Ecuaciones Diferenciales

Dr. Hernán Burgos Vega
Universidad de La Frontera

Marzo de 2009

Quinta Edición

Índice general

Prefacio

Un curso introductorio de ecuaciones diferenciales es absolutamente necesario en los planes de estudios de las carreras de Licenciatura en Ciencias, como en las carreras de Ingeniería. Los estilos, calidad y cantidad de los contenidos varían en dependencia de quien dicte el curso, como de la madurez matemática y los conocimientos básicos de los estudiantes. Mi objetivo al redactar estas notas, es de alguna forma cubrir buena parte del curso que semestralmente impartimos a nuestros estudiantes de ingenieria de la Universidad de La Frontera. Un buen desafío es enriquecer semestralmente estas notas formalizando algunos capítulos que por ahora van bastante pobres en fundamentos y demostraciones, como agregando algunos otros que en esta versión no he incluído.

Es mi íntimo deseo que éstas notas sirvan a nuestros estudiantes como soporte bibliográfico principal en el curso de ecuaciones diferenciales de la Universidad de La Frontera. Este intento queda abierto a la crítica de estudiantes y profesores para ser mejorado. Sus comentarios serán siempre bienvenidos ya sea personalmente o vía email a *hburgos@ufro.cl*.

A la vez estas notas son el borrador de los temas que me correspondían del texto que en alguna oportunidad discutimos y planificamos realizar con mi amigo Jorge Billeke (Q.E.P.D). Sean estas notas dedicadas a su memoria.

Finalmente, quiero agradecer a mi colega, Alex Sepúlveda, por sus valiosos aportes en la revisión y corrección de estas notas, además de sus aportes de LaTeX y PsTricks.

Dr. Hernán Burgos V.

En Temuco, Marzo de 2009.

Introducción

La gran mayoría de las leyes básicas o relaciones básicas de la Física, Química, Biología, Ciencias Sociales, Ingeniería, etc, se expresan como relaciones matemáticas de ciertas cantidades conocidas, desconocidas y sus derivadas, tales relaciones se llaman modelos matemáticos y son en la mayoría de la veces representadas mediante *Ecuaciones Diferenciales*.

El problema más difícil en el estudio de las ecuaciones diferenciales es con frecuencia el de modelar cuantitativamente una situación real. Para lograr este objetivo es casi siempre necesario hacer suposiciones que permitan simplificar la situación y que pueda ser expresada en términos matemáticos medianamente sencillos.

En la modelación es necesario decidir que variables son importantes y cuáles no lo son, para luego clasificar las primeras en variables independientes o dependientes, las variables no importantes son aquellas que tienen muy poco o ningún efecto en el proceso. Por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo, su color, brillo y olor normalmente son de poco interés. Para tal problema, la masa del cuerpo, su forma, su posición y velocidad inicial y el tiempo serán posiblemente variables importantes para el modelo. Por otro lado, las variables que resultan afectadas por las independientes son las así llamadas variables dependientes, en el ejemplo, que hemos comentado, la velocidad, la posición en un determinado instante, el momento y lugar de impacto son posibles variables dependientes.

Se debe determinar las relaciones que existen entre las variables independientes, dependientes y sus derivadas (ecuación diferencial), lo que demanda un conocimiento profundo del problema y del área en que esta enmarcado. Por ejemplo, se puede ignorar para comenzar la fricción con el aire que actúa en un cuerpo en caída libre. Si se quiere mayor exactitud tendremos que considerar algún tipo de roce.

Las ecuaciones diferenciales las clasificaremos en diversos tipos, veremos varios métodos para resolverlas y en el caso en que no puedan resolverse, veremos como obtener información sobre las soluciones, en el caso que existan.

Esta quinta edición ha sido completamente revisada, corregida, reestructurada y ampliada. Las figuras han sido mejoradas. Cabe también señalar que esta versión cuenta con 239 ejemplos completamente resueltos distribuidos a los largo de todo el libro y en un capítulo final. Además cuenta con 462 ejercicios propuestos.

Capítulo 1

Ejemplos de Procesos Modelados por Ecuaciones Diferenciales

Este capítulo tiene por objetivo contextualizar los contenidos que serán tratados posteriormente. Para ello estudiamos algunos ejemplos sencillos de procesos que son modelados mediante ecuaciones diferenciales.

1.1. Desintegración de Substancias Radioactivas

La Física nos asegura que: "*En ausencia de las condiciones que provocan una reacción en cadena, una substancia radioactiva se desintegra, con una velocidad proporcional a la cantidad de substancia existente.*"

A. **Problema Físico:**

Deseamos determinar la cantidad de substancia radioactiva existente en cada momento, conociendo la cantidad existente en un momento inicial dado y el coeficiente de proporcionalidad entre la velocidad de desintegración y la cantidad de substancia existente.

A'. **Modelo Matemático del problema Físico:**

Denotemos por $x(t) \in \mathbb{R}_0^+$ la cantidad de substancia existente en el momento $t \in \mathbb{R}_0^+$, $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$ el instante inicial, por $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^+$ la cantidad inicial de substancia y por $\alpha > 0$ $(-\alpha < 0)$ el coeficiente de proporcionalidad de desintegración de la substancia radioactiva. Así, la ley física anterior se escribe:

$$x'(t) = -\alpha x(t), \ \forall t \geq t_0.$$

B. **Punto de vista de las Ecuaciones Diferenciales:**

Dado $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$, $x_0 > 0$ y $\alpha > 0$, hallar una aplicación $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, que satisfaga la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} x'(t) &= -\alpha x(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Evidentemente el problema B es sólo una reformulación del problema A o A'. Por lo tanto, una solución de B lo será de A.

1.2. Mecánica Newtoniana

Consideramos un punto material P, de masa m que evoluciona en un campo de fuerza $\vec{F}$, que puede ser gravitacional, eléctrico, magnético, etc. La segunda ley de Newton afirma que si $\vec{a}$ es la aceleración del movimiento del punto material, entonces : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

A. **Problema (Mecánica)**

Dada la masa m del punto material y el campo de fuerza $\vec{F}$, hallar "la ley de evolución" en el espacio, del punto material, es decir la ley de correspondencia entre el momento t y la posición del punto en tal momento t.

B. **El modelo Matemático.**

Denotemos por $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, al vector que define la posición del punto material en el momento $t \in \mathbb{R}_0^+$, por $\vec{v}(t) = \vec{x}'(t)$ la velocidad de desplazamiento del punto material, y por $\vec{a}(t) = \vec{x}''(t)$ la aceleración. Por otro lado, el campo de fuerzas $\vec{F}$ es una función $\vec{F} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$, lo que expresa el hecho que la fuerza F que acciona sobre el punto material depende de su posición en el espacio y de su velocidad. Con esto, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\vec{x}''(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{x}(t), \vec{x}'(t)),$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden.

1.3. Evolución de la Población de una sola Especie

El problema es preveer la evolución de una población de una sóla especie, teniendo en consideración que la razón media de crecimiento se estima sobre la base de los seres existentes de acuerdo a: "*Razón media de crecimiento es la razón media de los nacimientos menos razón media de los fallecimientos.*"

Modelo Matemático:

Anotemos por $x(t) \in \mathbb{R}^+$ la población de una especie en el momento $t \in \mathbb{R}_0^+$, por lo tanto, en un determinado intervalo de tiempo $[t, t+T]$, $T > 0$ dicha población crece en $x(t+T) - x(t)$. Con esto, la razón media de crecimiento, $\alpha(t)$, en el momento t está dada por:

$$\alpha(t) = \frac{x(t+T) - x(t)}{Tx(t)}.$$

Tomando límite $T \to 0$, obtenemos la ecuación diferencial de la evolución de la población de una sóla especie,

$$\alpha(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} \qquad \text{ó bien} \qquad x'(t) = \alpha(t)\, x(t)\,. \tag{1.1}$$

Notemos que hemos supuesto que la función x, discreta que opera a intervalos discretos de tiempo, se comporta como si operara de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, incluso derivable, que no es lo real, pero es el precio del modelo.

Estimando de algún modo, o bien, haciendo algunas hipótesis sobre la función $\alpha(t)$ que define la razón de crecimiento, tenemos de la ecuación (1.1) la ley de evolución en el tiempo, de la población estudiada. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.3.1 *Razón media de crecimiento constante y crecimiento ilimitado.*

Supongamos $\alpha(t) = \alpha =$ constante, de (1.1) la ley de evolución de la población en el caso de crecimiento ilimitado es:

$$x(t) = x(t_0)\, e^{\alpha(t-t_0)}, \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \tag{1.2}$$

Podemos suponer ahora, que la razón de crecimiento depende de la cantidad de alimentos por individuo, $\tau > 0$, la que consideraremos constante. Es evidente que existe un mínimo $\tau_0 > 0$ necesario para la sobrevivencia de la especie; por lo tanto, si $\tau > \tau_0$, la razón de crecimiento será positiva, mientras que si $\tau \leq \tau_0$, la razón de crecimiento será negativa o nula. Así, podemos presuponer que dicha razón de crecimiento constante está dada por $\alpha = a(\tau - \tau_0)$, donde $a > 0$ es un coeficiente de proporcionalidad que se supone conocido. En tal caso (1.2) se transforma en:

$$x(t) = x(t_0)\, e^{a(\tau-\tau_0)(t-t_0)}.$$

Que da cuenta de la dependencia directa de la evolución de la población en términos de la cantidad de alimento existente. ▲

Ejemplo 1.3.2 *Razón media de crecimiento variable y crecimiento limitado.*

El hecho que en la naturaleza no se ha observado el caso de alguna especie cuya población crezca ilimitadamente, demuestra que la hipótesis del Ejemplo 1.3.1 no es realista, al menos para intervalos grandes de tiempo. Por tanto, es más realista suponer que *cuando la población alcanza un determinado nivel* ξ*, la razón de cambio pasa a ser negativa. Mas precisamente, suponemos que la razón de cambio depende de la población existente en el momento respectivo. Esta hipótesis se escribe:*

$$\alpha\left(t\right)=c\left(\xi-x\left(t\right)\right),$$

donde c *es una constante conocida. En tal caso (1.1) queda escrita como:*

$$x'\left(t\right)=c\left(\xi-x\left(t\right)\right)x\left(t\right).$$

Un modelo matemático más realista se obtiene considerando la razón de crecimiento como una función más general, g*, del total de la población en el momento respectivo* $\alpha\left(t\right)=g\left(x\left(t\right)\right)$ *tal que* $g\left(\xi\right)=0$*,* $g\left(x\right)<0$ *si* $x>\xi$ *y* $g\left(x\right)>0$ *para* $x<\xi$*. Otras caracteristicas de la función* g *necesarias para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una población específica resultarán de la observación de la respectiva población, sus características y particularidades. Hemos llegado así al modelo:*

$$x'\left(t\right)=\alpha\left(g\left(t\right)\right)x\left(t\right).$$

El que tampoco refleja exactamente el comportamiento de la población, que depende de muchos otros factores de la población en el momento respectivo. La selección de estos factores, la evaluación de su contribución, y por lo tanto, la obtención de un modelo cada vez más complicado, pero más realista. Es un problema difícil que sólo puede ser resuelto por el especialista. ▲

1.4. Evolución de dos Especies Predador-Presa

Consideramos un "sistema biológico" formado por dos especies interdependientes, en la que una es alimento para la otra. Supongamos la razón de crecimiento constante para el predador. El problema es obtener la ley de evolución de las poblaciones de las dos especies.

Modelo Matemático

Sea $x(t)$, $y(t)\in\mathbb{R}^{+}$ las poblaciones en el momento $t\in\mathbb{R}_{0}^{+}$ de las especies predador y presa respectivamente. Como $y(t)$ es la cantidad de alimento disponible en el momento t para la especie predadora, situémonos en el caso de crecimiento ilimitado para esta especie. Con esto tenemos:

$$x'\left(t\right)=c\left(y\left(t\right)-\sigma\right)x\left(t\right), \tag{1.3}$$

donde a y σ son constantes.

Caractericemos ahora la razón de crecimiento para la especie presa. Suponiendo que la especie dispone de alimentos suficientes que le permite un crecimiento ilimitado en ausencia de la especie predadora, es decir, en este caso la razón de crecimiento será de la forma $by(t)$, con $b>0$. Para obtener la razón de crecimiento en presencia de los depredadores tenemos que restar "la razón de consumo" de la especie depredadora que suponemos de la forma $f(x(t), y(t))$, donde f es una función que debe estimarse lo más fielmente posible, o sobre la cual deben hacerse algunas hipótesis. Por lo tanto, tenemos:

$$y'(t) = by(t) - f(x(t), y(t)),$$

que junto con (1.3) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones $x(t)$, $y(t)$.

Si realizamos la hipótesis "razonable" que f es proporcional tanto a x como a y es decir: $f(x, y) = \beta xy$, con $\beta > 0$, entonces el sistema se escribe:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (Ay - B)\, x \\ y' & = & (C - Dx)\, y, \end{array} \right.$$

donde A, B, C y D son constantes positivas. Este sistema es conocido como **Ecuaciones Predador-Presa de Lotka-Volterra**.

Los ejemplos analizados han tenido como objetivo central demostrar como las ecuaciones diferenciales aparecen en modo natural en matemática o como modelo matemático de ciertos procesos de evolución.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

2.1. Aspectos Generales

2.1.1. Concepto de Ecuación Diferencial

Definición 2.1.1 (Ecuación Diferencial)
Sea $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$ *una función real definida sobre* $[a,b] \times \mathbb{Y}$*,* $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, donde* $x \in [a,b]$ *es la variable real,* $y = y(x)$ *es una función real, junto con sus derivadas* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$*. La relación:*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.1}$$

se llama **Ecuación diferencial** *de orden* n*.*

El problema es determinar las funciones $y = f(x)$ definidas sobre $[a,b]$, derivables hasta el orden n $\forall x \in [a,b]$ tal que,

$$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = 0, \forall x \in [a,b].$$

Una función $y = f(x)$ que satisfaga lo anterior se llama **Solución de la Ecuación Diferencial** (2.1).

Si $n = 1$ obtenemos la Ecuación Diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ escrita en Forma Implícita o $y' = f(x, y)$ escrita en Forma Explícita.

Ejemplo 2.1.2 .

1. *La ecuación diferencial* $y' = 2y + x + 1$ *es de primer orden, escrita en forma explícita. Una solución es:*

$$y = e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}, x \in \mathbb{R}.$$

La función $y = Ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$, donde C es una constante arbitraria representa una Familia de Soluciones de dicha ecuación.

2. *La ecuación $y = xy' + \ln y'$; $y' > 0$ es también una ecuación diferencial de primer orden pero implícita. La función $y = x$, $x \in \mathbb{R}$ es una solución. La función $y = Cx + \ln C$, $C > 0$ es su familia de soluciones.*

3. *La ecuación $y'' - 4y = 1$ es una ecuación diferencial de segundo orden. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ y C_1, C_2 constantes es una familia de soluciones de la ecuación dada. Dando valores específicos a las constantes obtenemos diferentes soluciones particulares. Por ejemplo, tomando $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ obtenemos la solución particular $y = e^{2x} - \frac{1}{4}$.* ▲

En este capitulo nos ocuparemos de las ecuaciones de primer orden. Demostraremos más adelante que la solución general de una ecuación de primer orden depende de una constante arbitraria.

Diremos que la función $\varphi(x, C)$ es la **Solución General** de la ecuación diferencial de primer orden

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.2}$$

$(x, y) \in \mathbb{D}$, si φ es solución de (2.2) y el gráfico de $\varphi(x, C)$ pertenece a $\mathbb{D}$. La solución general de la Ecuación Diferencial se llama también **Integral General**.

La solución general puede también resultar en forma implícita $\varphi(x, y, C) = 0$, como también puede darse la solución general en forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C) \\ y = \psi(t, C) \end{cases} \quad \text{para } t \in (\alpha, \beta).$$

Se llama **Solución Particular** de la ecuación $F(x, y, y') = 0$ a una función $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a, b]$, que se obtiene de la solución general $y = \varphi(x, C)$ dando un valor particular a la constante C.

Una solución de una ecuación diferencial que no contenga una constante arbitraria no es necesariamente una solución particular, por ejemplo, $y = xy' - y'^3$ tiene solución general $y = Cx - C^3$, $x \in \mathbb{R}$. La función $y = 2x - 8$ $(C = 2)$ es una solución particular, pero también es solución $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}$, $x \in \mathbb{R}^+$, la que no es solución particular, pues no se obtiene de la solución general. La llamamos **Solución Singular**.

El gráfico de una solución de una ecuación diferencial es una curva plana llamada **Curva Integral**.

2.1.2. Interpretación Geométrica de una Ecuación Diferencial de Primer Orden

Sea $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y consideremos la ecuación diferencial de primer orden escrita en forma explícita:

$$y' = f(x, y).$$

A cada punto (x_0, y_0) le corresponde una **dirección** de coeficiente angular $y'_0 = f\,(x_0, y_0)$, y a cada dirección le corresponde una recta $y - y_0 = y'_0\,(x - x_0)$ que pasa por el punto (x_0, y_0), por lo tanto, la ecuación $y' = f\,(x, y)$ asocia a cada punto en $\mathbb{D}$ una dirección (una recta). Luego tenemos así en $\mathbb{D}$ definido un **Campo de Direcciones** ϕ.

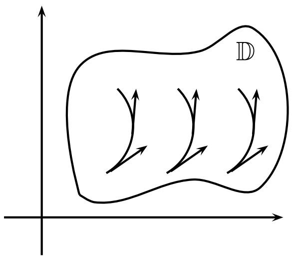

Figura 2.1: Campo de direcciones de $y' = f\,(x, y)$.

Supongamos ahora que $y = \psi\,(x)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$ es una solución de la ecuación dada. El gráfico de la solución es una curva integral en $\mathbb{D}$, con la propiedad que en cada punto de la curva, la tangente a la curva tiene la dirección del campo ϕ en ese punto. El problema de integrar la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en $\mathbb{D}$ se reduce por lo tanto a encontrar las curvas integrales en $\mathbb{D}$, curvas que tienen la propiedad que en cada punto son tangentes a la dirección del campo ϕ.

Ejemplo 2.1.3 .
La ecuación diferencial $y' - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, *define un campo de direcciones paralelo con la bisectríz de los ejes. Las curvas integrales son rectas paralelas con la bisectríz de los ejes* $y = x$. *La ecuación de todas estas rectas es* $y = x + C$, *solución general de la ecuación* $y' - 1 = 0$.

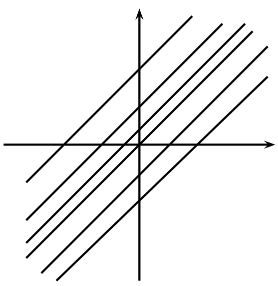

Figura 2.2: Campo de direcciones de $y' - 1 = 0$.

▲

2.1.3. Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones de Primer Orden

1. La ecuación fundamental de la dinámica del punto material se escribe vectorialmente a como:
$$m \cdot \vec{\gamma} = \vec{F}, \tag{2.3}$$
donde $\vec{\gamma}$ representa la aceleración del punto de masa m y $\vec{F}$ es resultante de las fuerzas que actuan sobre el punto.

   Tomemos el caso cuando el punto material se desplaza por el eje OX. La ecuación de movimiento (2.3) se escribe en este caso como:
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X(x, \frac{dx}{dt}, t),$$
   La componente X de la fuerza $\vec{F}$, en la dirección OX depende en general de la posición del móvil, de su velocidad y del tiempo, la que es una ecuación diferencial de segundo orden.

   Si X no depende de la posición del punto x, entonces la ecuación (2.3) se escribe $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X(\frac{dx}{dt}, t)$ y con la sustitución $v = \frac{dx}{dt}$, la ecuación se transforma en:
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}X(v, t).$$
   Luego podemos tener el recíproco: *"Cualquier ecuación diferencial de primer orden representa un determinado movimiento de un punto material."*

2. Consideremos un circuito formado por un resistor de resistencia R y una bobina de inductancia L, alimentado en serie por una tensión eletromotriz $e = E\cos\omega t$. Queremos estudiar la variación de la corriente del circuito al cerrar el interruptor K.

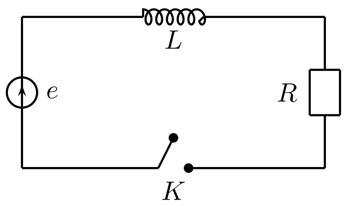

   Figura 2.3: Circuito eléctrico.

   Por Ley de Kirchhof tenemos $e = e_R + e_L$, pero $e_R = Ri$, $e_L = L\frac{di}{dt}$, luego la relación buscada es:
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\cos\omega t.$$

3. Determinar las curvas planas Γ que tengan la propiedad que si P es la proyección de un punto $M \in \Gamma$ sobre el eje X y la tangente en M corta al eje X en T, tenemos la relación $\overline{OP} \cdot \overline{PM} = \overline{PT}^2$.

   La familia de curvas (Γ) que cumple esta propiedad verifica la ecuación diferencial de primer orden:
$$xy = \left(\frac{y}{y'}\right)^2$$

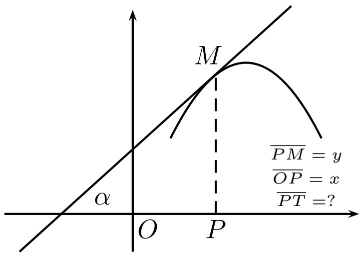

Figura 2.4: Problema geométrico.

   En efecto,
$$\frac{\overline{PM}}{\overline{TP}} = \operatorname{tg}\alpha = y' \Rightarrow \overline{TP} = \frac{y}{y'}$$

   Con solución general: $(x+y-C)^2 = 4xy$, que corresponde a una Familia de parábolas.

Estos ejemplos demuestran la importancia extraordinaria de las ecuaciones diferenciales en aplicaciones prácticas. Pues, el estudio de los fenómenos de la naturaleza lleva casi siempre aparejada una ecuación diferencial.

Definición 2.1.4 . (Solución)
Una función diferenciable $\varphi : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama **Solución** *de la ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, donde $f : \mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en el intervalo $\mathbb{I}$ si:*

1. *El gráfico de φ está en $\mathbb{D}$, es decir, $\{(t, \varphi(t)), t \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{D}$.*
2. *$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in \mathbb{I}$.*

2.1.4. El Problema de Cauchy

Para ilustrar comencemos por considerar inicialmente dos ejemplos:

1. Sean $\mathbb{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$ y $f(t,x) = g(t)$ contínua en $\mathbb{I}$. La función φ es una solución de $\dot{x} = g(t)$ en $\mathbb{I}$ si y sólo si $\varphi(t) = C + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$, donde $t_0 \in \mathbb{I}$ y C es una constante.

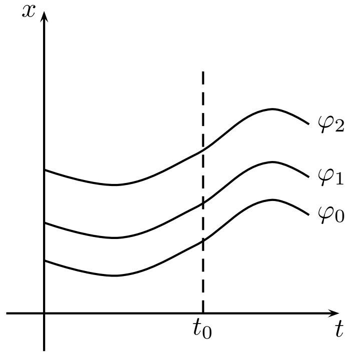

Figura 2.5: Solución única.

2. Sean $\mathbb{D}=\mathbb{R}^2$, $f(t,x)=3x^{\frac{2}{3}}$ y $C\in\mathbb{R}$. La función $\varphi_C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi_C(t)=\begin{cases}(t-C)^3 & t>C,\\ 0 & t\leq C,\end{cases}$$

es una solución de la ecuación $\dot{x}=3x^{\frac{2}{3}}$ en $\mathbb{I}=\mathbb{R}$ verificable directamente. Pero también $x=0$ es solución de la misma ecuación.

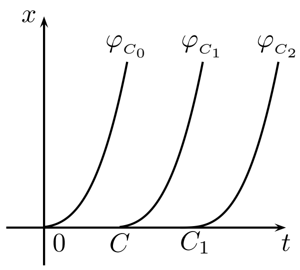

Figura 2.6: Soluciones múltiples.

Las ecuaciones diferenciales poseen en general una infinidad de soluciones. En el primer ejemplo por todo punto de $\mathbb{D}$ pasa una única solución, es decir, $\forall\,(t_0,x_0)\in\mathbb{D}\ \exists\,!\ \varphi$ tal que $\varphi(t_0)=x_0$. No ocurre lo mismo en el segundo ejemplo, pues $\forall\,(t_0,0)$ pasan infinitas soluciones no así para $(t_0,x_0)\neq(t_0,0)$.

Bajo ciertas hipótesis generales sobre f, por ejemplo, si f y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son contínuas en $\mathbb{D}$, entonces existe una única función φ solución de:

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\,, \tag{2.4}$$

en un intervalo que contenga a t_0 y tal que $\varphi(t_0)=x_0$. Tal solución φ se llama solución del problema de valor inicial (t_0,x_0) para la ecuación (2.4). Este problema también se conoce como **Problema de Cauchy** y se anota:

$$\dot{x}=f(t,x)\,,\ x(t_0)=x_0. \tag{2.5}$$

No es difícil demostrar que la ecuación diferencial (2.5) es equivalente a la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{2.6}$$

Es decir, toda solución de (2.5) es solución de (2.6) y recíprocamente, toda solución de (2.6) lo es de (2.5)

Ejemplo 2.1.5 .
Sean $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times (a_1, a_2)$ y $f(t, x) = f(x)$ una función contínua y tal que no se anula en (a_1, a_2). Dado $x_0 \in (a_1, a_2)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, calcule la solución para el problema de Cauchy:

$$\dot{x} = f(x);\ x(t_0) = x_0. \tag{2.7}$$

Solución.
Si φ es una solución de (2.7) entonces satisface $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ y $\varphi(t_0) = x_0$. De donde podemos escribir la relación:

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1. \tag{2.8}$$

Por otro lado, si la función $F : (a_1, a_2) \to \mathbb{R}$ está dada por $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$, vemos que $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ en (a_1, a_2) lo que implica que F es invertible y aplica (a_1, a_2) en (b_1, b_2) donde F^{-1} está definida. De (2.8) resulta que:

$$1 = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi'(t))} = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t).$$

Integrando entre t_0 y t tenemos:

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0,$$

y como $F(\varphi(t_0)) = 0$ concluimos que $\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0)$. Con esto hemos demostrado que φ es única. Más adelante demostraremos un teorema de existencia y unicidad. ▲

La ecuación diferencial más simple es $y' = f(x)$, donde f es una función contínua en $[a, b]$. Como vimos, tiene por solución:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Si ahora buscamos la solución que pasa por el punto (x_0, y_0), entonces:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

Pues, $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt + C$, de donde, $C = y(x_0) = y_0$. Por ejemplo, el problema de Cauchy $y' = \cos x + 1$, $y(0) = 2$ tiene por solución $y(x) = 2 + \int_0^x (\cos(t) + 1)\,dt = 2 + \operatorname{sen} x + x$.

Proposición 2.1.6 .
El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden depende de una constante arbitraria. Inversamente, toda familia de curvas planas

$$\varphi(x, y, C) = 0, \tag{2.9}$$

$(x, y) \in \mathbb{D}$, con φ contínua y derivable parcialmente en $\mathbb{D}$, verifica en $\mathbb{D}$ una ecuación diferencial de primer orden.

Demostración.
En efecto, derivando parcialmente (2.9) respecto de x tenemos:

$$\varphi'_x + \varphi'_y y' = 0. \tag{2.10}$$

Eliminando C entre las dos ecuaciones (2.9) y (2.10) obtenemos $\phi(x, y, y') = 0$.
Inversamente, sea $g(x, y) = C$, derivando respecto a x ó y eliminamos la constante C, obteniendo:

$$g'_x + g'_y y' = 0,$$

o bien:

$$g'_x dx + g'_y dy = 0,$$

que no especifica cual es la variable independiente y cual es la dependiente. ■

Ejemplo 2.1.7 .
Encuentre la ecuación diferencial de la familia de curvas $y = Cx^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Solución.
Derivando $y = Cx^2 + x + 1$ respecto a x tenemos $y' = 2Cx + 1$. Ahora, despejando C de esta última igualdad, reemplazando en la familia original e igualando a cero obtenemos $xy' - 2y + x + 2 = 0$. ▲

Ejemplo 2.1.8 .
Determine la ecuación diferencial de la familia de curvas:

$$\frac{x^2}{k^2} - y^2 = 1. \tag{2.11}$$

Solución.
Derivando parcialmente (2.11) respecto a x tenemos:

$$\frac{2x}{k^2} - 2yy' = 0. \tag{2.12}$$

Despejando k de (2.12), reemplazando en (2.11) y acomodando adecuadamente obtenemos $xyy' - y^2 = 1$. ▲

2.2. Ecuaciones Diferenciales Resueltas Respecto de y'

2.2.1. Ecuaciones Exactas

Por un lado, consideremos la familia de curvas uniparamétricas $g(x,y) = C$ y tomemos su diferencial total:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0.$$

Por otro lado, consideremos la ecuación diferencial:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{2.13}$$

Si podemos hallar una función $g(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = P(x,y) \text{ y } \frac{\partial g}{\partial y} = Q(x,y),$$

entonces la ecuación (2.13) se transforma en $dg = 0$, por tanto, $g(x,y) = C$ es su solución general. En tal caso $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ se llama diferencial exacta y la ecuación (2.13) se llama **Ecuación Diferencial Exacta**.

Proposición 2.2.1

$$Pdx + Qdy = 0 \textit{ es exacta } \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.14}$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Si $Pdx + Qdy = 0$ es exacta, entonces $P = \frac{\partial g}{\partial x}$ y $Q = \frac{\partial g}{\partial y}$. Luego, el lado derecho de (2.14) se escribe:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y},$$

lo cual es válido sólo si ambos lados de la ecuación existen y son contínuos. Por tanto, la primera implicancia de (2.14) debe satisfacerse si la ecuación diferencial es exacta.
($\Leftarrow$) Supongamos que el lado derecho de la ecuación (2.14) es válido y mostremos como determinar la función g. Como tal función debe satisfacer $P = \frac{\partial g}{\partial x}$ y $Q = \frac{\partial g}{\partial y}$, integremos P con respecto a x y Q respecto a y. Entonces:

$$g = \int \frac{\partial g}{\partial x}dx = \int P(x,y)\,dx + h(y), \tag{2.15}$$

y

$$g = \int \frac{\partial g}{\partial y}dy = \int Q(x,y)\,dy + k(x). \tag{2.16}$$

Nos falta demostrar que (2.15) y (2.16) definen igualmente a la función g. En efecto, tenemos:

$$\int P dx + h(y) = \int Q dy + k(x). \tag{2.17}$$

Despejando $h(y)$ y derivando parcialmente respecto a y obtenemos:

$$h'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx.$$

Si la región donde $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es simplemente conexa, es decir, no contiene horadados, podemos tomar la derivada parcial bajo la integral y resulta:

$$h'(y) = Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} dx.$$

El lado derecho de la ecuación anterior es una función que depende sólamente de la variable y, pues su derivada parcial respecto a x se anula, luego existe una función $h(y)$ que depende sólamente de y.

Un cálculo análogo garantiza la existencia de $k(x)$. ■

Notemos que esta demostración contiene un método para calcular la solución general $g(x, y) = C$ de una ecuación diferencial exacta, cual es ajustar $h(y)$ y $k(x)$ en la ecuación (2.17) para que ambos lados sean iguales, entonces cada lado es igual a $g(x, y)$.

