto, podemos distinguir distintas nociones de solución:

**Definición 2.5.2** (*Soluciones de una EDE* [16, p. 258]). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado, sea  $W(t)$  un movimiento browniano respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  y considérese la EDE

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW(s), \quad t \in [0, T].$$

Decimos que  $X(t)$  es

- solución fuerte si  $X$  es  $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado, tiene trayectorias continuas y satisface la ecuación anterior  $\mathbb{P}$ -c.s.;
- solución débil si existe algún espacio filtrado  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t \geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$ , un browniano  $\tilde{W}$  y un proceso  $\tilde{X}$  adaptado a dicha filtración que cumplen la misma ecuación.

La distinción es relevante por dos motivos: (i) los teoremas de existencia–unicidad que utilizaremos (condiciones (H1)–(H2)) garantizan una *solución fuerte y única*; ello legitima los esquemas de Euler–Maruyama que implementaremos más adelante; (ii) al relajar las hipótesis (por ejemplo en modelos con raíz cuadrada o con saltos) puede fallar la existencia fuerte, pero una solución débil sigue describiendo correctamente la ley del proceso, que suele ser suficiente para la valoración bajo medidas neutrales al riesgo (véase [30]). Por ello, aunque en este trabajo trabajaremos casi siempre con soluciones fuertes, dejamos constancia de ambas nociones para situar adecuadamente los resultados. Sin embargo, debemos asegurarnos que la solución existe y es única.

**Teorema 2.5.3.** (*Existencia y unicidad* [30, pp. 56–57]) Bajo (H1)–(H2) y para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$ , existe una única solución fuerte continua  $X = \{X(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  que satisface la ecuación integral anterior.

**Observación 2.5.4.** Los coeficientes constantes  $(\mu, \sigma)$  o proporcionales al estado  $(\mu x, \sigma x)$  cumplen (H1)–(H2); por tanto, los modelos de movimiento browniano con deriva y de Black–Scholes tienen solución fuerte única.

**Ejemplo 2.5.5.** (*Movimiento browniano con deriva*). Sean  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  constantes. La EDE

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad X(0) = x_0,$$

admite la solución explícita

$$X(t) = x_0 + \mu t + \sigma W(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

que describe un movimiento browniano con deriva lineal.

La obtención de soluciones cerradas más elaboradas (por ejemplo, la EDE de Black–Scholes) requiere el *lema de Itô* y una construcción rigurosa de la integral estocástica. Estos instrumentos los presentamos a continuación

## 2.6. Integral estocástica e identidad de Itô

Como hemos visto, la formulación de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) en la sección anterior introduce términos del tipo  $\sigma(X(t), t) dW(t)$ , donde  $W(t)$  es un movimiento browniano. Para dotar de sentido a estas expresiones, se requiere una teoría de integración que pueda manejar funciones altamente irregulares. Este es precisamente el papel de la *integral de Itô*, que desarrollamos a continuación siguiendo a [16] y [29].

A diferencia del caso determinista, las trayectorias del movimiento browniano  $t \mapsto W(t)$  son continuas pero casi seguramente no diferenciables en ningún punto. Además, presentan variación cuadrática infinita en todo intervalo compacto (véase Prop. 2.3.3). Esta naturaleza impide el uso de integrales de Riemann o Riemann–Stieltjes, y tampoco es posible definir una integral de Lebesgue respecto a  $W$ , ya que no es de variación acotada.

Estas dificultades motivan la introducción de un nuevo concepto: la integral de Itô, diseñada específicamente para operar sobre trayectorias de procesos estocásticos adaptados a una filtración dada.

Comenzamos definiendo la integral de Itô para procesos simples, que constituyen la base del desarrollo general posterior.

**Definición 2.6.1.** (*Integral de Itô para procesos simples*, [16, p. 47]). Sea  $W(t)$  un movimiento browniano estándar y sea  $\{t_i\}_{i=0}^n$  una partición de  $[0, T]$ . Un proceso simple es una función del tipo:

$$H(t) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1})}(t),$$

donde cada  $H_i$  es  $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible. Se define entonces la integral de Itô de  $H$  respecto a  $W$  como:

$$\int_0^T H(t) dW(t) := \sum_{i=0}^{n-1} H_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

**Definición 2.6.2.** (*Espacio de integrandos y extensión por cierre, [16, p. 98]*). Sea  $T > 0$ . Definimos

$$\mathcal{H}^2([0, T]) = \left\{ H : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ prog. medible} : \mathbb{E} \left[ \int_0^T H(t)^2 dt \right] < \infty \right\}.$$

Los procesos simples son densos en  $\mathcal{H}^2([0, T])$  con la norma  $\|H\|_2 = (\mathbb{E} \int_0^T H(t)^2 dt)^{1/2}$ . Gracias a la isometría de Itô, el operador

$$I_T : \mathcal{H}^2([0, T]) \longrightarrow L^2(\Omega), \quad I_T(H) = \int_0^T H(t) dW(t),$$

es isométrico y, por continuidad, se extiende de forma única a todo  $\mathcal{H}^2([0, T])$ .

**Proposición 2.6.3.** (*Isometría de Itô, [29, p. 526]*). Sea  $H$  un proceso simple en  $[0, T]$ . Entonces:

$$\mathbb{E}[(I_T(H))^2] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T H(t)^2 dt \right].$$

En particular, el operador  $I_T : \mathcal{H}^2([0, T]) \longrightarrow L^2(\Omega)$  es isométrico.

### 2.6.1. Lema de Itô

El *lema de Itô* proporciona una versión estocástica de la regla de la cadena y describe cómo evoluciona una función suficientemente suave de un proceso que satisface una EDE.

**Teorema 2.6.4.** (*Lema de Itô [16, p. 113]*). Sea  $X(t)$  un proceso que satisface

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t), \quad X(0) = x_0,$$

y sea  $f \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T])$ . Entonces el proceso  $Y(t) = f(X(t), t)$  verifica

$$\begin{aligned} dY(t) = & \left( \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + \mu(t, X(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t) \right) dt + \sigma(t, X(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) dW(t). \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.6.5.** (*Proceso de Ornstein–Uhlenbeck*) Sea  $\theta > 0$ . Consideremos la EDE lineal con retroceso a la media

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Multiplicando por el factor integrante  $e^{\theta t}$  obtenemos  $e^{\theta t} dX_t + \theta e^{\theta t} X_t dt = \sigma e^{\theta t} dW_t$ ; integrando,

$$X_t = x_0 e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s.$$

La media y la varianza se deducen, a partir de su definición:

$$\mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{-\theta t}, \quad \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}),$$

donde la segunda igualdad emplea la isometría de Itô. En particular,  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2/(2\theta))$ , es decir, converge en distribución.

El proceso de Ornstein–Uhlenbeck es el modelo continuo más sencillo con reversión a la media: cuando  $X_t$  se aleja del nivel 0, el término determinista  $-\theta X_t dt$  lo empuja de vuelta, mientras que  $\sigma dW_t$  introduce fluctuaciones aleatorias. Esta combinación lo convierte en el punto de partida habitual para describir tasas de interés a corto plazo (modelo de Vasicek), volatilidades estocásticas y series de materias primas. Contar con la forma cerrada anterior facilita el cálculo de momentos, la calibración de parámetros y la simulación de trayectorias.

Con esta herramienta ya podemos resolver explícitamente las EDEs que modelan precios; empezamos en el Capítulo 3.

## Capítulo 3

# Modelos Estocásticos de Activos

Con las herramientas de teoría de la probabilidad, procesos estocásticos y cálculo estocástico introducidas hasta ahora, podemos abordar la modelización de precios de activos financieros desde una perspectiva rigurosa. Para ello, nos centraremos en estudiar diversos modelos estocásticos.

### 3.1. Modelo de Bachelier

La tesis doctoral de Louis Bachelier, presentada en 1900 [1], representa el primer intento riguroso de modelizar matemáticamente la evolución de precios financieros. En ella, se introdujo un enfoque basado en trayectorias continuas y fluctuaciones aleatorias, décadas antes de que Wiener formalizara el movimiento browniano. Esta propuesta inicial, a pesar de sus limitaciones, constituye el origen de los modelos estocásticos en finanzas.

Formularemos a continuación el modelo de Bachelier en el marco moderno de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Se trata de un ejemplo lineal con solución explícita, que más adelante compararemos con modelos log-normales como el de Black-Scholes (Sección 3.2) y utilizaremos como base para simulaciones numéricas (Capítulo 7).

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado que soporta un movimiento browniano es-tándar  $W = (W(t))_{t \geq 0}$ , adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)$ .

**Definición 3.1.1** (Modelo de Bachelier [1, p. 1]). *El precio de un activo financiero se modeliza mediante un proceso estocástico  $S = (S(t))_{t \geq 0}$  que satisface la ecuación diferencial estocástica*

$$dS(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad S(0) = S_0,$$

donde  $S_0 \in \mathbb{R}$  es el valor inicial,  $\mu \in \mathbb{R}$  es la tasa de crecimiento esperada, y  $\sigma > 0$  representa la volatilidad.

Esta ecuación corresponde a una EDE lineal con coeficientes constantes, como las que ya analizamos en la Sección 2.5. Su solución se obtiene de forma directa mediante integración:

**Proposición 3.1.2.** (*Solución y distribución marginal [29, p. 380]*). *El proceso  $S(t)$  admite la expresión*

$$S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t),$$

y, para cada  $t \geq 0$ , se distribuye como

$$S(t) \sim \mathcal{N}(S_0 + \mu t, \sigma^2 t).$$

*Demostración:*

Al tratarse de una EDE con coeficientes constantes, su solución viene dada por

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW(s) = S_0 + \mu t + \sigma W(t).$$

Dado que  $W(t)$  es normal con media cero y varianza  $t$ , se concluye que  $S(t)$  sigue una distribución normal con los parámetros indicados.  $\square$

Este modelo extiende el planteamiento determinista de capitalización compuesta (Sección 2.4.1) incorporando una fuente de aleatoriedad intrínseca. La introducción del término estocástico  $\sigma dW(t)$  permite capturar fluctuaciones aleatorias en el precio, una característica estructural de los mercados financieros reales.

**Proposición 3.1.3.** (*Distribución condicional [29, p. 381]*). Para todo  $0 \leq s \leq t$ , se cumple que

$$\mathbb{E}[S(t) | \mathcal{F}_s] = S(s) + \mu(t - s), \quad \text{Var}[S(t) | \mathcal{F}_s] = \sigma^2(t - s).$$

*Demostración:*

De la expresión explícita se obtiene

$$S(t) = S(s) + \mu(t - s) + \sigma(W(t) - W(s)),$$

donde el incremento  $W(t) - W(s)$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  y sigue una distribución normal de media cero y varianza  $t - s$ . Aplicando linealidad de la esperanza y propiedades de la varianza se obtiene el resultado.  $\square$

El modelo de Bachelier tiene incrementos independientes y estacionarios, con una varianza que crece linealmente con el tiempo. Esta estructura lo convierte en un modelo útil desde el punto de vista computacional y como punto de comparación teórica. Sin embargo, también introduce una limitación importante: al tratarse de un proceso gaussiano aditivo, los precios pueden volverse negativos con probabilidad positiva, lo que lo hace inadecuado para activos cuyo valor está acotado inferiormente por cero.

## 3.2. Modelo log-normal de Black–Scholes

Después del modelo de Bachelier, en el que los precios evolucionan aditivamente con fluctuaciones gaussianas, el siguiente paso natural consiste en imponer una restricción estructural: que el precio del activo se mantenga estrictamente positivo en todo momento. Esta exigencia conduce al modelo log-normal de Black–Scholes, formulado en 1973 por Black y Scholes [5], y desarrollado formalmente por Merton ese mismo año [20]. Esta nueva formulación adopta una dinámica multiplicativa que refleja mejor el comportamiento observado en los mercados financieros reales y permite derivar fórmulas explícitas de valoración de opciones.

