Formulario Examen
Electricidad y Magnetismo 2022

Profesor: Dr. Jesús Capistrán Martínez (capistran@gmail.com)
http://jesuscapistran.com/courses/electricidad-y-magnetismo/

La **ley de Coulomb** establece que la fuerza eléctrica que ejerce una carga puntual q_1 sobre una segunda carga puntual q_2 es

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad \textbf{(23.6)}$$

donde r es la distancia entre las dos cargas y $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ es un vector unitario dirigido de q_1 hacia q_2. La constante k_e, que se llama **constante de Coulomb**, tiene el valor $k_e = 8.988 \times 10^9 \text{ N·m}^2/\text{C}^2$.

A una distancia r de una carga puntual q, el campo eléctrico generado por la carga es

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.9)}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la carga hacia el punto en cuestión. El campo eléctrico se dirige radialmente hacia fuera desde una carga positiva y radialmente hacia dentro hacia una carga negativa.

El campo eléctrico generado por un grupo de cargas puntuales se puede calcular usando el principio de superposición. Esto es, el campo eléctrico total en algún punto es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas:

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \qquad \textbf{(23.10)}$$

El campo eléctrico en algún punto generado por una distribución de carga continua es

$$\vec{\mathbf{E}} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.11)}$$

donde dq es la carga en un elemento de la distribución de carga y r es la distancia desde el elemento hasta el punto en cuestión.

El **flujo eléctrico** es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y forma un ángulo θ con la normal a una superficie de área A, el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi_E = EA \cos\theta \qquad \textbf{(24.2)}$$

En general, el flujo eléctrico a través de una superficie es

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{superficie}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad \textbf{(24.3)}$$

La **ley de Gauss** dice que el flujo eléctrico neto Φ_E a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga *neta* q_{int} dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0:

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \qquad (24.6)$$

Al usar la ley de Gauss, se puede calcular el campo eléctrico debido a varias distribuciones de carga simétricas.

Un conductor en **equilibrio electrostático** tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en todas partes dentro del conductor, ya sea que el conductor sea sólido o hueco.
2. Si un conductor aislado tiene una carga, la carga reside sobre su superficie.
3. El campo eléctrico justo afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud σ/ϵ_0, donde σ es la densidad de carga superficial en dicho punto.
4. Sobre un conductor con forma irregular, la densidad de carga superficial es mayor en posiciones donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño.

La **diferencia de potencial** ΔV entre los puntos Ⓐ y Ⓑ en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$ se define como

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q} = -\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (25.3)$$

donde ΔU está dada por la ecuación 25.1 en la página 767. El **potencial eléctrico** $V = U/q$ es una cantidad escalar y tiene las unidades de joules por coulomb, donde $J/C \equiv 1$ V.

Una **superficie equipotencial** es aquella donde todos los puntos tienen el mismo potencial eléctrico. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.

Cuando una carga positiva q se mueve entre los puntos Ⓐ y Ⓑ en un campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}}$, el cambio en la energía potencial del sistema carga-campo es

$$\Delta U = -q\int_{Ⓐ}^{Ⓑ} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad (25.1)$$

La diferencia de potencial entre dos puntos separados una distancia d en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, es

$$\Delta V = -Ed \qquad (25.6)$$

si la dirección de traslado entre los puntos está en la misma dirección que el campo eléctrico.

Si se define $V = 0$ en $r = \infty$, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia r desde la carga es

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad (25.11)$$

El potencial eléctrico asociado con un grupo de cargas puntuales se obtiene al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.

La **energía potencial eléctrica asociada** con un par de cargas puntuales separadas una distancia r_{12} es

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (25.13)$$

La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene al sumar los términos como en la ecuación 25.13 sobre todos los pares de partículas.

Si conoce el potencial eléctrico como función de las coordenadas x, y y z, puede obtener las componentes del campo eléctrico al tomar la derivada negativa del potencial eléctrico respecto de las coordenadas. Por ejemplo, la componente x del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad (25.16)$$

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua es

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad (25.20)$$

Cada punto en la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático tiene el mismo potencial eléctrico. El potencial es constante en todas partes dentro del conductor e igual a su valor en la superficie.

Si dos o más capacitores se conectan en paralelo, la diferencia de potencial es la misma a través de todos los capacitores. La capacitancia equivalente de una **combinación en paralelo** de capacitores es

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad (26.8)$$

Si dos o más capacitores se conectan en serie, la carga es la misma en todos los capacitores y la capacitancia equivalente de la **combinación en serie** está dada por

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad (26.10)$$

Estas dos ecuaciones le permiten simplificar muchos circuitos eléctricos al sustituir múltiples capacitores con una sola capacitancia equivalente.