Ejemplo 2.2.2 .
Resuelva la ecuación diferencial $(1 - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} y)\, dx + (\cos x \sec^2 y)\, dy = 0$.
Solución.
Para esta ecuación tenemos $P(x, y) = 1 - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} y$ *y* $Q(x, y) = \cos x \sec^2 y$. *Vemos que se satisface* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \sec^2 y$. *Por tanto, la ecuación es exacta. Integrando* P *respecto a* x *y* Q *respecto a* y *obtenemos:*

$$\int (1 - \operatorname{sen} x \operatorname{tg} y)\, dx + h(y) = \int \cos x \sec^2 y dy + k(x).$$

Luego,

$$x + \cos x \operatorname{tg} y + h(y) = \cos x \operatorname{tg} y + k(x).$$

Haciendo $h(y) = 0$ *y* $k(x) = x$ *obtenemos la solución general* $g(x, y) = x + \cos x \operatorname{tg} y = C$.
▲

Ejemplo 2.2.3 .
Resuelva $(x^3 + xy^2)\, dx + (x^2 y + y^3)\, dy = 0$.
Solución.
Tenemos que $P(x, y) = x^3 + xy^2$ *y* $Q(x, y) = x^2 y + y^3$. *Con esto,* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$, *lo que implica que la ecuación dada es exacta. Luego,*

$$\int \left(x^3 + xy^2\right) dx + h(y) = \int \left(x^2 y + y^3\right) dy + k(x),$$

es decir,

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + h(y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + k(x).$$

Tomando $h(y) = \frac{y^4}{4}$ *y* $k(x) = \frac{x^4}{4}$ *tenemos como solución* $g(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C$. ▲

Claramente las ecuaciones exactas son relativamente escasas, pues la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es muy fuerte. Más adelante veremos ecuaciones que no son exactas y métodos de resolución.

Ejemplo 2.2.4 .
Resuelva $\left((1+2x^2)\, e^{x^2+y} - \operatorname{sen} x\right) dx + xe^{\left(x^2+y\right)} dy = 0.$
Solución.
Tenemos $P(x,y) = (1+2x^2)\, e^{x^2+y} - \operatorname{sen} x$ *y* $Q(x,y) = xe^{\left(x^2+y\right)}$. *Además, se satisface* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = (1+2x^2)e^{x^2+y}$, *lo que implica que la ecuación dada es exacta. Luego,*

$$g(x,y) = \int Q(x)dy = \int xe^{x^2+y}dy = xe^{x^2+y} + k(x).$$

Derivando parcialmente respecto a x, *recordando que* $\frac{\partial g}{\partial x} = P(x,y)$ *y simplificando tenemos que:*

$$k'(x) = -\operatorname{sen} x,$$

de donde, $k(x) = \cos x$. *Luego la solución general es* $xe^{x^2+y} + \cos x = C$. ▲

Ejemplo 2.2.5 .
Resuelva $(2xy^3 - y^2)\, dx + (3x^2y^2 - 2xy + 2y)\, dy = 0.$
Solución.
Tenemos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2 - 2y$. *Luego,*

$$\int \left(2xy^3 - y^2\right) dx + h(y) = \int \left(3x^2y^2 - 2xy + 2y\right) dy + k(x),$$

es decir,

$$x^2y^3 - xy^2 + h(y) = x^2y^3 - xy^2 + y^2 + k(x).$$

Con esto, tomamos $h(y) = y^2$ *y* $k(x) = 0$. *Así, la solución es* $x^2y^3 - y^2x + y^2 = C$. ▲

Ejercicio. Resuelva $\left(\ln(2x-y) + \frac{2x}{2x-y}\right) dx - \frac{x}{2x-y} dy = 0.$

2.2.2. Ecuaciones de Variables Separables

Sean f y g funciones contínuas en $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente. Y consideremos la ecuación $f(x)dx + g(y)dy = 0$, vemos que se cumple $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Luego,

$$\int f(x)\, dx + h(y) = \int g(y)\, dy + k(x).$$

Derivando respecto a y el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos $h'(y) = g(y)$, pues $\frac{\partial}{\partial y}\int f(x)\,dx = 0$. Por tanto, $h(y) = \int g(y)\,dy$. Es decir,

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C.$$

Ejemplo 2.2.6 .
Resuelva $(y^2+1)\,xdx + (x+1)\,ydy = 0.$
Solución.
Dividiendo la ecuación dada entre $(y^2+1)(x+1)$, $x \neq -1$, *obtenemos:*

$$\frac{x}{x+1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy = 0.$$

Luego,

$$\int \frac{x}{x+1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}dy = C,$$

es decir,

$$x - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right) = C,$$

$x+1>0$. *Si ahora buscamos la trayectoria que pasa por* $(0,1)$ *tenemos:*

$$0 + \ln(0+1) + \frac{1}{2}\ln(1+1) = C,$$

de donde, $C = \frac{1}{2}\ln 2$. *Por tanto,* $x - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln 2$. ▲

Ejemplo 2.2.7 .
Resuelva $(3x+3y-1)dx + (x+y+1)dy = 0.$
Solución.
Escribamos la ecuación dada como:

$$y' = -\frac{3(x+y)-1}{x+y+1}.$$

Consideremos entonces, el cambio de variable $x+y=z$, *esto implica que* $z' = 1 + y'$. *Luego,*

$$z' - 1 = -\frac{3z-1}{z+1}.$$

Escribiendo $z' = \frac{dz}{dx}$ *y despejando* dx *obtenemos:*

$$\frac{1+z}{2(1-z)}dz = dx,$$

o equivalentemente al separar en fracciones parciales el lado izquierdo:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z}\right)dz = dx.$$

Integrando a ambos miembros resulta:

$$-\frac{1}{2}\left(z+\ln|1-z|\right)=x+C.$$

Volviendo a la variable original obtenemos $x+\frac{1}{2}\left(x+y+\ln|1-x-y|\right)=C$. ▲

Ejemplo 2.2.8 .
Resuelva $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$.
Solución.
La ecuación dada se escribe como:

$$y'=-\frac{y^3}{2\left(x^2-xy^2\right)}.$$

Sea ahora el cambio de variable $y=\sqrt{x}z$, *de donde* $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}z+\sqrt{x}z'$, *que reemplazado en la expresión de* y' *resulta:*

$$\frac{z}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}z'=-\frac{x^{\frac{3}{2}}z^3}{2x^2\left(1-z^2\right)}.$$

Multiplicando por $2\sqrt{x}$ *y despejando* $2xz'$ *tenemos:*

$$2xz'=-\frac{z}{1-z^2}.$$

Escribiendo $z'=\frac{dz}{dx}$ *y separando variables:*

$$2\left(\frac{1}{z}-z\right)dz=-\frac{dx}{x},$$

Integrando resulta:

$$2\ln|z|-z^2=-\ln|x|+C.$$

Retornando a la variable original obtenemos como solución $2\ln\left|\frac{y}{\sqrt{x}}\right|-\frac{y^2}{x}+\ln|x|=C$. ▲

2.2.3. Factor Integrante

Supongamos que P y Q son funciones contínuas con derivadas parciales contínuas en $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^2$ y consideremos la ecuación diferencial:

$$Pdx+Qdy=0, \tag{2.18}$$

Si ésta no es una diferencial total en $\mathbb{D}$, queremos encontrar una función $\mu\left(x,y\right)$ tal que, la expresión:

$$\mu\left(x,y\right)P\left(x,y\right)dx+\mu\left(x,y\right)Q\left(x,y\right)dy,$$

sea una diferencial total en $\mathbb{D}$. Por tanto, tenemos la condición:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P)$$

ó bien:

$$\mu\frac{\partial Q}{\partial x} - \mu\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0. \tag{2.19}$$

Definición 2.2.9 (Factor Integrante)
La función $\mu(x, y)$ definida en $\mathbb{D}$ con derivadas parciales de primer orden contínuas en $\mathbb{D}$ que verifica (2.19) se llama **Factor Integrante** *de la ecuación (2.18).*

La relación (2.19) es una ecuación diferencial en derivadas parciales, lo que significa que el problema se ha transformado en uno más complicado, y no hemos avanzado mucho. Veamos algunos casos particulares:

1. Busquemos un factor integrante que dependa sólo de x, es decir, $\mu(x, y) = \mu(x)$. De acuerdo a esto, (2.19) se escribe:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{2.20}$$

   La determinación de μ es posible sólo si $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ depende únicamente de x. Intengrando (2.20) respecto a x obtenemos:

$$\ln \mu = \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx.$$

2. En un modo análogo, si buscamos un factor integrante $\mu(y)$ función sólo de y, tenemos de (2.20) que:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

   Como ocurrió antes, la determinación de μ es posible si $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ es función sólo de y. Integrando respecto a y obtenemos:

$$\ln \mu = \int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy.$$

Ejemplo 2.2.10 .
Resuelva $(y^3 \cos x + y)\, dx + (y^2 \operatorname{sen} x - x)\, dy = 0.$
Solución.

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \cos x + 1$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \cos x - 1$ tenemos que la ecuación no es exacta. Por tanto, buscamos un factor integrante:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^3 \cos x + y}\left(\left(y^2 \cos x - 1\right) - \left(3y^2 \cos x + 1\right)\right) = -\frac{2}{y},$$

que sólo depende de y. Luego, $\ln \mu = -2 \int \frac{dy}{y}$, de donde $\mu = \frac{1}{y^2}$ es el factor integrante. Al multiplicar la ecuación dada por $\frac{1}{y^2}$ se transforma en exacta quedando como:

$$\left(y \cos x + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\operatorname{sen} x - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$$

Por tanto,

$$g(x, y) = \int \left(\operatorname{sen} x - \frac{x}{y^2}\right) dy + k(x) = y \operatorname{sen} x + \frac{x}{y} + k(x).$$

Derivando parcialmente respecto a x y recordando que $\frac{\partial g}{\partial x} = P(x, y) = y \cos x + \frac{1}{y}$ tenemos que $k'(x) = 0$, es decir, $k(x) = C$. Concluimos que la solución buscada es $y \operatorname{sen} x + \frac{x}{y} = C$. ▲

Ejemplo 2.2.11 .
Resuelva $(x + y^2)\, dx - 2xydy = 0$.
Solución.
Tenemos que $P(x, y) = x + y^2$ y $Q(x, y) = -2xy$. Por lo tanto, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y$, lo que implica que la ecuación dada no es exacta. Calculemos el factor integrante:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Es decir, $\ln \mu = -2 \ln |x|$, y por tanto, $\mu = \frac{1}{x^2}$. Multiplicando toda la ecuación dada por este factor integrante obtenemos $\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0$, la que es exacta. Entonces:

$$g(x, y) = -2 \int \frac{y}{x} dy + k(x) = -\frac{y^2}{x} + k(x).$$

Derivando parcialmente respecto a x y recordando que $\frac{\partial g}{\partial x} = P(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, obtenemos:

$$k'(x) = \frac{1}{x},$$

es decir, $k(x) = \ln |x|$. Resulta, entonces, como solución $\ln |x| - \frac{y^2}{x} = C$. ▲

Ejemplo 2.2.12 .
Resuelva $\cos x dx - 4 \operatorname{sen} x dy = -y^2 dy$.
Solución.
La ecuación dada se escribe como $\cos x dx + \left(y^2 - 4\operatorname{sen} x\right) dy = 0$, *de donde* $P\left(x,y\right) = \cos x$ *y* $Q\left(x,y\right) = y^2 - 4\operatorname{sen} x$. *Como* $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ *y* $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4\cos x$ *vemos que la ecuación no es exacta. Para su factor integrante tenemos:*

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{\cos x}\left(-4\cos x - 0\right) = -4,$$

que es independiente de y. *Por tanto,* $\mu(y) = e^{-4y}$. *Multiplicando la ecuación original por este factor obtenemos la ecuación exacta* $e^{-4y}\cos x dx + e^{-4y}\left(y^2 - 4\operatorname{sen} x\right) dy = 0$. *Luego,*

$$g\left(x,y\right) = \int \cos x e^{-4y} dx + h\left(y\right) = \operatorname{sen} x e^{-4y} + h\left(y\right).$$

Derivando parcialmente respecto a y *y notando que* $\frac{\partial g}{\partial y} = Q\left(x,y\right) = e^{-4y}\left(y^2 - 4\operatorname{sen} x\right)$ *obtenemos:*

$$h'\left(y\right) = y^2 e^{-4y},$$

es decir, $h\left(y\right) = -\frac{1}{4}y^2 e^{-4y} - \frac{y}{8}e^{-4y} - \frac{1}{32}e^{-4y}$. *Por tanto, la solución es:*

$$e^{-4y}\left(\operatorname{sen} x - y^2 e^{-4y} - \frac{y}{8}e^{-4y} - \frac{1}{32}e^{-4y}\right) = C.$$

▲

2.2.4. Ecuaciones Homogéneas

Definición 2.2.13 (Función Homogénea)
Diremos que la función $F\left(x,y\right)$ *es* **Homogénea** *de grado* n *si y sólo si* $F\left(\lambda x, \lambda y\right) = \lambda^n F\left(x,y\right)$.

Por ejemplo, $F\left(x,y\right) = x^2 + xy$ es una función homogénea de grado dos. En efecto, $F\left(\lambda x, \lambda y\right) = \left(\lambda x\right)^2 + \left(\lambda x\right)\left(\lambda y\right) = \lambda^2\left(x^2 + xy\right) = \lambda^2 F\left(x,y\right)$.

Definición 2.2.14 (Ecuación Diferencial Homogénea)
Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P\left(x,y\right)}{Q\left(x,y\right)},$$

donde $P\left(x,y\right)$ *y* $Q\left(x,y\right)$ *son funciones homogéneas en* x *e* y, *del mismo grado* n *se llama* **Ecuación Homogénea**.

Notemos que al ser P y Q homogéneas del mismo grado n, podemos escribir $P(x,y) = x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right)$ y $Q(x,y) = x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Es decir, las ecuaciones homogéneas tienen la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x}). \tag{2.21}$$

Teorema 2.2.15 .
El cambio de variable $y = xz$ transforma la ecuación homogénea (2.21) en una del tipo variables separables.

Demostración.
Si $y = xz$ entonces $y' = z + xz'$, por tanto, la ecuación (2.21) toma la forma:

$$x\frac{dz}{dx} + z = F(z). \tag{2.22}$$

Separando variables tenemos:

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{2.23}$$

Si suponemos que $F(\frac{x}{y})$ contínua y $F(\frac{y}{x}) \neq \frac{y}{x}$ en un dominio $\mathbb{D}$, podemos integrar (2.23) y obtener la solución general de (2.22):

$$\ln|x| + C = \int \frac{dz}{F(z) - z} = \phi(z).$$

Luego, la solución general de (2.21) es:

$$\ln|x| + C = \phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.24}$$

■

Observaciones.

1. Si z_0 es raíz de $F(z) - z = 0$, entonces $z = z_0 =$ constante es también una solución de la ecuación (2.23), como se verifica en forma inmediata, pues $\frac{dz}{dx} = 0$. Luego, la recta $y = z_0 x$ es solución de la ecuación (2.21) llamada Solución Singular.

2. Si en (2.24) reemplazamos C por $-\ln C$ la solución general se escribe:

$$x = Ce^{\phi\left(\frac{y}{x}\right)} = c\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Recíprocamente, una familia de curvas

$$x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.25}$$

verifica una ecuación homogénea. En efecto, derivando esta relación (2.25) obtenemos:

$$1 = C\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{xy' - y}{x^2}\right). \tag{2.26}$$

Eliminando C de entre las ecuaciones (2.25) y (2.26) obtenemos:

$$x\left(\frac{xy' - y}{x^2}\right) = \frac{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi'\left(\frac{y}{x}\right)},$$

es decir,

$$y' = \frac{\psi(\frac{y}{x})}{\psi'(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x} = F(\frac{y}{x}).$$

Ejemplo 2.2.16 . *Resuelva el problema de valor inicial* $x^2 - y^2 = 5xyy'$, $y\,(1) = 3$.
Solución.
Esta ecuación es homogénea de grado 2, por lo que hacemos $y = xz$, *de donde* $y' = z + xz'$. *Con esto:*

$$x^2 - (xz)^2 = 5x^2 z\,(z + xz')\,.$$

Una vez reducida queda:

$$\frac{1 - z^2}{5z} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Separando variables obtenemos:

$$\frac{5zdz}{1 - 6z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando a ambos miembros resulta:

$$-\frac{5}{12}\ln|1 - 6z^2| = \ln|x| + C.$$

Retornando a la variable original tenemos:

$$\ln|x| + C = -\frac{5}{12}\ln\left|1 - 6\frac{y^2}{x^2}\right|.$$

Imponiendo la condición inicial $y\,(1) = 3$ *obtenemos la constante:*

$$C = -\frac{5}{12}\ln\left|1 - 6\cdot\frac{9}{1}\right|,$$

de donde, $C = -\frac{5}{12}\ln 53$. *Por lo tanto la solución es*

$$\ln|x| + \frac{5}{12}\ln\left|\frac{x^2 - 6y^2}{x^2}\right| = \frac{5}{12}\ln 53$$

▲

Ejemplo 2.2.17 .
Resuelva el problema de valor inicial $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $y(1) = 0$.
Solución.
Esta es una ecuación homogénea de grado dos, por lo que hacemos el cambio de variable $y = xz$ *e* $y' = z + xz'$, *obteniéndo:*

$$z + xz' = \frac{1+z^2}{z}.$$

Seprarando variables e integrando resulta:

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + C,$$

que escrita en términos de la variable original es:

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C.$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 0$ *obtenemos* $C = 0$. *Por tanto, la solución es* $y^2 = 2x^2 \ln|x|$. ▲

Ejercicios.

1. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
2. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.
3. $y' = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.
4. $xy' - y = \sqrt{xy}$.

2.2.5. Ecuaciones Reductibles a Homogéneas

Consideremos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right), \tag{2.27}$$

donde a, b, c, α, β y γ son constantes. Según sean estas constantes distinguimos los siguientes casos:

1. Supongamos $c = \gamma = 0$. En tal caso tenemos que (2.27) se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right),$$

siendo esta homogénea, por lo que, la sustitución $y = xz$ separa las variables.

Ejemplo 2.2.18 .
Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{3x+2y}$.
Solución.
Hacemos el cambio $y = xz$ *e* $y' = z + xz'$*, obteniendo:*

$$z + xz' = \frac{2+3z}{3+2z}.$$

Separando variables resulta:

$$\frac{dx}{x} = \frac{3+2z}{2\left(1-z^2\right)}dz,$$

Integrando y multiplicando por 4 *para quitar denominadores tenemos:*

$$4\ln|x| = -5\ln|z-1| + \ln|z+1| + 4\ln|C|\,.$$

Retornando a la variable original y aplicando las propiedades de los logaritmos concluimos que la solución es:

$$x^4\left(\frac{y}{x}-1\right)^5 = C^4\left(\frac{y}{x}+1\right).$$

▲

2. Si $c^2+\gamma^2 = 0$ y $a\beta - \alpha b \neq 0$ las rectas $ax+by+c=0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ se cortan en el punto (x_0, y_0). En tal caso, hacemos el cambio de variables:

$$\begin{array}{rcl} u & = & x - x_0 \\ v & = & y - y_0, \end{array}$$

obteniéndo la ecuación homogénea del caso anterior:

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{au+bv}{\alpha u + \beta v}\right).$$

Ejemplo 2.2.19 .
Resuelva $y' = \frac{x-3y+2}{-4x-y+5}$.
Solución.
Resolviendo el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-3y+2 & = & 0 \\ -4x-y+5 & = & 0 \end{array}\right|$$

encontramos que $(x_0, y_0) = (1, 1)$. *Por tanto, hacemos* $u = x - 1$ *y* $v = y - 1$. *Al sustituir esto en la ecuación original obtenemos:*

$$\frac{du}{dv} = \frac{u - 3v}{-4u - v}.$$

Sustituyendo $v = uz$, *de donde* $v' = z + uz'$ *en la expresión anterior resulta:*

$$z + uz' = \frac{1 - 3z}{-4 - z}.$$

Recordando que $z' = \frac{dz}{du}$ *y separando variables tenemos:*

$$\frac{-(4 + z)}{z^2 + z + 1} dz = \frac{du}{u}.$$

Integrando obtenemos:

$$\ln|u| - C = -\frac{1}{2}\ln|z^2 + z + 1| - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

Pero $u = x - 1$, $v = y - 1$ *y* $z = \frac{v}{u}$, *por tanto,* $z = \frac{y-1}{x-1}$. *Al sustituir lo anterior y utilizar las propiedades de los logarítmos vemos que la solución final es:*

$$\frac{1}{2}\ln\left[(y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (x - 1)^2\right] + \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2y + x - 3}{\sqrt{3}(x - 1)}\right) = C.$$

▲

3. Si $c^2 + \gamma^2 \neq 0$ y $a\beta - \alpha b = 0$, entonces las rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ son paralelas. De la relación entre las pendientes $a\beta - \alpha b = 0$ resulta $\frac{\beta}{b} = \frac{\alpha}{a} = k$, de donde $\beta = kb$ y $\alpha = ka$. Luego, (2.27) se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c}\right).$$

Hagamos el cambio de variables $ax + by = z$, lo que implica $a + b\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$. Con esto, la ecuación se transforma en:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = F\left(\frac{z + c}{kz + c}\right).$$

Separando variables obtenemos:

$$\frac{dz}{bF\left(\frac{z+c}{kz+c}\right) + a} = dx,$$

y a partir de esto resulta:

$$x + C = \int \frac{dz}{bF\left(\frac{z+c}{kz+c}\right) + a} = \phi(z),$$

es decir,

$$x + C = \phi(ax + by).$$

Ejemplo 2.2.20 .
Resuelva $(x + y + 1)dx + (3x + 3y - 1)dy = 0.$
Solución.
La ecuación se escribe como:

$$y' = -\frac{x + y + 1}{3\,(x + y) - 1}.$$

Por tanto, sea $z = x + y$*, de donde* $z' = 1 + y'$*. Reemplazando lo anterior y separando variables obtenemos:*

$$\frac{3z - 1}{2\,(z - 1)} = dx.$$

Integrando y volviendo a la variable original encontramos:

$$\frac{3}{2}\,(x + y) + \ln|x + y - 1| = x + C.$$

▲

2.2.6. Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Definición 2.2.21 Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden
Sean P *y* Q *funciones contínuas en* $[a, b]$*. Una ecuación de la forma:*

$$y' + P\,(x)\,y + Q\,(x) = 0, \tag{2.28}$$

se llama **Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden**.

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P\,(x)\,y = 0,$$

se llama **Ecuación Lineal Homogénea** asociada a (2.28).

Teorema 2.2.22 .
La solución general de la ecuación (2.28) esta dada por:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right],\ \forall x \in [a, b]\,. \tag{2.29}$$

Demostración.

Resolvamos primero la ecuación lineal homogénea asociada, $y' + P(x)\, y = 0 \ x \in [a, b]$. Separando variables e integrando tenemos que:

$$y_h = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Veamos la solución de la no homogénea. Comencemos por notar que la función $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$ es una solución particular de la ecuación homogénea para $C = 1$. Por tanto, hagamos el cambio $y = y_1 u$. De acuerdo a esto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} u + y_1 \frac{du}{dx}.$$

Reemplazando en la ecuación (2.28) tenemos:

$$\frac{dy_1}{dx} u + y_1 \frac{du}{dx} + P y_1 u + Q = 0,$$

ó bien:

$$u \left[\frac{dy_1}{dx} + P y_1 \right] + y_1 \frac{du}{dx} + Q = 0.$$

Luego,

$$y_1 \frac{du}{dx} + Q = 0.$$

Separando variables, integrando y reemplazando y_1 obtenemos:

$$u(x) + C = -\int Q(x)\, y_1^{-1}(x)\, dx = -\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx.$$

Finalmente concluimos:

$$y(x) = y_1(x)\, u(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[C - \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx \right].$$

■

El método usado para la resolución de la ecuación diferencial lineal no homogénea se llama "*Método de Variación de Parámetros*". Además, notemos que la solución de dicha ecuación se escribe:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} - e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx,$$

o sea, es igual con la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la ecuación no homogénea, la que se puede obtener de la solución general de la no homogénea tomando $C = 0$.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 2.2.23 .
Resuelva $y' - \frac{2}{x}y - 5x^2 = 0.$
Solución.
Tenemos $P(x) = -\frac{2}{x}$ *y* $Q(x) = -5x^2$*, entonces:*

$$\begin{aligned} y &= e^{2\int \frac{dx}{x}} \left[C + 5 \int x^2 e^{-2\int \frac{dx}{x}} dx \right] \\ &= e^{\ln x^2} \left[C + 5 \int x^2 e^{\ln x^{-2}} dx \right] \\ &= x^2 \left[C + 5 \int x^2 \cdot x^{-2} dx \right] \\ &= Cx^2 + 5x. \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 2.2.24 .
Resuelva $y' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) y + e^x \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$
Solución.
Tenemos $P(x) = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ *y* $Q(x) = e^x \left(x + \frac{1}{x}\right)$*. Entonces:*

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx} \left[C - \int e^x \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{-\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx} dx \right] \\ &= e^{x+\ln x} \left[C - \int e^x \left(x + \frac{1}{x}\right) e^{-x-\ln x} dx \right] \\ &= xe^x \left[C - \int e^x \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{e^{-x}}{x} dx \right] \\ &= xe^x \left[C - \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \right] \\ &= xe^x \left[C - \left(x - \frac{1}{x}\right) \right] \\ &= Cxe^x - x^2 e^x + e^x. \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 2.2.25 .
Resuelva $y' + 2y = x^2 + 2x.$
Solución.

Tenemos $y' + 2y - (x^2 + 2x) = 0$, *de donde* $P(x) = 2$ *y* $Q(x) = -(x^2 + 2x)$. *Entonces:*

$$\begin{aligned}
y &= e^{-2\int dx}\left[C + \int (x^2 + 2x)e^{2\int dx}dx\right] \\
&= e^{-2x}\left[C + \int (x^2 + 2x)e^{2x}dx\right] \\
&= e^{-2x}\left[C + \int x^2e^{2x}dx + 2\int xe^{2x}dx\right] \\
&= e^{-2x}\left[C + \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + \frac{e^{2x}}{2}(2x-1)\right].
\end{aligned}$$

▲

Como vimos la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea es de la forma:

$$y = \varphi(x) + C\psi(x), \tag{2.30}$$

que corresponde a una familia de curvas que depende linealmente de un solo parámetro. Recíprocamente, toda familia de curvas que depende linealmente de un sólo parámetro, verifica una ecuación diferencial lineal de primer orden. En efecto, derivando (2.30) obtenemos:

$$y' = \varphi'(x) + C\psi'(x). \tag{2.31}$$

Despejando C de (2.30) y (2.31) e igualando:

$$\frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

de donde obtenemos:

$$y' - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}y + \frac{\psi'(x)\varphi(x)}{\psi(x)} - \psi'(x) = 0,$$

la cual es una Ecuación Lineal de Primer Orden.

Si conocemos una solución particular y_1 de la ecuación lineal:

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0,$$

la solución general se obtiene por una cuadratura. En Efecto, simplemente hacemos $y = z + y_1$, de donde $z' + y_1' + Pz + Py_1 + Q = 0$, pero $y_1' + Py_1 + Q = 0$, luego,$z' + Pz = 0$. Separando variables, integrando y despejando z obtenemos:

$$z = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Y por tanto,

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)dx},$$

la que es solución general de la ecuación lineal.

Ejemplo 2.2.26 .
Resuelva la ecuación $y' - xy = 1 - x^2$, si conocemos la solución particular $y_1 = x$.
Solución.
La ecuación se escribe como $y' - xy + x^2 - 1 = 0$, por tanto, $P(x) = -x$. Luego,

$$y = x + Ce^{\int x dx} = x + Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

▲

Sean $y = \varphi(x) + C\psi(x)$ solución general de una ecuación lineal, y_1, y_2 e y tres soluciones particulares correspondiente a las constantes C_1, C_2 y C respectivamente. Es decir:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & \varphi(x) + C_1\psi(x) \\ y_2 & = & \varphi(x) + C_2\psi(x) \\ y & = & \varphi(x) + C\psi(x) \end{array}\right|$$

De aquí tenemos:

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2} = A \text{ (Constante)},$$

lo que implica:

$$y = A(y_1 - y_2) + y_2,$$

o sea, si conocemos dos soluciones podemos hallar la solución general sin ninguna cuadratura.

Ejemplo 2.2.27 .
Resuelva $y' \cos x + y \operatorname{sen} x + 4\cos^3 x = 0$.
Solución.
Primero resolvamos ecuación la homogénea asociada: $y' \cos x + y \operatorname{sen} x = 0$. Separando variables e integrando obtenemos: $y = C\cos x$. Pongamos ahora $y = C(x)\cos x$, lo que implica $y' = C'(x)\cos x - C(x)\operatorname{sen} x$. Reemplazando en la ecuación lineal no homogénea y simplificando obtenemos $C'(x) = -4\cos x$, de donde $C(x) = -4\operatorname{sen} x + k$. Concluimos que la solución es:

$$y = k\cos x - 4\operatorname{sen} x \cos x.$$

Apliquemos ahora, la fórmula de variación de parámetros. La ecuación dada se escribe como $y' + y\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 4\cos^2 x = 0$, de donde, $P(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $Q(x) = 4\cos^2 x$. Con esto tenemos:

$$y = e^{-\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx}\left[k - 4\int \cos^2 x e^{\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx} dx\right],$$

lo que implica finalmente:

$$y = k\cos x - 4\operatorname{sen} x.$$

Por otra parte, $y_1 = -4\operatorname{sen} x\cos x$, $y_2 = \cos x - 4\operatorname{sen} x\cos x$ *son dos soluciones particulares de la ecuación:* $y'\cos x + y\operatorname{sen} x + 4\cos^3 x = 0$. *Por tanto, podemos escribir la solución de inmediato sin realizar integración alguna:*

$$\begin{aligned} y &= A\left(-4\operatorname{sen} x\cos x - (\cos x - 4\operatorname{sen} x\cos x)\right) + (\cos x - 4\operatorname{sen} x\cos x) \\ &= (1-A)\cos x - 4\operatorname{sen} x\cos x, \end{aligned}$$

haciendo $k = 1 - A$ *obtenemos* $y = k\cos x - 4\operatorname{sen} x\cos x$, *que coincide con la solución encontrada por los dos métodos descritos anteriormente.* ▲

Ejercicios.

1. $xy' + y = x^3$.
2. $\frac{dx}{dt} + x = \cos t$.
3. $xy' - y + x = 0$.
4. $y' + \frac{2y}{x^2-1} = 2x + 2$.

2.2.7. Ecuaciones Reducibles a Lineales

Ecuación de Bernoulli

Definición 2.2.28 (Ecuación de Bernoulli)
Sean P *y* Q *funciones contínuas,* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. *Una ecuación diferencial de la forma:*

$$y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^{\alpha} = 0,$$

se llama **Ecuación de Bernoulli**.

Teorema 2.2.29 .
El cambio de variable $z = y^{1-\alpha}$ *transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.*

Demostración.
En efecto, si multiplicamos la ecuación de Bernoulli por $y^{-\alpha}$ obtenemos:

$$y'y^{-\alpha} + P(x)\,y^{1-\alpha} + Q(x) = 0.$$

Pero si $z = y^{1-\alpha}$ entonces $y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}$, lo que sustituido en la expresión anterior resulta:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)\,z + Q(x) = 0.$$

Finalmente multiplicando por $1-\alpha$ obtenemos una ecuación lineal. ■

Ejemplo 2.2.30 .
Resuelva el problema de valor inicial $xy' + y + 3x\ln xy^2 = 0$, $y(1) = 5$, $x > 0$.