**Definición 3.2.1.** (*Movimiento geométrico browniano o modelo de Black–Scholes [4, p. 67]*). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad filtrado que soporta un movimiento browniano estándar  $W = (W(t))_{t \geq 0}$ . El precio de un activo financiero se modeliza como un proceso estocástico  $S = (S(t))_{t \geq 0}$  que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = S_0 > 0,$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  es la tasa de crecimiento esperada,  $\sigma > 0$  es la volatilidad relativa, y  $S_0$  representa el precio inicial del activo.

Esta ecuación describe una evolución proporcional: tanto la deriva como la magnitud de las perturbaciones aleatorias aumentan linealmente con el valor del activo. Este comportamiento es coherente con la evidencia empírica en numerosos activos financieros, donde las variaciones absolutas suelen ser mayores cuando el precio es elevado.

**Proposición 3.2.2.** (*Solución del modelo [4, p. 68]*) La solución del modelo de Black–Scholes está dada por

$$S(t) = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right),$$

para todo  $t \geq 0$ .

*Demostración:*

Sea  $(W(t))_{t \geq 0}$  un movimiento browniano estándar definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y consideremos el proceso  $S(t)$  que satisface la EDE

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = S_0 > 0.$$

Aplicamos el lema de Itô al proceso  $S(t)$ . Sea  $X(t) := \log S(t)$ . Recordemos que el lema de Itô, para una función  $f \in C^2(\mathbb{R})$  y un proceso  $Y(t)$  con  $dY(t) = a(t) dt + b(t) dW(t)$ , establece

$$df(Y(t)) = \left( a(t)f'(Y(t)) + \frac{1}{2}b(t)^2 f''(Y(t)) \right) dt + b(t)f'(Y(t)) dW(t).$$

Para  $f(x) = \log x$  se tiene  $f'(x) = 1/x$  y  $f''(x) = -1/x^2$ ; tomando  $Y(t) = S(t)$  (de modo que  $a(t) = \mu S(t)$  y  $b(t) = \sigma S(t)$ ):

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left( \mu S(t) \cdot \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \cdot \left( -\frac{1}{S(t)^2} \right) \right) dt + \sigma S(t) \cdot \frac{1}{S(t)} dW(t) \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

Integrando ambos lados entre 0 y  $t$ , obtenemos:

$$\log S(t) = \log S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t),$$

y por tanto:

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right].$$

□

Por la forma exponencial obtenida, se observa que  $S(t) > 0$  casi seguramente, ya que la función exponencial nunca se anula. Esto es esencial para modelizar correctamente activos financieros cuyo precio no puede ser negativo.

**Proposición 3.2.3.** (*Distribución de  $S(t)$*  [4, p. 33]) Para cada  $t \geq 0$ , el proceso  $S(t)$  sigue una distribución log-normal. En particular,

$$\log S(t) \sim \mathcal{N} \left( \log S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).$$

*Demostración:*

El resultado se deduce directamente de la expresión obtenida para  $\log S(t)$ , que es una combinación lineal de una constante y de un movimiento browniano  $W(t)$ , el cual es normal con varianza  $t$ .  $\square$

### 3.3. Modelo de Vasicek para tasas de interés

Mientras que los modelos de precios como Bachelier o Black–Scholes permiten una evolución libre del activo, las tasas de interés presentan un comportamiento estructuralmente distinto: tienden a estabilizarse en torno a un valor de equilibrio. Esta propiedad, conocida como reversión a la media, es clave para modelizar con realismo la dinámica de los tipos de interés a corto plazo.

El modelo de Vasicek, propuesto en 1977, introduce esta característica mediante una ecuación diferencial estocástica lineal, conservando la tratabilidad analítica y permitiendo soluciones explícitas.

**Definición 3.3.1.** (*Modelo de Vasicek* [4, p. 381]) La tasa de interés corta  $r(t)$  evoluciona según la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0,$$

donde  $a > 0$  es la velocidad de reversión,  $b \in \mathbb{R}$  el nivel de largo plazo,  $\sigma > 0$  la volatilidad, y  $W(t)$  un movimiento browniano estándar.

El término determinista  $a(b - r(t))$  actúa como fuerza de corrección: cuanto más se aleja la tasa del nivel  $b$ , mayor es la intensidad del retorno. Esta estructura da lugar a un comportamiento estable, fundamental en aplicaciones relacionadas con renta fija.

**Proposición 3.3.2.** (*Solución explícita* [4, p. 382]) La solución del modelo de Vasicek es

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s).$$

*Demostración:*

Partimos de la ecuación

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW(t).$$

La reescribimos como

$$dr(t) + ar(t) dt = ab dt + \sigma dW(t).$$

Multiplicamos ambos lados por el factor integrante  $e^{at}$ , obteniendo:

$$e^{at} dr(t) + ae^{at} r(t) dt = abe^{at} dt + \sigma e^{at} dW(t),$$

lo que equivale a

$$d(e^{at}r(t)) = abe^{at}dt + \sigma e^{at}dW(t).$$

Integrando entre 0 y  $t$ ,

$$e^{at}r(t) - r_0 = ab \int_0^t e^{as}ds + \sigma \int_0^t e^{as}dW(s).$$

Dado que

$$\int_0^t e^{as}ds = \frac{1}{a}(e^{at} - 1),$$

se concluye

$$e^{at}r(t) = r_0 + b(e^{at} - 1) + \sigma \int_0^t e^{as}dW(s),$$

y dividiendo por  $e^{at}$  en ambos lados se obtiene

$$r(t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}dW(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

□

**Proposición 3.3.3.** (*Esperanza condicional [25, p. 151]*). Para todo  $0 \leq s \leq t$ , se cumple

$$\mathbb{E}[r(t) | \mathcal{F}_s] = r(s)e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}).$$

**Observación 3.3.4.** La esperanza condicional converge exponencialmente hacia el nivel de reversión  $b$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , lo que justifica su interpretación como valor estructural de equilibrio. La rapidez de convergencia depende del parámetro  $a$ .

**Proposición 3.3.5.** (*Varianza condicional [25, p. 151]*) Para todo  $0 \leq s \leq t$ , se cumple

$$\text{Var}(r(t) | \mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right).$$

**Observación 3.3.6.** La varianza se estabiliza en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , alcanzando el valor  $\frac{\sigma^2}{2a}$ . Esto caracteriza el grado de dispersión que el proceso mantiene en régimen estacionario.

## Capítulo 4

# Métodos Numéricos para la Resolución de EDEs

Los modelos estudiados en capítulos anteriores (Bachelier, Black–Scholes, Vasicek) son excepciones afortunadas: sus EDE admiten solución cerrada. En la práctica, la mayoría de las ecuaciones estocásticas presentan coeficientes no lineales, dependencias temporales o estructuras multidimensionales que imposibilitan una resolución analítica.

De ahí el interés por métodos numéricos capaces de construir aproximaciones discretas  $\{X_{t_i}\}_{i=0}^N$  a la trayectoria del proceso y de proporcionar estimaciones controladas del error (consistencia, convergencia y orden). A diferencia del caso determinista, debemos respetar la estructura probabilística de la solución: los incrementos  $W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$  son independientes y dictan la forma de los esquemas.

**Nota 4.0.1.** *Salvo indicación contraria, supondremos a lo largo del capítulo que los coeficientes  $\mu$  y  $\sigma$  satisfacen las hipótesis (H1)–(H2) introducidas en la p. 18: Lipschitz global y crecimiento lineal.*

**Definición 4.0.2** (Problema de Cauchy estocástico). *Sea  $W(t)$  un movimiento browniano estándar definido sobre un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Una EDE de tipo Itô tiene la forma*

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

donde  $\mu : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\sigma : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfacen (H1)–(H2)

Nuestro objetivo será construir esquemas que produzcan aproximaciones numéricas de  $X(t)$  evaluadas en una malla discreta del intervalo  $[0, T]$ , manteniendo bajo control el error introducido.

### 4.1. Método de Euler-Maruyama

El método de Euler–Maruyama constituye la aproximación numérica más sencilla y directa para simular ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô. Inspirado en el esquema de Euler clásico para EDOs, este método fue desarrollado para abordar la simulación de procesos en los que interviene un movimiento browniano y no es posible obtener una solución explícita.

Consideramos una EDE del tipo

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

donde  $W(t)$  es un movimiento browniano estándar y los coeficientes  $\mu$  y  $\sigma$  cumplen condiciones de Lipschitz y crecimiento lineal.

El intervalo de simulación  $[0, T]$  se divide en  $N$  subintervalos de paso uniforme  $h = T/N$ , con nodos  $t_n = nh$ . El esquema de Euler–Maruyama construye una aproximación discreta de la trayectoria de  $X(t)$  a través de la relación recursiva

$$Y_{n+1} = Y_n + \mu(Y_n, t_n) h + \sigma(Y_n, t_n) \Delta W_n,$$

que produce una aproximación  $Y_n \approx X(t_n)$ , donde

$$\Delta W_n := W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim \mathcal{N}(0, h), \quad \Delta W_n \text{ independiente de } \mathcal{F}_{t_n}.$$

El análisis teórico del método demuestra que, bajo hipótesis estándar, la consistencia local es de orden  $O(h^2)$ , es decir, el error que se comete en un solo paso de integración es cuadrático respecto al tamaño de paso.

**Proposición 4.1.1.** (*Consistencia local [15, p. 342]*). *Sea  $Y_{n+1}$  la actualización de Euler–Maruyama a partir de  $Y_n$ . Entonces, bajo (H1)–(H2),*

$$\mathbb{E}[|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|^2] = O(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Además, el método converge en media cuadrática hacia la solución exacta con orden  $1/2$ , lo que significa que el error acumulado sobre todo el intervalo satisface

$$\left( \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq n \leq N} |X(t_n) - Y_n|^2 \right] \right)^{1/2} = O(h^{1/2}).$$

**Proposición 4.1.2** (Convergencia fuerte [15, p. 342]). *Bajo (H1)–(H2),*

$$\left( \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq n \leq N} |X(t_n) - Y_n|^2 \right] \right)^{1/2} = O(h^{1/2}).$$

Esta convergencia implica que, si se desea alcanzar una tolerancia de error global  $\varepsilon$ , debe tomarse un tamaño de paso  $h = O(\varepsilon^2)$ , lo cual exige un número de pasos  $N = O(\varepsilon^{-2})$ . Dado que el coste computacional por paso es constante, el coste total de simular una trayectoria completa hasta tiempo  $T$  es proporcional a  $\varepsilon^{-2}$ .

**Observación 4.1.3.** *El orden de convergencia fuerte del método de Euler–Maruyama es inferior al de métodos clásicos para ecuaciones deterministas. Esta limitación es consecuencia inherente de la presencia del término aleatorio, y motiva la búsqueda de esquemas numéricos de mayor orden, como el método de Milstein, que será tratado a continuación.*

## 4.2. Método de Milstein

Aunque el método de Euler–Maruyama proporciona una aproximación razonable para muchas ecuaciones diferenciales estocásticas, su orden de convergencia fuerte limitado a  $O(h^{1/2})$  puede resultar

insuficiente en contextos donde se requiere una mayor precisión. Para superar esta limitación, el método de Milstein introduce un término correctivo de segundo orden que permite alcanzar convergencia fuerte de orden uno bajo hipótesis estándar.

Consideramos nuevamente la EDE de tipo Itô

$$dX(t) = \mu(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  satisfacen condiciones de Lipschitz global y crecimiento lineal, y  $W(t)$  es un movimiento browniano estándar. De nuevo, se discretiza el intervalo  $[0, T]$  con paso uniforme  $h = T/N$ , generando los nodos  $t_n = nh$ ,  $n = 0, \dots, N$ .