En un capacitor se almacena energía porque el proceso de carga es equivalente a la transferencia de cargas de un conductor con un potencial eléctrico más bajo a otro conductor con un potencial más alto. La energía almacenada en un capacitor de capacitancia C con carga Q y diferencia de potencial ΔV es

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}Q\,\Delta V = \tfrac{1}{2}C\,(\Delta V)^2 \qquad (26.11)$$

Cuando un material dieléctrico se inserta entre las placas de un capacitor, la capacitancia aumenta por un factor adimensional κ, llamado **constante dieléctrica:**

$$C = \kappa C_0 \qquad (26.14)$$

donde C_0 es la capacitancia en ausencia del dieléctrico.

El momento de torsión que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad (26.18)$$

La energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ es

$$U_E = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \qquad (26.20)$$

La corriente promedio en un conductor se relaciona con el movimiento de los portadores de carga mediante la relación

$$I_{\text{prom}} = nqv_d A \qquad \textbf{(27.4)}$$

donde n es la densidad de portadores de carga, q es la carga en cada portador, v_d es la rapidez de arrastre y A es el área de sección transversal del conductor.

La densidad de corriente en un conductor óhmico es proporcional al campo eléctrico de acuerdo con la expresión

$$J = \sigma E \qquad \textbf{(27.6)}$$

La constante de proporcionalidad σ es la **conductividad** del material del conductor. El inverso de σ se conoce como **resistividad** ρ (esto es, $\rho = 1/\sigma$). La ecuación 27.6 se conoce como **ley de Ohm**, y un material obedece esta ley si la razón de su densidad de corriente a su campo eléctrico aplicado es una constante independiente del campo aplicado.

Para un bloque uniforme de material, con área de sección transversal A y longitud ℓ, la resistencia en toda la longitud ℓ es

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad \textbf{(27.10)}$$

donde ρ es la resistividad del material.

En un modelo clásico de conducción eléctrica en metales, los electrones se tratan como moléculas de un gas. En ausencia de un campo eléctrico, la velocidad promedio de los electrones es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se mueven (en promedio) con una **velocidad de arrastre** $\vec{\mathbf{v}}_d$ que es opuesta al campo eléctrico. La velocidad de arrastre está dada por

$$\vec{\mathbf{v}}_d = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e}\tau \qquad \textbf{(27.13)}$$

donde q es la carga del electrón, m_e es la masa del electrón y τ es el intervalo de tiempo promedio entre colisiones electrón-átomo. De acuerdo con este modelo, la resistividad del metal es

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau} \qquad \textbf{(27.16)}$$

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen.

La resistividad de un conductor varía de manera aproximadamente lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad \textbf{(27.18)}$$

donde ρ_0 es la resistividad a cierta temperatura de referencia T_0 y α es el **coeficiente de temperatura de resistividad**.

Si a través de un elemento de circuito se mantiene una diferencia de potencial ΔV, la **potencia**, o rapidez a la que se suministra energía al elemento, es

$$P = I\,\Delta V \qquad \textbf{(27.21)}$$

Ya que la diferencia de potencial a través de un resistor es conocida por $\Delta V = IR$, la potencia entregada al resistor se expresa como

$$P = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \qquad \textbf{(27.22)}$$

La energía entregada a un resistor por transmisión eléctrica T_{ET} aparece en la forma de energía interna E_{int} en el resistor.

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en una combinación en **serie** es

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \textbf{(28.6)}$$

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en una combinación en **paralelo** se encuentra partiendo de la relación

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \textbf{(28.8)}$$

Los circuitos que involucran más de una espira se analizan convenientemente con el uso de las **leyes de Kirchhoff:**

1. **Ley de la unión.** En cualquier unión, la suma de las corrientes debe ser igual a cero:

$$\sum_{\text{unión}} I = 0 \qquad \textbf{(28.9)}$$

2. **Ley de la espira.** La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de circuito debe ser cero:

$$\sum_{\text{circuito cerrado}} \Delta V = 0 \qquad \textbf{(28.10)}$$

Cuando un resistor se recorre en la dirección de la corriente, la diferencia de potencial ΔV a través del resistor es $-IR$. Cuando un resistor se recorre en la dirección opuesta a la corriente, $\Delta V = +IR$. Cuando una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (terminal negativa a terminal positiva), la diferencia de potencial es $+\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Cuando una fuente de fem se recorre opuesta a la fem (positivo a negativo), la diferencia de potencial es $-\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

Si un capacitor se carga con una batería a través de un resistor de resistencia R, la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q_{\text{máx}}(1 - e^{-t/RC}) \qquad \textbf{(28.14)}$$

$$i(t) = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}}{R}e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.15)}$$

donde $Q_{\text{máx}} = C\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es la máxima carga en el capacitor. El producto RC se llama **constante de tiempo** τ del circuito.

Si un capacitor cargado de capacitancia C se descarga a través de un resistor de resistencia R, la carga y la corriente disminuyen exponencialmente en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.18)}$$

$$i(t) = -\frac{Q_i}{RC}e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.19)}$$

donde Q_i es la carga inicial en el capacitor y Q_i/RC es la corriente inicial en el circuito.