Solución.
Dividiendo la ecuación entre x tenemos:

$$y' + \frac{1}{x}y + 3\ln xy^2 = 0,$$

la que es una Bernoulli con $\alpha = 2$. Por tanto, hacemos $z = y^{1-2} = y^{-1}$, lo que implica $-z' = y^{-2}y'$. Multiplicando la nueva forma de la ecuación dada por y^{-2} obtenemos:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} + 3\ln x = 0.$$

Haciendo las sustituciones indicadas resulta la ecuación lineal:

$$z' - \frac{1}{x}z - 3\ln x = 0,$$

cuya solución se obtiene aplicando (2.29). Obtenemos:

$$z = Cx + \frac{3}{2}x\ln^2 x.$$

Pero $z = \frac{1}{y}$, lo que implica:

$$y = \frac{1}{Cx + \frac{3}{2}x\ln^2 x}.$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 5$ tenemos

$$5 = \frac{1}{C + \frac{3}{2}\ln^2 1},$$

de donde, $C = \frac{1}{5}$. Por tanto, la solución buscada es:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{5}x + \frac{3}{2}x\ln^2 x} = \frac{10}{2x + 15x\ln^2 x}.$$

▲

Ejemplo 2.2.31 .
Resuelva el problema de valor inicial $xy' + y + x^2y^2 = 0$, $y(1) = 1$.
Solución.
Reescribiendo la ecuación tenemos $y' + \frac{1}{x}y + xy^2 = 0$, la que es una Bernoulli con $\alpha = 2$. Sea entonces, $z = y^{1-2} = y^{-1}$, lo que implica $-z' = y^{-2}y'$. Multiplicando la nueva forma de la ecuación dada por y^{-2} obtenemos:

$$-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} - x = 0.$$

Realizando los cambios de variable indicados resulta:

$$z' - \frac{1}{x}z - x = 0,$$

cuya solución se encuentra con (2.29) y está dada por:

$$z = x\left(C + x\right).$$

Pero $z = \frac{1}{x}$*, lo que implica:*

$$y = \frac{1}{x\left(C + x\right)}.$$

Imponiendo la condición inicial $y\left(1\right) = 1$ *encontramos* $C = 0$*. Por tanto, la solución buscada es:*

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

▲

Ejemplo 2.2.32 .
Resuelva $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2y^2}$.
Solución.
Reescribiendo la ecuación tenemos $y' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^{-2} = 0$*, la que es una Bernoulli con* $\alpha = -2$*. Por tanto, sea* $z = y^{1-{-2}} = y^3$*, lo que implica* $\frac{z'}{3} = y^2y'$*. Multiplicando la nueva forma de la ecuación dada por* y^2 *obtenemos:*

$$y^2y' + \frac{1}{x}y^3 - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Realizando los cambios de variable indicados anteriormente y multiplicar por tres tenemos:

$$z' + \frac{3}{x}z - \frac{3}{x^2} = 0,$$

que es una ecuación lineal. Aplicando (2.29) obtenemos:

$$z = \frac{C}{x^3} + \frac{3}{2x}.$$

Pero $z = y^3$*, lo que implica:*

$$y = \sqrt[3]{\frac{C}{x^3} + \frac{3}{2x}}.$$

▲

Ejericio. Resuelva $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Ecuación de Ricatti

Definición 2.2.33 (Ecuación de Ricatti)
Sean P y Q funciones contínuas en el intervalo $[a, b]$. Una ecuación diferencial de la forma:

$$y' + P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x) = 0, \tag{2.32}$$

se denomina **Ecuación de Ricatti**.

En general este tipo de ecuaciones no puede ser integrada, pero al menos tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.34 .
Si se conoce una solución particular y_1 de la ecuación de Ricatti, con el cambio de variable siguiente: $y = y_1 + \frac{1}{z}$ la ecuación se transforma en lineal.

Demostración.
Tenemos que $y = y_1 + \frac{1}{z}$ implica $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$, luego (2.32) se escribe:

$$\left(y_1' - \frac{z'}{z^2}\right) + P(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R(x) = 0,$$

o bien:

$$\left(y_1' + P(x)\, y_1^2 + Q(x)\, y_1 + R(x)\right) + \left(-\frac{z'}{z^2} + P(x)\left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\frac{1}{z}\right) = 0,$$

pero $y_1' + P(x)\, y_1^2 + Q(x)\, y_1 + R(x) = 0$, pues y_1 es solución de (2.32). Multiplicando por $-z^2$ y ordenando obtenemos:

$$z' - (2P(x)\, y_1 + Q(x))\, z - P(x) = 0,$$

la que es una ecuación lineal. ■

Ejemplo 2.2.35 .
Resuelva $xy' + 2y^2 - 3y - 2 = 0$
Solución.
Dividiendo entre x tenemos $y' + \frac{2}{x}y^2 - \frac{3}{x}y - \frac{2}{x} = 0$, la que es una ecuación de Ricatti. Para tener una solución particular, busquemos una del tipo constante, es decir, $y' = 0$, con esto tenemos $2y^2 - 3y - 2 = 0$, lo que implica $y = 2$ o $y = -\frac{1}{2}$. Tomemos como solución particular $y_p = 2$, por lo cual, sea $y = 2 + \frac{1}{z}$, entonces $y' = -\frac{z'}{z}$. Con esto, obtenemos:

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x}\left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{3}{x}\left(2 + \frac{1}{z}\right) - \frac{2}{x} = 0.$$

Simplificando y multiplicando por $-z^2$ resulta:

$$z' - \frac{5}{x}z - \frac{2}{x} = 0,$$

que es una ecuación lineal en z. Aplicando (2.29) obtenemos:

$$z = Cx^5 - \frac{2}{3}x^2.$$

Pero $y = 2 + \frac{1}{z}$, entonces:

$$y = 2 + \frac{3}{3Cx^5 - 2x^2}.$$

▲

Ejemplo 2.2.36 .
Resuelva $y' = y^2 - x^2 + 1$ sabiendo que una solución particular es $y_p = x$.
Solución.
Reemplazando $y = x + \frac{1}{z}$, $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$, simplificando y multiplicando por $-z^2$ obtenemos:

$$z' + 2xz + 1 = 0,$$

la que es una ecuación lineal en z. Aplicando (2.29) tenemos:

$$z = e^{-x^2}\left(C - \int e^{x^2}dx\right).$$

Retornando a la variale original concluimos:

$$y = x + \frac{1}{e^{-x^2}\left(C - \int e^{x^2}dx\right)}.$$

▲

Ejercicio. Resuelva $y' + \operatorname{sen}^2 xy^2 = 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$, sabiendo que una solución particular es $y_p = \sec x$.

2.2.8. Ecuaciones Algebraicas en y'

Sea la ecuación diferencial:

$$A_n(x,y)(y')^n + A_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + A_1(x,y)\,y' + A_0(x,y) = 0, \qquad (2.33)$$

que resulta de anular un polimomio en y' con coeficientes $A_k(x,y)$ contínuos en x e y, en un dominio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ y con $A_n(x,y) \neq 0$ en $\mathbb{D}$.

Considerémosla como ecuación algebraica en y' con las raices $f_k(x,y)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Cada raíz real nos da una ecuación de la forma:

$$y' = f_k(x,y), \qquad (2.34)$$

y cualquier solución de (2.34) es solución de (2.33).

Ejemplo 2.2.37 .
Resuelva $y'^2 - (x+y)y' + xy = 0$.
Solución.
Notemos que la ecuación dada es cuadrática en y'*, por tanto,*

$$y' = \frac{(x+y) \pm \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}}{2},$$

de donde, $y' = x$ *e* $y' = y$. *Integrando separadamente cada una de estas ecuaciones obtenemos* $y = \frac{x^2}{2} + C$ *e* $y = Ce^x$. *Cada una de estas dos familias de soluciones verifica la ecuación original.* ▲

Ejemplo 2.2.38 .
Resuelva $xyy'^2 + (y^2 - x^2)\, y' - xy = 0$.
Solución.
Como en el ejemplo anterior, esta ecuación es cuadrática en y'*, por tanto,*

$$y' = \frac{-\left(y^2 - x^2\right) \pm \sqrt{\left(y^2 - x^2\right)^2 + 4x^2y^2}}{2xy},$$

de donde, $y' = \frac{x}{y}$ *e* $y = -\frac{y}{x}$. *Integrando obtenemos* $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$ *e* $y = \frac{1}{Cx}$. ▲

2.3. Ecuaciones Diferenciales no Resueltas Respecto de y'

2.3.1. Ecuaciones de la Forma $y = f(y')$, donde $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$

Teorema 2.3.1 .
La solución general de la ecuación diferencial $y = f(y')$ *está dada por:*

$$\begin{cases} x &= \int \frac{1}{p} f'(p)\, dp + C \\ y &= f(p)\,. \end{cases}$$

Demostración.
Sea el cambio de variable $y' = p$, entonces $y = f(p)$ lo que implica $dy = f'(p)\, dp$. Por otro lado, tenemos $\frac{dy}{dx} = p$, es decir, $dy = pdx$. Luego, $dx = \frac{1}{p} f'(p)\, dp$, y por tanto,

$$\begin{cases} x &= \int \frac{1}{p} f'(p)\, dp + C \\ y &= f(p). \end{cases}$$

■
La solución general está definida sobre cualquier intervalo $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$ sobre el cual $\int \frac{1}{p} f'(p)\, dp$ está definida.

Ejemplo 2.3.2 .
Resuelva $y = y'^3 + y'^7$.
Solución.
Sea $y' = p$, por tanto, $y = p^3 + p^7$ y $dy = (3p^2 + 7p^6)\,dp$. Pero $y' = p$ implica $dy = pdx$. Luego, $pdx = (3p^2 + 7p^6)dp$. Separando variables es integrando obtenemos la solución paramétrica:

$$\begin{cases} x &= \frac{3}{2}p^2 + \frac{7}{6}p^6 + C \\ y &= p^3 + p^7. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 2.3.3 .
Resuelva $y = y'^2 - y^3$.
Solución.
Sea $y' = p$, entonces $y = p^2 - p^3$ y $dy = (2p - 3p^2)\,dp$. Además $y' = p$ implica $dy = pdx$. Por tanto, $pdx = (2p - 3p^2)dp$. Separando variables es integrando concluimos:

$$\begin{cases} x &= 2p - \frac{3}{2}p^2 + C \\ y &= p^2 - p^3. \end{cases}$$

▲

2.3.2. Ecuaciones de la Forma $F(y, y') = 0$

Resolver la ecuación $F(y, y') = 0$ es fácil, sólo requiere una cuadratura, siempre que se conozca una representación paramétrica de la curva $F(u, v) = 0$ o sea, $u = \varphi(t)$ y $v = \psi(t)$ con $t \in [a, b]$. En efecto, si φ, φ' y ψ contínuas en $[a, b]$, entonces:

$$y = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dy = \varphi'(t)\,dt,$$

$$y' = \psi(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \psi(t) \Rightarrow dy = \psi(t)\,dx.$$

Igualando estas dos últimas expresiones obtenemos:

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

Integrando resulta la solución paramétrica:

$$\begin{cases} x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y &= \varphi(t) \end{cases} \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \subseteq [a, b].$$

Ejemplo 2.3.4 .
Resuelva $y'^2 - 4y^2 + 4y^4 = 0$.
Solución.
Consideremos $y' = \operatorname{sen} 2t$ *e* $y = \cos t$*, entonces:*

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} 2t)^2 - 4\cos^2 t + 4\cos^4 t &= (2\operatorname{sen} t\cos t)^2 - 4\cos^2 t\left(1-\cos^2 t\right)\\ &= 4\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t - 4\cos^2 t\left(1-\cos^2 t\right)\\ &= 4\cos^2 t\left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - 1\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, es una representación paramétrica para la ecuación dada. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \operatorname{sen} 2t \Rightarrow dy = \operatorname{sen} 2t dx\\ \frac{dy}{dt} &= -\operatorname{sen} t \Rightarrow dy = -\operatorname{sen} t dt.\end{aligned}$$

Igualando estas dos últimas expresiones,

$$dx = -\frac{dt}{2\cos t},$$

separando variables e integrando obtenemos la solución paramétrica:

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}\ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C\\ y &= \cos t.\end{cases}$$

▲

Ejemplo 2.3.5 *Resuelva* $y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1$.
Solución.
Consideramos $y = \cos^3 t$ *e* $y' = \operatorname{sen}^3 t$*, pues* $(\cos^3 t)^{\frac{2}{3}} + (\operatorname{sen}^3 t)^{\frac{2}{3}} = 1$. *Luego,*

$$y = \cos^3 t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -3\cos^2 t\operatorname{sen} t \Rightarrow dy = -3\cos^2 t\operatorname{sen} t dt.$$

Por otro lado, $y' = \operatorname{sen}^3 t$*, es decir,* $dy = \operatorname{sen}^3 t dx$. *Igualando las expresiones de* dy *obtenemos:*

$$dx = \frac{-3\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt,$$

luego,

$$x = \int\left(3 - \frac{3}{\operatorname{sen}^2 t}\right)dt = 3t + 3\cot t + C.$$

Finalmente la solución general es:

$$\begin{cases} x &= 3t + 3\cot t + C\\ y &= \cos^3 t.\end{cases}$$

▲

Ejemplo 2.3.6 . *Resuelva* $y'^2 + y^2 = 1$.
Solución.
Considerenos la parametrización $y = \operatorname{sen} t$ *e* $y' = \cos t$. *Luego,*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos t \Rightarrow dy = \cos t dx \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t \Rightarrow dy = \cos t dt. \end{aligned}$$

Igualando estas dos últimas expresiones obtenemos $dx = dt$, *y por tanto,*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& t + C \\ y &=& \cos t, \end{array} \right.$$

es decir, $y = \cos(x - C)$. ▲

2.3.3. Ecuación de la Forma $x = f(y')$ donde $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$

Teorema 2.3.7 .
Sea $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$. *La solución general de la ecuación* $x = f(y')$ *está dada por:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& f(p) \\ y &=& \int p f'(p)\, dp + C \end{array} \right. \qquad p \in [a,b].$$

Demostración.
Sea $y' = p$, entonces por un lado $x = f(p)$ y $dx = f'(p)\, dp$. Por otro, $\frac{dy}{dx} = p$ o equivalentemente $dx = \frac{dy}{p}$. Igualando las expresiones de dx obtenemos:

$$\frac{dy}{p} = f'(p)dp.$$

Finalmente, separando variables e integrando obtenemos la solución paramétrica:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& f(p) \\ y &=& \int p f'(p)\, dp + C. \end{array} \right.$$

■

Ejemplo 2.3.8 .
Resuelva $x = y' + \ln y'$, $y' > 0$.
Solución.
Sea $y' = p$, *entonces* $x = p + \ln p$ *y* $dx = \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp$. *Además,* $\frac{dy}{dx} = p$ *implica* $dx = \frac{dy}{p}$.
Igualando las expresiones de dx *obtenemos:*

$$\frac{dy}{p} = \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp.$$

Que al separar variables e integrar resulta:

$$\begin{cases} x &= p + \ln p \\ y &= \frac{p^2}{2} + p + C. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 2.3.9 .
Resuelva $x = \ln y' + \operatorname{sen} y'$.
Solución.
Sea $y' = p$*, por tanto,* $x = \ln p + \operatorname{sen} p$ *y* $dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$*. Como* $\frac{dy}{dx} = p$ *implica* $dx = \frac{dy}{p}$*. Al igualar las expresiones de* dx *obtenemos:*

$$\frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp.$$

Separando variables e integrando obtenemos la solución:

$$\begin{cases} x &= \ln p + \operatorname{sen} p \\ y &= p + \cos p + p \operatorname{sen} p + C. \end{cases}$$

▲

2.3.4. Ecuaciones de la Forma $F(x, y') = 0$

Resolver la ecuación $F(x, y') = 0$ es fácil si se conoce una representación paramétrica de la curva $F(u, v) = 0$, o sea, $u = \varphi(t)$ y $v = \psi(t)$ contínuas. En efecto, con $x = \varphi(t)$ e $y' = \psi(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad &\Rightarrow \quad dx = \varphi'(t)\, dt \\ \frac{dy}{dx} = \psi(t) \quad &\Rightarrow \quad dy = \psi(t)\, dx, \end{aligned}$$

por lo tanto, $dy = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt$. Luego,

$$\begin{cases} x &= \varphi(t) \\ y &= \int \psi(t)\varphi'(t)\, dt + C. \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.10 .
Resuelva $x^2 + y'^2 = 1$.
Solución.
Consideremos $x = \operatorname{sen} t$ *e* $y' = \cos t$ *lo que implica* $dx = \cos t dt$ *y* $dy = \cos t dx$ *respectivamente. Por tanto,* $dy = \cos^2 t dt$*. Luego,*

$$\begin{cases} x &= \operatorname{sen} t \\ y &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + C. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 2.3.11 .
Resuelva $x - e^{-y'} = y'$.
Solución.
Sea $y' = t$*, por tanto,* $x = t + e^t$ *y* $dx = (1 + e^t)\, dt$*. Como* $dy = tdx$ *obtenemos:*

$$\frac{dy}{t} = \left(1 + e^t\right) dt.$$

Separando variables e integrando obtenemos:

$$\begin{cases} x &= t + e^t \\ y &= \frac{t^2}{2} + te^t - e^t + C. \end{cases}$$

▲

2.3.5. Ecuación de Lagrange

La ecuación de Lagrange tiene la forma:

$$A(y')\, x + B(y')\, y + C(y') = 0,$$

donde A, B y C son funciones en $\mathcal{C}^1[a,b]$. Se caracteriza por ser lineal en x e y. Dividiendo por $B(y') \neq 0$ obtenemos la nueva forma:

$$y = \varphi(y')\, x + \psi(y'). \tag{2.35}$$

Integrar la Ecuación de Lagrange se reduce a integrar una ecuación lineal. En efecto, haciendo $y' = p$ en (2.35) se transforma en:

$$y = \varphi(p)\, x + \psi(p).$$

Derivando respecto a x tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \varphi(p) + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y ordenando tenemos:

$$p = \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} + \varphi(p),$$

de donde obtenemos:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0,$$

con $\varphi(p) \neq p$, la que es una ecuación lineal en x. Aplicando (2.29) obtenemos la solución paramétrica:

$$\begin{cases} x &= e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left(C - \int \frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}dp\right) \\ y &= \varphi(p)\, x + \psi(p). \end{cases}$$

Si p_0 es solución de $\varphi(p) - p = 0$ podemos tener dos situaciones:

1. $\lim\limits_{p \to p_0} |x| = \infty$. Cuando la recta $y = \varphi(p_0)\,x + \psi(p_0)$ es una dirección asintótica a las curvas integrales de la solución general.

2. $\lim\limits_{p \to p_0} x = x_0$, con x_0 finito. Cuando la recta $y = \varphi(p_0)\,x + \psi(p_0)$ es una solución singular de la Ecuación de Lagrange.

Ejemplo 2.3.12 .
Resuelva $y = xy'^2 + \ln y'$, $y' > 0$.
Solución.
Sea $y' = p$, entonces $y = xp^2 + \ln p$. Derivando respecto a x obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y ordenando:

$$p = p^2 + \left(2px + \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx},$$

de donde obtenemos:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} + \frac{1}{p^3 - p^2} = 0,$$

que es una ecuación lineal en x. Aplicando (2.29) obtenemos la solución paramétrica:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{(p-1)^2}\left(C - \ln p - \frac{1}{p}\right) \\ y & = & xp^2 + \ln p, \end{array}\right.$$

para $p > 0$ y $p \neq 1$. Notemos que $\lim\limits_{p \to 0} |x| = \lim\limits_{p \to 1} |x| = \infty$, por lo que, $y = \varphi(p_0)\,x + \psi(p_0)$ para $p_0 = 0$ y $p_0 = 1$ es dirección asintótica, es decir, la recta $y = x$ es dicha dirección. ▲

Ejemplo 2.3.13 .
Resuelva $y = x(1 + y') + y'^2$.
Solución.
Sea $y' = p$, entonces $y = x(1 + p) + p^2$. Derivando respecto a x tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx},$$

reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y ordenando adecuadamente tenemos:

$$\frac{dx}{dp} + x + 2p = 0,$$

la que es una ecuación lineal en x. Aplicando (2.29) obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & e^{-p}\left(C - 2pe^p + 2e^p\right) \\ y & = & x + xp + p^2. \end{array}\right.$$

▲

Ejemplo 2.3.14 .
Resuelva $y = 2xy' + \ln y'$, $y' > 0$.
Solución.
Sea $y' = p$, *entonces* $y = 2xp + \ln p$. *Derivando respecto a* x *tenemos:*

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ *y ordenando adecuadamente obtenemos la ecuación lineal en* x*:*

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x + \frac{1}{p^2} = 0,$$

cuya solución se encuentra usando (2.29). Concluimos que:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{p^2}(C - p) \\ y &= 2xp + \ln p. \end{cases}$$

▲

2.3.6. Ecuacion de Clairaut

La ecuación de Clairaut tiene la forma:

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{2.36}$$

donde $\psi \in \mathcal{C}^1[a, b]$. Corresponde al caso particular de ecuación de Lagrange $\varphi(p) = p$. Sea $y' = p$ entonces:

$$y = xp + \psi(p). \tag{2.37}$$

Derivando respecto a x tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y ordenando obtenemos:

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ahora distinguimos dos casos:

1. $\frac{dp}{dx} = 0$ entonces $p = C$. Obtenemos reemplazando en (2.36) la solución:

   $$y = xC + \psi(C),$$

   es decir, la solución general de la ecuación de Clairaut es una familia de rectas que se obtiene de reemplazar en la ecuación y' por C.

2. $x+\psi'(p)=0$. Reemplazando en (2.37) $x=-\psi'(p)$ obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & -\psi'(p)\,p+\psi(p) \\ x & = & -\psi'(p)\,. \end{array}\right.$$

   En este caso, la solución general de la ecuación de Clairaut es una familia de rectas que depende de un parámetro C.

Eliminando C entre la ecuación $y=Cx+\psi(C)$ y la derivada respecto de C, $x+\psi'(C)=0$ obtenemos la curva:

$$(\Gamma)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\psi'(C) \\ y & = & -Cx-\psi(C)\,, \end{array}\right.$$

o bien, $g(x,y)=0$, que es la solución singular. Luego, la solución singular es la envolvente de la familia de rectas representadas por la solución general.

Ejemplo 2.3.15 .
Resuelva $y=xy'+y'^2$.
Solución.
Sea $y'=p$, entonces $y=xp+p^2$. Derivando respecto a x obtenemos $\frac{dy}{dx}=p+(x+2p)\frac{dp}{dx}$. Reemplazando $\frac{dy}{dx}=p$ y ordenando tenemos $(x+2p)\frac{dp}{dx}=0$. De donde, distinguimos dos casos:

1. $\frac{dp}{dx}=0$, *entonces $p=C$. Por lo tanto, obtenemos la solución general:*

$$y=Cx+C^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

2. $x+2p=0$, $\frac{dy}{dx}=p$ *obtenemos la solución singular:*

$$y=\frac{-x^2}{4}.$$

   Esta solución singular es la envolvente de la familia de rectas dadas de la solución general.

▲

Ejemplo 2.3.16 .
Resuelva $y=xy'+\frac{a}{2y'}$, donde a es una constante.
Solución.
Si $y'=p$, entonces $y=xp+\frac{a}{2p}$. Derivando respecto a x y reemplazando $\frac{dy}{dx}=p$ obtenemos:

$$\left(x-\frac{a}{2p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0.$$

Por tanto:

1. *$\frac{dp}{dx} = 0$, implica $p = C$. Luego, $y = Cx + \frac{a}{2C}$ es la solución general.*

2. *$\left(x - \frac{a}{2p^2}\right) = 0$, implica:*

$$\begin{cases} x &= \frac{a}{2p^2} \\ y &= xp + \frac{a}{2p^2}. \end{cases}$$

Despejando p de la expresión de x, reemplazando en la de y y luego de elevar al cuadrado obtenemos que la solución singular está dada por $y^2 = 2ax$.

▲

2.3.7. Ecuaciones de la Forma $y = f(x, y')$

Para resolver $y = f(x, y')$ hacemos $y' = p$, por tanto, $y = f(x, p)$. Derivando respecto a x tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y despejando $\frac{dp}{dx}$ resulta:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$$

Integrando obtenemos:

$$p = \int \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}} dx = \varphi(x, C).$$

Pero $p = \frac{dy}{dx} = y'$, por lo que, obtenemos $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C)$. Luego, $y = f(x, \varphi(x, C))$.

Ejemplo 2.3.17 .
Resuelva $y'^2 + y'x + y + \frac{1}{2}x^2 = 0$.
Solución.
Hagamos $y' = p$, por lo tanto, la ecuación se escribe:

$$p^2 + px + y + \frac{1}{2}x^2 = 0. \tag{2.38}$$

Derivando respecto a x obtenemos:

$$2p\frac{dp}{dx} + p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y ordenando adecuadamente resulta:

$$(2p + x)\left(\frac{dp}{dx} + 1\right) = 0.$$

Por lo que distinguimos dos casos:

1. $\frac{dp}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow p = -x + C$. *Reemplando en (2.38) obtenemos la solución general:*

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x\left(C - x\right) - \left(C - x\right)^2 .$$

2. $2p + x = 0$ *implica* $x = -2p$. *Reemplazando en (2.38) y despejando* y *obtenemos la solución singular paramétrica:*

$$\begin{cases} x &= -2p \\ y &= -p^2, \end{cases}$$

Eliminando el parámetro p *de estas dos ecuaciones resulta* $x^2 + 4y = 0$.

▲

Ejemplo 2.3.18 .
Resuelva $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.
Solución.
Hacemos $y' = p$, *entonces :*

$$xp^2 + 2xp - y = 0. \tag{2.39}$$

Derivando respecto a x *obtenemos:*

$$p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 2p + 2x\frac{dp}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ *y ordenando resulta:*

$$(p+1)\left(2x\frac{dp}{dx} + p\right) = 0.$$

Distinguimos ahora, dos casos:

1. $2x\frac{dp}{dx} + p = 0$ *implica* $p = \frac{C}{\sqrt{x}}$. *Reemplazando en (2.39) obtenemos la solución general* $y = C^2 + 2C\sqrt{x}$.

2. $p + 1 = 0$ *implica* $p = -1$. *Luego, de acuerdo a* $\frac{dy}{dx} = p$ *obtenemos la solución singular* $y + x = 0$.

▲

2.3.8. Ecuaciones de la Forma $x = f(y, y')$

Igual como se ha hecho antes, para resolver las ecuaciones del tipo $x = f(y, y')$ hacemos $y' = p$, por tanto, $x = f(y, p)$. Derivando parcialmente respecto a y obtenemos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Notando que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ y despejando $\frac{dp}{dy}$ tenemos:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$$

Tntegrando obtenemos:

$$p = \int \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}} dy = \varphi(y, C).$$

Por tanto, $x = f(y, \varphi(y, C))$ es la solución general.

Ejemplo 2.3.19 .
Resuelva $x = yy' + y'^2$.
Solución.
Sea $y' = p$, *entonces* $x = yp + p^2$. *Derivando respecto a* y *tenemos:*

$$\frac{dx}{dy} = p + y\frac{dp}{dy} + 2p\frac{dp}{dy}.$$

Recordando que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ *y ordenando obtenemos la ecuación lineal en* y*:*

$$\frac{dy}{dp} + \frac{py}{p^2-1} + \frac{2p^2}{p^2-1} = 0,$$

cuya solución se encuentra utilizando (2.29). Obtenemos:

$$y = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(C - \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}} dp\right),$$

que junto con $x = yp + p^2$ *determina la solución general:. Por tanto, la solución general es:*

$$\begin{cases} x = yp + p^2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(C - \int \frac{2p^2}{\sqrt{p^2-1}} dp\right). \end{cases}$$

▲

2.4. Integración Gráfica

2.4.1. Método de las Poligonales de Euler

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = f(x, y), \tag{2.40}$$

donde $f \in \mathcal{C}^0\,[a, \alpha] \times [b, \beta]$. Nos interesa encontrar gráficamente la solución que pasa por el punto (a, b). Con tal objetivo particionemos el intervalo $[a, \alpha]$ en n subintervalos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \alpha$, no necesariamente equiespaciados.

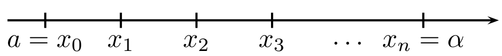

Figura 2.7: Partición del intervalo $[a, \alpha]$.

Pasamos por los puntos x_k rectas paralelas con el eje de las ordenadas,

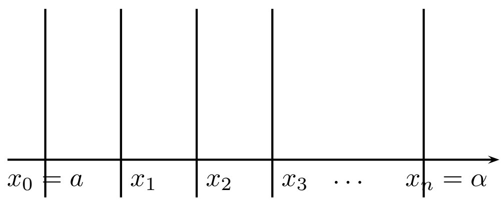

Figura 2.8: Rectas paralelas al eje y que pasan por la partición.

y trazamos, empezando por el punto (a, b), la poligonal $M_0M_1M_2 \ldots M_n$:

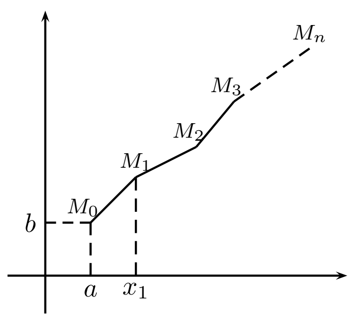

Figura 2.9: Poligonal de Euler.

donde el segmento $\overline{M_kM_{k+1}}$ tiene el coeficiente angular $y'_k = f(x_k, y_k)$. Luego, la línea poligonal $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ tiene como ecuación:

$$f(x)=\begin{cases} y_0+(x-a)\,f(a,b) & a\le x\le x_1\\ y_1+(x-x_1)\,f(x_1,y_1) & x_1\le x\le x_2\\ \vdots & \vdots\\ y_{n-1}+(x-x_{n-1})\,f(x_{n-1},y_{n-1}) & x_{n-1}\le x\le \alpha, \end{cases}$$

donde,

$$\begin{cases} y_0 &=& b\\ y_1 &=& b+(x_1-a)\,f(a,b)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_k &=& y_{k-1}+(x_k-x_{k-1})\,f(x_{k-1},y_{k-1}). \end{cases}$$

En el punto (a,b) la recta M_0M_1 es tangente a la curva integral buscada que pasa por este punto. Para los puntos que siguen, puesto que la poligonal que aproxima la curva buscada, se separa de la solución exacta, las rectas M_kM_{k+1} son paralelas con la tangente a la curva integral.

Ejemplo 2.4.1 .
Aproxime, por medio de una poligonal de Euler, la solución de la ecuación:

$$y'=8x^2+3y^2,\quad x\in\left[-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right],$$

que pasa por el origen.
Solución.
Notemos que la curva generada por el lado derecho de la ecuación diferencial es simétrica respecto al origen, por lo que tomamos la partición:

$$P=\{x_0=0,x_1=0{,}05,x_2=0{,}1,x_3=0{,}2,x_4=0{,}3,x_5=0{,}4,x_6=0{,}5,x_7=0{,}6\}.$$

Con esto, tenemos:

x_k	$y_k=y_{k-1}+(x_k-x_{k-1})\left(8x_{k-1}^2+3y_{k-1}^2\right)$	$y_k'=8x_{k-1}^2+3y_{k-1}^2$
$x_0=0$	$y_0=0$	$y_0'=8\cdot 0^2+3\cdot 0^2=0$
$x_1=0{,}05$	$y_1=0+(0{,}05-0)\cdot 0=0$	$y_1'=8\cdot 0{,}05^2+3\cdot 0^2\approx 0{,}02$
$x_2=0{,}1$	$y_2=0+(0{,}1-0{,}05)\cdot 0{,}02=0{,}001$	$y_2'=8\cdot 0{,}1^2+3\cdot 0{,}001^2\approx 0{,}08$
$x_3=0{,}2$	$y_3=0{,}001+(0{,}2-0{,}1)\cdot 0{,}08=0{,}009$	$y_3'=8\cdot 0{,}2^2+3\cdot 0{,}009^2\approx 0{,}32$
$x_4=0{,}3$	$y_4=0{,}009+(0{,}3-0{,}2)\cdot 0{,}32=0{,}041$	$y_4'=8\cdot 0{,}3^2+3\cdot 0{,}041^2\approx 0{,}725$
$x_5=0{,}4$	$y_5=0{,}041+(0{,}4-0{,}3)\cdot 0{,}725=0{,}114$	$y_5'=8\cdot 0{,}4^2+3\cdot 0{,}114^2\approx 1{,}319$
$x_6=0{,}5$	$y_6=0{,}114+(0{,}5-0{,}4)\cdot 1{,}319=0{,}246$	$y_6'=8\cdot 0{,}5^2+3\cdot 0{,}246^2\approx 2{,}182$
$x_7=0{,}6$	$y_7=0{,}246+(0{,}6-0{,}5)\cdot 2{,}182=0{,}464$	$y_7'=8\cdot 0{,}5^2+3\cdot 0{,}464^2\approx 3{,}526$

Gráficamente esta información se muestra en la Figura 2.10. Cabe señalar que al tomar una partición cada vez más fina, la curva generada quedará cada vez más suave.