El método de Milstein aproxima la trayectoria de  $X(t)$  mediante la relación recursiva

$$Y_{n+1} = Y_n + \mu(Y_n, t_n) h + \sigma(Y_n, t_n) \Delta W_n + \frac{1}{2} \sigma(Y_n, t_n) \sigma_x(Y_n, t_n) ((\Delta W_n)^2 - h),$$

donde  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) \sim \mathcal{N}(0, h)$ , y  $\sigma_x$  denota la derivada parcial de  $\sigma$  respecto a su primer argumento.

Este esquema se obtiene aplicando el lema de Itô a un desarrollo de segundo orden de la solución, donde se retiene el efecto del término cuadrático  $(\Delta W_n)^2 - h$ , que está ausente en el método de Euler–Maruyama. Dicha corrección mejora sustancialmente la precisión de la aproximación, sin alterar de forma drástica la estructura computacional.

**Proposición 4.2.1.** (*Consistencia local [15, p. 350]*). *Bajo hipótesis estándar, el método de Milstein satisface*

$$\mathbb{E}[|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|^2] = O(h^3), \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

**Proposición 4.2.2.** (*Convergencia fuerte [15, p. 350]*). *Si  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $\sigma_x$  son Lipschitz globales, el método de Milstein converge en media cuadrática con orden uno:*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq n \leq N} |X(t_n) - Y_n|^2 \right]^{1/2} = O(h).$$

Este resultado implica que, para obtener un error global de tolerancia  $\varepsilon$ , basta con elegir un tamaño de paso  $h = O(\varepsilon)$ , lo cual requiere un número de pasos  $N = O(\varepsilon^{-1})$ , frente a los  $O(\varepsilon^{-2})$  necesarios en Euler–Maruyama. Por tanto, en términos teóricos, el método de Milstein mejora sustancialmente la eficiencia.

No obstante, esta mejora viene acompañada de ciertos costes adicionales. El cálculo del término correctivo requiere evaluar  $\sigma_x$ , lo cual puede ser computacionalmente costoso o incluso impracticable si  $\sigma$  no es diferenciable de forma explícita. Además, el método tal como se ha descrito está pensado para EDEs unidimensionales. En el caso multidimensional, el desarrollo completo involucra términos cruzados entre las componentes del movimiento browniano, lo que incrementa notablemente la complejidad de implementación.

En problemas de baja dimensión y con coeficientes suficientemente regulares, el método de Milstein representa una mejora clara respecto a Euler–Maruyama. Su mayor orden de convergencia permite alcanzar una tolerancia fijada con menor número de pasos, lo que compensa el coste adicional asociado a la evaluación de derivadas. Por esta razón, es ampliamente utilizado en contextos donde se exige precisión, como en simulación de trayectorias para cálculo de sensibilidades (greeks) o en estimación de precios de opciones bajo esquemas refinados.

### 4.3. Comparación de métodos numéricos

En esta sección comparamos la eficiencia de Euler–Maruyama (EM) y Milstein para la integración de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs).

#### 4.3.1. Análisis teórico

Recordando lo mencionado, en convergencia fuerte, EM alcanza orden  $\mathcal{O}(h^{1/2})$ , de modo que para lograr una tolerancia global  $\varepsilon$  se requiere un paso  $h = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y, por tanto,  $N = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$  iteraciones. El esquema de Milstein incorpora un término correctivo de segundo orden y eleva el orden fuerte a  $\mathcal{O}(h)$ ; bastan entonces  $h = \mathcal{O}(\varepsilon)$  y  $N = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ .

Ambos métodos tienen coste *por paso* constante en dimensión 1. Sin embargo, Milstein exige la derivada  $\sigma_x$ , cuyo cómputo puede duplicar el trabajo si no está disponible en forma cerrada. En dimensión superior, EM se extiende sin cambios, mientras que Milstein requiere términos de áreas de Lévy que complican la implementación.

#### 4.3.2. Experimento numérico

Para cuantificar la diferencia práctica entre los dos esquemas utilizamos el movimiento geométrico browniano introducido en la Definición 3.2.1 con parámetros  $\mu = 0.5$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $S_0 = 1$  y horizonte  $T = 1$ . A cada tamaño de paso  $h = T/N$  generamos  $M = 10^4$  trayectorias independientes.

**Observación 4.3.1.** (*Cálculo del RMSE*) *Se usa el mismo camino browniano en la solución exacta (3.2.2) y en la aproximación  $\widehat{S}_N$ , de modo que el error cuadrático medio de raíz (RMSE) estima el error fuerte:*

$$\text{RMSE}(h) = \left( \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |S^{(i)}(T) - \widehat{S}_N^{(i)}|^2 \right)^{1/2}, \quad N = T/h.$$

La Figura 4.1 y la Tabla 4.1 muestran, respectivamente, los valores de RMSE obtenidos y las pendientes empíricas en escala log–log.

$N$	$h$	$\text{RMSE}_{\text{EM}}$	$\text{RMSE}_{\text{Milstein}}$
100	$1.00 \times 10^{-2}$	$1.15 \times 10^{-2}$	$3.85 \times 10^{-3}$
200	$5.00 \times 10^{-3}$	$8.10 \times 10^{-3}$	$1.98 \times 10^{-3}$
400	$2.50 \times 10^{-3}$	$5.49 \times 10^{-3}$	$9.45 \times 10^{-4}$
800	$1.25 \times 10^{-3}$	$3.89 \times 10^{-3}$	$4.89 \times 10^{-4}$
1600	$6.25 \times 10^{-4}$	$2.68 \times 10^{-3}$	$2.46 \times 10^{-4}$
Pendiente log–log		0.53	1.00

Cuadro 4.1: RMSE al tiempo final  $T = 1$  para distintos pasos  $h = T/N$  ( $M = 10^4$  trayectorias). La última fila muestra la pendiente estimada en escala log–log.

Los resultados confirman la teoría: la recta de Euler–Maruyama (EM) presenta una pendiente numérica próxima a  $-1/2$ , mientras que la de Milstein se alinea con  $-1$ . Para un mismo  $h$ , la mejora es apreciable: con  $h = 10^{-3}$  el RMSE baja de  $4.0 \times 10^{-3}$  (EM) a  $5.0 \times 10^{-4}$  (Milstein).

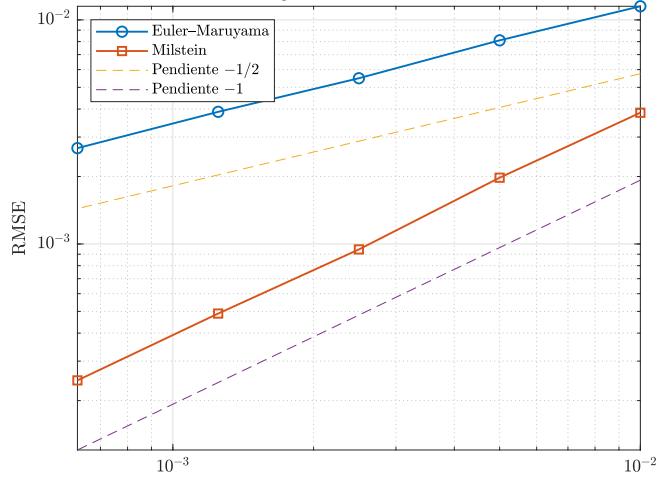


Figura 4.1: Convergencia fuerte para los métodos de Euler–Maruyama (azul) y Milstein (naranja), con eje X tamaño de paso ( $h$ ). Las líneas de referencia indican las pendientes teóricas  $-1/2$  y  $-1$ .

#### 4.3.3. Implicaciones de coste

Si se exige una tolerancia global  $\varepsilon = 10^{-3}$ , el orden  $1/2$  de EM implica  $N = O(\varepsilon^{-2}) \approx 10^6$  pasos; Milstein, de orden  $1$ , necesita sólo  $N = O(\varepsilon^{-1}) \approx 10^3$ . En el GBM el término adicional  $\frac{1}{2}\sigma^2((\Delta W_n)^2 - h)$  añade apenas una multiplicación por paso, de modo que la ganancia asintótica se materializa plenamente.

**Nota 4.3.2.** *La complejidad baja de  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$  a  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$  únicamente si la derivada  $\sigma'(x)$  se evalúa a coste comparable al de  $\sigma(x)$ . En modelos donde  $\sigma$  no es diferenciable (p.ej. volatilidad raíz cuadrada en Heston [11]) o su derivada es cara, Euler–Maruyama sigue siendo la alternativa práctica.*

Los dos algoritmos son la base de las simulaciones estocásticas en finanzas cuantitativas. Aunque procesos como Black–Scholes o Vasicek admiten solución cerrada, la mayoría de modelos realistas carece de ella y requiere aproximación numérica. Entender la precisión y el coste de cada esquema resulta, por tanto, esencial.

## Capítulo 5

# Optimización de Carteras Financieras

La evolución estocástica de los precios de los activos financieros, que hemos explicado en los capítulos anteriores, plantea de forma natural el problema de cómo asignar de manera óptima una riqueza entre varios activos con rendimientos inciertos. Esta cuestión se centra en decidir cómo combinar activos con diferentes perfiles de rentabilidad y riesgo para alcanzar ciertos objetivos de inversión bajo incertidumbre.

En su formulación más clásica, este problema se aborda mediante el enfoque media-varianza propuesto por Markowitz en [19]. Bajo esta perspectiva, el rendimiento de una cartera se modeliza como la esperanza matemática del retorno total, mientras que el riesgo se mide mediante la varianza de dicho retorno. El objetivo consiste en construir carteras que, para un nivel deseado de rentabilidad esperada, minimicen la varianza del rendimiento, o viceversa.

Desde un punto de vista matemático, este enfoque conduce a un problema de programación cuadrática convexa, donde las decisiones de inversión se representan mediante vectores de ponderaciones  $w \in \mathbb{R}^n$  que asignan proporciones de riqueza a cada activo. La existencia de una matriz de covarianzas positiva definida garantiza la convexidad del problema y, por tanto, la existencia y unicidad de la solución óptima bajo condiciones estándar.

De este modo, formulamos este problema de forma precisa, abordaremos su resolución analítica mediante multiplicadores de Lagrange, y discutiremos los aspectos prácticos relacionados con la estimación de parámetros, siguiendo principalmente [6].

### 5.1. Formulación matemática del problema de Markowitz

Una cartera formada por  $n$  activos se representa mediante un vector de pesos  $w \in \mathbb{R}^n$ ; cada componente  $w_i$  indica la fracción de riqueza asignada al activo  $i$ . La restricción de presupuesto impone

$$w^\top \mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{1} := (1, \dots, 1)^\top.$$

Sea  $r \in \mathbb{R}^n$  el vector aleatorio de rendimientos, con esperanza  $\mu = \mathbb{E}[r]$  y covarianza  $\Sigma = \text{Cov}(r)$ . El rendimiento de la cartera es  $w^\top r$ , con  $\mathbb{E}[w^\top r] = w^\top \mu$  y  $\text{Var}(w^\top r) = w^\top \Sigma w$ .

**Definición 5.1.1.** *Problema clásico de Markowitz [6, pp. 155-156]. Dado un objetivo de rentabilidad  $m \in \mathbb{R}$ , el problema consiste en*

$$\begin{aligned} & \underset{w \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{2} w^\top \Sigma w \\ & \text{sujeto a} \quad w^\top \mathbf{1} = 1, \\ & \quad w^\top \mu = m, \end{aligned}$$

La matriz  $\Sigma$  es simétrica y semidefinida positiva; si además es definida positiva, la función objetivo es estrictamente convexa y la solución óptima es única. Las restricciones son afines, de modo que el conjunto factible es convexo.

**Observación 5.1.2.** *Restricciones prácticas habituales [6, p. 156] El planteamiento media-varianza suele complementarse con restricciones lineales que preservan la convexidad del problema. Las dos más usadas son:*

- (i) *Prohibición de posiciones cortas.* Se exige  $w \geq 0$ , de modo que ninguna posición puede ser negativa y la cartera queda puramente “larga”.
- (ii) *Límites de concentración.* Para evitar una exposición excesiva a un único activo (sector, factor, etc.) se imponen cotas superiores  $w_i \leq u_i$  o, de forma agregada, restricciones del tipo  $a^\top w \leq c$ . Estas variantes —que mantienen intacta la estructura convexa del modelo— se analizarán numéricamente en la Sección 7.2.

## 5.2. Solución del problema de Markowitz

La resolución del problema formulado en la sección anterior puede abordarse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Dado que la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales, el problema entra dentro del marco de la programación convexa y admite solución cerrada.

**Proposición 5.2.1.** *(Solución óptima del problema de Markowitz [6, pp. 155-156]) Sea  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica definida positiva y  $\mu \in \mathbb{R}^n$  el vector de rendimientos esperados. Dado un nivel deseado de rentabilidad  $m \in \mathbb{R}$ , el problema*

$$\begin{aligned} & \underset{w \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad \frac{1}{2} w^\top \Sigma w \\ & \text{sujeto a} \quad w^\top \mathbf{1} = 1, \\ & \quad w^\top \mu = m, \end{aligned}$$

admite una única solución

$$w^* = \Sigma^{-1}(\lambda \mathbf{1} + \nu \mu),$$

donde los multiplicadores  $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$  satisfacen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mu \\ \mu^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} & \mu^\top \Sigma^{-1} \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

*Demostración:*

La función Lagrangiana es

$$\mathcal{L}(w, \lambda, \nu) = \frac{1}{2} w^\top \Sigma w - \lambda(w^\top \mathbf{1} - 1) - \nu(w^\top \mu - m).$$

Las condiciones de primer orden (KKT) dan

$$\nabla_w \mathcal{L} = \Sigma w - \lambda \mathbf{1} - \nu \mu = 0 \implies w = \Sigma^{-1}(\lambda \mathbf{1} + \nu \mu).$$

Sustituyendo en las restricciones se obtiene

$$\begin{aligned} w^\top \mathbf{1} &= \lambda \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \nu \mu^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1, \\ w^\top \mu &= \lambda \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mu + \nu \mu^\top \Sigma^{-1} \mu = m. \end{aligned}$$

Definiendo  $A = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}$ ,  $B = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mu$  y  $C = \mu^\top \Sigma^{-1} \mu$ , obtenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Su inversión  $2 \times 2$  da inmediatamente

$$\lambda = \frac{C - mB}{AC - B^2}, \quad \nu = \frac{mA - B}{AC - B^2}.$$

Como  $\Sigma \succ 0$  (definida positiva) implica  $AC - B^2 > 0$ , la matriz es simétrica definida positiva e invertible; por tanto,  $(\lambda, \nu)$  existe y es único. Sustituyendo estos multiplicadores en  $w = \Sigma^{-1}(\lambda \mathbf{1} + \nu \mu)$  se obtiene la cartera óptima  $w^*$ .

□

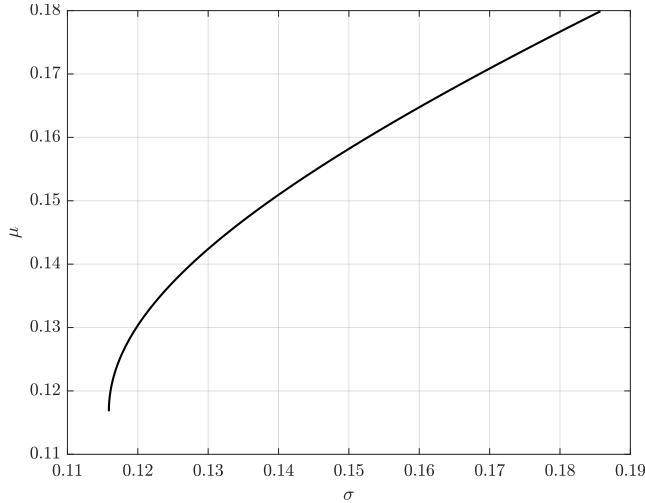


Figura 5.1: Frontera eficiente correspondiente a un universo sintético de tres activos  $\mu = (0.10, 0.14, 0.18)$  y matriz de covarianzas  $\text{diag}(0.015, 0.040, 0.035)$  con correlaciones moderadas. El arco convexo ilustra el intercambio óptimo entre riesgo ( $\sigma$ ) y rentabilidad esperada ( $\mu$ ) cuando se varía el objetivo  $m$ .

La Figura 5.1 permite visualizar la noción de *frontera eficiente* introducida en la observación anterior sin referirse todavía a datos de mercado. Cada punto del arco negro corresponde a la solución del problema

de Markowitz para un valor de rentabilidad deseada  $m$ . El extremo inferior izquierdo identifica la cartera de mínima varianza; conforme  $m$  crece, la volatilidad aumenta de manera convexo-cuadrática, reflejando la estructura de covarianzas postulada. Este ejemplo didáctico servirá de referencia cuando, en la Sección 7.2, reconstruyamos fronteras análogas a partir de precios reales en los tres universos temáticos estudiados.

**Observación 5.2.2.** (*Extensión long-only*). *Sea  $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$  el vector de ponderaciones relativas invertidas en cada activo, de modo que  $w_i$  representa la fracción del capital total asignada al título  $i$ . La condición  $w_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) prohíbe las ventas en corto y define un universo long-only. Al incorporar estas desigualdades, las condiciones KKT introducen multiplicadores  $\gamma_i \geq 0$ , interpretables como los costos de sombra de relajar la restricción en el activo  $i$  — y las ecuaciones de holgura  $\gamma_i w_i = 0$ . El sistema completo adopta la forma*

$$\begin{cases} 2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} - \nu \mu - \gamma = 0, \\ w^\top \mathbf{1} = 1, \quad w^\top \mu = m, \\ w \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma \odot w = 0, \end{cases}$$

donde  $\odot$  denota el producto componente a componente. Para dimensiones moderadas el problema se resuelve de forma exacta con un solver de programación cuadrática; en universos más extensos se emplean métodos activos o esquemas de proyección. Los ejemplos numéricos del Capítulo 7 utilizan precisamente esta formulación long-only.

### 5.3. Consideraciones prácticas

En la formulación clásica del problema de Markowitz, se asume que tanto el vector de medias  $\mu = \mathbb{E}[r]$  como la matriz de covarianzas  $\Sigma = \text{Cov}(r)$  son conocidos con exactitud. Sin embargo, en aplicaciones reales, estos parámetros deben ser estimados a partir de datos históricos, lo cual introduce un nivel considerable de incertidumbre.

El impacto de errores en la estimación de  $\mu$  y  $\Sigma$  es asimétrico. Aunque ambos afectan a la solución óptima  $w^*$ , la sensibilidad del problema respecto a  $\Sigma$  es particularmente elevada. Este fenómeno ha sido estudiado extensamente en la literatura, destacando que pequeñas perturbaciones en las covarianzas pueden producir variaciones sustanciales en la cartera óptima, especialmente cuando la matriz estimada es mal condicionada o casi singular [18, p. 110].

**Observación 5.3.1.** *La solución óptima del problema de Markowitz depende de forma explícita de la inversa de la matriz de covarianzas  $\Sigma$ . En presencia de un pequeño valor propio  $\lambda_{\min} > 0$ , la cantidad  $\Sigma^{-1}$  amplifica inevitablemente cualquier error de estimación en la dirección correspondiente al autovector asociado. Este efecto puede producir soluciones numéricamente inestables o carteras excesivamente concentradas en activos con varianza mal estimada.*

Para mitigar estos problemas, se han propuesto múltiples estrategias. Una de las más utilizadas es la regularización de la matriz de covarianzas, por ejemplo mediante el modelo de shrinkage hacia una matriz diagonal o hacia la matriz identidad escalada. Estos enfoques permiten mejorar la condición numérica del problema, a costa de introducir un pequeño sesgo en la estimación.

Por otro lado, la estimación del vector de medias  $\mu$  también es problemática, ya que su varianza estimada es típicamente elevada, especialmente cuando se trabaja con series temporales cortas o con muchos activos. En la práctica, el uso de restricciones menos estrictas sobre  $\mu$ , como intervalos de confianza o bandas de tolerancia, permite construir modelos más robustos a errores de especificación. Estas limitaciones han motivado el desarrollo de extensiones teóricas de la optimización clásica de carteras. Entre ellas se encuentran los modelos de optimización robusta, que incorporan incertidumbre paramétrica de forma explícita, y los enfoques bayesianos, donde la información previa y las nuevas observaciones se combinan de forma coherente a través de distribuciones posteriores.

A pesar de estas dificultades, la formulación de Markowitz sigue siendo el punto de partida fundamental para el análisis de decisiones de inversión bajo incertidumbre.

### 5.3.1. Observaciones finales

La optimización de carteras financieras basada en el enfoque media-varianza proporciona una estructura matemática sólida para la toma de decisiones bajo incertidumbre. Su formulación como un problema de minimización de una forma cuadrática sujeta a restricciones lineales garantiza la existencia de soluciones óptimas únicas y permite caracterizar geométricamente el conjunto de carteras eficientes. No obstante, la sensibilidad de la solución respecto a errores de estimación en los parámetros, especialmente en la matriz de covarianzas, subraya la necesidad de enfoques más robustos en aplicaciones reales. Modelos que incorporan incertidumbre en los parámetros, como los enfoques de optimización robusta desarrollados en la literatura reciente, permiten construir carteras menos sensibles a perturbaciones de los datos de entrada [6]. Para una panorámica de extensiones habituales —optimización robusta [2], shrinkage de covarianzas [17], criterios CVaR [22]— (véanse las referencias indicadas). A partir de este punto, dejamos de lado el problema de selección óptima de carteras para centrarnos en la valoración teórica de instrumentos derivados, es decir, contratos cuyo valor depende funcionalmente del comportamiento de un activo subyacente.

## Capítulo 6

# Valoración de Derivados Financieros Básicos

### 6.1. Derivados financieros: definición y estructura matemática

Un derivado financiero es un instrumento cuyo valor depende funcionalmente de uno o varios activos subyacentes. Desde un punto de vista matemático, puede describirse como una función que asigna a cada trayectoria del subyacente un valor de pago en el tiempo de vencimiento.

**Definición 6.1.1.** (*Derivado financiero [14, p. 36]*). Sea  $S = (S(t))_{0 \leq t \leq T}$  un proceso estocástico que modeliza el precio de un activo subyacente. Un derivado financiero con vencimiento en  $T > 0$  es un contrato que define un valor de liquidación como una función

$$g : \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde  $g(S)$  representa el pago asociado al derivado en función de la trayectoria de  $S$  en el intervalo  $[0, T]$ .

Una clase fundamental de derivados la constituyen las opciones europeas, contratos que otorgan al titular el derecho —pero no la obligación— de comprar o vender el activo subyacente en una fecha determinada  $T$ , a un precio pactado  $K > 0$  denominado precio de ejercicio o strike. La estructura matemática de estos instrumentos puede representarse mediante funciones definidas sobre el valor del subyacente en el vencimiento.

**Definición 6.1.2.** (*Opción europea [14, p. 38]*). Sea  $S = (S(t))_{0 \leq t \leq T}$  el precio de un activo subyacente en el intervalo  $[0, T]$  y sea  $K > 0$  el precio de ejercicio. Una opción europea es un contrato que concede al comprador el derecho (no la obligación) de:

- Call: comprar la unidad del activo a  $K$  en el instante  $T$ .
- Put: vender la unidad del activo a  $K$  en el instante  $T$ .

En términos de payoff, esto se modeliza mediante la función

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \begin{cases} (x - K)^+, & \text{call,} \\ (K - x)^+, & \text{put,} \end{cases}$$

de forma que el pago recibido en el vencimiento es  $g(S(T))$ . Aquí  $(x)^+ := \max\{x, 0\}$  denota la parte positiva.