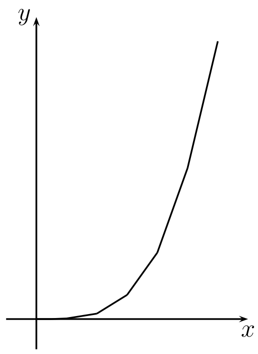

Figura 2.10: Poligonal de Euler para $y' = 8x^2 + 3y^2$, $y(0) = 0$.

▲

Ejemplo 2.4.2 .
Encuentre, por el método de Euler, la Poligonal que aproxima la ecuación $y' = x$, que pasa por el origen.
Solución.
Tomemos $x_0 = y_0 = 0$ y $x_k - x_{k-1} = 0{,}1$. Con esto construimos la siguiente tabla:

x_k	$y_k = y_{k-1} + x_k(x_k - x_{k-1})$	$y'_k = x_k$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 0$
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0 + 0{,}1 \cdot 0 = 0$	$y'_1 = 0{,}1$
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$	$y'_2 = 0{,}2$
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$	$y'_3 = 0{,}3$
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}03 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$	$y'_4 = 0{,}4$
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}06 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}1$	$y'_5 = 0{,}5$
$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$	$y'_6 = 0{,}6$
$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}15 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}21$	$y'_7 = 0{,}7$
$x_8 = 0{,}8$	$y_7 = 0{,}21 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$	$y'_8 = 0{,}8$
$x_9 = 0{,}9$	$y_7 = 0{,}28 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}36$	$y'_9 = 0{,}9$
$x_{10} = 1{,}0$	$y_7 = 0{,}36 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}45$	$y'_{10} = 1{,}0$

Gráficamente esto se muestra en la Figura 2.11.
▲

Ejercicios.

1. Aproxime, por medio de una poligonal de Euler, la solución del problema de valor inicial $y' = 2x$, $y(0) = 0$.

2. Aproxime, por medio de una poligonal de Euler, la solución del problema de valor inicial $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [-10, 10]$.

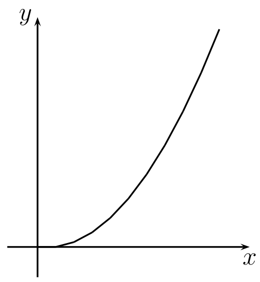

Figura 2.11: Poligonal de Euler para $y' = x$, $y(0) = 0$.

2.4.2. Método de las Isoclinas

Consideremos la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ y suponemos que se puede construir fácilmente la familia de curvas $f(x, y) = m$, donde m es un parámetro real.

Si $m = m_0$ obtenemos la curva $f(x, y) = m_0$ que tiene la propiedad que para todo punto M de esta curva, la curva integral que pasa por este punto M, tiene tangente paralela con la dirección fija $y' = m_0$. Esta propiedad da el nombre de "**curvas isoclinas**".

Veamos una forma de construir las isoclinas Γ_0,Γ_1, $\Gamma_2, \ldots$ correspondientes a los valores m_0, m_1, $m_2, \ldots$. Sobre el eje OY tomemos los puntos P_0, P_1, $P_2, \ldots$ tales que $\overline{OP}_0 = m_0$, $\overline{OP}_1 = m_1$, $\overline{OP}_2 = m_2, \ldots$ y consideremos el punto $T(-1, 0)$. La recta TP_k tiene coeficiente angular m_k, es decir, las rectas TP_0, TP_1, $TP_2, \ldots$ nos dan las direcciones m_0, m_1, $m_2, \ldots$. Para construir la curva integral de la ecuación $y' = f(x, y)$ que pasa por el punto $M_0(a, b)$ procedemos de la siguiente manera :

1. Pasamos por el punto M_0 una paralela a la recta TP_0 hasta el punto M_1 situado a la mitad de la banda entre Γ_0 y Γ_1.

2. Desde el punto M_1 trazamos una paralela a la recta TP_1 hasta el punto M_2 situado a la mitad de la banda entre Γ_1, y Γ_2.

3. Continuamos de esta misma manera: desde el punto M_k trazamos una paralela a la recta TP_k hasta el punto M_{k+1} situado a la mitad de la banda entre Γ_k, y Γ_{k+1}.

La curva integral buscada es así aproximada por la línea poligonal $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots$.

Notemos que en el punto de intersección $N_k(x_k, y_k)$ de la línea poligonal con la isoclina Γ_k, la recta $M_k M_{k+1}$ es tangente a una curva integral de la ecuación dada, pues la pendiente de la recta es $m_k = f(x_k, y_k) = y'_k$.

Ejemplo 2.4.3 .
Construya la solución de la ecuación $y' = x^2 + x + y^2 + y$, $x \in [-1, 1]$, que pasa por el punto $(0, 0)$ utilizando el método de las isoclina.
Solución.

La ecuación dada se puede escribir como $y' = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$*, es decir, las curvas isoclinas son círculos de centro en* $P : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$*. Por tanto, tenemos:*

$$
\begin{array}{lll}
m_0 = \frac{1}{2} & \Gamma_0 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 & r_0 = 1 \\
m_1 = \frac{3}{2} & \Gamma_1 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 2 & r_1 = \sqrt{2} \\
m_2 = \frac{5}{2} & \Gamma_2 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 3 & r_2 = \sqrt{3} \\
m_3 = \frac{7}{2} & \Gamma_3 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 4 & r_3 = 2 \\
m_4 = \frac{11}{2} & \Gamma_4 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 6 & r_4 = \sqrt{6} \\
m_5 = \frac{17}{2} & \Gamma_5 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 9 & r_2 = 3 \\
m_6 = \frac{31}{2} & \Gamma_6 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 16 & r_6 = 4 \\
m_7 = \frac{49}{2} & \Gamma_7 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 25 & r_7 = 5 \\
m_8 = \frac{71}{2} & \Gamma_8 : \ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 36 & r_8 = 6
\end{array}
$$

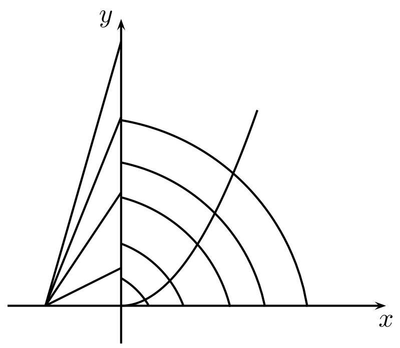

Figura 2.12: Isoclinas para $y' = x^2 + y^2 + x + y$, $y(0) = 0$.

▲

2.5. Trayectorias Isogonales y Ortogonales

2.5.1. Trayectorias Isogonales

Definición 2.5.1 (Familias Isogonales)
Sean (Γ) *y* (Γ') *dos familias de curvas definidas en un dominio* $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ *tal que, por cada punto de dicho dominio pasa una única curva de cada familia. Diremos que la familia de curvas* (Γ') *es* **Isogonal** *a la familia de curvas* (Γ) *en* $\mathbb{D}$ *si en cada punto del dominio* $\mathbb{D}$ *las dos curvas de las familias se cortan según un mismo ángulo constante.*

Sean $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$, C y C' curvas de Γ y Γ' que pasan por el punto (x_0, y_0). Si m y m' son los coeficientes angulares de las tangentes a las curvas en el punto (x_0, y_0), entonces la condición para que las familias de curvas Γ y Γ' sean isogonales es que el ángulo θ que forman las tangentes sea constante $\forall\,(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$, ó sea:

$$\operatorname{tg}\theta = \text{constante}.$$

Ejemplo 2.5.2 .
Las familias de rectas $y - x = a$, $y + x = b$ son isogonales. Una recta de la primera familia y una recta de la segunda se cortan siempre en un ángulo recto. ▲

El problema que tenemos en general es el siguiente: *Dada una familia de curvas (Γ) en $\mathbb{D}$, encontrar la familia (Γ') isogonal a la primera, es decir, la familia de curvas que intersecta a la familia (Γ) bajo un mismo ángulo constante.* La respuesta al problema está en el siguiente:

Teorema 2.5.3 .
Sea (Γ) una familia de curvas definidas por la ecuación diferencial $f\,(x, y, y') = 0$, $(x, y) \in \mathbb{D}$. La familia de curvas (Γ') que corta a la familia (Γ) en un ángulo θ constante con $\operatorname{tg}\theta = k$ está definida por la ecuación diferencial:

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{D}.$$

Demostración.
Si $f\,(x, y, y') = 0$, $(x, y) \in \mathbb{D}$, es la ecuación diferencial de la familia (Γ), una curva C de esta familia tiene en el punto (x, y) tangente de coeficiente angular y' definida por dicha la ecuación diferencial. La curva C' isogonal a la familia (Γ) que pasa por el punto (x, y) tiene tangente en este punto con pendiente y_1' dada por $\frac{y_1' - y'}{1 + y'y_1'} = k$ de donde deducimos:

$$y' = \frac{y_1' - k}{1 + ky_1'}.$$

Luego, la ecuación diferencial de las curvas C' isogonales a la familia (Γ) se obtiene de la ecuación diferencial de la familia (Γ) cambiando y' por $\frac{y_1' - k}{1 + ky'}$, es decir,

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0.$$

De la Figura 2.13 tenemos $\theta = \beta - \alpha$. Luego,

$$k = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

■

Sea $\Gamma : F\,(x, y, C) = 0$, entonces primero se obtiene la ecuación diferencial que modela tal familia, es decir $f\,(x, y, y') = 0$, por lo tanto, la ecuación diferencial que modela la familia isogonala Γ es:

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0,$$

ecuación que se resuelve y se obtiene la familia $\varphi\,(x, y, C) : (\Gamma')$ isogonal con (Γ).

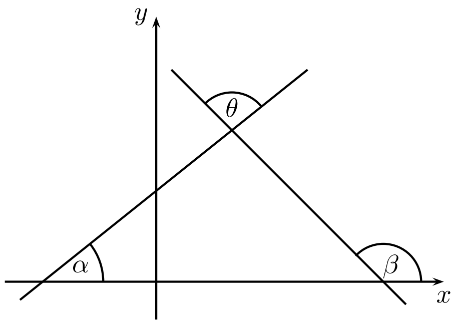

Figura 2.13: Rectas isogonales.

Ejemplo 2.5.4 .
Encuentre las trayectorias isogonales a la familia de círculos $(\Gamma) : x^2 + y^2 = C^2$.
Solución.
Derivando respecto a x *y simplificando encontramos que* $x+yy' = 0$ *es la ecuación diferencial que modela a la familia* (Γ). *Luego, cambiamos* y' *por* $\frac{y'-k}{1+ky'}$ *para encontrar la ecuación diferencial que modela a la familia* (Γ') *isogonal a* (Γ) *en un ángulo* θ *con* $\operatorname{tg}\theta = k$:

$$x + y\left(\frac{y'-k}{1+y'k}\right) = 0.$$

Despejando y' *obtenemos la ecuación diferecial homogénea:*

$$y' = \frac{ky - x}{kx + y}.$$

Para resolverla pasamos a polares haciendo $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\operatorname{sen}\theta$, *lo que implica:*

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta \\ dy &= \operatorname{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta. \end{aligned}$$

Con esto, la ecuación se escribe:

$$\frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{kr\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta + kr\cos\theta}.$$

Ordenando y simplificando obtenemos $r' + kr = 0$, *o bien,* $\frac{dr}{d\theta} = -kr$, *cuya solución es:*

$$r = ce^{-k\theta},\ \theta \in \mathbb{R},$$

correspodiente a espirales logarítmicas. ▲

Ejemplo 2.5.5 .
Encuentre las trayectorias isogonales a la familia de rectas $(\Gamma) : y = kx$.

Solución.
Derivando respecto a x obtenemos $y' = k$, por tanto, la ecuación diferencial que modela a la familia (Γ) es $y = xy'$. Reemplazando y' por $\frac{y'-k}{1+ky'}$ encontramos la ecuación diferencial que modela a la familia (Γ') isogonal a (Γ) en un ángulo θ con $\operatorname{tg}\theta = k$:

$$y = x\left(\frac{y'-k}{1+ky'}\right),$$

de donde, resulta la ecuación diferencial homogénea:

$$y' = \frac{kx+y}{x-ky}.$$

Haciendo el cambio de variable $y = xz$, de donde $y' = z + xz'$ y separando variables obtenemos:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-kz}{k\left(1+z^2\right)}dz.$$

Integrando y retornando a la variable original tenemos:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + C.$$

▲

2.5.2. Trayectorias Ortogonales

Definición 2.5.6 (Familias Ortogonales)
Sean Γ y Γ' dos familias de curvas isogonales, si Γ y Γ' se cortan en un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces Γ y Γ' se dicen **ortogonales**.

Teorema 2.5.7 .
Sea (Γ) la familia de curvas definidas de la ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$, $(x, y) \in \mathbb{D}$. La familia de curvas (Γ'), que intersecta la familia (Γ) en un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ está definida por la ecuación diferencial $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{D}$.

Demostración.
Del Teorema anterior tenemos $\frac{y_1'-y'}{1+y'y_1'} = k$, si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, por tanto, $|k| \neq +\infty$. Cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$, entonces $|k| \to +\infty$. Luego, $1 + y'y_1' \to 0$, o bien, $y_1' \to -\frac{1}{y'}$. ∎

Si la ecuación diferencial de la familia (Γ) está dada en coordenadas polares $F(\theta, r, \frac{dr}{d\theta}) = 0$, entonces la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales (Γ') está dada por:

$$F\left(\theta, r, -r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = 0.$$

Ejemplo 2.5.8 .
Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $(\Gamma) : y^2 = Cx$.
Solución.
Derivando respecto de x *obtenemos* $2yy' = C$. *Utilizando la ecuación original para eliminar la constante* C *vemos que la ecuación diferencial que modela la familia* (Γ) *es* $2xy' = y$. *Reemplazando* y' *por* $-\frac{1}{y'}$ *para encontrar las familias ortogonales tenemos:*

$$-\frac{2x}{y'} = y.$$

Separando variables resulta como solución $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$. ▲

Ejemplo 2.5.9 .
Encuentre la ecuación de la familia de curvas ortogonales $(\Gamma) : r = a\,(1 + \cos\theta)$.
Solución.
Derivando respecto a θ *obtenemos* $r' = -a \operatorname{sen}\theta$. *Utilizando la ecuación orginal para eliminar la constante* a *resulta la ecuación diferencial* $r' = -\frac{r \operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$, *la que modela a la familia* (Γ). *Reemplazando* r' *por* $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ *para encontrar la familia ortogonal y luego de separar variables obtenemos:*

$$\frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{dr}{r}.$$

Integrando resulta:

$$\ln|\csc\theta - \cot\theta| + \ln|\operatorname{sen}\theta| = \ln|r| + \ln|C|\,.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos la expresión anterior se transforma en $1 - \cos\theta = Cr$, *de donde, con un poco de trigonometría:*

$$r = \frac{2}{C}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

▲

2.6. Teorema de Existencia y Unicidad

Hemos numerado y demostrado cómo resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden, las que podemos integrar o resolver con un número finito de cuadraturas, lo que claramente es posible sólo para un número pequeño de ecuaciones.

En general, una ecuación de la forma:

$$y' = f\,(x, y) \tag{2.41}$$

no es de ninguno de los tipos que hemos visto, y no siempre conoceremos un método de resolución. Luego, es necesario dar un método más general que permita determinar una solución $y = \varphi(x)$ de esta ecuación, que junto a su derivada $\varphi'(x)$ verifica la ecuación. Además, nos interesa poder asegurar la unicidad de la función buscada.

El teorema que sigue establecerá las condiciones para que tal solución única exista, y daremos un método de construcción efectivo.

Teorema 2.6.1 (De Existencia y Unicidad)
Dada la ecuación diferencial (2.41) tal que:

1. *Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La función $f(x,y)$ es contínua en $\mathbb{D}$, donde:*

$$\mathbb{D} = \{(x,y)\,,\ \textit{t.q.}\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}.$$

2. *La función $f(x,y)$ satisface la condición Lipschitz:*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L\,|y_2 - y_1|\,,\ L > 0,\ \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \mathbb{D}.$$

Entonces existe una función $\varphi(x)$ derivable en $|x - x_0| \leq h$, con $h \leq a$, solución de (2.41), es decir,

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\,,\ \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]\,,$$

y que satisface que $\varphi(x_0) = y_0$.

Demostración.

a) Como f es contínua en el intervalo cerrado $\mathbb{D}$, entonces f es acotada sobre dicho conjunto. Sea $M > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq M$, $\forall (x,y) \in \mathbb{D}$. Por tanto, tomemos $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

b) Para determinar la solución $y = \varphi(x)$ usaremos el *Método de Aproximaciones Sucesivas*. El método consiste en construir de aproximación en aproximación una sucesión de funciones: $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, …, que converja uniformemente sobre $|x - x_0| \leq h$ hacia una función $\varphi(x)$ que cumpla con las condiciones del teorema.

   Como primer término de la sucesión tomamos el número y_0, que llamamos aproximación de orden cero.

   El segundo término de la sucesión de funciones, llamado primera aproximación es:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]\,.$$

   La segunda aproximaciónes:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\,dt, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]\,.$$

La tercera aproximación es:

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2)\, dt, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Continuando de esta manera, tenemos que la $n-$ésima aproximación es:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Obtenemos de esta manera la sucesión de aproximaciones $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$, $\ldots$ con las propiedades siguientes:

I. Las funciones $y_k(x)$, $\forall k$ cumplen la condición inicial $y_k(x_0) = y_0$, pues:

$$\int_{x_0}^{x_0} f(t, y_{k-1})\, dt = 0.$$

II. Cada $y_k(x)$ es contínua en $[x_0 - h, x_0 + h]$, $\forall k$. En efecto, puesto que f es contínua, entonces $\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt$ es también contínua.

III. $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ tenemos que $y_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostremos esto por inducción:

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b.$$

Por lo tanto, $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$, pues $f(x, y_0) \leq M$ y $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.
Supongamos que también la aproximación de orden $n-1$ cumple esta condición, es decir, $y_{n-1}(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Ee aquí, resulta que $|f(x, y_{n-1})| < M$. Luego, podemos escribir:

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \right| \leq Mh \leq b.$$

Luego, $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ implica $y_n(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Demostraremos ahora que la sucesión de funciones:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$$

convergen uniformemente sobre el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ a una función contínua $\varphi(x)$ cuando $n \to \infty$.

La convergencia de esta sucesión es equivalente con la convergencia de la serie de funciones:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \tag{2.42}$$

pues como se ve inmediatamente, la sucesión de las sumas parciales de la serie (2.42) es la sucesión $\{y_n\}$.

Para demostrar que la serie (2.42) converge uniformemente sobre el intervalo considerado, es suficiente demostrar que es mayorada por una serie numérica de términos positivos, convergente. Esto es el criterio M de Weierstrass. Por demostrar que para $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ tenemos:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.43}$$

usaremos inducción sobre n. En efecto,

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt\right| \leq M|x - x_0|.$$

Por tanto, se cumple (2.43) para $n = 1$.

Supongamos que (2.43) es válida para $n - 1$, es decir, tenemos la hipótesis de inducción:

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq ML^{n-2}\frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Demostraremos, por tanto, que la afirmación es válida para n, vale decir:

$$|y_n - y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(f(t, y_{n-1}) - f(t, y_{n-2})\right) dt\right|.$$

En efecto, como f es Lipzchitz, tenemos:

$$|y_n - y_{n-1}| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1} - y_{n-2}|\, dt\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} ML^{n-2}\frac{|t - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}dt\right|,$$

o bien:

$$|y_n - y_{n-1}| \leq ML^{n-1}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}dt\right| = ML^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Por tanto, (2.43) queda demostrada.

Como $|x - x_0| \leq h$, entonces también tenemos:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} = \frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}, \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

de donde, resulta que la serie $y_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1})$ es absoluta y uniformemente convergente sobre el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ puesto que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}$$

es convergente. En efecto, usando el criterio de la razón tenemos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{M}{L}\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \cdot \left(\frac{L}{M}\frac{n!}{(Lh)^n}\right) = \frac{Lh}{(n+1)} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Observemos que:

$$\frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Lh)^n}{n!} = \frac{M}{L}(e^{hL}-1),$$

lo que demuestra la convergencia.

Resulta de aquí, que el límite de la sucesión de las aproximaciones es una función contínua $\varphi(x)$. En el límite tenemos que:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\,dt,$$

por lo tanto,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt.$$

d) Demostraremos ahora que la solución encontrada verifica la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. En efecto, de acuerdo a lo anterior $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ tenemos:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt,$$

donde f es contínua y $\varphi \in \mathcal{C}^1$. Así, tenemos $\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi)$, $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Luego, φ es solución de la ecuación dada, además verifica también la condición inicial, pues si $x = x_0$ entonces $\varphi(x_0) = y_0$.

e) Queda sólo por demostrar que la solución encontrada es única. En efecto, supongamos que hay otra $\psi(x)$ tal que:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,dt,$$

con $\psi(x_0) = y_0$. Entonces,

$$\begin{aligned}|y_n(x) - \psi(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} \left(f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, \psi(t))\right) dx\right| \\ &\leq L\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - \psi(t)|\,dt\right|,\end{aligned}$$

obteniéndose inductivamente:

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leq ML^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq \frac{ML^{n-1}h^n}{n!},$$

de donde deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \psi(x)$. Por tanto,

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

■

2.6.1. El Método de Aproximaciones Sucesivas

Sean $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ e $y' = f(x, y)$ una ecuación diferencial que no es de ninguno de los tipos que hemos estudiado, con f cumpliendo las hipótesis del Teorema 2.6.1. Construimos la sucesión de funciones que converge a la solución de la ecuación que pasa por (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt.
\end{aligned}$$

En general no podemos calcular la solución exacta $\varphi(x)$ dada por:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),$$

pero nos contentamos con $y_p(x)$ que será mejor mientras mayor sea p.

Ejemplo 2.6.2 .
Encuentre la solución de la ecuación $y' - y = 0$ que pasa por $(0, 1)$ utilizando el método de aproximaciones sucesivas.
Solución.
Tenemos $y_0 = 1$, luego,

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \int_0^x f(t, y_0)\, dt = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x \\
y_2 &= y_0 + \int_0^x f(t, y_1)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
y_3 &= y_0 + \int_0^x f(t, y_2)\, dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
y_{k+1} &= y_0 + \int_0^x f(t, y_k)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.
\end{aligned}$$

Claramente $\lim\limits_{k\to\infty}(y_k) = e^x$, la que es la solución de $y' - y = 0$, $y(0) = 1$. ▲

Ejemplo 2.6.3 .
Encuentre la solución de la ecuación de Riccati $y' = 2x^2 + y^2$, $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ que pasa por $(0,0)$ aplicando el método de aproximaciones sucesivas.
Solución.
En el intervalo dado $2x^2 + y^2 \leq 3$, luego, $h = \text{mín}\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$. Por tanto, para $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ las aproximaciones $y_n(x)$ convergen uniformemente a la solución exacta. Como $y_0 = 0$ obtenemos sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \int_0^x 2t^2 dt = \frac{2}{3}x^3 \\
y_2 &= \int_0^x \left[2t^2 + \frac{4}{9}t^6\right] dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{7\cdot 9}x^7 \\
y_3 &= \int_0^x \left(2t^2 + \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{7\cdot 9}t^7\right]^2\right) dt \\
&= \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3^2\cdot 7}x^7 + \frac{16}{3^3\cdot 7\cdot 11}x^{11} + \frac{16}{3^5\cdot 5\cdot 7^2}x^{15} \\
\vdots \; &\vdots \; \vdots
\end{aligned}
$$

con $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. ▲

2.7. Soluciones Singulares

2.7.1. Soluciones Singulares de la Ecuación $y' = f(x,y)$

Definición 2.7.1 (Solución Singular)
Sea la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y), \tag{2.44}$$

donde f es contínua en un dominio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Una solución de esta ecuación dice **Singular** *si las condiciones del Teorema 2.6.1, no se cumplen en ninguno de sus puntos.*

De la definición anterior resulta que una función $y = \varphi(x)$, cuyo gráfico es un arco de curva $\Gamma := \{(x, \varphi(x))\} \subset \mathbb{D}$, es una solución singular si y solo sí:

1. φ verifica la ecuación (2.44) en $\mathbb{D}$.

2. En cualquier vecindad de cada punto de la curva Γ existen a lo menos dos curvas integrales, que pasan por este punto.

Según esto consideramos varios casos:

1. Si suponemos la ecuación y las hipótesis de la Definición 2.7.1, queda por estudiar sólo el caso cuando la condición de Lipschitz no se cumple. Esta condición se escribe:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|,$$

$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in \mathbb{D}$. Si dividimos por $|y_1 - y_2| \neq 0$, tenemos:

$$\left|\frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leq L,$$

de donde, obtenemos que a lo largo de las curvas en $\mathbb{D}$ para las cuales $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = +\infty$ la condición de Lipschitz no se cumple.

Ejemplo 2.7.2 .
Demuestre que la ecuación $y' = -(y-2)^{\frac{1}{3}}$ tiene como solución singular la recta $y = 2$.
Solución.
Separando variables, integrando y elevando al cuabo obtemos la solución general:

$$27\,(y-2)^2 = 8\,(C-x)^3\,.$$

Por otro lado, $f(x,y) = -(y-2)^{\frac{1}{3}}$ implica $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3}(y-2)^{-\frac{2}{3}}$. Como $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ se indefine para $y = 2$ y dicho valor es solución de la ecuación diferencial, entonces es solución singular.

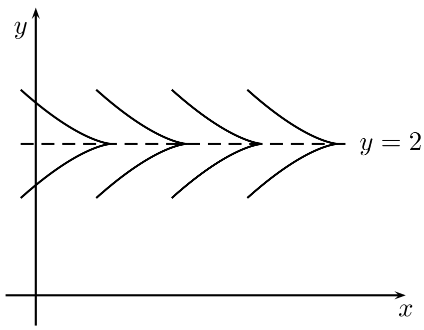

Figura 2.14: Solución singular de $y' = -(y-2)^{\frac{1}{3}}$.

▲

Ejemplo 2.7.3 .
Encuentre la solución singular de la ecuación $\frac{dy}{dx} = (2y-1)^{\frac{1}{2}}$.
Solución.
Separando variables e integrando obtenemos la solución general $y = 2\,(x+C)^2 + \frac{1}{2}$.
Por otro lado, $f(x,y) = (2y-1)^{\frac{1}{2}}$ implica $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(2y-1)^{\frac{1}{2}}}$. Como $y = \frac{1}{2}$ indefine $\frac{\partial f}{\partial y}$ y satisface la ecuación diferencial tenemos que $y = \frac{1}{2}$ es solución singular. ▲

2. La ecuación (2.44) bajo las hipótesis de la Definición 2.7.1 se puede escribir en la forma equivalente $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$. Luego, la condición de Lipschitz se escribe como:

$$\left| \frac{1}{f(x_1, y)} - \frac{1}{f(x_2, y)} \right| = \left| \frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{f(x_1, y) f(x_2, y)} \right| \leq L |x_2 - x_1| . \tag{2.45}$$

Debemos considerar dos casos:

a) Si $f(x, y)$ se anula a lo largo de una curva Γ en $\mathbb{D}$, entonces a lo largo de esta curva las condiciones del Teorema 2.6.1 no se cumplen. En efecto, a lo largo de esta curva $\frac{1}{f(x,y)}$ no es acotada y en tal caso tenemos dos posibilidades:

i) Sea $x = \varphi(y)$ (o bien, $y = \phi(x)$) la ecuación de la curva Γ, si la función $\varphi(y)$ verifica la ecuación (2.44), pero el gráfico de la curva no encuentra ninguna de las curvas definidas por la integral general, en puntos finitos, entonces la curva Γ no es una solución singular de la ecuación (2.44).

Ejemplo 2.7.4 .
La ecuación $y' + (y+2)^{\frac{3}{2}} = 0$ admite como solución la recta $y = -2$. Investiguemos si es solución singular.
Solución.
Separando variables obtenemos la solución general:

$$y = \frac{4}{(x - C)^2} - 2.$$

La solución $y = -2$ se obtiene para $C \to \infty$. De la forma de la solución general se ve que las soluciones de la ecuación dada se encuentran todas por encima de la recta $y = -2$, y para $y \to -2^+$ entonces $x \to \infty$, por lo tanto, la recta $y = -2$ es una dirección asintótica de las soluciones representadas por la integral general, y por lo tanto no es solución singular. ▲

ii) Sea $x = \varphi(y)$ la ecuación de la curva Γ, si la función $\varphi(y)$ verifica la ecuación (2.44) y la curva Γ encuentra las curvas definidas por la solución general en puntos finitos, entonces la curva Γ es una solución singular de la ecuación (2.44).

Ejemplo 2.7.5 .
Demuestre que la ecuación diferencial $y' + (x+2)^{-\frac{1}{2}} = 0$ tiene la recta $x = -2$ como solución singular.
Solución.
La ecuación tambien se escribe como $(x+2)^{-\frac{1}{2}} dx + dy = 0$, por tanto, $2(x+2)^{\frac{1}{2}} + y - C = 0$, o bien $y = C - 2(x+2)^{\frac{1}{2}}$, la que representa una familia de parábolas. Para $x \to -2$ entonces $y \to C$, es decir, $x = -2$ es

una solución singular como se muestra en la Figura 2.15. A lo largo de la recta $x = -2$ el Teorema 2.6.1 no se satisface. En cualquier vecindad de cada punto de la recta $x = -2$ pasan dos soluciones: la primera es la recta misma y la segunda es la parábola de la familia que tiene vértice en ese punto.

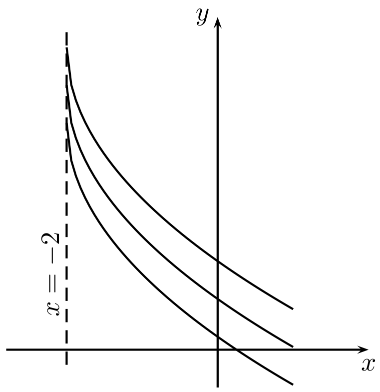

Figura 2.15: Solución singular de $y' + (x+2)^{-\frac{1}{2}} = 0$.

▲

b) De la desigualdad (2.45) también tenemos: Si $\frac{1}{f(x,y)}$ es contínua en $\mathbb{D}$ pero $f'(x,y)$ es no acotada a lo largo de una curva $\Gamma \subset \mathbb{D}$, entonces la condición de Lipschitz no se cumple para la ecuación:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}.$$

Si además, la curva Γ es una curva integral, entonces Γ es una solución singular.

Ejemplo 2.7.6 .
Muestre que $y' = 3(x-2)^{-\frac{1}{3}}$ tiene la recta $x = 2$ como integral singular.
Solución.
En efecto, $f(x,y) = 3(x-2)^{-\frac{1}{3}}$ implica $\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-2)^{-\frac{4}{3}}$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = +\infty$. Así, la recta $x = 2$ es una integral singular, pues verifica la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{1}{3}}$.
Para poner en evidencia el significado geométrico, resolvemos la ecuación encontrando la solución general:

$$y + C = \frac{9}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}.$$

La recta $x = 2$ es el lugar geométrico de los puntos de retroceso de las parábolas semicúbicas dadas por la solución general.

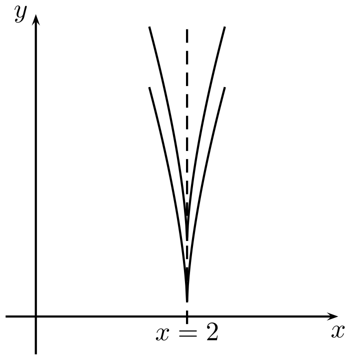

Figura 2.16: Solución singular de $y' = 3\,(x-2)^{-\frac{1}{3}}$.