Las opciones europeas sólo pueden ejercerse en el instante de vencimiento  $T$ . Esta característica las distingue de las opciones americanas, que permiten el ejercicio en cualquier instante  $t \in [0, T]$ .

Además de las opciones, existen otros tipos de derivados financieros, como los contratos forward, los futuros o los swaps. Todos ellos comparten la característica de depender del comportamiento de uno o varios activos subyacentes, aunque difieren en la mecánica de liquidación y en el tipo de exposición que generan.

La valoración rigurosa de este tipo de instrumentos requiere modelizar adecuadamente la evolución estocástica del subyacente, lo cual será objeto de estudio en la siguiente sección, en el contexto del modelo de Black–Scholes [5, 25].

## 6.2. Modelización estocástica del subyacente y cambio de medida

Para valorar un derivado financiero de forma coherente con los principios de no arbitraje, es necesario modelizar cómo evoluciona el activo subyacente a lo largo del tiempo. Este paso no es arbitrario: la dinámica elegida para  $S(t)$  fija las probabilidades asignadas a cada trayectoria futura y, en consecuencia, el valor que atribuimos hoy al derivado.

El modelo de referencia clásico es el propuesto por Black y Scholes [5] y desarrollado rigurosamente en [25, Cap. 5]. Bajo la medida real  $\mathbb{P}$ , el precio del activo sigue la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW^{\mathbb{P}}(t), \quad S(0) = S_0 > 0,$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  es la tasa de crecimiento media,  $\sigma > 0$  la volatilidad constante y  $W^{\mathbb{P}}(t)$  un movimiento browniano estándar adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

No obstante, para evitar oportunidades de arbitraje debemos trabajar bajo una medida de probabilidad en la que los precios *descontados* sean martingalas. Ese cambio se logra introduciendo una medida equivalente a  $\mathbb{P}$ , llamada *medida de riesgo neutral* y denotada  $\mathbb{Q}$ .

**Teorema 6.2.1.** (*Fundamental de valoración sin arbitraje* [25, p. 231]) En un mercado continuo con activo libre de riesgo  $B(t) = e^{rt}$  y precio del subyacente  $S(t)$  que sigue una EDE con coeficientes apropiados, son equivalentes:

- a) no existen estrategias autoconstituidas con ganancia cierta (no arbitraje);
- b) existe una medida de probabilidad  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$  tal que el proceso descontado  $e^{-rt}S(t)$  es una martingala.

En ese caso, el precio de un derivado con payoff  $g(S)$  en el vencimiento  $T$  se calcula mediante

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} g(S) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.1)$$

El paso de  $\mathbb{P}$  a  $\mathbb{Q}$  se formaliza con el teorema de Girsanov, que permite modificar la derivada de un proceso estocástico sin alterar su parte aleatoria. En el marco de Black–Scholes esto implica reemplazar  $\mu$  por el tipo libre de riesgo  $r$ , manteniendo la misma volatilidad:

$$dS(t) = r S(t) dt + \sigma S(t) dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad S(0) = S_0 > 0,$$

donde  $W^{\mathbb{Q}}(t)$  es un movimiento browniano estándar bajo  $\mathbb{Q}$ . Con esta dinámica se cumple

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S(T) | \mathcal{F}_t] = e^{-rt}S(t), \quad \forall t \leq T,$$

garantizando así la condición (b) del teorema y el principio de no arbitraje.

La fórmula de valoración (6.1) será el punto de partida para los casos particulares que estudiaremos posteriormente.

**Proposición 6.2.2.** (*Fórmula de Black-Scholes [12, Cap. 13]*). *Bajo las hipótesis del modelo de Black-Scholes, el precio  $C(t)$  de una opción call europea con vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $K > 0$  viene dado por*

$$C(t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

y  $N(\cdot)$  denota la función de distribución acumulada de la normal estándar.

*Demostración:*

Sea  $C(t)$  el precio en  $t$  de una call europea con vencimiento  $T$  y precio de ejercicio  $K > 0$ . Bajo la medida de riesgo neutral  $\mathbb{Q}$ , la Proposición 3.2.2 da la solución explícita

$$S(T) = S(t)\exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t))\right).$$

Denotemos

$$Z := \frac{W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t)}{\sqrt{T-t}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{independiente de } \mathcal{F}_t.$$

Entonces

$$S(T) = S(t)\exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} Z\right).$$

En particular,  $\log S(T) | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\log S(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t))$ , esto es,  $S(T) | \mathcal{F}_t$  es *log-normal*. Por la fórmula de valoración sin arbitraje,

$$C(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Sustituyendo la expresión anterior de  $S(T)$  y usando la independencia de  $Z$ ,

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}\left[(S(t)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z} - K)^+\right].$$

Sea

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Al separar los casos  $Z \geq -d_2$  y  $Z < -d_2$  e integrar contra la densidad de la normal estándar se obtiene:

$$C(t) = S(t)N(d_1) - K e^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde  $N(\cdot)$  es la función de distribución acumulada de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .  $\square$

**Observación 6.2.3.** La fórmula de Black-Scholes permite calcular de forma explícita el precio de una opción europea en función de parámetros observables: el nivel actual del subyacente  $S(t)$ , el tiempo hasta vencimiento  $T - t$ , la volatilidad  $\sigma$ , el tipo libre de riesgo  $r$ , y el strike  $K$ . Además, su estructura permite derivar analíticamente las sensibilidades del precio respecto a cada parámetro.

El precio de una opción put europea se obtiene aplicando la paridad put-call:

$$P(t) = C(t) + Ke^{-r(T-t)} - S(t).$$

### 6.3. Valoración mediante simulación Monte Carlo

Aunque el modelo de Black-Scholes proporciona una solución explícita para opciones europeas estándar, en muchos casos más generales —como opciones con pagos dependientes de toda la trayectoria, productos exóticos, o estructuras con múltiples factores— no existe una expresión cerrada para el precio. En estos contextos, los métodos de simulación Monte Carlo permiten aproximar de forma numérica la esperanza bajo la medida de riesgo neutral, proporcionando una herramienta flexible y aplicable a una amplia variedad de derivados.

La idea fundamental consiste en estimar el valor actual del derivado replicando numéricamente la fórmula

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} g(S) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

a través de simulaciones independientes del proceso subyacente bajo  $\mathbb{Q}$ , y evaluando el payoff  $g(S)$  para cada una.

Consideramos una opción call europea. En el instante inicial  $t = 0$ , el procedimiento estándar consta de los siguientes pasos:

1. Generar  $M$  simulaciones independientes de la variable  $S(T)$  bajo la medida  $\mathbb{Q}$ , utilizando la solución explícita:

$$S(T) = S_0 \exp \left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma\sqrt{T}Z_i \right), \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

para  $i = 1, \dots, M$ .

2. Evaluar el payoff para cada simulación:  $(S_i(T) - K)^+$ .
3. Estimar el precio mediante el promedio descontado:

$$\hat{C}(0) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (S_i(T) - K)^+.$$

La Ley de los Grandes Números garantiza que  $\hat{C}(0)$  converge casi seguramente al valor exacto  $C(0)$  cuando  $M \rightarrow \infty$ . Además, el Teorema Central del Límite establece que el error estadístico del estimador decrece con orden  $O(M^{-1/2})$ , es decir, para reducir el error a la mitad se requiere cuadruplicar el número de simulaciones [10].

**Observación 6.3.1.** La principal ventaja del método de Monte Carlo es su generalidad: puede aplicarse a prácticamente cualquier derivado cuyo payoff se pueda computar a partir de una trayectoria simulada. Sin embargo, esta flexibilidad se ve contrarrestada por un coste computacional elevado si se requiere alta precisión, debido a su tasa de convergencia relativamente lenta.

Para mejorar la eficiencia del método, pueden emplearse técnicas de reducción de varianza, como variables antitéticas, control variates o estratificación. Estas técnicas permiten disminuir la dispersión del estimador sin necesidad de aumentar  $M$ , y son especialmente útiles en contextos financieros donde los cálculos deben repetirse de forma intensiva.

El método descrito resulta especialmente útil en la valoración de derivados cuyos pagos dependen del valor del subyacente en un único instante, como las opciones europeas.

### 6.3.1. Aplicación a derivados con dependencias no estándar (extensiones)

Entre los productos que requieren este enfoque se encuentran las llamadas *opciones exóticas*, que presentan estructuras de pago más complejas que las europeas estándar. Por ejemplo, las *opciones asiáticas* dependen del promedio del subyacente durante la vida del contrato:

$$g_{\text{asiática}}(S) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K \right)^+.$$

La valoración de este tipo de opciones no puede abordarse mediante integración directa y se apoya típicamente en simulaciones discretizadas [12, Cap. 19].

Otro ejemplo son las *opciones de barrera*, que se activan o se anulan si el subyacente alcanza ciertos niveles predefinidos. Estas requieren modelizar con precisión los tiempos de cruce, para lo cual se emplean técnicas específicas como el uso de interpolación log-lineal entre pasos simulados [10, p. 113]. También se incluyen en esta categoría las *opciones digitales*, que entregan un pago fijo si se cumple una condición en el vencimiento. Su payoff presenta discontinuidades, lo que afecta negativamente a la convergencia del método y puede requerir técnicas de suavizado o corrección por antithetic sampling [10, p. 189].

El uso de Monte Carlo en todos estos casos permite simular la trayectoria completa del subyacente, evaluar el *payoff* definido por cada estructura y aproximar el precio como un promedio estadístico. Aunque el análisis y simulación precisa de estos productos excede el alcance del presente trabajo, su existencia justifica la versatilidad del método y motiva su estudio en aplicaciones más generales.

## 6.4. Observaciones finales

A lo largo de este capítulo hemos visto cómo el modelo de Black-Scholes proporciona un marco teórico riguroso y explícito para valorar derivados financieros en mercados ideales. Su formulación bajo la medida de riesgo neutral y su resolución mediante herramientas de cálculo estocástico permiten obtener fórmulas cerradas para contratos estándar como las opciones europeas.

No obstante, las hipótesis que sustentan el modelo (volatilidad constante, mercados sin fricciones, posibilidad de cobertura continua) limitan su capacidad para capturar ciertos comportamientos observados en los mercados reales. Fenómenos como las sonrisas de volatilidad (patrones sistemáticos en los que la volatilidad implícita varía con el precio de ejercicio de la opción), los saltos en los precios o la dependencia del comportamiento histórico del subyacente requieren modelos más sofisticados que extienden el marco clásico hacia dinámicas con volatilidad estocástica, saltos o dependencia funcional (para más información, véase [9], que incluyen la mayor parte de las extensiones mencionadas).

En este capítulo se han introducido las herramientas fundamentales para valorar derivados en entornos continuos y sin arbitraje, que como introducción a los derivados financieros es más que suficiente.

## Capítulo 7

# Implementación numérica de modelos financieros

El estudio que hemos desarrollado en los capítulos anteriores ha proporcionado un marco riguroso para modelizar y valorar activos financieros mediante herramientas estocásticas y modelos clásicos como los de Black–Scholes y Markowitz. Sin embargo, en la práctica financiera real, no siempre se dispone de soluciones analíticas cerradas para los problemas que se plantean. Factores como la complejidad del contrato, la estructura del payoff o la forma funcional de los coeficientes del modelo pueden impedir un tratamiento exacto mediante fórmulas explícitas.

En este contexto, la implementación numérica adquiere un papel central. Simular trayectorias de procesos estocásticos, estimar expectativas bajo medidas de probabilidad transformadas o resolver problemas de optimización mediante algoritmos computacionales se convierte en la vía natural para aproximar soluciones cuando el análisis formal resulta insuficiente o inabordable.

Para finalizar el trabajo, nos marcamos el objetivo de poner en práctica las técnicas introducidas previamente, empleando simulaciones numéricas para validar resultados teóricos, analizar el comportamiento de distintos métodos y mostrar cómo se traducen en herramientas efectivas para la toma de decisiones en contextos financieros reales.

### 7.1. Simulación de trayectorias bajo el modelo de Black–Scholes

Resulta útil analizar directamente la evolución del proceso estocástico que modeliza el precio del activo subyacente. Simular trayectorias completas de  $S(t)$  permite visualizar su comportamiento, explorar escenarios extremos y evaluar cómo la volatilidad afecta a la dispersión de los posibles valores futuros. Aunque el modelo de Black–Scholes admite una solución exacta para  $S(T)$ , la generación de trayectorias discretizadas resulta esencial para la implementación de métodos numéricos como el de Monte Carlo. Bajo la medida de riesgo neutral  $\mathbb{Q}$ , el precio del activo sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad S(0) = S_0,$$

donde  $r$  es el tipo libre de riesgo,  $\sigma > 0$  es la volatilidad constante y  $W^{\mathbb{Q}}(t)$  es un movimiento browniano estándar bajo  $\mathbb{Q}$

Recordemos solución exacta de esta ecuación viene dada por:

$$S(T) = S(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma\sqrt{T}Z \right), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

véase [10, p. 4]. Para obtener trayectorias completas en el intervalo  $[0, T]$ , se aplica una discretización temporal en  $N$  pasos de igual tamaño.

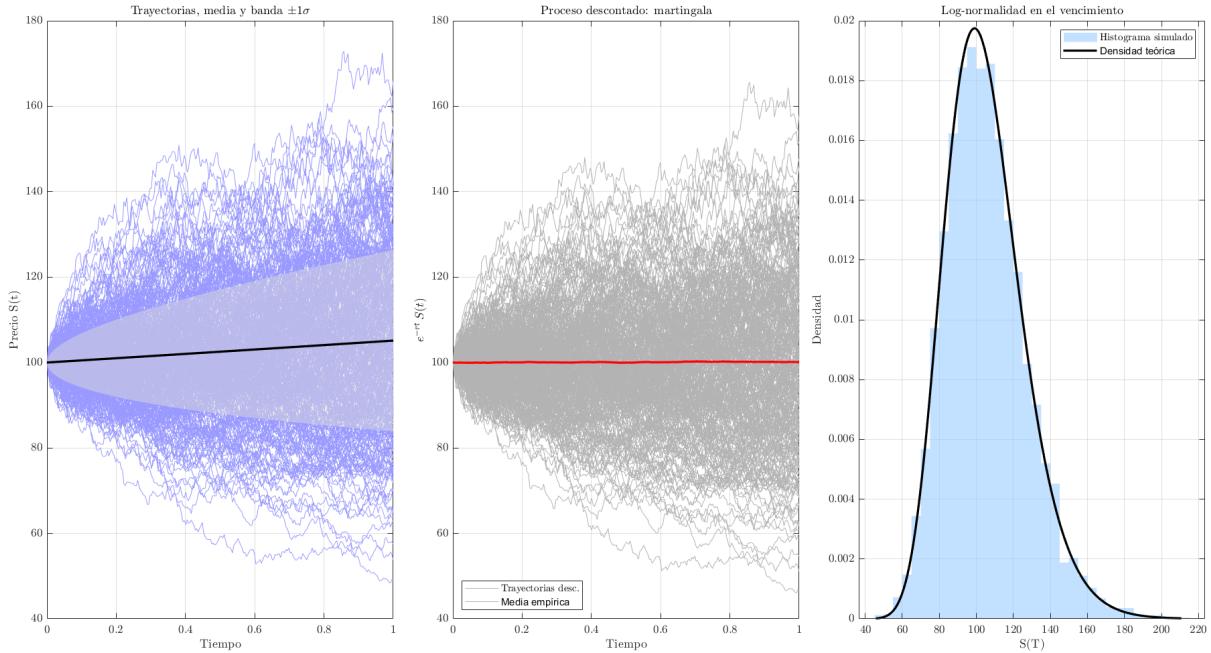


Figura 7.1: Simulación GBM: trayectorias con banda  $\pm 1\sigma$ , martingala descontada y ajuste log-normal en  $T$ .

La Fig. 7.1 sintetiza tres vértices clave de la teoría:

El panel (a) constata que la varianza crece linealmente con  $t$  (ancho de la banda), mientras que la media evoluciona como  $\mathbb{E}[S(t)] = S_0 e^{rt}$  (trazo negro). El abanico de trayectorias ilustra la heteroscedasticidad inherente al GBM.

En el panel (b) la línea roja se mantiene horizontal: numéricamente  $\frac{1}{M} \sum_i e^{-rt} S^{(i)}(t) \approx S_0$  para todo  $t$ . Este resultado verifica, en el plano muestral, la condición de no arbitraje que da sentido a la valoración bajo la medida de riesgo neutral  $\mathbb{Q}$ .

El panel (c) confronta la distribución log-normal prevista por la solución cerrada con la densidad empírica. La superposición casi perfecta refuerza la validez del procedimiento de simulación y, de paso, sirve como test visual de convergencia. La Tabla 7.1 cuantifica esta concordancia: las diferencias relativas ( $< 0.2\%$  en la media y  $\approx 4\%$  en la varianza) se deben al error estadístico  $O(M^{-1/2})$  inherente a Monte Carlo y caen dentro de los intervalos de confianza esperados.

	Teórico	Empírico
$\mathbb{E}[S(T)]$	105.1271	105.2395
$\text{Var}[S(T)]$	451.0288	469.8317

Cuadro 7.1: Comparación de momentos: valores predichos por el modelo frente a las estimaciones Monte Carlo obtenidas a partir de las  $M$  trayectorias simuladas.

## 7.2. Comparación de fronteras eficientes

En la Sección 5.1 se formalizó el problema media-varianza con restricción de no negatividad y se mostró que el conjunto factible

$$\mathcal{F}_m = \{ w \in \mathbb{R}^n : w^\top \mathbf{1} = 1, w^\top \mu = m, w \geq 0 \}$$

es no vacío únicamente para  $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$ , intervalo que se obtiene resolviendo el sistema de condiciones KKT

Antes de trazar la frontera eficiente conviene explicar por qué se han elegido los siguientes grupos de activos. El objetivo no es adelantar el resultado numérico —que se verá en la Figura 7.2— sino justificar, a priori, qué rasgos didácticos esperamos ilustrar con cada conjunto.

**Nota 7.2.1.** (*Definición de  $\beta$  [24]*). La beta ( $\beta_i$ ) mide la sensibilidad sistemática del activo respecto al mercado y se calcula como

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\text{Var}(r_M)},$$

donde  $r_i$  es el rendimiento (exceso) del activo  $i$  y  $r_M$  el rendimiento del índice de mercado. Así,  $\beta > 1$  indica que el activo amplifica los movimientos del mercado, mientras que  $\beta < 1$  los suaviza.

Es decir, si el mercado sube (o baja) un 1%, un título con  $\beta = 1.2$  tenderá a moverse un 1.2%, mientras que otro con  $\beta = 0.7$  lo hará únicamente un 0.7%.

Bloque	Activos	Motivación didáctica
Tecnología EE. UU.	AAPL, MSFT, GOOGL, AMZN, META	Cinco <i>megacaps</i> del sector <i>growth</i> , con altas correlaciones mutuas ( $\rho \approx 0.85$ ) y $\beta > 1$ . Sirven para mostrar que, cuando los títulos se mueven casi al unísono, la frontera eficiente se vuelve <i>estrecha</i> : la diversificación apenas reduce la varianza.
Cartera multiactivo	SPY, IEFA, EEM, AGG, GLD	Combinación clásica de clases de activo: renta variable de EE. UU. (SPY), desarrollados (IEFA), emergentes (EEM), renta fija agregada (AGG) y oro (GLD). Las correlaciones bajas e incluso negativas entre equity–bonos y equity–oro ( $\rho \in [-0.3, 0.5]$ ) producen una curvatura pronunciada en la frontera, ilustrando el efecto de mezclar factores de riesgo heterogéneos.
Defensivas con dividendo	KO, PG, JNJ, MCD, XLP	Cuatro <i>blue chips</i> de consumo básico/salud más el ETF sectorial de bienes de consumo (XLP). Presentan $\beta < 1$ y menor volatilidad que el mercado. El objetivo es exhibir cómo los activos defensivos desplazan la frontera hacia la izquierda, posibilitando estrategias <i>low-volatility</i> .

Los tres universos cubren, por tanto:

- I) un caso de alta correlación sectorial (Tecnología EE. UU.);
- II) un ejemplo de diversificación entre clases de activo (cartera multiactivo);
- III) un bloque de valores defensivos de baja volatilidad (dividendos).

El horizonte temporal analizado abarca desde enero de 2019 hasta enero de 2024. El código completo y los datos empleados se incluyen en el Anexo A.

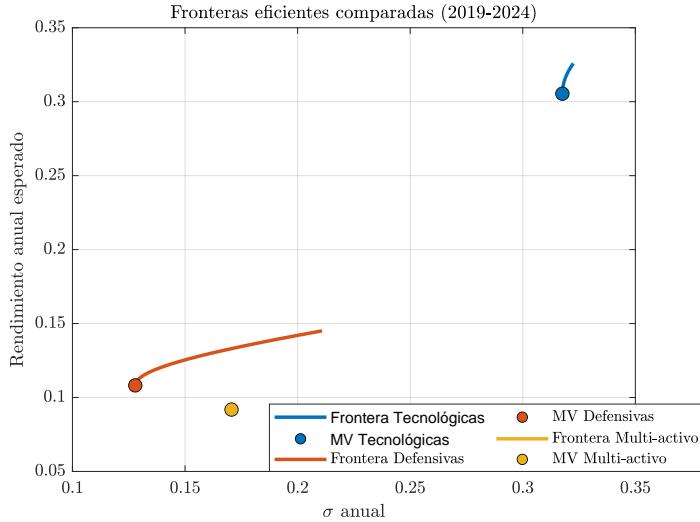


Figura 7.2: Fronteras eficientes long-only de los tres bloques de activos (2019–2024). Los círculos señalan las carteras de mínima varianza.

La Figura 7.2 revela comportamientos claramente diferenciados:

- *Tecnológicas EE.UU.*.—Las cinco mega-caps se mueven casi al unísono; su frontera (azul) queda comprimida en la franja  $\sigma \in [0.32, 0.34]$  con rendimientos del 29 %-32 %.
- *Defensivas*.—El bloque defensivo (rojo) se traslada sensiblemente a la izquierda; la mínima varianza baja hasta  $\sigma \approx 0.13$  con  $\mu \approx 0.11$ . Al mezclar betas y volatilidades heterogéneas ( $\beta$  entre 0.6 y 0.8) las correlaciones son más moderadas ( $\bar{\rho} \approx 0.45$ ): la envolvente se alarga y ofrece combinaciones eficiente riesgo en todo el rango intermedio, incluso bajo  $w \geq 0$ .
- *Multi-activo ETF*.—El ETF Multi-activo presentan medias casi idénticas ( $10.4 \pm 0.2$ ) y covarianzas dominadas por el factor mercado; la igualdad  $w^\top \mu = m$  solo se satisface cerca de  $m_{\min}$ . El resultado es un *quasi-punto* en  $(\sigma, \mu) \simeq (0.17, 0.09)$ : la restricción *long-only* deja sin margen para desplazarse a lo largo de la frontera.

Así, de forma general, la forma de la frontera *long-only* viene dictada por el *contraste* entre medias y covarianzas:

- (I) Si las medias son muy diferentes pero las covarianzas son grandes (Tecnológicas EE.UU.), la envolvente subsiste aunque se acorta;
- (II) Si las medias son muy próximas (Multi-activo), la región factible colapsa casi por completo;
- (III) Cuando ambos vectores difieren (Defensivas), la eficiencia se preserva pese a la prohibición de posiciones cortas.