▲

2.7.2. Soluciones Singulares de la Ecuación $F\,(x, y, y') = 0$

Teorema 2.7.7 .
Sea $y' = p$ y consideremos $F\,(x, y, p) = 0$ una ecuación diferencial de primer orden, donde F es contínua y derivable parcialmente en un dominio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$. Si las ecuaciones:

$$F\,(x, y, p) = 0 \tag{2.46}$$
$$\frac{\partial F\,(x, y, p)}{\partial p} = 0 \tag{2.47}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{2.48}$$

*son compatibles, respecto del parámetro p, entonces la curva Γ, definida por las ecuaciones (2.46) y (2.47), mediante eliminación del parámetro p es una solución singular de la ecuación diferencial (2.46). El sistema formado por (2.46) y (2.47) se denomina $p-$**discriminante**.*

Demostración.
Hemos visto que para la ecuación $p = f\,(x, y)$ la que se obtiene haciendo $y' = p$, $(x, y) \in \mathbb{D}$ si $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = +\infty$ a lo largo de una curva $\Gamma \subset \mathbb{D}$ y si Γ es solución de $p = f\,(x, y)$, entonces es solución singular de $y' = f\,(x, y)$.

Observamos que para la ecuación $p = f\,(x, y)$ tenemos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$, o sea, a lo largo de Γ se satisface $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| = +\infty$.

Calculemos ahora $\frac{\partial p}{\partial y}$ en (2.46), según la regla de derivación de funciones implícitas tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

de donde $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial p}}$. Luego, la condición $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| = +\infty$ es equivalente con la relación (2.47), es decir, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$.

Eliminando p entre (2.46) y (2.47) obtenemos:

$$g(x,y)=0,$$

la que se llama curva característica de la familia de curvas (2.46), con p parámetro. Para que la ecuación $g(x,y)=0$ defina una curva integral Γ de la ecuación (2.46), necesitamos que en cada punto de la curva el coeficiente angular p de la tangente dada por:

$$g'_x+g'_y p=0, \tag{2.49}$$

sea el mismo que el coeficiente p de las ecuaciones (2.46) y (2.47). Para el cálculo de p en (2.49), tenemos que determinar primero $g(x,y)$. Pero podemos evitar este trabajo de la siguiente manera:

El resultado de la eliminación de p entre (2.46) y (2.47) es evidente pues de la relación $g(x,y)=F(x,y,p(x,y))$ tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y},\end{aligned}$$

y puesto que a lo largo de la curva característica conforme con (2.47) tenemos $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y}.\end{aligned}$$

La relación (2.49) se escribe:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}p=0.$$

En conclusión, la curva, o bien las curvas, Γ definidas por $g(x,y)=0$, es decir , del sistema $F(x,y,p)=0$, $F'_p(x,y,p)=0$, donde p se considera parámetro son soluciones singulares de la ecuación $F(x,y,y')=0$, si las ecuaciones (2.46)$-$(2.48) son compatibles. ■

Ejemplo 2.7.8 .
Encuentre las soluciones singulares de la ecuación $a(y-x)+(n-1)y'^n-ny'^{n-1}=0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$, $n\neq 1$.
Solución.
Haciendo $y'=p$ *tenemos* $F(x,y,p)=a(y-x)+(n-1)y'^n-ny'^{n-1}$. *De acuerdo a (2.46)$-$(2.48) tenemos:*

$$\begin{aligned}F(x,y,p) &= a(y-x)+(n-1)p^n-np^{n-1}=0\\ \frac{\partial F}{\partial p} &= n(n-1)\left(p^{n-1}-p^{n-2}\right)=0\\ \frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial y} &= a(p-1)=0.\end{aligned}$$

La solución común es $p = 1$, la que reemplazada en la primera ecuación nos da la solución singular $y = \frac{1}{a} + x$, con $a \neq 0$. ▲

Ejemplo 2.7.9 .
Encuentre las soluciones sinfulares de $\frac{8}{27}y'^3 + \frac{4}{9}y'^2 - y - x = 0$.
Solución.
Haciendo $y' = p$ tenemos $F(x, y, p) = \frac{8}{27}p^3 + \frac{4}{9}p^2 - y - x$. Luego,

i) $F(x, y, p) = \frac{8}{27}P^3 + \frac{4}{9}P^2 - y - x = 0.$

ii) $\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{8}{9}p^2 + \frac{8}{9}p = 0.$

iii) $\frac{\partial F}{\partial x} + P\frac{\partial F}{\partial y} = -1 - p = 0.$

De ii) obtenemos $p = 0$ y $p = -1$. Por su parte, de iii) tenemos $p = -1$. Por lo que sólo consideramos la solución común. Reemplazando $p = -1$ en i) resulta:

$$y = \frac{4}{27} - x,$$

la que satisface la ecuación diferencial original. Por tanto, es solución singular. ▲

Ejemplo 2.7.10 .
Encuentre las soluciones singulares de $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.
Solución.
Haciendo $y' = p$ tenemos $F(x, y, p) = p^3 - 4xyp + 8y^2$. Luego,

i) $F(x, y, p) = p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0.$

ii) $\frac{\partial F}{\partial p} = 3p^2 - 4xy = 0.$

iii) $\frac{\partial F}{\partial x} + P\frac{\partial F}{\partial y} = -4yp + (-4xp + 16y) = 0.$

De iii) obtenemos $p = 0$ y $p = \frac{3y}{x}$. Para este segundo valor de p tenemos que reemplazando en ii) resulta $y = \frac{4}{27}x^3$, la que satisface la ecuación diferencial, por lo que es solución singular. Para el caso de $p = 0$ obtenemos $y = 0$, que no es solución singular pues no satisface la ecuación original. ▲

Ejercicio. Demuestre que para la ecuación de Clairaut, la condición (2.48) siempre se cumple, es decir, siempre la ecuación de Clairaut tiene solución singular.

2.7.3. Determinación de las Soluciones Singulares Usando la Solución General

Consideremos la ecuación diferencial:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.50}$$

a la que le hemos encontrado la solución general:

$$\phi(x, y, C) = 0. \tag{2.51}$$

Teorema 2.7.11 .
Si la familia de curvas $\phi(x, y, C) = 0$ tiene una envolvente Γ, entonces la curva Γ es una solución singular de la ecuación (2.50).

Demostración.
En cada punto de la envolvente, el elemento de contacto (x, y, y') coincide con el elemento de contacto de alguna de las curvas integrales de la familia a la que la curva Γ es tangente como se ilustra en la siguiente figura:

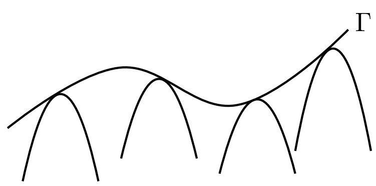

Figura 2.17: Envolvente y curvas integrales.

y puesto que todas las curvas integrales de la familia (2.51) son soluciones de la ecuación (2.50), en cada punto la envolvente satisface la ecuación (2.50), y es claro porqué es singular, debido a que por cada uno de sus puntos pasan a lo menos dos soluciones, a saber, la curva Γ y una de las curvas de la solución general (2.51) con la que Γ tiene tangente común.

Para determinar la curva Γ, eliminamos el parámetro C entre la ecuación:

$$\phi(x, y, C) = 0, \tag{2.52}$$

y de la ecuación:

$$\frac{\partial \phi(x, y, C)}{\partial C} = 0, \tag{2.53}$$

de donde obtenemos una relación de la forma: $g(x, y) = 0$ que puede ser solución singular. En efecto, $g(x, y) = 0$ puede representar la envolvente de la familia de curvas definidas por

(2.50) pero también puede ser el lugar geométrico de los puntos singulares (puntos nodales, puntos de retroceso, cúspidales, etc). Pero en un punto singular se verifica el sistema:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \tag{2.54}$$

Por lo tanto, luego de haber determinado la función $g(x,y)$, por la eliminación de la constante C entre las ecuaciones (2.52) y (2.53), investigamos si se cumple (2.54). Si no se cumple entonces $g(x,y) = 0$ representa la solución singular. ■

El sistema formado por las ecuaciones (2.52) y (2.53) se denomina $C-$**discriminante**.

Ejemplo 2.7.12 .
La ecuación de Lagrange $y = x + \left(\frac{ny'}{n+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{ny'}{n+1}\right)^{n}$, $n > 0$ *tiene solución general* $(y-C)^n = (x-C)^{n+1}$. *Encontremos las soluciones singulares con el método anterior.*
Solución.
Derivando con respecto de C *obtenemos* $-n(y-C)^{n-1} = -(n+1)(x-C)^n$, *que puede ser escrita como:*

$$\frac{n(y-C)^n}{(y-C)} = \frac{(n+1)(x-C)^{n+1}}{(x-C)},$$

pero como $(x-C)^{n+1} = (y-C)^n$ *obtenemos:*

$$\frac{n}{y-C} = \frac{n+1}{x-C},$$

de donde, $C = (n+1)y - nx$. *Reemplazando en la solución general tenemos:*

$$n^n (x-y)^n = (n+1)^{n+1}(x-y)^{n+1},$$

o bién,

$$(x-y)^n \left[y - x - \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right] = 0.$$

De aquí, la recta $y = x$ *no verifica la ecuación dada, por lo que no es solución singular, es el lugar geométrico de los puntos singulares. Por su parte, la recta* $y = x - \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ *verifica la ecuación, entonces ella es la envolvente. Luego, es solución singular.* ▲

Ejemplo 2.7.13 *Dada la familia de curvas integrales*

$$y^2 - (x+C)^3 = 0,$$

solución de una cierta ecuación diferencial de primer orden. Encuentre las soluciones singulares de la ecuación.
Solución.

Derivando respecto a C obtenemos $-3(x+C)^2=0$. Esto, junto a la ecuación de la familia implican $y=0$.

Como en la recta $y=0$ se cumple la condición:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial \phi}{\partial y}=0,$$

entonces los puntos de dicha recta son puntos singulares (retroceso). Pero a la vez este lugar geométrico, $y=0$, es también la envolvente de la familia dada, pues $\forall(-C,0)$ tanto para la recta $y=0$ como para la parábola semicúbica $y=(x+C)^{\frac{3}{2}}$ se cumple la igualdad de sus coeficientes angulares:

$$y'|_{x=-C}=0.$$

Por lo tanto, la función $y=0$ es solución singular de la ecuación diferencial $y=\frac{8}{27}y'^3$ para la cual la familia dada es solución general. ▲

Ejemplo 2.7.14 .
Encuentre las soluciones singulares de:

$$2y(y'+2)-xy'^2=0, \tag{2.55}$$

sabiendo que su solución general es $Cy-(C-x)^2=0$.
Solución.
La existencia de soluciones singulares se determina por el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2y(p+2)-xp^2 & = & 0 \\ 2y-2xp & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminando p obtenemos $y^2+4xy=0$, de donde, $y=0$ e $y=-4x$. Al reemplazar en (2.55) vemos que ambas son soluciones de la ecuación. Para ver si son soluciones singulares tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} Cy-(C-x)^2 & = & 0 \\ y-2(C-x) & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminando C se obtenemos $y^2+4xy=0$, es decir, $y=0$ e $y=-4x$, por lo que ambas soluciones son singulares. ▲

Ejemplo 2.7.15 .
Encuentre la integral singular de la ecuación diferencial $\frac{8}{27}y'^3+\frac{4}{9}y'^2-y-x=0$.
Solución.
Consideramos el sistema que nos da el lugar geométrico de los puntos en que no se cumplen la condición de Lipschitz:

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(x,y,p) & = & \frac{8}{27}p^3+\frac{4}{9}p^2-y-x=0 \\ F_p(x,y) & = & \frac{8}{9}p^2+\frac{8}{9}p=0. \end{array}\right.$$

De la segunda ecuación tenemos $p = 0$ *y* $p = -1$. *Para* $p = 0$ *obtenemos* $y = -x$, *la que no es solución de la ecuación original. Para* $p = -1$ *resulta* $x + y = \frac{4}{27}$ *siendo solución singular.*

Resolviendo el sistema para C*:*

$$\left.\begin{array}{rcl} (y-C)^2 & = & (x+C)^3 \\ -2(y-C) & = & 3(x+C)^2 \end{array}\right|$$

tenemos $C = 2x + 3y$. *Reemplazando en la segunda ecuación del sistema obtenemos* $x + y = \frac{4}{27}$. *Por lo que, es solución singular.* ▲

Ejemplo 2.7.16 .
Encuentre las soluciones singulares de $y'^2(2-3y)^2 = 4(1-y)$.
Solución.
Separando variables e integrando resulta la solución general $y^2(1-y) = (C \pm x)^2$. *Derivando respecto a* C *obtenemos el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} y^2(1-y) & = & (x-C)^2 \\ 0 & = & -2(x-C) \end{array}\right|$$

Eliminando C *resulta* $y^2(1-y)$, *es decir,* $y = 0$ *e* $y = 1$.

Por otro lado, haciendo $y' = p$ *en la solución general y derivando respecto a* p *tenemos el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} p^2(2-3y)^2 & = & 4(1-y) \\ 2p(2-3y)^2 & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminando p *resulta* $y = 1$. *Por tanto,* $y = 1$ *es solución singular.* ▲

Ejemplo 2.7.17 .
Encuentre las soluciones singulares de $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ *cuya solución general es* $x^2 = 2C(y-2C)$
Solución.
Derivando respecto de C *tenemos el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 & = & 2C(y-2C) \\ 0 & = & 2y - 8C \end{array}\right|$$

Eliminando C *obtenemos* $y = \pm 2x$. *Por su parte, haciendo* $y' = p$ *en la ecuación diferencial y derivando respecto a* p, *resulta el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} xp^2 - 2yp + 4x & = & 0 \\ 2xp - 2y & = & 0 \end{array}\right|$$

Eliminando p *obtenemos* $p = \frac{y}{x}$, *lo que sustituido en la primera ecuación del sistema resulta* $y = \pm 2x$. *Por tanto, ambas rectas son soluciones singulares.* ▲

2.8. Ejercicios Propuestos

1. En los siguientes ejercicios verifique que las funciones dadas son soluciones de la ecuaciones diferenciales indicadas.

   a) $y = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$; $xy' + y = \cos x$.
   b) $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$; $y' + 2y + e^x = 0$.
   c) $y = 2 + C\sqrt{1+x^2}$, $(1+x^2)\,y' + xy = 2x$.
   d) $y = x\sqrt{1-x^2}$, $yy' = x - 2x^3$.
   e) $y = e^{\operatorname{arc\,sen} Cx}$, $xy' = y\operatorname{tg}(\ln y)$.
   f) $y = x\int_0^x e^{t^2}dt + Ce^x$, $y' - y = e^{x-x^2}$.
   g) $y = x\left(\int \frac{e^x}{x}dx + C\right)$, $xy' - y = xe^x$.
   h) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$, $x + yy' = 0$.
   i) $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $(1+xy)\,y' + y^2 = 0$.

2. Verifique que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales que se indican.

   a) $y = \frac{C}{\cos x}$, $y' - y\operatorname{tg} x = 0$.
   b) $y = \frac{-1}{3x+C}$, $y' = 3y^2$.
   c) $y = \ln(C + e^x)$, $y' = e^{x-y}$.
   d) $y = \sqrt{x^2 - Cx}$, $(x^2+y^2)\,dx - 3xydy = 0$.

3. Integre las ecuaciones siguientes.

   a) $(1+x^2)\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$.
   b) $(1+y^2)\,dx + xydy = 0$.
   c) $(y^2 + xy^2)\,y' + x^2 - x^2y = 0$.
   d) $(2+y^2)\,dx = xdy$.
   e) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.
   f) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $y(0) = 1$.
   g) $e^{-y}(1+y') = 1$.
   h) $y\ln ydx + xdy = 0$, $y(1) = 1$.
   i) $y' = a^{x+y}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

j) $e^y\left(1+x^2\right)dy-2x\left(1+e^y\right)=0$.

k) $\left(1+e^x\right)yy'=e^y,\ y\left(0\right)=0$.

l) $\left(1+y^2\right)\left(e^{2x}dx-e^ydy\right)-\left(1+y\right)dy=0$.

m) $\left(xy^2-y^2+x-1\right)dx+\left(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2\right)dy=0$.

n) $y'=\operatorname{sen}\left(x-y\right)$.

ñ) $y'=ax+by+c$, con a,b,c constantes.

o) $\left(x+y\right)^2y'=a^2$.

p) $\left(1-y\right)e^yy'+\frac{y^3}{x\ln x}=0$.

q) $\left(1+y^2\right)dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

r) $xy^2\left(xy'+y\right)=a^2$.

s) $\left(x^2y^2+1\right)dx+2x^2dy=0$.

t) $\left(1+x^2y^2\right)y+\left(xy-1\right)^2xy'=0$.

u) $\left(x^2y^3+y+x-2\right)dx+x^4y^2dy=0$, (Indicación: hacer $xy=t$).

v) $\left(x^6-2x^5+2x^4-y^3+4x^2y\right)dx+\left(xy^2-4x^3\right)dy=0$.

w) $y'+1=\frac{(x+y)^m}{(x+y)^n+(x+y)^p}$.

4. En los ejercicios que siguen encuentre las soluciones que cumplen las condiciones indicadas para $w\to\pm\infty$.

   a) $x^2y'\cos y+1=0,\ y\to\frac{16}{3}\pi$ si $x\to+\infty$.

   b) $x^2y'+\cos 2y=1,\ y\to\frac{10}{3}\pi$ si $x\to+\infty$.

   c) $x^3y'-\operatorname{sen}y=1,\ y\to5\pi$ si $x\to+\infty$.

   d) $\left(1+x^2\right)y'-\frac{1}{2}\cos^2 2y=0,\ y\to\frac{7}{2}\pi$ si $x\to-\infty$.

   e) $e^y=e^{4y}y'+1$, y acotada para $x\to+\infty$.

   f) $\left(x+1\right)y'=y-1$, y acotada para $x\to+\infty$.

   g) $x^2y'+\operatorname{sen}2y=1,\ y\to\frac{11}{4}\pi$ si $x\to+\infty$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a) $4x-3y+y'\left(2y-3x\right)=0$.

   b) $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

   c) $4x^2-xy+y^2+y'\left(x^2-xy+4y^2\right)=0$.

   d) $y'=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$.

   e) $2xy'\left(x^2+y^2\right)=y\left(y^2+2x^2\right)$.

f) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$.

g) $ax^2 + 2bxy + xy^2 + y'\left(bx^2 + 2cxy + fy^2\right) = 0$.

h) $\left(y^4 - 3x^2\right) dy = -xydx$.

i) $y^3 dx + 2\left(x^2 - xy^2\right) dy = 0$.

j) $\left(y - xy'\right) = x^2 + y^2$.

k) $3x + y - 2 + y'\left(x - 1\right) = 0$.

l) $2x + 2y - 1 + y'\left(x + y - 2\right) = 0$.

m) $\left(3y - 7x + 7\right) dx - \left(3x - 7y - 3\right) dy = 0$.

n) $\left(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1}\right) dx + 2xdy = 0$.

ñ) $4xy^2 dx + \left(3x^2y - 1\right) dy = 0$.

o) $\left(x + y^3\right) dx + \left(3y^5 - 3xy^2\right) dy = 0$.

p) $2\left(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2}\right) dx + x^3 dy$.

q) $\left(2x - 4y\right) dx + \left(x + y - 3\right) dy = 0$.

r) $\left(x - 2y - 1\right) dx + \left(3x - 6y + 2\right) dy = 0$.

s) $\left(x - y + 3\right) dx + \left(3x + y + 1\right) = 0$.

t) $\left(x + y\right) dx + \left(x + y - 1\right) = 0$.

u) $y \cos x dx + \left(2y - \operatorname{sen} x\right) dy = 0$.

6. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' + 2y = x^2 + 2x$.

b) $\left(x^2 + 2x - 1\right) y' - \left(x + 1\right) y = x - 1$.

c) $y'x \ln x - y = x^3\left(3 \ln x - 1\right)$.

d) $\left(a^2 - x^2\right) y' + xy = a^2$.

e) $2xy' - y = 3x^2$.

f) $\left(x + 1\right) dy - \left[2y + \left(x + 1\right)^4\right] dx = 0$.

g) $y' = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y}$.

h) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

i) $x\left(x^3 + 1\right) y' + \left(2x^3 - 1\right) y = \frac{x^3 - 2}{x}$.

j) $y' + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x,\ y\left(0\right) = 1$.

k) $y'x \ln x - \left(1 + \ln x\right) y + \frac{1}{2}\left(2 + \ln x\right) = 0$.

l) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$.

m) $(8xy' - y)\, y^3\sqrt{x+1} = -1.$

n) $(xy + x^2y^3)\, y' = 1.$

7. Resuelva.

a) $x\,(2x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2y^2)\, y' = 0.$

b) $(3x^2 + 6xy^2)\, dx + (6x^2y + 4y^3)\, dy = 0.$

c) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) = 0.$

d) $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^2}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0.$

e) $\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right) dx = \frac{x^2+y^2}{x^2y} dy.$

f) $\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$

g) $(3x^2 - 2x - y)\, dx + (2y - x + 3y^2)\, dy = 0.$

8. Integre las siguientes ecuaciones.

a) $y'^2 - (2x + y)\, y' + (x^2 + xy) = 0.$

b) $xy'^2 + 2xy' - y = 0.$

c) $4y'^2 - 9x = 0.$

d) $y'^2 - 2yy' = y^2\,(e^x - 1).$

e) $x^2y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0.$

f) $xy'^2 - 2yy' + x = 0.$

g) $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0.$

h) $y'^3 + (x + 2)\, e^y = 0.$

i) $y'^3 + yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0.$

9. Integre las siguientes ecuaciones.

a) $y = y'^2 e^{y'}.$

b) $y' = e^{\frac{y'}{y}}.$

c) $x = \ln y' + \operatorname{sen} y'.$

d) $y'^2 - 2y' + 2 = x.$

e) $y = y' \ln y'.$

f) $y = \operatorname{arc\,sen} y' + \ln(1 + y'^2).$

g) $y = (y' - 1)\, e^{y'}.$

h) $y'^2 x = e^{\frac{1}{y'}}.$

i) $x\,(1 + y'^2) = 1.$

j) $x\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a.$

k) $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}.$

l) $y^4 + y'^4 - yy'^2 = 0.$

m) $x = y' + \operatorname{sen} y'.$

n) $y' = y'\,(1 + y' \cos y').$

ñ) $2y = xy' + y' \ln y'.$

o) $y = 2xy' + \ln y'.$

p) $y = x\,(1 + y')\, y'^2.$

q) $y = 2xy' + \operatorname{sen} y'.$

r) $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}.$

s) $y = \frac{3xy'}{2} + e^{y'}.$

t) $y = xy' + y'^2.$

u) $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0.$

10. Forme las ecuaciones diferenciales que modelan las siguientes familias de curvas.

    a) $y = \frac{a}{x}$.
    b) $x^2 - y^2 = ax$.
    c) $y = ae^{\frac{x}{a}}$.
    d) $y = Cx - C - C^2$.
    e) $y = e^x (ax + b)$.
    f) $y^2 = 2Cx + C^2$.
    g) $y = ax^2 + bx + c$.
    h) $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$.
    i) $y = (x - a)^{\frac{x}{2}} + (y - b)^2 = 1$.
    j) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.
    k) $y = a \operatorname{arc\,sen} (x + \alpha)$.
    l) $x^2 + y^2 = C$.

11. Encuentre las trayectorias ortogonales para las siguientes familias de curvas.

    a) $y^2 + 2ax = a^2$, $a > 0$.
    b) $y = ax^n$, con a un parámetro.
    c) $y = ae^{\alpha x}$, α constante.
    d) $\cos y = ae^{-x}$.
    e) $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a^2$.
    f) $x^2 - y^2 = a^2$.
    g) $x^k + y^k = a^k$.
    h) $x^2 + y^2 = 2ay$.
    i) $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = a^2$.
    j) $\rho = a (1 + \cos\phi)$.
    k) $y^2 = 4 (x - a)$.

12. Para las siguientes ecauciones, encuentre las soluciones singulares en el caso que ellas existan.

    a) $(1 + y'^2) y^2 - 4yy' - 4x = 0$.
    b) $y'^2 - 4y = 0$.
    c) $y'^3 - 4xyy' + 12y^2 = 0$.
    d) $y'^2 - y^2 = 0$.
    e) $y' = \sqrt[3]{y^2} + a$ ¿Para que valores de a esta ecuación tiene solución singular?
    f) $(xy' + y)^2 + 3x^5 (xy' - 2y) = 0$.
    g) $y (y - 2xy')^2 = 2y'$.

13. Encuentre las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden, conociendo las soluciones generales.

    a) $y = xy' + y'^2$, $y = Cx + C^2$.
    b) $(xy' + y)^2 = 0$, $y (C - x) = C^2$.
    c) $y^2 y'^2 + y^2 = 1$, $y^2 + (x - C)^2 = 1$.

14. Integre las ecuaciones diferenciales.

    a) $(y - y^3)\, dx + (2xy^2 - x - ay^2)\, dy = 0$.
    b) $y' = (x - y)^2 + 1$.
    c) $y' x \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x + x \cos y)\, y = \operatorname{sen} x \cos x - x$.

d) $y' + y\cos x = y^n \operatorname{sen} 2x,\ n \neq 1.$

e) $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^3 - 3x^2y)\,dy = 0.$

f) $(5xy - 4y^2 - 6x^2)\,dx + \left(y^2 - 8xy + \frac{5}{2}x^2\right)dy = 0.$

g) $(3xy^2 - x^2)\,dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)\,dy = 0.$

h) $(y - xy^2 \ln x)\,dx + xdy = 0,\ \mu\phi\,(xy).$

i) $\left(2xye^{x^2} - x\operatorname{sen} x\right)dx + e^{x^2}dy = 0.$

j) $2y' + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0.$

k) $y' = \frac{1}{2x - y^2}.$

l) $x^2 + xy' = 3x + y'.$

Capítulo 3

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

3.1. Análisis de Compartimientos

Supongamos un compartimiento al cual entra y sale una substancia. Denotemos por $x(t)$: la cantidad de material en el compartimiento, $i(t)$: la velocidad de flujo a la que se introduce material al sistema y por k: el coeficiente de transferencia fraccional, es decir, la cantidad de material que se extrae del compartimiento por unidad de tiempo.

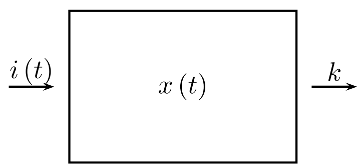

Figura 3.1: Análisis de compartimientos.

Claramente vemos que la tasa o razón a la que cambia la cantidad x, depende de la diferencia entre la entrada y la salida de material en cualquier tiempo t:

$$\frac{dx}{dt} = i(t) - kx(t).$$

Luego,

$$x(t) = e^{-kt}\left(\int i(t)\, e^{kt} dt + C\right).$$

Veamos la aplicación de este modelo a algunos problemas diversos.

Ejemplo 3.1.1 .
El Estroncio 90 tiene una vida media de 25 años. Si ponemos 100 gramos en un recipiente sellado ¿Cuántos gramos permanecen después de 15 años?
Solución.
Sea $x(t)$ el número de gramos de Estroncio 90 en t años. El número de átomos que decae por unidad de tiempo es directamente proporcional al número presente en ese momento. La constante de proporcionalidad k es el coeficiente de transferencia fraccional, y como no hay entrada de material tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -Kx(t) \\ x(0) &= 100. \end{aligned}$$

Resolviendo este problema de valor incial obtenemos $x(t) = 100e^{-kt}$. Para encontrar k hacemos $t = 25$ y obtenemos la vida media, es decir:

$$100e^{-25k} = 50,$$

de donde, $k = \frac{\ln 2}{25}$. Por tanto, $x(t) = 100e^{-\frac{t \ln 2}{25}}$. Luego, $x(15) = 100e^{-\frac{3 \ln 2}{5}} \approx 65{,}98$ gramos. ▲

Ejemplo 3.1.2 .
En el estanque de la Figura 3.2 hay 400 litros de agua en la que se han disuelto 30 kilos de sal. Por la parte superior, 10 litros con medio kilo de sal entran por minuto, es decir, 0.5 kilos por litro. Por la llave inferior salen 10 litros por minuto. Encuentre la cantidad de sal en el recipiente en el momento t.

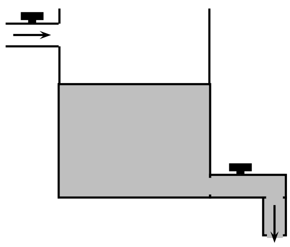

Figura 3.2: Estanque con salmuera.

Solución.
Sea $x(t)$ el número de kilos de sal después de t minutos. Como cada litro que entra al recipiente contiene 0.05 kilos de sal, sabemos que $i(t) = 0,05 \cdot 10 = 0,5$. Por otro lado, $k = \frac{10}{400} = \frac{1}{40}$, puesto que 10 de los 400 litros salen del recipiente cada minuto. Luego,

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}5 - \frac{1}{40}x(t),$$

o bien, $x' + \frac{1}{40}x - \frac{1}{2} = 0$*, la que es una ecuación lineal de primer orden. Aplicando (2.29) obtenemos:*

$$x(t) = Ce^{-\frac{t}{40}} + 20.$$

Pero $x(0) = 30$*, de donde,* $C = 10$*. Por tanto,* $x(t) = 10e^{-\frac{t}{40}} + 20$*.* ▲

Ejemplo 3.1.3 .
En el estanque de la Figura 3.2 hay 400 litros de agua en la que se han disuelto 30 kilos de sal. Por la parte superior, 15 litros con 0.75 kilos de sal entran por minuto, o sea 0.05 kilos por litro. Por la llave inferior salen 10 litros por minuto. Hallar la cantidad de sal en el recipiente en el momento t*.*
Solución.
Ahora $i(t) = 0,75$*, pero la cantidad de salmuera que entra es mayor que la que sale, entonces por cada minuto que pasa aumenta la salmuera en el recipiente, por lo tanto, la fracción que se transfiere es* $k = \frac{10}{400+5t}$*. Por tanto, el modelo queda como:*

$$\frac{dx}{dt} = 0,75 - \frac{10}{400+5t}x(t) = \frac{3}{4} - \frac{2}{80+t}x(t),$$

o bien,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{80+t}x(t) - \frac{3}{4} = 0,$$

la que es una ecuación lineal de primer orden. Aplicando (2.29) obtenemos:

$$x(t) = \frac{C}{(80+t)^2} + \frac{1}{4}(80+t).$$

Imponiendo la condición inicial $x(0) = 30$ *resulta* $C = 64000$*. Luego,*

$$x(t) = \frac{64000}{(80+t)^2} + \frac{1}{4}(80+t).$$

▲

3.2. Ley de Enfriamiento de Newton

Según la Ley de Enfriamiento de Newton: *La razón de cambio de la diferencia de temperaturas entre un objeto y el medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperaturas.* Por lo cual, sea $\Delta(t)$ dicha diferencia de temperaturas en el tiempo t, luego $\frac{d\Delta(t)}{dt} = k\Delta(t)$, donde k es la constante de proporcionalidad. Luego,

$$\frac{d\Delta(t)}{\Delta(t)} = kdt.$$

Por tanto,

$$\Delta(t) = \Delta_0 e^{kt},$$

donde $\Delta_0 = \Delta(t_0)$ es la condición inicial del problema.

Ejemplo 3.2.1 .
En un lindo día de Septiembre con $20°$, *a la sombra en Lican Ray, de un horno de barro, como el de la Figura 3.3, se sacan empanadas a una temperatura de* $100°$, *a los 2 minutos quisimos comerlas pero éstas estaban todavía muy calientes a* $80°$ *¿Cuál es la temperatura luego de 5 minutos? Se sabe que una temperatura adecuada para comerlas es* $40°$ *¿Cuánto tiempo será necesario esperar?*

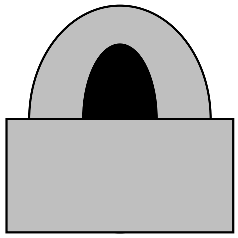

Figura 3.3: Horno de barro.

Solución.
Tenemos que $\Delta(0) =$ *diferencia de temperatura inicial* $= 100° - 20° = 80°$. *Luego,* $\Delta(t) = 80e^{kt}$, *pero* $\Delta(2) = 60$, *por lo que,* $80e^{2k} = 60$, *de donde* $k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$. *Notemos que* $k < 0$, *lo que significa que la temperatura está disminuyendo. Luego,*

$$\Delta(t) = 80e^{\frac{t}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}}.$$

Con esto, $\Delta(5) \approx 38{,}97°$. *Así, la temperatura a los cinco minutos es* $38{,}97° + 20 = 58{,}97°$.