Este ejercicio cierra el estudio empírico de la optimización media-varianza con restricción de signo.

## Capítulo 8

# Conclusiones y Perspectivas Futuras

A lo largo de este trabajo se ha revisado un marco matemático riguroso a partir de una recopilación exhaustiva de literatura para la modelización, simulación y resolución de problemas fundamentales en el ámbito de las finanzas cuantitativas. Desde la introducción de procesos estocásticos básicos hasta la aplicación de métodos de optimización convexa, el hilo conductor ha sido la utilización de herramientas matemáticas formales para representar fenómenos financieros en entornos dinámicos e inciertos.

Hemos iniciado con los fundamentos teóricos necesarios para abordar los problemas propuestos, donde se han introducido los conceptos esenciales de probabilidad, cálculo estocástico e integración de Itô, que han permitido modelizar la evolución de precios de activos mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. La presentación de modelos clásicos, como el de Bachelier, el de Black-Scholes o el modelo de Vasicek para tipos de interés, ha servido para ilustrar cómo distintas hipótesis sobre el comportamiento de los mercados conducen a estructuras dinámicas concretas.

Posteriormente, se ha abordado el estudio de métodos numéricos de resolución de EDEs, analizando distintos esquemas como Euler-Maruyama y Milstein, prestando atención tanto a sus propiedades de consistencia y convergencia como al coste computacional asociado.

Para poder acercarnos a la aplicación más práctica, los 2 problemas tratados han conseguido el objetivo. Hemos introducido el concepto de derivado financiero, el cual tiene muchísimas extensiones de mayor nivel matemático. Se ha deducido formalmente la fórmula de Black-Scholes bajo hipótesis de mercado idealizado, utilizando técnicas de cambio de medida y neutralidad al riesgo, y se ha implementado una metodología de simulación Monte Carlo para aproximar precios de opciones europeas. La validación de estos métodos mediante comparaciones numéricas ha confirmado la coherencia entre teoría y simulación, ilustrando la robustez de los modelos cuando se respetan sus hipótesis de partida. De forma complementaria, se ha tratado el problema de optimización de carteras de inversión bajo el modelo clásico de Markowitz. Mediante simulaciones de medias y covarianzas sintéticas, se ha resuelto numéricamente el problema cuadrático correspondiente y se ha obtenido la frontera eficiente, que recoge las combinaciones óptimas de riesgo y rendimiento disponibles para un inversor racional.

El conjunto de simulaciones prácticas realizadas ha evidenciado que los métodos implementados no solo son válidos en términos teóricos, sino que resultan efectivamente aplicables a problemas concretos de gestión financiera.

Este trabajo abre, además, diversas líneas de desarrollo futuro. Una posible extensión natural consiste en la incorporación de modelos de volatilidad estocástica, como el modelo de Heston, que permiten

capturar fenómenos de mercado más complejos que los considerados en el modelo de Black-Scholes clásico. Otra dirección relevante sería el análisis de derivados exóticos, cuyo payoff depende de la trayectoria completa del subyacente o de eventos de hitting time, lo cual introduce desafíos adicionales tanto en la modelización como en la simulación. Asimismo, sería de interés considerar restricciones reales en los problemas de optimización de carteras, como límites sectoriales, lo que conduciría a problemas de programación cuadrática restringida más generales y con mayor aplicabilidad práctica. Finalmente, un desarrollo adicional consistiría en la calibración de modelos a datos reales de mercado mediante técnicas de máxima verosimilitud o de filtrado estocástico, permitiendo así ajustar los parámetros dinámicos de los modelos a observaciones empíricas y hacer predicciones más ajustadas a la realidad financiera.

En definitiva, el trabajo realizado proporciona una base matemática sólida y versátil para abordar una amplia variedad de problemas en el ámbito de las finanzas cuantitativas modernas, tanto en investigación teórica como en aplicaciones profesionales.

# Índice de figuras

2.1. Convergencia difusiva ilustrada. Arriba-izquierda: cinco paseos aleatorios simétricos reescalados ( $\Delta S_k = \pm 1$ ) con pasos $N = 250$ . Abajo-izquierda: cinco trayectorias de un movimiento browniano estándar. Derecha: una trayectoria de cada proceso superpuesta. La similitud visual apoya el Teorema de Donsker–Kolmogórov: el paseo reescalado converge en distribución a $W_t$ en $\mathcal{C}[0, 1]$ .	16
4.1. Convergencia fuerte de EM y Milstein	31
5.1. Frontera eficiente correspondiente a un universo sintético de tres activos $\mu = (0.10, 0.14, 0.18)$ y matriz de covarianzas $\text{diag}(0.015, 0.040, 0.035)$ con correlaciones moderadas. El arco convexo ilustra el intercambio óptimo entre riesgo ( $\sigma$ ) y rentabilidad esperada ( $\mu$ ) cuando se varía el objetivo $m$ .	34
7.1. Simulación GBM: trayectorias con banda $\pm 1\sigma$ , martingala descontada y ajuste log-normal en $T$ .	43
7.2. Fronteras eficientes long-only de los tres bloques de activos (2019–2024). Los círculos señalan las carteras de mínima varianza.	46

# Índice de cuadros

4.1. RMSE al tiempo final $T = 1$ para distintos pasos $h = T/N$ ( $M = 10^4$ trayectorias). La última fila muestra la pendiente estimada en escala log-log. . . . .	30
7.1. Comparación de momentos: valores predichos por el modelo frente a las estimaciones Monte Carlo obtenidas a partir de las $M$ trayectorias simuladas. . . . .	44

## Anexo A: Códigos MATLAB utilizados

En este anexo se recogen los códigos MATLAB desarrollados para las simulaciones, estimaciones y optimizaciones presentadas a lo largo del trabajo.

### A.1. Simulación de trayectorias de un paseo aleatorio simple

```
%% Donsker: paseo aleatorio vs. browniano
rng(123)
N = 250; M = 5; T = 1; dt = T/N;      % parámetros
t = linspace(0,T,N+1);

clf
fig = figure('Name','Donsker - paseo vs. browniano',...
    'Units','normalized','Position',[.1 .1 .8 .7]);

% (1) Paseo aleatorio reescalado
subplot(2,2,1); hold on; box on; grid on
for m = 1:M
    xi = 2*(rand(N,1)>0.5)-1;           % +-1 equiprobables
    S = [0; cumsum(xi)]./sqrt(N);       % escalado sqrt(N)
    stairs(t,S,'LineWidth',1.1)
end
xlabel('t'); ylabel('Posición')
title('Paseo aleatorio reescalado')

% (2) Browniano simulado
subplot(2,2,3); hold on; box on; grid on
for m = 1:M
    W = [0; cumsum(sqrt(dt)*randn(N,1))];
    plot(t,W,'LineWidth',1.1)
end
xlabel('t'); ylabel('W_t')
title('Movimiento browniano')

% (3) Comparación trayectoria a trayectoria
subplot(1,2,2); hold on; box on; grid on
xi = 2*(rand(N,1)>0.5)-1; S = [0; cumsum(xi)]./sqrt(N);
W = [0; cumsum(sqrt(dt)*randn(N,1))];
stairs(t,S,'r','LineWidth',2)
plot(t,W,'b','LineWidth',2)
legend('Paseo reescalado','Browniano','Location','southwest')
xlabel('t'); ylabel('Valor')
```

```

title('Convergencia de una trayectoria')

sgtitle('Convergencia funcional de Donsker: paseo \rightarrow browniano')

carpeta = fullfile('C:', 'Users');

if ~exist(carpeta,'dir')           % crea la carpeta si no existe
    mkdir(carpeta)
end

% mantiene líneas y texto vectoriales

fname = fullfile(carpeta,'paseo_vs_browniano.pdf');
% Guardar (300 dpi) y confirmar en pantalla
print(fig,fname,'-dpdf',' -painters')
disp(['Figura guardada en: ', fname])

```

## A.2. Órdenes de convergencia Euler-Maruyama y Milstein

```

clear; clc; close all;
rng(42);                                % semilla fija, reproducible

%% Parámetros modificables
mu      = 0.5;
sigma   = 0.3;
X0      = 1;
T       = 1;

Nvec    = 100 * 2.^(0:4);                 % [100 200 400 800 1600]
M       = 1e4;                            % nº de trayectorias Monte-Carlo

hvec    = T ./ Nvec;
errEM   = zeros(size(Nvec));
errMil  = zeros(size(Nvec));

for k = 1:numel(Nvec)
    N = Nvec(k);      h = hvec(k);

    % Incrementos brownianos (M×N)
    dW = sqrt(h) * randn(M, N);

```

```

W = cumsum(dW, 2); % posiciones W(t_n) (no se usa dentro del bucle)

% - Euler-Maruyama -
X_EM = X0 * ones(M,1);
for n = 1:N
    X_EM = X_EM + mu*X_EM*h + sigma*X_EM .* dW(:,n);
end

% - Milstein -
X_Mil = X0 * ones(M,1);
for n = 1:N
    dWn = dW(:,n);
    X_Mil = X_Mil + mu*X_Mil*h + sigma*X_Mil .* dWn ...
        + 0.5*sigma^2 * X_Mil .* (dWn.^2 - h);
end

% - Solución exacta X(T) -
X_exact = X0 * exp( (mu - 0.5*sigma^2)*T + sigma*W(:,end) );

% ----- Error RMS -----
errEM(k) = sqrt(mean( (X_exact - X_EM).^2 ));
errMil(k) = sqrt(mean( (X_exact - X_Mil).^2 ));

fprintf('%.5d %.8.5f %.11.3e %.11.3e\n',...
    N, h, errEM(k), errMil(k));
end
fprintf('-----\n\n');

%% - Pendientes (orden numérico empírico) -
slopeEM = polyfit(log(hvec), log(errEM), 1); % pendiente 0.5
slopeMil = polyfit(log(hvec), log(errMil), 1); % pendiente 1.0
fprintf('Pendiente log-log EM = %.3f | Milstein = %.3f\n',...
    slopeEM(1), slopeMil(1));

%% - Gráfica log-log -
figure('Color','w');
set(groot,'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex',...
    'defaultLegendInterpreter','latex',...
    'defaultTextInterpreter','latex');

loglog(hvec, errEM, 'o-', 'LineWidth',1.1,'MarkerSize',6,...
    'DisplayName','Euler--Maruyama');
hold on;
loglog(hvec, errMil, 's-', 'LineWidth',1.1,'MarkerSize',6,...
    'DisplayName','Milstein');

```

```

'DisplayName', 'Milstein');

% Líneas guía desplazadas (constantes tomadas al 1er punto / 2)
C_EM = 0.5 * errEM(1) / hvec(1)^0.5;
C_Mil = 0.5 * errMil(1) / hvec(1)^1.0;
loglog(hvec, C_EM * hvec.^0.5 , '--', 'DisplayName', 'Pendiente $-1/2$');
loglog(hvec, C_Mil* hvec , '--', 'DisplayName', 'Pendiente $-1$');

xlabel('$h$ (\textit{tama}\~{n}o de paso})', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('RMSE');
title('Convergencia fuerte en norma $L^2$');
grid on; box on; axis tight;
legend('Location', 'northwest');

if export
    print('-dpdf', 'convergencia_gbm.pdf');
    print('-dpng', 'convergencia_gbm.png', '-r300');
end