Finalmente, la temperatura será de $40°$, *cuando la diferencia sea de* $20°$, *por lo tanto,* $80 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{2}} = 20$, *es decir,* $t = \frac{-2\ln 4}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 9{,}64$ *minutos.* ▲

3.3. Poblaciones

Una población cambia a una tasa proporcional a su tamaño. Uno de los modelos más simples asume que las poblaciones tienen una tasa de crecimiento constante λ. Así por ejemplo, si $p(t)$ representa la población en el tiempo t, entonces la ecuación del crecimiento está dada por:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \lambda p(t).$$

Este modelo es muy razonable para microorganismos que se reproducen por mitosis y para intervalos limitados de tiempo, pues la solución es:

$$p(t) = p(t_0)\, e^{\lambda(t-t_0)},$$

donde $P(t_0)$ corresponde a la población inicial. Notemos que si $\lambda > 0$ la población crece indefinidamente, lo que es imposible de mantener siempre. Por su parte, si $\lambda < 0$ la población va extinguiéndose.

En general, la tasa de crecimiento de población es la diferencia entre la tasa de natalidad λ_n y la de mortalidad λ_m, quedando $\lambda = \lambda_n - \lambda_m$.

Un modelo particular de población es el de Verhulst, el que se caracteriza por tener una tasa de decrecimiento lineal, del tipo $\lambda = \alpha - \beta p$, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Este modelo queda expresado como:

$$\dot{p} = (\alpha - \beta p)\, p. \tag{3.1}$$

Por un lado, notemos que $p(t) = 0$ y $p(t) = \frac{a}{b} = p_\infty$ son soluciones.

Por otro, separando variables, integrando y considerando la condición inicial $p(t_0) = p_0$ en (3.1) obtenemos:

$$\frac{p}{\alpha - \beta p} = \frac{p_0 e^{\alpha(t-t_0)}}{\alpha - \beta p_0}.$$

Esto implica que si $p_0 \neq 0$ y $p_0 \leq p_\infty$ entonces:

$$\left|\frac{p}{p_0}\right| = \left|\frac{\alpha - \beta p}{\alpha - \beta p_0}\right| e^{\alpha(t-t_0)}.$$

En tal caso obtenemos la solución general:

$$p(t) = \frac{\alpha p_0 e^{\alpha(t-t_0)}}{\alpha - \beta p_0 \left(1 - e^{\alpha(t-t_0)}\right)}.$$

Si $t \to \infty$ entonces $p \to p_0$ llamada población límite. Además, si $p_0 > p_\infty$ entonces $p(t)$ decrece a p_∞ y si $p_0 < p_\infty$ entonces $p(t)$ crece a p_∞.

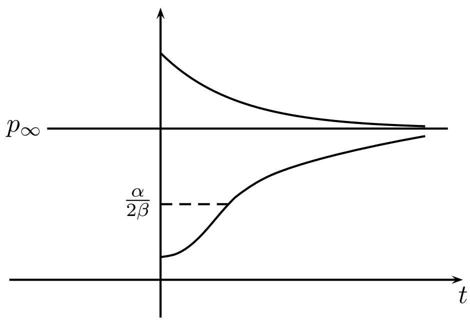

Figura 3.4: Comportamiento de la solución del modelo de Verhults.

Ejemplo 3.3.1 (Bacterias en la leche)

Tomemos para analizar una caja leche de 1 litro. Un día después de envasada hay 400 bacterias. Al segundo día hay 12000 ¿Cuál es el número de bacterias al momento de envasar y cuál después de 5 días?

Solución.
De acuerdo al enunciado tenemos $\frac{p(2)}{p(1)} = \frac{p(0)e^{2\alpha}}{p(0)e^{\alpha}} = e^{\alpha}$ *y también* $\frac{p(2)}{p(1)} = \frac{12000}{400} = 30$. *Por lo que,* $e^{\alpha} = 30$, *es decir,* $\alpha = \ln 30$. *Luego,* $p(t) = p(0)\, e^{t \ln 30} = p(0) \cdot 30^t$.

Con esto, $p(1) = p(0) \cdot 30 = 400$, *de donde,* $p(0) = \frac{40}{3}$, *es decir, al ser embasada la leche tenía 13 bacterias. Finalmente,* $p(5) = \frac{40}{3} \cdot 30^5 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^6$ *es el número de microorganismos al quinto día.* ▲

Ejemplo 3.3.2 .
La tasa de crecimiento por individuo de una población es la diferencia, entre la tasa promedio de nacimiento $\beta > 0$ *y la tasa promedio de mortalidad que es proporcional al tamaño de la población* $\delta > 0$. *Encuentre el modelo que describe la población.*
Solución.
Como $\frac{dp}{dt}$ *es la tasa de crecimiento de la población, entonces la tasa de crecimiento por individuo es* $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$. *Luego, la ecuación diferencial que controla el crecimiento de esta población es:*

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \beta - \delta p,$$

es decir,

$$\frac{dp}{dt} = p\beta - \delta p^2.$$

Separando variables e integrando obtenemos:

$$p(t) = \frac{C\beta e^{\beta t}}{1 + C\delta e^{\beta t}},$$

donde $C = \frac{p(0)}{\beta - \delta p(0)}$. ▲

3.4. Circuitos Eléctricos

Esta aplicación fue introducida en la Sección 2.1, por lo que, veremos sólo un ejemplo.

Ejemplo 3.4.1 .
Un circuito como el mostrado en la Figura 2.3 con inductancia $L = 1H$ *y resistencia* $R = 2\Omega$, *se le aplica una f.e.m* $u = \operatorname{sen} 3t$ *Volt ¿Cuál es la intensidad de la corriente en dicho circuito?*
Solución.
La segunda Ley de Kirchhoff aplicada al circuito nos da:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \operatorname{sen} 3t,$$

donde $i(t)$ *es la intensidad de la corriente eléctrica. Por tanto, la ecuación diferencial del problema es:*

$$\frac{di}{dt} + 2i - \operatorname{sen} 3t = 0,$$

que es lineal de primer orden. Aplicando (2.29) obtenemos como solución:

$$i\,(t) = Ce^{-2t} + \frac{2}{13}\,\mathrm{sen}\,3t - \frac{3}{13}\cos 3t.$$

Si $i\,(0) = 0$, entonces:

$$i\,(t) = \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{2}{13}\,\mathrm{sen}\,3t - \frac{3}{13}\cos 3t.$$

▲

3.5. Curvas de Persecución

El problema consiste en encontrar la curva que describe un móvil M_1 al perseguir a otro móvil M_2.

Ejemplo 3.5.1 .
Determine la curva que describe un movil M_1 que persigue con velocidad constante α al movil M_2 que va en línea recta y con velocidad constante β, suponiendo que el movil M_1 sale en el tiempo $t = 0$ desde el origen mientras que M_2 lo hace desde el punto $(b, 0)$ hacia arriba sobre la recta $x = b$, como muestra la siguiente figura:

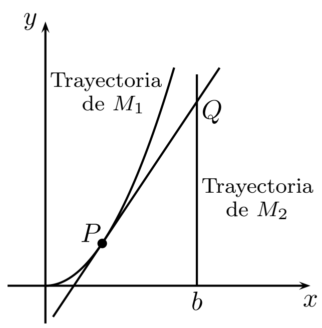

Figura 3.5: Curvas de persecución.

Solución.
Puesto que M_1 persigue a M_2, entonces en todo instante t la tangente en $P\,(x, y)$ debe cortar a la recta $x = b$ en el punto $Q\,(b, \beta t)$.Luego, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta t}{x - b}. \tag{3.2}$$

Como conocemos la velocidad a la que se desplaza M_1, entonces sabemos que recorre una distancia αt en un tiempo t. Pero tal distancia es también la longitud de la curva de persecución desde $(0, 0)$ hasta $P\,(x, y)$. Por lo tanto:

$$\alpha t = \int_0^x \sqrt{1 + [y'\,(u)]^2}du. \tag{3.3}$$

Despejando t de (3.2) y (3.3) obtenemos:

$$y-(x-b)\frac{dy}{dx}=\frac{\beta}{\alpha}\int_0^x\sqrt{1+[y'(u)]^2}du. \tag{3.4}$$

Derivando respecto de x y haciendo $\frac{dy}{dx}=z$ en (3.4) obtenemos:

$$-(x-b)\frac{dz}{dx}=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+z^2}.$$

Separando variables, integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $x(0)=z(0)=0$ tenemos:

$$z=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}-\left(1-\frac{x}{b}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]. \tag{3.5}$$

Nuevamente, separando variables, integrando y teniendo presente las condiciones iniciales, obtenemos de (3.5):

$$y=\frac{b}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1+\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}-\frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right]+\frac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}.$$

▲

Ejercicios.

1. Encuentre el punto en que M_1 intercepta a M_2.

2. Demuestre que si $a=b$, entonces la curva de persecución esta dada por:

$$y=\frac{b}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{b}\right)^2-1\right]-\ln\left(1-\frac{x}{b}\right)\right\}.$$

3.6. Tractriz

Una **Tractriz** es una curva en el plano xy con la propiedad que el segmento de tangente limitado por el punto de tangencia y el eje x es constante. En base a la Figura 3.6 tenemos:

$$y'=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Separando variables e integrando obtenemos como ecuación de la tractriz:

$$a\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right|+\sqrt{a^2-y^2}=C-x.$$

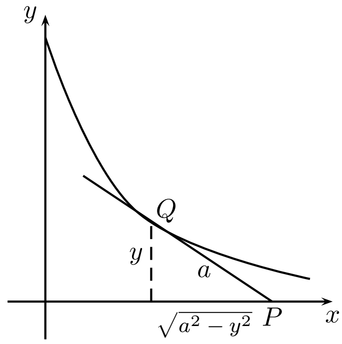

Figura 3.6: Tractriz.

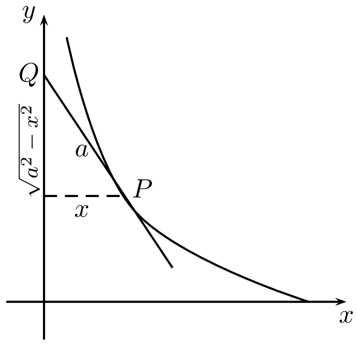

Figura 3.7: Esquiador acuático.

3.7. Esquiador Acuático (Tractriz)

Supongamos que en la Figura 3.7 PQ es tangente a la trayectoria del punto $P(x, y)$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Integrando obtebemos:

$$y = a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Si imponemos la condición inicial $y(a) = 0$ tenemos que $C = 0$.

3.8. Modelo Newtoniano

Esta aplicación se introdujo anteriormente en las Secciones 1.2 y 2.1, por lo que sólo veremos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 3.8.1 .
A un objeto de masa m se le aplica una velocidad inicial dirigida hacia abajo v_0 y cae bajo la influencia de la gravedad. Suponiendo que la fuerza gravitacional es constante es igual a g y que la fuerza debido a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, determine la ecuación del movimiento de dicho objeto.
Solución.
Haciendo un diagrama de cuerpo libre de la situación tenemos:

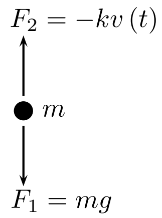

Figura 3.8: Diagrama de cuerpo libre.

De donde: $F = F_1 + F_2 = mg - kv(t)$. *Entonces, según la segunda ley de Newton tenemos:* $ma = mg - kv(t)$. *Pero,* $a = \frac{dv}{dt}$, *por lo que tenemos el problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m}(mg - kv(t)) \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Separando variables, integrando e imponiendo la condición inicial sobre la velocidad obtenemos:

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

A partir de esta igualdad podemos determinar la ecuación del posición, pues $v(t) = \frac{dx}{dt}$. *Integrando y considerando la condición inicial sobre la posición obtenemos:*

$$x(t) = \frac{mg}{k} t + \frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k} - v_0\right)\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right).$$

▲

3.9. Problema Geométrico

Ejemplo 3.9.1 .
Determine la ecuación diferencial de las curvas para las cuales el segmento de normal comprendido entre un punto de la curva y el punto de intersección de la normal con el eje x es constante e igual a a.
Solución.
Esquemáticamente el problema se representa como:

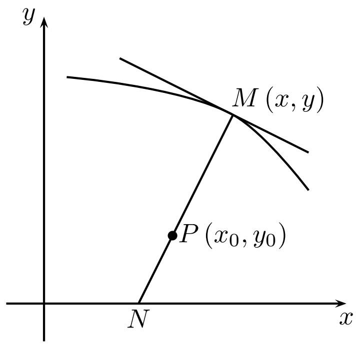

Figura 3.9: Problema geométrico.

La ecuación de la normal a la curva en M es $y-y_0=-\frac{1}{y'}\,(x-x_0)$. Por tanto, si $y_0=0$ tenemos $x_0=y'y+x$, es decir, la coordenada de N es $(y'y+x,0)$. Por lo tanto, como $\overline{MN}$ es una constante, aplicando la formula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$\sqrt{y^2y'^2+y^2}=a,$$

es decir, obtenemos la ecuación diferencial:

$$y^2y'^2+y^2=a^2.$$

▲

3.10. Ejercicios Propuestos

1. Un tanque contiene, en un principio, 40 litros de salmuera con 8 kilos de sal en solución. Entra en el estanque, a razón de 8 litros por minuto salmuera conteniéndo $\frac{1}{8}$ kilo de sal por litro. La mezcla bien agitada para que sea homogénea, sale del estanque a razón de 4 litros por minuto.

   a) ¿Cuántos kilos de sal hay en el estanque a los 5 minutos?

   b) A los 10 minutos se modifica la concentración de entrada de sal a k kilos de sal por litro. Si se mantienen los otros datos, calcule k de modo que a los 20 minutos la concentración de sal en el estanque sea de $\frac{84}{4}$.

2. Un reactor de cultivo convierte Uranio 238, relativamente estable, en Plutonio 239, un isótopo radioáctivo. Al cabo de 15 años se ha desintegrado en $0{,}042\,\%$ de la cantidad inicial de una muestra de plutonio. Determine la vida media de ese isótopo, suponiendo que el ritmo de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

3. La policia descubre el cuerpo de un profesor de ecuaciones diferenciales. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuándo se cometió el homocidio. El forence llega al

medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de $30°C$. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a $29°C$. Asimismo, observa que la temperatura de la oficina del profesor es constante e igual a $27°C$. Suponiendo que la temperatura normal del profesor en vida era $37°C$ ¿A qué hora fue asesinado?

4. La desintegración del N_2O bajo la influencia de un catalizador de platino está descrita por la ecuación diferencial:
$$\frac{dx}{dt} = k\frac{a-x}{1+bx},$$
donde a es la concentración de N_2O en el instante inicial $t=0$, b es una constante y $x(t)$ es la concentración de producto en el instante t. Si para $t=0$ es $x(0)=0$, resuelva la ecuación diferencial y determine la expresión de la vida media de la substancia (vida media: de una substancia es el tiempo T que tarda en reducirse a la mitad)

5. Un estanque de 300 litros de capacidad contiene 50 litros de agua pura. En el instante $t=0$, comienza a entrar una solución que contiene $100\,[cm^3]$ de alcohol por cada litro de solución y lo hace a una velocidad de 5 litros por minuto. Después de media hora ingresa al estanque una segunda solución de agua con alcohol, pero con un $20\,\%$ de alcohol por litro de solución y a una velocidad de 5 litros por minuto. Simultáneamente al ingreso de esta segunda solución, se habre una llave en el fondo del estanque y a una velocidad de 6 litros por minuto la solución sale del estanque. Determine la cantidad de alcohol en el estanque en el instante que este se llena.

6. En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente.

   a) Si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 12 horas?

   b) Si hay 10^4 bacterias al cabo de una hora y $2\cdot 10^4$ al cabo de 5 horas ¿Cuántas había al principio?

7. Una reacción convierte cierta substancia química en otra, y la velocidad con la que la primera se convierte es proporcional a la cantidad de esta substancia presente en cualquier tiempo. Después de una hora quedarán $50\,[g]$ de la primera substancia química, mientras que después de tres horas sólo quedarán $25\,[g]$ ¿Cuántos gramos de la primera substancia había inicialmemte? ¿Cuántos gramos de la primera substancia habrá a los 5 minutos? ¿En cuántas horas quedarán sólo $2\,[g]$?

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

4.1. Generalidades

4.1.1. Solución Particular. Solución General

Una **Ecuación Diferencial de Orden Superior** es una relación de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Ejemplo 4.1.1 .

1. *$x^3 y''' - xy' + y = \ln x$ es una ecuación diferencial de orden 3.*
2. *$y^{(n)} + y^{(n-1)} + y' + y = x^2 + 1$ es una ecuación diferencial de orden n con $n \in \mathbb{N}$.*

▲

En general, una ecuación diferencial se dice que es de orden superior si es de orden mayor o igual a dos.

Se llama solución sobre $[a, b]$ de la ecuación diferencial (4.1) a la función $y = \varphi(x)$ derivable n veces en $[a, b]$ que verifica (4.1) $\forall x \in [a, b]$, es decir,

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Diremos que la función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ es la **Solución General** de la ecuación diferencial de orden n (4.1).

Ejemplo 4.1.2 .
La ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 0$ es de segundo orden. Una solución es $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Su solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. ▲

Estudiada en un dominio $\mathbb{D} \ni (x, y)$: si φ satisface la ecuación (4.1) y si para una elección conveniente de las constantes C_1, C_2, ..., C_n, la función $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ se transforma en una solución de (4.1) cuyo gráfico está en $\mathbb{D}$.

La solución general de una ecuación diferencial de orden n se puede dar implícitamente por medio de una relación de la forma $R(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ que llamamos **Integral General**. O bien, en forma explícita $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$; que denominaremos **Solución General**. También puede obtenerse **Paramétricamente**:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Ejemplo 4.1.3 .
La ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$ es de segundo orden. Tiene por solución general a $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$. Soluciones particulares son $y_p = e^{2x}$ para $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, $\tilde{y}_p = e^{3x}$ para $C_1 = 0$, y $C_2 = 1$. ▲

Claramente la solución general de una ecuación diferencial de orden n depende de n constantes. Inversamente una familia de curvas

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ (x, y) \in \mathbb{D}, \tag{4.2}$$

con ϕ contínua y derivable parcialmente hasta el orden n en $\mathbb{D}$, verifica en $\mathbb{D}$ una ecuación diferencial de orden n. En efecto, derivando (4.2) tenemos sucesivamente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}y' &=& 0 \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}y' + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial\phi}{\partial y}y'' &=& 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^n\phi}{\partial x^n} + n\frac{\partial^n\phi}{\partial x^{n-1}\partial y}y' + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial y}y^{(n)} &=& 0. \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Relaciones que junto con la ecuación (4.2) forman un sistema de $n + 1$ ecuaciones con n incógnitas C_1, C_2, ..., C_n. Si determinamos a C_1, C_2, ..., C_n de entre las n ecuaciones en (4.3) y reemplazamos en la última (4.2) obtenemos una relación de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

es decir, una ecuación diferencial de orden n.

Sea $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, una ecuación diferencial de orden n y:

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

una familia de curvas planas que dependen de n parámetros C_1, C_2, ..., C_n. Si entre la ecuación de la familia $\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ y las n ecuaciones que resultan de derivar $\phi = 0$, eliminamos C_1, C_2, ..., C_n y si el resultado de tal eliminación es una ecuación diferencial de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0,$$

decimos que:

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

es la solución general de la ecuación diferencial:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0.$$

Ejemplo 4.1.4 .
La relación $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$ verifica la ecuación diferencial de tercer orden $y''' = 0$. ▲

Ejemplo 4.1.5 .
La relación $y = \ln x + C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n$, $x > 0$ verifica la ecuación diferencial de orden $n+1$ $y^{n+1} + (-1)^{n+1}\frac{n!}{x^{n+1}} = 0$. En efecto por derivación sucesiva tenemos:

$$\begin{array}{rcl} y' & = & \dfrac{1}{x} + C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x + \cdots + nC_n x^{n-1} \\ y'' & = & \dfrac{1}{x^2} + 2C_2 + 3 \cdot 2C_3 x + \cdots + n(n-1)C_n x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n+1)} & = & (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}. \end{array}$$

▲

4.1.2. Integrales Intermedias. Integral Primera

Sea

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0, \tag{4.4}$$

ecuación diferencial, y

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{4.5}$$

su solución general.

Si derivamos $(n-k)$ veces (4.5) y eliminamos entre estas $(n-k+1)$ relaciones a C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n obtenemos una relación de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) = 0,$$

que se llama **Integral intermedia** de la ecuación (4.4).

Definición 4.1.6 (Integral intermedia)
Se llama **Integral Intermedia** *de (4.4) a una ecuación diferencial de orden $(n-k)$, que contiene k constantes arbitrarias $1 \leq k < n$:*

$$\psi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0, \tag{4.6}$$

y que es verificada por la solución general de la ecuación (4.4).

En particular, si $k = 1$, o sea (4.6) es una relación de la forma:

$$\mathcal{X}\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C\right) = 0,$$

se llama **Integral Primera**.

Otra manera de definir la integral primera es: Sea v un campo de vectores sobre el dominio $\mathbb{U}$ y $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. La función f se llama integral primera de la ecuación diferencial $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{U}$ si su derivada en la dirección del campo v es nula o equivalentemente:

1. La función f es constante a lo largo de cualquier solución $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{U}$. Más precisamente, cada función $f \circ \varphi$ es constante, donde φ solución de la ecuación.

2. Cada órbita está contenida en uno y sólo uno de los conjuntos de nivel constantes de la función f.

Ejemplo 4.1.7 .
El sistema de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x} &= yz \\ \dot{y} &= xz \\ \dot{z} &= -2xy, \end{cases}$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, tiene como integral primera la función* $\vartheta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$*. En efecto,*

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 2x(yz) + 2y(xz) + 2z(-2xy) = 0.$$

▲

El conocer una integral intermedia, simplifica la resolución de la ecuación inicial. Si:

$$\psi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) = 0, \tag{4.7}$$

es una integral intermedia de la ecuación (4.4), entonces integrar la ecuación (4.4) se reduce a integrar la ecuación (4.7) que es más simple, pues es de orden menor $(n-k)$.

En particular, conocer $n-$integrales primeras, distintas de la ecuación (4.4)

$$\psi_i\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.8}$$

es equivalente a conocer la solución general de la ecuación (4.4), pues del sistema (4.8) podemos deducir y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ en función de x, C_1, C_2, $\ldots$, C_n y en particular resulta: $y = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, es decir, la solución general de la ecuación (4.4).

4.2. Ecuaciones Integrables por Cuadraturas

La ecuación $y^{(n)} = 0$, es la ecuación diferencial de orden n más simple, su solución es un polinomio arbitrario de grado $n-1$: $y = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1}x^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.2.1 .
Encuentre la solución de $y^{(4)} = 0$ *que satisface las condiciones iniciales* $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$.
Solución.
La Solución general es $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$, $x \in \mathbb{R}$. *De acuerdo a las condiciones iniciales tenemos que:*

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow C_0 = 0 \\ y'(0) &= 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y''(0) &= 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ y'''(0) &= 1 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Luego, la solución particular es $y = \frac{1}{6}x^3$,, $x \in \mathbb{R}$. ▲

Teorema 4.2.2 .
Sea la ecuación diferencial de orden n:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{4.9}$$

con f *contínua en* $[a, b]$. *La solución general está dada por:*

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{(x-x_0)^k}{k!},$$

con $x \in [a, b]$, C_k *constantes arbitrarias,* $k = 1, 2, \ldots, n-1$, *y* $x_0 \in [a, b]$.

Demostración.

Integrando sucesivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x) \\ y^{(n-1)} &= \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C_{n-1} \\ y^{(n-2)} &= \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C_{n-1}\frac{x-x_0}{1!} + C_{n-2} \\ y^{(n-3)} &= \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C_{n-1}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + C_{n-2}(x-x_0) + C_{n-3} \\ \vdots \;&\vdots\; \vdots \end{aligned}$$

Así:

$$y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}dt\int_{x_0}^{x}dt\ldots\int_{x_0}^{x}dt\int_{x_0}^{x}f\left(t\right)dt}_{n\text{ veces}}+\sum_{k=0}^{n-1}C_k\frac{\left(x-x_0\right)^k}{k!}.$$

Nos queda demostrar que:

$$\int_{x_0}^{x}dt\int_{x_0}^{x}dt\ldots\int_{x_0}^{x}dt\int_{x_0}^{x}f\left(t\right)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{(n-1)}f(t)dt,$$

para lo cual, aplicamos inducción completa. Para $n=2$ tenemos:

$$\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}f\left(x\right)dx=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}f\left(t\right)dt=\int_{\mathbb{D}}\int f\left(t\right)dxdt.$$

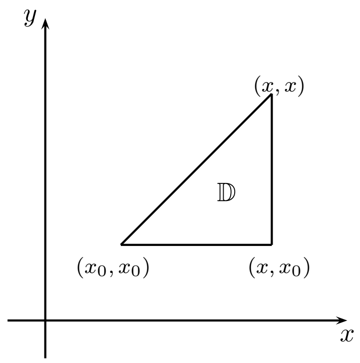

Figura 4.1: Dominio $\mathbb{D}$.

Cambiando el orden de integración obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}f(t)dt=\int_{x_0}^{x}dt\int_{t}^{x}f(t)dx=\int_{x_0}^{x}f(t)dt\int_{t}^{x}dx=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt.$$

Luego, para $n=2$ la fórmula es válida. Supongamos que vale para $n-1$ y demostraremos para n luego, sea:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}dx\ldots\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}f(t)dt}_{n-1}=\frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2}f(t)dt.$$

Integramos una vez más respecto de x, y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(t)dt}_{n\text{-veces}} &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} f(t)dt \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \int \int_{D} (x-t)^{n-2} f(t)dxdt \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^{x} f(t)dt \int_{t}^{x} (x-t)^{n-2} dx \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt.
\end{aligned}
$$

Es decir, la fórmula es válida también para n. Por lo tanto, el teorema queda demostrado. ■

Ejemplo 4.2.3 .
Resuelva $y^{(4)} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ *tal que satisface las condiciones iniciales:* $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$ $y'''(0) = 0$.
Solución.
Integrando sucesivamente tenemos:

$$
\begin{aligned}
y''' &= e^x + C_0 \\
y'' &= e^x + C_0 x + C_1 \\
y' &= e^x + C_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \\
y &= e^x + C_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.
\end{aligned}
$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos la solución particular $y = e^x - \frac{1}{6}x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. ▲

4.2.1. Ecuaciones de la Forma $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0$

Teorema 4.2.4 *Si conocemos una representación paramétrica de la curva* $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$ *y* $v = \psi(t)$ *con* φ ψ *continuas y* φ *derivable continuamente sobre* $[a, b]$, *entonces la integral general sobre* $[a, b]$ *de la ecuación se obtiene por* n *cuadraturas.*

Demostración.

Sea $u = \varphi(t)$ y $v = \psi(t)$, $t \in [a, b]$ una representación paramétrica de la curva $F(u, v) = 0$, tenemos, por lo tanto:

$$x = \varphi(t) \text{ e } y^{(n)} = \psi(t),$$

o bien,

$$y^{(n)}dx = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Integrando obtenemos:

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \phi_1(t) + C_0.$$

continuando tenemos:

$$y^{(n-1)}dx = (\phi_1(t) + C_0)\,dx = (\phi_1(t) + C_0)\,\varphi'(t)\,dt,$$

de donde,

$$y^{(n-2)} = \int \phi_1(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_0\varphi(t) + C_1.$$

Repitiendo el proceso n veces obtenemos:

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= \varphi(t) \\ y &= \phi(t) + P_{n-1}(\varphi(t)), \end{cases}$$

$t \in [a,b]$, donde P_{n-1} es un polinomio arbitrario de grado $n-1$ en $\varphi(t)$. $\blacksquare$

Si la ecuación es explícita respecto de x, es decir, $x = f\left(y^{(n)}\right)$, entonces una representacion paramétrica es $y^{(n)} = t$ y $x = f(t)$.

Ejemplo 4.2.5 .
Encuentre la solución general de la ecuación $x = y'' + y''^7$.
Solución.
Ponemos $y'' = t$, por tanto, $x = t + t^7$, $dx = (1 + 7t^6)\,dt$. Luego, obtenemos:

$$y' = \int y''dx \;=\; \int t\left(1 + 7t^6\right)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{7}{8}t^8 + C_1.$$

Integrando nuevamente:

$$\begin{aligned} y &= \int y'dx \\ &= \int \left(\frac{t^2}{2} + \frac{7}{8}t^8 + C_1\right)\left(1 + 7t^6\right)dt = \frac{1}{6}t^3 + \frac{35}{8\cdot 9}t^9 + \frac{49}{8\cdot 15}t^{15} + C_1\left(t + t^7\right) + C_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general está dada por la familia de curvas definidas $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= t + t^7 \\ y &= \frac{1}{6}t^3 + \frac{35}{8\cdot 9}t^9 + \frac{49}{8\cdot 15}t^{15} + C_1(t + t^7) + C_2. \end{cases}$$

$\blacktriangle$

Ejemplo 4.2.6 .
Resuelva $x = y'' - y''^3$.
Solución.
Hacemos $y'' = t$, *por tanto,* $x = t - t^3$ *y* $dx = (1 - 3t^2)\, dt$. *Luego,*

$$y' = \int y'' dx = \int t\left(1 - 3t^2\right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}t^4 + C_1.$$

Así, integrando nuevamente:

$$\begin{aligned} y &= \int y' dx \\ &= \int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}t^4 + C_1\right)\left(1 - 3t^2\right) dt = t^3\left(\frac{1}{6} - C_1\right) - \frac{9}{20}t^5 + \frac{9}{28}t^7 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos como solución general:

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= t - t^3 \\ y &= t^3\left(\frac{1}{6} - C_1\right) - \frac{9}{20}t^5 + \frac{9}{28}t^7 + C_1 t + C_2. \end{cases}$$

▲

4.2.2. Ecuaciones de la Forma $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$

Teorema 4.2.7 .
Sea la ecuación diferencial $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, *si se conoce una representación paramétrica de la curva* $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$ *y* $v = \psi(t)$, *con* φ, ψ, φ' *contínuas y* $\psi(t) \neq 0$ *sobre* $[a, b]$, *entonces la integral general se obtiene por* n *cuadraturas.*

Demostración.
Si $u = \varphi(t)$ $v = \psi(t)$ es una representación paramétrica de la curva $F(u, v) = 0$, podemos escribir $y^{(n-1)} = \varphi(t)$ e $y^{(n)} = \psi(t)$, con $t \in [a, b]$. O bien, $y^{(n-1)} = \varphi(t)$ y $d(y^{(n-1)}) = \psi(t)\, dx$. Luego, $dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$, de donde, $x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C_0$, o escrito de otra manera, $x = \phi(t) + C_0$. Por lo tanto, tenemos $y^{(n-1)} = \varphi(t)$ y $x = \phi(t) + C_0$, que corresponde al problema estudiado en el caso anterior. Tenemos a continuación:

$$d\left(y^{(n-2)}\right) = \varphi(t)\, dx = \frac{\varphi(t)\, \varphi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

Luego, integrando tenemos:

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\varphi(t)\, \varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C_1.$$

Con $n - 2$ integraciones más obtenemos la solución general en forma paramétrica. ■

Ejemplo 4.2.8 .
Resuelva la ecuación $y'''y'' = 1$.
Solución.
Una representación paramétrica es $y'' = t$, *e* $y''' = \frac{1}{t}$, *con* $t \neq 0$. *Tenemos* $d(y'') = y'''dx$, *o bien,* $dt = \frac{1}{t}dx$, *de donde,* $dx = tdt$. *Por lo tanto, integrando obtenemos* $x = \frac{1}{2}t^2 + C_0$. *Con esto,*

$$y' = \int y''dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1.$$

Integrando nuevamente:

$$y = \int y'dx = \int \left(\frac{1}{3}t^3 + C_1\right) tdt = \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación esta dada para $t \neq 0$ *por:*

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= \frac{1}{2}t^2 + C_0 \\ y &= \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 4.2.9 .
Resuelva $y'''^2 + y''^2 - 1 = 0$.
Solución.
Una parametrización es $y'' = \cos t$ *e* $y''' = \operatorname{sen} t$. *Luego,* $dy'' = -\operatorname{sen} tdt$, *además* $\frac{dy''}{dx} = \operatorname{sen} t$ *lo que implica* $dx = \frac{dy''}{\operatorname{sen} t}$. *Por tanto,* $dx = -dt$ *o bien,* $x = -t + C_1$. *Con esto,* $dy' = \cos tdx$, *pero* $dx = -dt$, *luego,* $y' = -\operatorname{sen} t + C_2$. *Finalmente,* $dy = (-\operatorname{sen} t + C_2)\, dx = (\operatorname{sen} t - C_2)\, dt$ *implica* $y = -\cos t - C_2t + C_3$. *Pero como* $t = (C_1 - x)$ *concluimos que la solución es* $y = -\cos(C_1 - x) - C_2(C_1 - x) + C_3$. ▲

4.2.3. Ecuaciones de la Forma $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$

Teorema 4.2.10 .
Si conocemos una representación paramétrica de $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$ *y* $\varphi = \psi(t)$, *con* φ, ψ, ψ' *contínuas en* $[a, b]$, *entonces la solución general se obtiene por* n *cuadraturas.*

Demostración.
Sea $u = \varphi(t)$ y $v = \psi(t)$, $t \in [a, b]$ representación paramétrica de la curva $F(u, v) = 0$, tenemos por lo tanto, $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ e $y^{(n)} = \psi(t)$, o bien, $d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}dx$ y $d\left(y^{(n-2)}\right) = y^{(n-1)}dx$. Luego,

$$\frac{d\left(y^{(n-1)}\right)}{y^{(n)}} = \frac{d\left(y^{(n-2)}\right)}{y^{(n-1)}},$$

por lo tanto:

$$y^{(n-1)}d\left(y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}d\left(y^{(n-2)}\right) = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

Integrando ambos miembros tenemos:

$$\left[y^{(n-1)}\right]^2 = 2\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_0,$$

o bien,

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_0},$$

que junto con $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ determina a y por $n-1$ integraciones según caso anterior. ■

Ejemplo 4.2.11 . *Resulva la ecuación $y'^3 y''' = 1$.*
Solución.
Una sustitución paramétrica es: $y' = \frac{1}{t}$ e $y''' = t^3$, con $t \neq 0$. Tenemos $\frac{dy''}{dx} = y'''$ lo que implica $\frac{dy''}{y'''} = dx$, además como $\frac{dy'}{dx} = y''$ entonces $\frac{dy'}{y''} = dx$. Por lo tanto, $y''dy'' = y'''dy' = -tdt$, es decir, integrando tenemos:

$$\frac{(y'')^2}{2} = -\int tdt = C - \frac{t^2}{2} = \frac{C_0 - t^2}{2},$$

o bien, $y'' = \sqrt{C_0 - t^2}$. Continuando podemos escribir $y''dx = d(y') = -\frac{1}{t^2}dt$, luego, $dx = -\frac{dt}{t^2\sqrt{C_0-t^2}}$ lo que implica

$$x = -\int \frac{dt}{t^2\sqrt{C_0 - t^2}} + C_1.$$

Por tanto, obtenemos y de:

$$y(t) = \int y'dx = -\int \frac{dt}{t^3\sqrt{C_0 - t^2}} + C_2.$$

Finalmente, la solución general está dada por:

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= -\int \frac{-dt}{t^2\sqrt{C_0-t^2}} + C_1 \\ y &= -\int \frac{dt}{t^3\sqrt{C_0-t^2}} + C_2. \end{cases}$$

▲

4.3. Ecuaciones a las que se les Puede Bajar el Orden

4.3.1. Ecuaciones de la Forma $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Consideremos la ecuación diferencial de orden n:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.10}$$

Teorema 4.3.1 *Por el cambio de variables $y^{(k)} = u$, la ecuación diferencial (4.10) se transforma en una ecuación diferencial de orden $n-k$ del tipo:*

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}\right) = 0. \tag{4.11}$$

Demostración.
En efecto, $y^{(k)} = u$ implica $y^{(k+1)} = u'$, ..., $y^{(n)} = u^{(n-k)}$. Lo que reemplazando en (4.10) implica (4.11), lo que demuestra el teorema. ■

Si logramos integrar (4.11), es decir, $u(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$, resolver la ecuación dada (4.10) se reduce a integrar la ecuación de orden k:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

estudiada anteriormente.

Ejemplo 4.3.2 .
Resuelva la ecuación $y''' \cos x + y'' \operatorname{sen} x = 1$.
Solución.
Hacemos $y'' = u$, luego tenemos la ecuación $u' \cos x + u \operatorname{sen} x = 1$, o bien,

$$u' + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} u - \frac{1}{\cos x} = 0,$$

que es una ecuación lineal en u. Aplicando (2.29) obtenemos como solución general $u = \operatorname{sen} x + C_0 \cos x$. Volviendo a la función inicial obtenemos la ecuación diferencial

$$y'' = \operatorname{sen} x + C_0 \cos x,$$

por lo tanto, $y' = \int (\operatorname{sen} x + C_0 \cos x)\, dx = -\cos x + C_0 \operatorname{sen} x + C_1$. Integrando una vez más tenemos:

$$y = -\operatorname{sen} x - C_0 \cos x + C_1 x + C_2.$$

▲

4.3.2. Ecuaciones de la Forma $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Teorema 4.3.3 .
La ecuación $F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, con $y' = p$ y tomando y como variable independiente, se reduce el orden en una unidad.

Demostración.
Si $\frac{dy}{dx} = p$ entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Luego, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)p = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Continuando de esta manera encontramos una expresión para $\frac{d^ny}{dx^n}$. Sustituyendo todo esto en la ecuación dada obtenemos una con un orden menor. ■

Ejemplo 4.3.4 .
Integre la ecuación $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.
Solución.
Ponemos $y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$*, reemplazando en la ecuación y ordenando obtenemos:*

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} - \frac{y}{p}\ln y = 0,$$

que es una Bernoulli en p. *Sea* $u = p^2$*, entonces* $\frac{du}{dy} = 2p\frac{dp}{dy}$*, por tanto, obtenemos la ecuación lineal en* u:

$$u' - \frac{2u}{y} - 2y\ln y = 0.$$

Aplicando (2.29) resulta:

$$u = y^2\left(C + \ln^2 y\right).$$

Pero, $p^2 = u$*, por tanto,* $p = \pm y\sqrt{C + \ln^2 y}$. *Como* $p = \frac{dy}{dx}$ *tenemos que*

$$x = \pm\int \frac{dy}{y\sqrt{C + \ln^2 y}}.$$

Haciendo $t = \ln y$ *obtenemos:*

$$x = C_1 \pm \ln\left(t + \sqrt{C + t^2}\right).$$

Por tanto, la solución paramétrica para $t > 0$ *es:*

$$(\Gamma) = \begin{cases} x &= C_1 \pm \ln\left(t + \sqrt{C + t^2}\right) \\ y &= e^t. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 4.3.5 .
Integre la ecuación $1 + y'^2 = 2yy''$.
Solución.
Haciendo $y' = p$ *tenemos* $y'' = p\frac{dp}{dy}$*, por tanto, la ecuación queda como* $1 + p^2 = 2yp\frac{dp}{dy}$. *Separando variables e integrando obtenemos:*

$$y = C\left(1 + p^2\right),$$

de donde, $p = \sqrt{\frac{y}{C} - 1}$. *Pero como* $p = \frac{dy}{dx}$ *resulta*

$$x = 2\sqrt{C\,(y - C)} + C_1.$$

▲

4.3.3. Ecuaciones de la Forma $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Teorema 4.3.6 .
Considere la ecuación diferencial de orden n homogénea en y, y', ..., $y^{(n)}$ dada por:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{4.12}$$

Haciendo el cambio $u = \frac{y'}{y}$ se le reduce el orden en una unidad.

Demostración.
La ecuación (4.12) se puede escribir, puesto que es homogénea, en la forma:

$$F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0. \tag{4.13}$$

Con $y' = uy$, tenemos sucesivamente, $y'' = u'y + uy' = y\left(u^2 + u'\right)$, $y''' = y\left(u^2 + u'\right) + y\left(2uu' + u''\right) = y\left(u^3 + 3uu' + u''\right)$. Por tanto, vemos que siguiendo con este proceso se tendrá $y^{(k)}$ expresado en función de y multiplicado por una expresión en u, u', u'', ..., $u^{(k-1)}$, es decir, $y^{(k)} = f\left(u, u', u'', \ldots, u^{(k-1)}\right)$. Por lo tanto, si reemplazamos y, y'', ..., $y^{(n)}$ en (4.13) obtenemos una ecuación de orden $n-1$ en u. Lo que demuestra el teorema. ■

Ejemplo 4.3.7 .
Resuelvar la ecuación $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.
Solución.
La ecuación es homogénea en y, y', y'', por lo tanto, hacemos el cambio $y' = uy$ e $y'' = u'y + uy' = y\left(u' + u^2\right)$. Con esto, la ecuación se transforma en:

$$u' - \frac{u}{x} + 2u^2 = 0,$$

que es una Bernoulli en u. Sea $z = u^{-1}$, entonces $z' = -\frac{u'}{u^2}$, luego obtenemos la ecuación lineal en z:

$$z' + \frac{z}{x} - 2 = 0.$$

Aplicando (2.29) resulta:

$$z = \frac{1}{x}\left(C + x^2\right).$$

Pero $z = \frac{1}{u}$, entonces:

$$u = \frac{x}{C + x^2}.$$

Reemplazando $u = y' = \frac{dy}{dx}$ e integrando obtenemos para $C + x^2 \geq 0$:

$$y = C_1\sqrt{C + x^2}$$

▲

Ejemplo 4.3.8 .
Integre la ecuación $x^2yy'' = (y - xy')^2$.
Solución.
Vemos que la ecuación es homogénea en y, y', y'', *por lo tanto, hacemos el cambio* $y' = uy$ *e* $y'' = u'y + uy' = y\,(u' + u^2)$. *Con esto, la ecuación se transforma en la lineal en* u:

$$u' - \frac{2u}{x} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Aplicando (2.29) obtenemos:

$$u = \frac{1}{x^2}\,(C + x)\,.$$

Pero $u = y' = \frac{dy}{dx}$, *por lo que separando variables y despejando* y *obtenemos:*

$$y = C_1 e^{\left(\ln x - \frac{C}{x}\right)}.$$

▲

4.3.4. Ecuaciones de la Forma $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$

Consideremos la ecuación diferecial de orden n homogénea en x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ dada por:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{4.14}$$

podemos escribirla en la forma:

$$F\left(\frac{y}{x}, y', xy'', \ldots, x^{n-1}y^{(n)}\right) = 0. \tag{4.15}$$

Teorema 4.3.9 .
La ecuación diferencial de orden n *(4.15), por medio del cambio de variables* $x = e^t$ *e* $y = ux$, *se transforma en una ecuación diferencial a la que se le puede reducir el orden en una unidad.*

Demostración.
Sea $|x| = e^t$ e $y = ux$, entonces $u = \frac{y}{x}$. Luego, $y' = \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = x\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} + u = e^t\frac{du}{dt}e^{-t} + u = u' + u$, $xy'' = x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^t e^{-t}\frac{d}{dt}(u' + u) = u' + u''$. Se observa, por tanto, que todos los productos $x^{(k)}y^{(k+1)}$ se pueden expresar en función sólamente de u y sus derivadas, y si reemplazamos en la ecuación (4.15) tenemos:

$$F\left(u, u' + u, u'' + u', \ldots\right) = 0,$$

ecuación ya estudiada y que se le puede bajar el orden en una unidad, con el cambio $\frac{du}{dp} = p$. Esto demuestra el teorema. ■
Ejercicio. La ecuación $y'''y' = y''^2$ es del tipo tratado, aplíquele el método para demostrar que su solución general es $C_1y + C_2 = C_3e^{C_1x}$.

4.3.5. Ecuaciones de la Forma $F\left(y, xy', x^2y'', \ldots, x^ny^{(n)}\right) = 0$

Teorema 4.3.10 .
Dada la ecuación diferencial de orden n:

$$F\left(y, xy', x^2y'', \ldots, x^ny^{(n)}\right) = 0,$$

por medio del cambio de variables $|x| = e^t$, se le reduce el orden en una unidad.

Demostración.
Sea $|x| = e^t$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$, ó bien, $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$. Para la segunda derivada tenemos $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = e^{-t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$, es decir, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$. Observamos que $x^k\frac{d^ky}{dx^k}$, se expresa sólamente con $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ..., $\frac{d^ky}{dt^k}$, por lo tanto, la ecuación del enunciado se transforma en:

$$F\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, \ldots\right) = 0,$$

o sea, se transforma en una ecuación en la que no aparece la variable independiente t. Poniendo $y' = p$ y tomando y como variable independiente reducimos el orden en una unidad. ■

Ejemplo 4.3.11 .
Resuelva la ecuación $x^2y'' + xy' + y = 0$.
Solución.
Hacemos el cambio de variables $|x| = e^t$. Luego, $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ y $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$. Por tanto, la ecuación se transforma en:

$$y'' + y = 0.$$

Que podemos resolver, por ahora, de la forma que sigue: multiplicando por y' obtenemos:

$$y''y' + yy' = 0,$$

entonces $y'^2 + y^2 = C^2$, que es una integral primera. Hacemos $y' = C\cos u$ e $y = C\operatorname{sen} u$. O sea, tenemos, $\frac{dy}{dt} = C\cos u$, es decir, $dy = C\cos u du$. Por lo tanto, $dt = du$, entonces $t = u + C_1$. Así, la solución general es:

$$y = C\operatorname{sen}(t - C_1),\ t = \ln|x|\,,\ x \neq 0.$$

▲

4.3.6. Otros Casos

1. Derivando una ecuación diferencial dada, se puede obtener una de orden superior que se puede resolver.

   Ejemplo 4.3.12 .
   Resuelva $xy'' + (x-1)y' - y = 0$.
   Solución.
   Derivando respecto a x *obtenemos* $y'' + xy''' + y' + (x-1)\,y'' - y' = 0$. *Simplificando resulta* $\frac{y'''}{y''} = -1$, *lo que implica* $y'' = C_1 e^{-x}$. *Integrando dos veces tenemos* $y = C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3$. *Esta solución debe satisfacer la ecuación dada en el enunciado. Luego, reemplazando tenemos:*

   $$xC_1e^{-x} + (x-1)\left(-C_1e^{-x} + C_2\right) - C_1e^{-x} - C_2x - C_3 = 0,$$

   de donde, $C_3 = -C_2$. *Luego, la solución general para* $x \in \mathbb{R}$ *es:*

   $$y = C_1e^{-x} + C_2\,(x-1)\,.$$

   ▲

2. La ecuación diferencial

   $$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.16}$$

   multiplicada con dx es una diferencial total:

   $$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) dx = d\phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

   En tal caso:

   $$\phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C, \tag{4.17}$$

   es una integral primera de (4.16) y, por lo tanto, el problema de resolver la ecuación (4.16) se ha reducido a resolver la ecuación (4.17) que es más sencilla pues hemos bajado el orden en una unidad.

   Ejemplo 4.3.13 .
   Resuelva $y'' - 2xy' - 2y = 0$.
   Solución.
   La ecuación e escribe como:

   $$\frac{d}{dx}\left(y' - 2xy\right) = 0.$$

   Luego, admite la integral primera $y' - 2xy = C_1$ *que es una ecuación diferencial lineal cuya solución es:*

   $$y = e^{x^2}\left(C_2 + C_1\int e^{-x^2}dx\right).$$

   ▲

3. La ecuación $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ multiplicada por un factor conveniente se transforma en diferencial total.

   Ejemplo 4.3.14 .
   Resuelva $xyy'' - yy'\left(1 + 2x^2\right) + xy'^2 = 0$,
   Solución.
   Multiplicando por $\frac{dx}{xyy'}$ *obtenemos*

   $$\frac{y''}{y'}dx - 2xdx - \frac{1}{x}dx + \frac{y'}{y}dx = 0.$$

   Integrando tenemos:

   $$\ln y' - x^2 - \ln x + \ln y = \ln C.$$

   Acomodando resulta:

   $$yy' = Cxe^{x^2}.$$

   Multiplicando por dx *e integrando obtenemos la solución general:*

   $$y^2 = C_0 e^{x^2} + C_1.$$

   ▲

4.4. Ecuaciones de Orden n Lineales y Homogéneas

4.4.1. Propiedades Generales

Definición 4.4.1 (Ecuación Diferencial de Orden n Lineal y Homogenea)
Supongamos que las funciones $a_k(x)$, $\forall k = 1, 2 \ldots, n$, $a_0(x) \neq 0$ *y* $f(x)$ *son contínuas en* $[a, b]$. *Una ecuación de la forma:*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x)\,, \tag{4.18}$$

se llama **Ecuación Diferencial de Orden n Lineal no Homogénea**. *Si* $f(x) \equiv 0$ *entonces (4.18) recibe el nombre de* **Ecuación Diferencial de Orden n Lineal Homogénea**.

Usualmente se introduce el operador lineal:

$$L_n = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)\,,$$

que aplicado a la función y nos conduce a la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea

$$L_n[y] = a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x) y = 0.$$

Con la ayuda de este operador, las ecuaciones lineales de orden n, se escriben:

$$L_n[y] = 0, \quad \text{y} \quad L_n[y] = f(x)\,,$$

la homogénea y no homogénea respectivamente.

Teorema 4.4.2 .
Si y_1 e y_2 son dos soluciones de la ecuación homogénea $L_n[y] = 0$, entonces la función $C_1 y_1 + C_2 y_2$ es también solución de la misma ecuación, donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Demostración. Se ve fácilmente que L_n cumple con las propiedades:

1. $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]$.

2. $L_n[Cy] = CL_n[y]$, con C una constante.

■

De este teorema resulta que si las funciones y_1, y_2, ..., y_n son n soluciones de la ecuación lineal de orden n

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x) y = 0, \tag{4.19}$$

entonces la función:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{4.20}$$

es también solución de (4.19).

Puesto que (4.20) contiene n constantes arbitrarias podría ser solución general de (4.19). Veremos a continuación qué propiedades deben cumplir y_1, y_2, ..., y_n en $[a, b]$ para que (4.20) sea solución general de (4.19) en $[a, b]$.

4.4.2. Dependencia Lineal

Definición 4.4.3 (Funciones Linealmente Independientes)
Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ n funciones definidas sobre $[a, b]$. Diremos que son **Linealmente Independientes** *(L.I.) sobre $[a, b]$ si no existen n números λ_1, λ_2, ..., λ_n no todos nulos tal que:*

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ejemplo 4.4.4 .
Las funciones 1, x, e^x son L.I. sobre $\mathbb{R}$, pues la condición $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 e^x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ implica $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. ▲

Definición 4.4.5 (Funciones Linealmente Dependientes)
Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... ,$y_n(x)$ n funciones definidas sobre $[a, b]$. Diremos que son **Linealmente Dependientes** *(L.D.) sobre $[a, b]$ si para todo $x \in [a, b]$ existen n números λ_1, λ_2, ..., λ_n no todos nulos tal que:*

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Definición 4.4.6 (Wronskiano)
Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ n funciones con derivada contínua hasta el orden $n-1$ en $[a,b]$. El determinante:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

se llama **Determinante de Wronski** *o* **Wronskiano** *de las funciones y_1, y_2, ..., y_n.*

Teorema 4.4.7 .
Si las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x) \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ son Linealmente Dependientes (L.D.) sobre $[a,b]$, entonces su Wronskiano es nulo $\forall x \in [a,b]$.

Demostración.
Si las funciones $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son L.D. en $[a,b]$, entonces $\forall x \in [a,b]$ existen λ_1, λ_2, ..., λ_n con $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$, tal que:

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0. \tag{4.21}$$

Ahora si derivamos una vez, dos veces, ..., $(n-1)$ veces (4.21) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \ldots + \lambda_n y_n'(x) & = & 0 \\ \lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) + \ldots + \lambda_n y_n''(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Para todo $x \in [a,b]$, las ecuaciones (4.21) y (4.22) forman un sistema de n ecuaciones en λ_1, λ_2, ..., λ_n que admite otras soluciones aparte de la trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ si el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

que es el Wronskiano de las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ es nulo en todo punto del intervalo $[a,b]$. Lo que demuestra el teorema. ■

La contra-recíproca del teorema anterior indica que si el Wronskiano de $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x) \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ es no nulo, entonces ellas son Linealmente Independientes (L.I.).

Ejemplo 4.4.8 .
El conjunto de funciones $\{e^{-x}, e^{x}, e^{2x}\}$ *es L.I. sobre* $\mathbb{R}$*, pues su Wronskiano es no nulo sobre* $\mathbb{R}$*. En efecto,*

$$W\left(e^{-x}, e^{x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 6e^{2x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

El cálculo se deja al lector. ▲

Teorema 4.4.9 .
Sean y*,* y_1*,* y_2*, ...,* y_n*,* $n+1$ *funciones de clase* $\mathcal{C}^n[a,b]$*. Si* y_1*,* y_2*, ...,* y_n *son L.I. sobre* $[a,b]$ *y si el Wronskiano:*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix},$$

es nulo para todo $x \in [a,b]$*, entonces* $y(x)$ *es una combinación lineal de las funciones* $y_1(x)$*,* $y_2(x)$*, ...,* $y_n(x)$*, es decir:*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

donde C_k *son constantes,* $k = 1, 2, \ldots, n$*.*

Demostración.

(a) El Wronskiano de las funciones y_1, y_2, ..., y_n, y es nulo sobre $[a,b]$, de acuerdo con la hipótesis. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a,b]. \tag{4.23}$$

Los determinantes que siguen son nulos sobre $[a,b]$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \ldots & y_n^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a,b], \tag{4.24}$$

$k = 1, 2, 3 \ldots, n$, puesto que la línea $k+1$ es igual con la línea $n+1$. Notemos que para $n = k$, tenemos el determinante (4.23).

Desarrollando el determinante (4.24), según la última línea, obtenemos las relaciones:

$$\lambda_0(x)\, y^{(k)} + \lambda_1(x)\, y_1^{(k)} + \ldots + \lambda_n(x)\, y_n^{(k)} = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Las funciones $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$, ..., $\lambda_n(x)$, son las mismas para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, y donde $\lambda_0(x)$ está dada por:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$\forall x \in [a, b]$ como resulta del desarrollo de los determinantes (4.24). $\lambda_0(x) \neq 0$, puesto que, de acuerdo a la hipótesis del teorema, las funciones y_1,y_2, ..., y_n son L.I. sobre $[a, b]$.

(b) Dividiendo por $-\lambda_0(x) \neq 0$, y poniendo $\mu_k = -\frac{\lambda_k(x)}{\lambda_0(x)}$, las relaciones (4.24) se escriben, desarrolladas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_n y_n \\ y' & = & \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \ldots + \mu_n y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n)} & = & \mu_1 y_1^{(n)} + \mu_2 y_2^{(n)} + \ldots + \mu_n y_n^{(n)} \end{array} \right. \tag{4.25}$$

Si derivamos la primera ecuación de (4.25) tenemos:

$$y' = \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n + \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \ldots + \mu_n y_n'$$

y si tenemos en cuenta la segunda ecuación de (4.25), resulta:

$$\mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n = 0.$$

Análogamente si derivamos la segunda ecuación de (4.25) y teniendo en cuenta la tercera ecuación de (4.25), obtenemos:

$$\mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' + \ldots + \mu_n' y_n' = 0.$$

Continuando del mismo modo, obtenemos el sistema en μ_1', μ_2', ..., μ_n':

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n & = & 0 \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' + \ldots + \mu_n' y_n' & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1' y_1^{(n)} + \mu_2' y_2^{(n)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n)} & = & 0. \end{array} \right. \tag{4.26}$$

Con determinante del sistema $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ diferente de cero en cada punto del intervalo $[a,b]$. De acuerdo con el teorema de Rouché, el sistema homogéneo (4.26) en cada punto $x \in [a,b]$ admite sólo y tan sólo la solución nula.

$$\mu_1'(x) = \mu_2'(x) = \ldots = \mu_n'(x) = 0.$$

De donde resulta $\mu_1(x) = C_1$, $\mu_2(x) = C_2$, ..., $\mu_n(x) = C_n$. Volviendo a la primera ecuación de (4.25) sigue que podemos escribir para todo $x \in [a,b]$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

lo que demuestra el teorema.

■

Corolario 4.4.10 .
Sean y_1, y_2, ..., y_n n funciones $C^{n-1}[a,b]$, si el Wronskiano:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

$\forall x \in [a,b]$, entonces existe un subintervalo $[a_1, b_1] \subseteq [a,b]$ tal que las funciones y_1, y_2, ..., y_n son L.D. en $[a_1, b_1]$.

Demostración.
Si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es idénticamente nulo sobre $[a,b]$ y puesto que y_1, y_2, ..., y_n no son idénticamente nulas sobre $[a,b]$, se deduce que existe un menor del determinante $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de la forma:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_{\alpha_1} & y_{\alpha_2} & \ldots & y_{\alpha_p} \\ y_{\alpha_1}' & y_{\alpha_2}' & \ldots & y_{\alpha_p}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{\alpha_1}^{(p-1)} & y_{\alpha_2}^{(n-1)} & \ldots & y_{\alpha_p}^{(n-1)} \end{vmatrix} \not\equiv 0, \qquad (4.27)$$

$\forall x \in [a,b]$. Como el determinante (4.27) no es idénticamente nulo sobre $[a,b]$ existe un intervalo $[a_1, b_1] \subseteq [a,b]$ en el que no se anula. Sobre este subintervalo:

$$y_{\alpha_1} = C_2 y_{\alpha_2} + C_3 y_{\alpha_3} + \ldots + C_p y_{\alpha_p},$$

$x \in [a_1, b_1]$, relación equivalente con:

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + \ldots + \mu_n y_n = 0,$$

$x \in [a_1, b_1]$, donde los μ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, no son todos nulos. ■

4.4.3. Solución General de una Ecuación Diferencial Lineal

Teorema 4.4.11 .
Sea dada la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea:

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0, \tag{4.28}$$

con $a_k(x)$ contínuas en $[a,b]$, $\forall k = 1,2,\ldots,n$. Sean y_1, y_2, …, y_n $n-$soluciones de la ecuación dada, definidas en $[a,b]$. Si el Wronskiano de las funciones y_1, y_2, …, y_n no es idénticamente nulo sobre $[a,b]$, entonces cualquier solución de la ecuación (4.28) sobre $[a,b]$ es de la forma:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

$x \in [a,b]$, *que llamamos* **Solución General**.

Definición 4.4.12 (Sistema Fundamental de Soluciones)
Un sistema de soluciones y_1, y_2, …, y_n de la ecuación (4.28) definida en $[a,b]$ con $W \not\equiv 0$ sobre $[a,b]$ se llama **Sistema Fundamental de Soluciones** *de la ecuación (4.28).*

Demostración. (Del Teorema 4.4.11)

(a) Observemos primero que si $W(y_1,\ldots,y_n) \not\equiv 0$ en un punto de $[a,b]$, entonces $W(y_1,\ldots,y_n)$ no se anula en ningún punto de $[a,b]$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Según la regla de derivación de un determinante, y observamos que todos los determinantes que intervienen por derivación son nulos puesto que tienen dos líneas iguales con excepción del que escribimos.

Puesto que y_1, y_2, …, y_n son soluciones, de la ecuación (4.28) tenemos:

$$y_k^{(n)} + a_1(x)\,y_k^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y_k' + a_n(x)\,y_k = 0,$$

luego, $\forall x \in [a,b]$ tenemos:

$$y_k^{(n)} = -a_1(x)\,y_k^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}(x)\,y_k' - a_n(x)\,y_k. \tag{4.30}$$

Si reemplazamos (4.30) en (4.29), en la última línea vemos que (4.29) se escribe :

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 y_1^{(n-1)} & -a_1 y_2^{(n-1)} & \cdots & -a_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

o bien,

$$\frac{dW}{dx} = -a_1(x)\, W.$$

Como las funciones y_1, y_2, ..., y_n son soluciones de la ecuación, son derivables n veces sobre $[a,b]$, por lo tanto, el Wronskiano W que contiene derivadas sólo hasta el orden $n-1$ es una función contínua sobre $x \in [a,b]$.

Sea $x \in [a,b]$ un punto en que $W(x_0) \neq 0$, integrando en (4.29) tenemos:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right), \tag{4.31}$$

para $x \in [a,b]$, llamada **Fórmula de Ostrogradski-Liouville**. De donde resulta que, como $a_1(x)$ es contínua en $[a,b]$, entonces $W(x)$ no se anula en ningún punto de $[a,b]$.

(b) Sean y_1, y_2, ..., y_n un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (4.28), tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_1' + a_n(x)\, y_1 & = & 0 \\ y_2^{(n)} + a_2(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_2' + a_n(x)\, y_2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n)} + a_n(x)\, y_n^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y_n' + a_n(x)\, y_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.32}$$

para todo $x \in [a,b]$.

Sea ahora $y(x)$ una solución cualquiera de la ecuación (4.28) definida sobre $[a,b]$, tenemos por tanto:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0. \tag{4.33}$$

Eliminando $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ del sistema formado por (4.32) y (4.33) obtenemos para todo $x \in [a,b]$:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ y_n & y_n' & y_n'' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde resulta aplicando el Teorema 4.4.9, que para todo $x \in [a, b]$:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, ,$$

donde C_1, C_2, ..., C_n constantes. Lo que demuestra el teorema.

■

Si la ecuación lineal (4.28) tiene la forma:

$$a_0 (x) y^{(n)} + a_1 (x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (x) y' + a_n (x) y = 0,$$

donde las funciones $a_k (x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son contínua y $a_0 (x) \neq 0$ sobre $[a, b]$, entonces la relación (4.30) se escribe:

$$W (x) = W (x_0) \exp \left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1 (t)}{a_0 (t)} dt \right).$$

Si y_1, y_2, ..., y_n forman un sistema fundamental de soluciones sobre $[a, b]$, la función:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

para $x \in [a, b]$ se llama solución general de la ecuación (4.28).

Ejemplo 4.4.13 .
La ecuación $y'' - 3y' + 2y = 0$, *tiene como soluciones particulares* $y_1 = e^{2x}$ *e* $y_2 = e^x$. *Puesto que* $W (y_1, y_2) \neq 0$, *forman un sistema fundamental de soluciones. En efecto,*

$$W (y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = e^{3x} - 2e^{3x} = -e^{3x} \neq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. *Luego la solución general es:*

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$

▲

Ejemplo 4.4.14 .
La ecuación diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ *tiene como soluciones particulares* $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ *e* $y_3 = e^{2x}$. *Su wronskiano es:*

$$W (y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 6e^{2x} \neq 0.$$

Entonces forman un sistema fundamental de soluciones. Por lo tanto la solución general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

▲

Corolario 4.4.15 .
n soluciones y_1, y_2, ..., y_n forman un sistema fundamental sobre $[a, b]$, si y sólo si son linealmente independientes sobre $[a, b]$.

Demostración.
Por el Corolario 4.4.10, tenemos:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \Leftrightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ son L.I., sobre } [a, b].$$

■

Corolario 4.4.16 .
$n + 1$ soluciones de una ecuación de orden n son L.D.

Demostración.
Sean y_1, y_2, ..., y_n, $n-$soluciones de entre los $n + 1$ dadas. Tenemos dos alternativas:

1. y_1, y_2, ..., y_n son L.D., entonces y_1, ..., y_n, y_{n+1} son L.D.
2. y_1, y_2, ..., y_n son L.I. en $[a, b]$, luego forma un sistema fundamental de soluciones. Por tanto, cualquier solución y_{n+1} se escribe como:

$$y_{n+1} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

con $x \in [a, b]$, relación que es equivalente con:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n - y_{n+1} = 0,$$

con C_1, C_2, ..., C_n elegidos convenientemente. Luego, y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1} son L.D. sobre $[a, b]$.