```

### A.3. Frontera eficiente (ejemplo teoría)

```

%% -Frontera Eficiente- %%
mu = [0.10 0.14 0.18]'; % rendimientos medios
Sig = [0.015 0.010 0.008; % matriz de covarianzas
        0.010 0.040 0.018;
        0.008 0.018 0.035];

one = ones(3,1);
A = one'* (Sig\one); B = one'*(Sig\mu);
C = mu'*(Sig\mu); D = A*C - B^2;

m_min = B/A; % retorno mínima varianza
m_max = max(mu) - 1e-4; % evita división por cero
mvals = linspace(m_min, m_max, 150);

sigma = zeros(size(mvals));
for k = 1: numel(mvals)
    m = mvals(k);
    lam = (C - B*m)/D;
    nu = (A*m - B)/D;
    w = Sig \ (lam*one + nu*mu);
    sigma(k) = sqrt(w'*Sig*w);
end

```

```

end

plot(sigma, mvals,'k-','LineWidth',1.2), grid on, box on
xlabel('$\sigma$','Interpreter','latex');
ylabel('$\mu$','Interpreter','latex'); title('Frontera eficiente ')
print -dpdf frontera_sintetica.pdf

```

#### A.4. Black-Scholes y no arbitraje

```

% Simulación exhaustiva del GBM bajo Black-Scholes
% Ilustra media, varianza creciente, martingala descontada
% y log-normalidad del precio en el vencimiento.

%% 1. Parámetros del modelo
S0 = 100; % Precio inicial
r = 0.05; % Tipo libre de riesgo
sigma = 0.20; % Volatilidad
T = 1; % Horizonte temporal (años)
N = 252; % Pasos (días de negociación en un año)
M = 5e3; % Nº de trayectorias (grande para histograma)

dt = T/N; % Tamaño de paso
t = linspace(0,T,N+1); % Vector de tiempos

rng(42) % Semilla fija para reproducibilidad

%% 2. Browniano y trayectorias (vectorizado)
dW = sqrt(dt) * randn(M,N); % Incrementos que siguen N(0,dt)
W = [zeros(M,1) cumsum(dW,2)]; % Caminos brownianos

drift = (r - 0.5*sigma^2) * t; % Parte determinista
S = S0 * exp( drift + sigma*W ); % Matriz Mx(N+1) con todas las trayectorias

%% 3. Estadísticos teóricos y empíricos
mediaTheo = S0 * exp(r*t);
varTheo = (S0^2)*exp(2*r*t).*(exp(sigma^2*t)-1);
sigmaTheo = sqrt(varTheo);

% Media empírica y varianza por instante
mediaEmp = mean(S,1);
varEmp = var(S,0,1);

```

```

fprintf('--- Comprobación numérica frente a teoría ---\n');
fprintf(' E[S(T)] teórico      = %.4f\n', mediaTheo(end));
fprintf(' E[S(T)] empírico     = %.4f\n', mediaEmp(end));
fprintf(' Var[S(T)] teórica    = %.4f\n', varTheo(end));
fprintf(' Var[S(T)] empírica   = %.4f\n\n', varEmp(end));

%% 4. Preparamos figura compuesta

% (modificamos parámetros para que no salga cortada la imagen en LaTeX)
cm = 1/2.54; % factor pulgadas a cm
wid = 18*cm; hei = 6*cm; % 18×6 cm = página A4 a una columna
figure('Name','Black-Scholes: validación visual', ...
    'Units','centimeters', ...
    'Position',[2 2 wid hei], ... % [x y ancho alto]
    'PaperPositionMode','auto'); % garantiza que no se recorte

tiledlayout(1,3,'Padding','compact','TileSpacing','compact');

%% 4a. Subplot 1 - Trayectorias, media y banda (+- 1 sigma)
nexttile
hold on
cols = [0.6 0.6 1]; % Azul muy claro
plot(t, S(1:300,:)', 'Color', cols) % Solo 300 para no saturar

% Banda sombreada (+- 1 sigma teórica)
fill([t fliplr(t)], ...
    [mediaTheo+sigmaTheo, fliplr(mediaTheo-sigmaTheo)], ...
    [0.85 0.85 0.85], 'EdgeColor','none', 'FaceAlpha',0.5);

plot(t, mediaTheo, 'k', 'LineWidth', 2) % Media teórica
xlabel('Tiempo'); ylabel('Precio S(t)')
title('Trayectorias, media y banda $\pm 1\sigma$', 'Interpreter','latex');
grid on; box on
hold off

%% 4b. Subplot 2 -- Proceso descontado: martingala bajo Q
nexttile
Sd = S .* exp(-r*t);
plot(t, Sd(1:300,:)', 'Color',[0.7 0.7 0.7]); hold on
plot(t, mean(Sd,1), 'r', 'LineWidth', 2)
xlabel('Tiempo'); ylabel('$e^{-rt} \cdot S(t)$', 'Interpreter','latex')
title('Proceso descontado: martingala')
legend({'Trayectorias desc.', 'Media empírica'}, 'Location', 'southwest')

```

```

grid on; box on
hold off

%% 4c. Subplot 3 -- Histograma de S(T) y densidad log-normal
nexttile
ST = S(:,end);
histogram(ST, 'Normalization','pdf','EdgeColor','none','FaceColor',[0.6 0.8 1])
hold on
xVals = linspace(min(ST), max(ST), 400);
pdfTheo = lognpdf(xVals, log(S0)+(r-0.5*sigma^2)*T, sigma*sqrt(T));
plot(xVals, pdfTheo, 'k', 'LineWidth', 2)
xlabel('S(T)'); ylabel('Densidad')
title('Log-normalidad en el vencimiento')
legend({'Histograma simulado','Densidad teórica'},'Location','northeast')
grid on; box on
hold off

```

## A.5. Optimización de carteras y generación de la frontera eficiente

```

function tbl = alphaDaily(ticker, ~, startDate, endDate)
% ALPHADAILY Descarga precios diarios de STOOQ .
%   tbl = alphaDaily("AAPL", ~, "2019-01-01", "2024-01-01")
%
% Devuelve una tabla con:
%     Date      - datetime
%     AdjClose  - precio de cierre (STOOQ solo publica Close)
%

% ---- Construir URL de descarga ----
url = sprintf("https://stooq.com/q/d/l/?s=%s.us&i=d", lower(ticker));

% ---- Leer CSV ----
raw = readtable(url, 'Delimiter', ',', 'FileType', 'text');

% Comprobación rápida de que haya datos (>= 2 columnas)
if width(raw) < 2
    error('STOOQ no devolvió datos para %s.', ticker);
end

% ---- Formatear ----
raw.Date = datetime(raw.Date, 'InputFormat', 'yyyy-MM-dd');
raw      = sortrows(raw, "Date");

```

```

sel = raw.Date >= datetime(startDate) & raw.Date <= datetime(endDate);

tbl = table(raw.Date(sel), raw.Close(sel), ...
            'VariableNames', {'Date', 'AdjClose'});
end

%% 0. Configuración común
startDate = '2019-01-01';
endDate   = '2024-01-01';

groups = {[["AAPL","MSFT","GOOGL","AMZN","META"], ... % Tech
           ["SPY","IEFA","EEM","AGG","GLD"], ... % Multi
           ["KO","PG","JNJ","MCD","XLP"]]}; % Defensive
groupNames = ["Tecnológicas USA","Multi activo ETF","Defensivo"];
clr = lines(numel(groups)); % colores del gráfico

apiKey = "YL0LRJ200ALBTJIG";

%% 1. Descarga de precios ajustados
pricesAll = cell(numel(groups),1);
datesCommon = cell(numel(groups),1);

for g = 1:numel(groups)
    tickers = groups{g};
    n       = numel(tickers);
    tmpP    = [];
    datesKeep = [];

    for k = 1:n
        tbl = alphaDaily(tickers(k),apiKey,startDate,endDate); % función abajo

        if k==1 % primera serie del grupo
            datesKeep = tbl.Date;
            tmpP     = tbl.AdjClose;
        else % alinear con fechas ya recogidas
            [common, ia, ib] = intersect(datesKeep,tbl.Date,'stable');
            datesKeep = common;
            tmpP     = [tmpP(ia) tbl.AdjClose(ib)];
        end
    pause(12); % Alpha Vantage: máx. 5 llamadas/minuto (12 s es seguro)
    end
end

```

```

end

pricesAll{g} = tmpP;
datesCommon{g} = datesKeep;
end

save datosPrecios.mat pricesAll datesCommon groupNames

%% 2. Cálculo de la frontera eficiente (igual que antes)
frontierRisk = cell(1,numel(groups));
frontierRet = cell(1,numel(groups));
riskMV = zeros(1,numel(groups));
retMV = zeros(1,numel(groups));

for g = 1:numel(groups)
    P = pricesAll{g};
    rets = diff(log(P)); % rendimientos logarítmicos
    mu = mean(rets)' * 252; % media anualizada
    Sig = cov(rets) * 252; % covarianza anualizada
    one = ones(size(mu));

    invS = Sig\eye(size(Sig));
    A = one'*invS*one; B = one'*invS*mu; C = mu'*invS*mu; D = A*C - B^2;
    m_mv = B/A;
    mVals = linspace(m_mv+eps, max(mu)-eps, 120);

    rEff = zeros(size(mVals));
    REff = zeros(size(mVals));
    for i = 1:numel(mVals)
        m = mVals(i);
        lam = (C - B*m)/D;
        gam = (A*m - B)/D;
        w = invS*(lam*one + gam*mu);
        REff(i) = w'*mu;
        rEff(i) = sqrt(w'*Sig*w);
    end
    frontierRisk{g} = rEff;
    frontierRet{g} = REff;

    w_mv = invS*one/A;
    riskMV(g) = sqrt(w_mv'*Sig*w_mv);
    retMV(g) = w_mv'*mu;
end
save resultadosFronteras.mat frontierRisk frontierRet riskMV retMV groupNames

```

```

%% 3. Gráfico
figure; hold on;
for g = 1:numel(groups)
    plot(frontierRisk{g},frontierRet{g}, 'LineWidth',2,'Color',clr(g,:));
    scatter(riskMV(g),retMV(g),60,'filled','MarkerEdgeColor','k',...
        'MarkerFaceColor',clr(g,:));
end
xlabel('$\sigma$ anual', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('Rendimiento anual esperado', 'Interpreter', 'latex');

title('Fronteras eficientes comparadas (2019-2024)');
legend([groupNames,"MV "+groupNames], 'Location', 'southeast');
grid on; box on; hold off;

```

# Bibliografía

- [1] Louis Bachelier. *Théorie de la spéculation*. Thèse de doctorat, Université de Paris, Paris, 1900.
- [2] Aharon Ben-Tal, Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski. *Robust Optimization*. Princeton University Press, 2009.
- [3] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1986.
- [4] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2nd edition, 2009.
- [5] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [6] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [7] Robert Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827 on the particles contained in the pollen of plants. *Philosophical Magazine*, 4(21):161–173, 1828.
- [8] Albert Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover, 1956.
- [9] Jim Gatheral. *The Volatility Surface: A Practitioner’s Guide*. Wiley Finance. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2006.
- [10] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [11] Steven L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond & currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.
- [12] John C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson, 8th edition, 2012.
- [13] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2 edition, 1991.
- [14] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of Mathematical Finance*, volume 39 of *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1998.
- [15] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1992.

- [16] Jean-François Le Gall. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Springer, 2016.
- [17] Olivier Ledoit and Michael Wolf. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88:365–411, 2004.
- [18] David G. Luenberger. *Investment Science*. Oxford University Press, 1997.
- [19] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [20] Robert C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183, 1973.
- [21] Pep Mulet Mestre. Documento interno apuntes de cálculo numérico, tema 1: *Elementos de teoría de EDOs*. Doble Grado Física–Matemáticas, Universitat de València, 2024.
- [22] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2:21–41, 2000.
- [23] Ken-iti Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.
- [24] William F. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442, 1964.
- [25] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004.
- [26] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, volume 140 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2012.
- [27] Norbert Wiener. Differential space. *Journal of Mathematical Physics*, 2:131–174, 1923.
- [28] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [29] Erhan Çınlar. *Probability and Stochastics*. Springer, 2011.
- [30] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.