■

4.4.4. Construcción de la Ecuación Diferencial Lineal de orden n dado el Sistema Fundamental de Soluciones

Teorema 4.4.17 .
Dos ecuaciones diferenciales de orden n homogéneas:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y &= 0 \\ y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x) y' + b_n(x) y &= 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

que tienen el mismo sistema fundamental de soluciones sobre un intervalo $[a, b]$, son idénticas sobre $[a, b]$, es decir,

$$a_k(x) \equiv b_k(x), \ \forall k = 1, 2, \ldots, n, \ x \in [a, b].$$

Demostración.

Supongamos $a_k(x) \not\equiv b_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sobre $[a, b]$. Si restamos las dos ecuaciones obtenemos:

$$(a_1(x) - b_1(x))\, y^{(n-1)} + (a_2(x) - b_2(x))\, y^{(n-2)} + \ldots + (a_n(x) - b_n(x))\, y = 0,$$

es decir, una ecuación de orden $n-1$ que admite las mismas soluciones que las ecuaciones (4.34), o sea, $n-$soluciones L.I., lo que contradice el Coroloario 4.4.16. Luego, debe ser $a_k(x) \equiv b_k(x)$, $\forall x \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, las dos ecuaciones son idénticas. ■

De este teorema deducimos que un sistema fundamental de soluciones y_1, y_2, $\ldots$, y_n, $x \in [a, b]$ determina una ecuación diferencial lineal de orden n y sólo una que admite y_1, y_2, $\ldots$, y_n como sistema fundamnetal de soluciones. Esta ecuación es:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.35}$$

lo que verificamos inmediatamente. En efecto, reemplazamos y por y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, en (4.35). El determinante es nulo, pues tiene dos filas iguales. La ecuación (4.35) tiene las soluciones y_1, y_2, $\ldots$, y_n. Además, la ecuación (4.35) es efectivamente de orden n, pues el coeficiente de $y^{(n)}$ es el determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

que es distinto de cero sobre $[a, b]$, puesto que el Wronskiano de las funciones y_1, y_2, $\ldots$, y_n, que por hipótesis forman un sistema fundamental.

Ejemplo 4.4.18 .

Las funciones $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, tienen $W(y_1, y_2) = -2$. Luego forman un sistema fundamental de soluciones sobre $\mathbb{R}$. La ecuación diferencial de segundo orden determinada por y_1 e y_2 es:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = 0,$$

o bien, $y'' - y = 0$. ▲

Hemos visto que a un sistema fundamental de soluciones y_1, y_2, …, y_n le corresponde una sóla ecuación diferencial de orden n. Luego, queda pendiente demostrar que una ecuación diferencial lineal de orden n tiene $n-$soluciones L.I.

Si $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$ son n funciones de clase $\mathcal{C}^n[a,b]$, ellas forman un sistema fundamental de soluciones sólo sobre un subintervalo $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ sobre el cual $W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\neq 0$. Los puntos para los cuales $W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=0$, son puntos singulares para las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(n)} \\ \varphi_1 & \varphi_1' & \varphi_1'' & \cdots & \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \varphi_2'' & \cdots & \varphi_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n & \varphi_n' & \varphi_n'' & \cdots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

y en estos puntos el coeficiente de $y^{(n)}$ se anula.

Ejemplo 4.4.19 .
Las funciones $y_1=x$, $y_2=x^2$ *forman un sistema fundamental sobre cualquier* $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, *tal que* $0\notin[a,b]$. *En efecto,*

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2\neq 0,$$

$\forall x\neq 0$. *Construyamos ahora la ecuación con tales soluciones particulares:*

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

o bien, $x^2y''-2xy'+2y=0$. *Se ve que para* $x=0$ *se anula el coeficiente de* y''. ▲

Ejemplo 4.4.20 .
Las funciones $y_1=\frac{\operatorname{sen}x}{2}$, $y_2=3\cos x$ *forman un sistema fundamental de soluciones. Sabemos que* $W(y_1,y_2)\neq 0$.*Ahora construyamos la ecuación diferencial con las soluciones particulares:*

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \frac{\operatorname{sen}x}{2} & \frac{\cos x}{2} & \frac{-\operatorname{sen}x}{2} \\ 3\cos x & -3\operatorname{sen}x & -3\cos x \end{vmatrix} = 0,$$

o bien, $y''+y=0$. ▲

4.4.5. Solución al Problema de Cauchy

Teorema 4.4.21 .
Sea la ecuación diferencial lineal de orden n, *homogénea:*

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=0, \tag{4.36}$$

con y_1, y_2, ..., y_n sistema fundamental de soluciones en $[a,b]$. Existe una única solución $y(x)$ tal que en $x_0 \in [a,b]$ satisface las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_{0,0},\ y'(x_0) = y_{1,0}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0},$$

donde $y_{k,0} \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ números cualquiera.

Demostración.

La solución general de la ecuación sobre $[a,b]$ se escribe:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \tag{4.37}$$

Las condiciones iniciales nos conducen al sistema lineal en C_1, C_2, ..., C_n:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) & = & y_{0,0} \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) & = & y_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1,0} \end{array}\right. \tag{4.38}$$

El determinante del sistema (4.38) es:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y^{(n)} \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Por hipótesis $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ en el punto $x_0 \in [a,b]$, pues y_1, y_2, ..., y_n es un sistema fundamental de soluciones en $[a,b]$. Luego, C_1, C_2, ..., C_n están únicamente determinadas de (4.38), pues es un sistema de Cramer. Reemplazando C_1, C_2, ..., C_n así determinados en (4.37), obtenemos la solución $y(x)$ única buscada. ■

Ejemplo 4.4.22 .

La ecuación diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ tiene soluciones particulares $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ e $y_3 = e^{2x}$. Luego, su Wronskiano es:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Luego, la solución general de la ecuación dada para $x \in \mathbb{R}$ es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

Si queremos hallar la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$, *tenemos el sistema en* C_1, C_2 *y* C_3:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - C_2 + 2C_3 &= 1 \\ C_1 + C_2 + 4C_3 &= -1 \end{cases}$$

cuya solución es $C_1 = 1$, $C_2 = -\frac{2}{3}$ *y* $C_3 = -\frac{1}{3}$. *Luego la solución al problema de Cauchy para* $x \in \mathbb{R}$ *es:*

$$y(x) = e^x - \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}.$$

▲

4.4.6. Reducción del Orden de una Ecuación Lineal y Homogénea

Teorema 4.4.23 .
Sea la ecuación diferencial lineal y homogénea de orden n

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0.$$

Si conocemos una solución particular y_1 *de la ecuación, entonces por el cambio* $y = y_1 z$ *podemos bajar el orden de la ecuación en una unidad.*

Demostración.
De $y = y_1 z$ derivando sucesivamente tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= y_1' z + y_1 z' \\ y'' &= y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' \\ \vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + \ldots + C_n^n y_1 z^{(n)} \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por $a_n(x)$, la segunda ecuación por $a_{n-1}(x)$, ..., la última ecuación por $a_0(x)$ y sumamos tenemos:

$$z\left[a_0(x)\, y_1^{(n)} + \ldots + a_n(x)\, y_1\right] + z'\left[a_1(x)\, y_1 + \ldots + C_n^1 a_0(x)\, y_1^{(n-1)}\right] + \ldots + z^{(n)} a_0(x)\, y_1 = 0. \quad (4.39)$$

El coeficiente de z es nulo pues y_1 es solución de la ecuación dada, y con el nuevo cambio de variables $z' = u$, la ecuación (4.39) se transforma en una ecuación lineal y homogénea de orden $n-1$:

$$A_0(x)\, u^{(n-1)} + A_1(x)\, u^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1}(x)\, u = 0.$$

■

Notemos que si conocemos k soluciones particulares de una ecuación diferencial lineal de orden n, le podemos bajar el orden en k unidades.

Ejemplo 4.4.24 .
La ecuación diferencial:

$$y'' - xy' + y = 0, \tag{4.40}$$

tiene solución particular $y = x$. Haciendo el cambio $y = zx$, tenemos $y' = z'x + z$ e $y'' = z''x + 2z'$. Por lo tanto, la ecuación (4.40) se escribe:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x^2 - 2}{x}.$$

Integrando obtnemos:

$$\ln |z'| = \frac{x^2}{2} - 2 \ln |x| + \ln C,$$

escribiendo $\frac{x^2}{2} = \ln e^{\frac{x^2}{2}}$, acomodando e integrando resulta:

$$z = \int \frac{C}{x^2} e^{\frac{x^2}{2}} dx + C_1.$$

Finalmente la solución para $x \in \mathbb{R}$ es:

$$y = Cx \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{x^2}{2}} dx + C_1 x.$$

▲

Consideremos la la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$. En general si se conoce una solución y_1 podemos hallar y_2 tal que sea L.I con y_1. Escribamos $y_2 = y_1 u$, donde y_1 es solución, nos falta determinar u. Reemplazando en la ecuación diferencial y simplificando obtenemos:

$$\frac{u''}{u'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - a(x).$$

Al integrar resulta:

$$\ln u' = -2 \ln y_1 - \int a(x)\, dx,$$

de donde,

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a(x) dx}.$$

Integrando nuevamente obtenemos:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a(x) dx} dx,$$

llamada **Fórmula de Abel**.

Ejemplo 4.4.25 .
Resuelva $x^2y'' - xy' + y = 0$, sabiendo que $y_1 = x$ es solución particular.
Solución.
Reescribimos la ecuación como $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$. Luego, aplicando la Formula de Abel tenemos:

$$y_2 = x\int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{dx}{x}}dx = x\ln x.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = C_1x + C_2x\ln x.$$

Ejercicio. La ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ tiene solución particular $y_1 = x$. Encuentre y_2 que sea L.I. con y_1.

4.5. Ecuaciones de orden n Lineales y No Homogéneas

4.5.1. Solución General de una Ecuación no Homogénea

Teorema 4.5.1 .
Sea la ecuación lineal de orden n y no homogénea siguiente:

$$L_n(y) = a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x)\,, \tag{4.41}$$

con coeficientes $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ y $f(x)$ contínuas, $a_0(x) \neq 0$ sobre $[a, b]$. La solución general de la ecuación (4.41) se obtiene agregando a la solución general de la homogénea:

$$L_n(y) = a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0,$$

una solución particular cualquiera de la ecuación no homogénea (4.41).

Demostración.
Sea $y_0(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea (4.41) sobre $[a, b]$. Hacemos el cambio de variables, $y(x) = y_0 + z$. Luego:

$$L_n(y_0 + z) = L_n(y_0) + L_n(z) = f(x)\,,$$

pero $L_n(y_0) = f(x)$, pues y_0 es una solución de la ecuación no homogénea por lo tanto $L_n(z) = 0$. Luego, si y_1, y_2, ..., y_n es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea sobre $[a, b]$, entonces la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y = \underbrace{C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n}_{z} + y_0,$$

$x \in [a, b]$, lo que demuestra el teorema. ■

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$, $x \in [a,b]$ y si y_{01}, y_{02}, …, y_{0m} son soluciones particulares de la ecuación $L_n(y) = f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, respectivamente, entonces la función $y_{01} + y_{02} + \ldots + y_{0m}$, es una solución particular de la ecuación:

$$L_n(y) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x).$$

En efecto,

$$L_n(y_{0k}) = f_k(x),$$

para $k = 1, 2, \ldots, m$. Luego:

$$L_n(y_{01} + y_{02} + \ldots + y_{0m}) = f_1(x) + \ldots + f_m(x) = f(x).$$

4.5.2. Método de Variación de Constantes para Determinar una Solución Particular de la Ecuación no Homogénea

Teorema 4.5.2 .
Dada la ecuación diferencial de orden n lineal, no homogénea

$$L_n(y) = a_0(x)\, y^n + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \tag{4.42}$$

con $a_k(x)$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$, $f(x)$ contínuas, $a_0(x) \neq 0$ sobre $[a,b]$. Sea y_1, y_2, …, y_n un sistema fundamental de soluciones sobre $[a,b]$ de la ecuación homogénea asociada:

$$L_n(y) = 0. \tag{4.43}$$

Una solución particular de la ecuación no homogénea (4.42) está dada por:

$$y_0 = y_1 \int C_1'(x)\, dx + y_2 \int C_2'(x)\, dx + \ldots + y_n \int C_n'(x)\, dx, \tag{4.44}$$

donde C_1', C_2', …, C_n' es solución del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) + \ldots + y_n C_n'(x) & = & 0 \\ y_1' C_1'(x) + y_2' C_2'(x) + \ldots + y_n' C_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} C_1'(x) + y_2^{(n-2)} C_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-2)} C_n'(x) & = & 0 \\ y_1^{(n-1)} C_1'(x) + y_2^{(n-1)} C_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-1)} C_n'(x) & = & -\frac{f(x)}{a_0(x)} \end{array} \right. \tag{4.45}$$

Al efectuar las integrales (4.44) introducimos para cada una, una constante arbitraria A_1, …, A_n.

$$\int C_1'(x)\, dx = A_1 + \varphi_1(x), \ldots, \int C_n'(x)\, dx = A_n + \varphi_n(x),$$

y si reemplazamos en (4.43) obtenemos la solución general de la ecuación no homogénea

$$y(x) = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n + y_1 \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + \ldots + y_n \varphi_n.$$

Demostración.

Sea y_1, y_2, ..., y_n un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (4.43) sobre $[a, b]$, por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$z(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

donde C_1, C_2, ..., C_n son constantes arbitrarias. Si logramos demostrar que la función:

$$y_0 = y_1 \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + \ldots + y_n \varphi_n,$$

con φ_1, φ_2, ..., φ_n, determinadas sobre $[a, b]$, como se precisa en el enunciado del teorema, es una solución particular de la ecuación no homogénea, entonces, de acuerdo con lo dicho anteriormente, la función:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_0,$$

es la solución general de la ecuación no homogénea sobre $[a, b]$.

Por tanto, queda sólo verificar que y_0 es una solución particular de la ecuación no homogénea. Para lo que consideramos la función:

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x), \tag{4.46}$$

$x \in [a, b]$, que se obtiene de la solución general de la ecuación homogénea reemplazando las constantes C_1, C_2, ..., C_n por las funciones incógnitas $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$, y demostraremos que la función dada en (4.46) donde $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$, verifican el sistema (4.45), es solución de la ecuación no homogénea (4.42). Derivando (4.46) tenemos:

$$y'(x) = C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n + C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n',$$

pero de acuerdo con la primera ecuación de (4.45), tenemos:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0,$$

por lo tanto,

$$y'(x) = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'. \tag{4.47}$$

Derivamos ahora (4.47) y tenemos:

$$y''(x) = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n',$$

pero conforme con la ecuación dos de (4.45),

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,$$

nos queda sólamente:

$$y''(x) = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''. \tag{4.48}$$

En forma análoga se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} y'''(x) & = & C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + \ldots + C_n y_n''' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & = & C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}. \end{array}$$

Ahora derivando esta última relación tenemos:

$$y^{(n)}(x) = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}$$

y teniendo en cuenta la última relación de (4.45):

$$y^{(n)}(x) = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + \frac{f(x)}{a_0(x)}. \tag{4.49}$$

Si multiplicamos ahora a:

$$\begin{array}{rl} y \text{ dado en (4.46),} & \text{por } a_n(x), \\ y' \text{ dado en (4.47),} & \text{por } a_{n-1}(x), \\ \vdots & \vdots \\ y^{(n)} \text{ dado en (4.49),} & \text{por } a_0(x). \end{array}$$

Obtenemos sumando:

$$L_n[y] = C_1 L_n[y_1] + C_2 L_n[y_2] + \ldots + C_n L_n[y_n] + f(x),$$

pero $L_n[y_k] = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, por lo tanto, se tiene $L_n[y_n] = f(x)$. Por lo tanto, y dado en (4.46) con C_1, C_2, ..., C_n, verificando el sistema (4.45), es solución de la ecuación (4.42).

Observemos que el determinante del sistema (4.45), es $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ sobre $[a, b]$. Sea C_1', C_2', ..., C_n' la solución del sistema (4.45) con:

$$C_k'(x) = (-1)^{n+k} \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{k-1} & y_{k+1} & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{f(x)}{a_0(x)},$$

con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Integrando $n-$veces obtenemos:

$$C_k(x) = \int C_k'(x)\, dx = \varphi_k(x) + A_k,$$

$k = 1, 2, 3 \ldots, n$, donde A_1, A_2, ..., A_n son constantes arbitrarias. Reemplazando $C_k(x)$ en (4.46) obtenemos:

$$y(x) = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n + y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \ldots + y_n\varphi_n,$$

que es la solución general de la ecuación no homogénea. La función:

$$y_0(x) = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \cdots + y_n\varphi_n,$$

es una solución de la ecuación lineal y no homogénea dada y es, por lo tanto, la solución particular buscada, lo que demuestra el teorema. ■

Ejemplo 4.5.3 .
Encuentre la solución general de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$.
Solución.
Dos soluciones particulares de la homogénea asociada son $y_1 = x$ *e* $y_2 = x^2$, *que se desmuestran por simple reemplazo. Calculemos el Wronskiano:*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2,$$

por lo tanto, son L.I $\forall x \neq 0$. *Luego la solución general del sistema homogéneo es* $y_h = C_1x + C_2x^2$.

Para hallar una solución particular de la no homogénea usamos el método de variación de las constantes. Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x^2 &= 0 \\ C_1'(x) + 2C_2'(x)x &= \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $C_1' = -1$ *y* $C_2' = \frac{1}{x}$. *Con esto, obtenemos* $C_1 = -x + A_1$ *y* $C_2 = \ln x + A_2$. *Por tanto, la solución general de la no homogénea es:*

$$y = A_1x + A_2x^2 + x^2(\ln x - 1),$$

$x > 0$. *Luego,* $y_0 = x^2(\ln x - 1)$ *es una solución particular para la ecuación no homogénea.* ▲

Ejemplo 4.5.4 .
Encuentre la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' - y = x$.
Solución.
Dos soluciones particulares de la homogénea asociada son $y_1 = x$ *e* $y_2 = \frac{1}{x}$. *Calculemos el Wronskiano:*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x},$$

por lo tanto, las soluciones son L.I. $\forall x \neq 0$ *e infinito. Luego la solución homogénea es:*

$$y_h = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Para obtener la solución particular de la no homogénea usamos el método de variación de constantes, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} C_1' x + C_2' \frac{1}{x} & = & 0 \\ C_1' - C_2' \frac{1}{x^2} & = & \frac{1}{x} \end{cases}$$

cuya solución es $C_1' = \frac{1}{2x}$ *y* $C_2' = -\frac{x}{2}$*. Integrando obtenemos* $C_1 = \frac{1}{2}\ln x$ *y* $C_2 = -\frac{x^2}{4}$*. Por tanto,* $y_0 = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}$*. Luego, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es:*

$$y(x) = A_1 x + \frac{A_2}{x} + \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}.$$

▲

4.6. Ecuaciones de Orden n Lineales con Coeficientes Constantes

4.6.1. Ecuaciones Homogéneas

Una ecuación diferencial lineal:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{4.50}$$

con $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = 0, 1, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$ es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes.

Para esta clase de ecuaciones podemos determinar siempre un sistema fundamental de soluciones. En efecto, si buscamos soluciones de la forma $y = Ae^{\lambda x}$, con $A \neq 0$ obtenemos sucesivamente:

$$y' = A\lambda e^{\lambda x},\ y'' = A\lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots,\ y^{(n)} = A\lambda^n e^{\lambda x},$$

reemplazando en (4.50) tenemos:

$$Ae^{\lambda x}\left(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0.$$

Puesto que por hipótesis $A \neq 0$ y $e^{\lambda x} \neq 0$, $\forall x$, necesariamente tendremos:

$$K_n(\lambda) := a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{4.51}$$

Luego, el número real o complejo λ debe ser raíz de la ecuación algebraica (4.51) que se llama **Ecuación Característica** asociada a la ecuación diferencial (4.50)".

Observemos que si la ecuación característica:

$$K_n(\lambda) =: a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

tiene todas las raíces simples $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, entonces las soluciones particulares:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{\lambda - nx},$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (4.50). En efecto, calculando el Wronskiano de y_1, y_2, ..., y_n obtenemos:

$$\begin{aligned} W(y_1,\ldots,y_n) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \end{aligned}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$, puesto que la exponencial nunca se anula en $\mathbb{R}$ y el determinante es distinto de cero si $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$, pues es el determinante de Vandermonde de los números λ_1, λ_2, ..., λ_n, por hipótesis distintos entre ellos.

En lo que sigue discutiremos la forma de la solución general de la ecuación (4.50) dependiendo de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica.

4.6.2. La Ecuación Característica Tiene Raíces Distintas

La Ecuación Característica Tiene Raíces Reales Distintas

Teorema 4.6.1 .
Sea dada la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes en $\mathbb{R}$:

$$a_0y^n + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \tag{4.52}$$

Si la ecuación característica asociada:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

tiene raíces reales simples λ_1, λ_2, ..., λ_n, entonces las funciones:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x},$$

$x \in \mathbb{R}$, forman un sistema fundamental de soluciones para la ecuación (4.52). Luego, la solución general de la ecuación (4.52) se escribe:

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

Demostración.

Este resultado está ya demostrado. ■

Ejemplo 4.6.2 .

Resuelva el problema de valor inicial $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ *que satisface* $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

Solución.

La ecuación característica es $\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$ *con raíces* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ *y* $\lambda_3 = -1$. *Luego, la solución general de la ecuación para* $x \in \mathbb{R}$ *es:*

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-x}.$$

Hallemos ahora la solución particular. La primera y segunda derivada de la solución general es $y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-x}$ *y* $y'' = y = 4C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-x}$ *respectivamente. Imponiendo las condiciones iniciales tenemos el sistema lineal:*

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ 2C_1 - 2C_2 - C_3 &= -1 \\ 4C_1 + 4C_2 + C_3 &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es $C_1 = -\frac{1}{12}$, $C_2 = -\frac{1}{4}$ *y* $C_3 = \frac{4}{3}$. *Luego, la solución es:*

$$y_p = -\frac{1}{12} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{4}{3} e^{-x}.$$

▲

Ejemplo 4.6.3 .

Resuelva $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

Solución.

La ecuación característica es $3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, *cuyas raíces son* $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$. *Por tanto, la solución general de la ecuación es:*

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}.$$

▲

Ejemplo 4.6.4 .

Resuelva $y^{(4)} - 10y'' + 9y = 0$.

Solución.

Tenemos que la ecuación característica es $\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$. *Luego, las raíces son* $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$ *y* $\lambda_4 = -1$. *Por tanto, la solución general es:*

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{-x}.$$

▲

La Ecuación Característica Tiene Raíces Complejas Distintas

Teorema 4.6.5 .
Si la ecuación característica $K_n(\lambda)$ tiene raíces complejas simples:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2,\ \ldots, \lambda_m = \alpha_m + i\beta_m,$$

$$\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1,\ \overline{\lambda_2} = \alpha_2 - i\beta_2,\ \ldots, \overline{\lambda_m} = \alpha_m - i\beta_m,$$

con $n = 2m$ entonces las funciones

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), & y_1^* &= e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x) \\ y_2 &= e^{\alpha_2 x}\cos(\beta_2 x), & y_2^* &= e^{\alpha_2 x}\operatorname{sen}(\beta_2 x) \\ &\vdots & &\vdots \\ y_m &= e^{\alpha_m x}\cos(\beta_m x), & y_m^* &= e^{\alpha_m x}\operatorname{sen}(\beta_m x) \end{aligned}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (4.52) y en este caso la solución general se escribe:

$$\begin{aligned} y \ = \ & e^{\alpha_1 x}\left(C_1\cos(\beta_1 x) + C_1^*\operatorname{sen}(\beta_1 x)\right) + e^{\alpha_2 x}\left(C_2\cos(\beta_2 x) + C_2^*\operatorname{sen}(\beta_2 x)\right) + \\ & \ldots + e^{\alpha_m x}\left(C_m\cos(\beta_m x) + C_m^*\operatorname{sen}(\beta_m x)\right) \end{aligned}$$

donde C_k y C_k^*, $k = 1, 2, \ldots, m$ son $2m = n$ constantes arbitrarias.

Demostración.
Puesto que la ecuación característica tiene todas las raíces simples, tenemos que las soluciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}, & \ldots \quad y_m &= e^{(\lambda_m + i\beta_m)x} \\ \overline{y_1} &= e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x}, & \ldots \quad \overline{y_m} &= e^{(\lambda_m - i\beta_m)x} \end{aligned}$$

forman un sistema sundamental de soluciones.

Las funciones y_1, $\overline{y_1}$, y_2, $\overline{y_2}$, …, y_m, $\overline{y_m}$ no son reales puesto que, según la fórmula de Euler, tenemos:

$$\left\{ \begin{aligned} y_k &= e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x) + ie^{\alpha_k x}\operatorname{sen}(\beta_k x) \\ \overline{y_k} &= e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x) - ie^{\alpha_k x}\operatorname{sen}(\beta_k x). \end{aligned} \right. \tag{4.53}$$

En la práctica nos interesan las soluciones reales. Luego, no se toma (4.53) como sistema fundamental, sino las siguientes funciones obtenidas como combinación lineal de las ecuaciones de (4.53):

$$Y_k = \frac{y_k + \overline{y_k}}{2} = e^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x), \quad Y_k^* = \frac{y_k - \overline{y_k}}{2i} = e^{\alpha_k x}\operatorname{sen}(\beta_1 x).$$

$k = 1, 2, \ldots, m$. El sistema Y_k, Y_k^*, $\ k = 1, 2, \ldots, n\ (2m = n)$ también forma un sistema fundamental de soluciones. ■

Ejemplo 4.6.6 .
Encuentre la solución general de la ecuación $y^{(4)} - y^{(3)} + 2y'' - y' + y = 0$.
Solución.
La ecuación característica es $\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, *que podemos factorizar como* $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$. *Por lo tanto, son soluciones:*

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = i, & \lambda_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = -i, & \lambda_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Luego, tenemos las soluciones particulares $y_1 = \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ *e* $y_4 = e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, *las que forman un sistema fundamental de soluciones, pues son L.I. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es:*

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$

▲

Ejemplo 4.6.7 .
Encuentre la solución general de la ecuación $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 9y'' + 4y' + 8y = 0$.
Solución.
El polinomio característico es $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 8) = 0$. *Luego, las soluciones son:*

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = i, & \lambda_3 = -2 + 2i \\ \lambda_2 = -i, & \lambda_4 = -2 - 2i \end{array}$$

Luego, la solución general es:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + e^{-2x}\left(C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x\right).$$

▲

Corolario 4.6.8 .
Supongamos que la ecuación característica $K_n(\lambda)$ *tiene raíces complejas simples:*

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2,\ \ldots, \lambda_m = \alpha_m + i\beta_m,$$

$$\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1,\ \overline{\lambda_2} = \alpha_2 - i\beta_2,\ \ldots, \overline{\lambda_m} = \alpha_m - i\beta_m,$$

y raíces reales simples γ_1, γ_2, …, γ_n, *tal que* $p + 2m = n$. *Entonces la solución general esta dada por:*

$$y = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k x}\left[C_k \cos(\beta_k x) + C_k^* \operatorname{sen}(\beta_k x)\right] + \sum_{k=1}^{p} D_k e^{\gamma_k x},$$

donde C_k, C_k^*, D_k *son constantes arbitrarias.*

Demostración.
Se deja como ejercicio al lector. ■

Ejemplo 4.6.9 .
Resuelva el problema de valor inicial $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = -1$.
Solución.
El polinomio característico es $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$, *por lo que,* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$ *y* $\lambda_4 = -i$. *Luego, la solución general se escribe:*

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Calculando hasta la tercera derivada e imponiendo las condiciones iniciales tenemos el sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 & = & 0 \\ C_1 - C_2 + C_4 & = & 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 & = & 1 \\ C_1 - C_2 - C_4 & = & -1 \end{cases}$$

cuya solución es $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$ *y* $C_4 = \frac{1}{2}$. *Luego,*

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

▲

Ejemplo 4.6.10 .
Resuelva $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 4y'' - 2y' - 5y = 0$.
Solución.
El polinomio característico es $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$, *cuyas raíces son* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1 + 2i$ *y* $\lambda_4 = 1 - 2i$. *Luego, la solución general es:*

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x).$$

▲

4.6.3. La Ecuación Característica Tiene Raíces Múltiples

Teorema 4.6.11 .
Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n:

$$L_n(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{4.54}$$

con coeficientes constantes $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Si la ecuación característica*

$$K_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

tiene la raíz λ_0 de orden de multiplicidad $p+1$, entonces la función:

$$y = C_0 e^{\lambda_0 x} + C_1 x e^{\lambda_0 x} + \cdots + C_p x^p e^{\lambda_0 x},$$

$x \in \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial.

Demostración.

Sea $y = e^{\lambda x}$, entonces $L_n(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} K_n(\lambda)$ y derivemos m veces con respecto a λ tenemos:

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L_n\left(e^{\lambda x}\right) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}\left(e^{\lambda x} K(\lambda)\right),$$

pero,

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L_n\left(e^{\lambda x}\right) = L_n\left[\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} e^{\lambda x}\right] = L_n\left[x^m e^{\lambda x}\right],$$

y,

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}\left[e^{\lambda x} K_n(\lambda)\right] = x^m e^{\lambda x} K_n(\lambda) + C_m^1 x^{m-1} e^{\lambda x} K_n'(\lambda) + \ldots + C_m^m e^{\lambda x} K_n^{(m)}(\lambda).$$

Luego, tenemos la identidad:

$$L_n\left[x^m e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}\left[x^m K_n(\lambda) + C_m^1 x^{m-1} K_n'(\lambda) + \ldots + C_m^m K_n^{(m)}(\lambda)\right]. \tag{4.55}$$

Supongamos que $\lambda = \lambda_0$ es una raíz de la ecuación característica $K_n(\lambda) = 0$ de orden $p+1$ de multiplicidad, entonces en esta situación:

$$K_n(\lambda_0) = 0,\ K_n'(\lambda_0) = 0, \ldots,\ K_n^{(p)}(\lambda_0) = 0,\ K_n^{p+1}(\lambda_0) \neq 0, \tag{4.56}$$

de donde resulta inmediatamente de (4.55) que:

$$y_1 = e^{\lambda_0 x},\ y_2 = x e^{\lambda_0 x},\ \ldots,\ y_{p+1} = x^p e^{\lambda_0 x},$$

son soluciones de la ecuación (4.54). En efecto, para $m \leq p$ tenemos:

$$L_n\left[x^m e^{\lambda_0 x}\right] = e^{\lambda_0 x}\left[x^m K_n(\lambda_0) + C_1^m x^{m-1} K_n'(\lambda_0) + \ldots + C_m^m K_n^{(m)}(\lambda_0)\right] = 0.$$

Luego, teniendo en cuenta la relación (4.56), una consecuencia inmediata de este hecho es que la función:

$$y = C_0 e^{\lambda_0 x} + C_1 x e^{\lambda_0 x} + \ldots + C_p x^p e^{\lambda_0 x}, \tag{4.57}$$

$x \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación diferencial, y decimos que (4.57) es la contribución de la raíz múltiple $\lambda = \lambda_0$. Además es claro que y_1, y_2, ..., y_{p+1} son L.I. En efecto,

$$e^{\lambda_0 x},\ x e^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^p e^{\lambda_0 x},$$

son L.I. pues 1, x, x^2, ..., x^p son L.I en $\mathbb{R}$, dado que no podemos tener:

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_p x^p \equiv 0,$$

con $\sum_{k=0}^{p} C_k^2 \neq 0$.

Falta todavía discutir este caso en dependencia de la naturaleza de la raíz múltiple λ_0.

1. $\lambda = \lambda_0$ raíz múltiple de multiplicidad $p+1$, real, tenemos las soluciones particulares:

$$y_1 = e^{\lambda_0 x},\ y_2 = xe^{\lambda_0 x}, \ldots,\ y_{p+1} = x^p e^{\lambda_0 x}.$$

2. La raíz múltiple es $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ de orden $p+1$ de multiplicidad claramente como los coeficientes de la ecuación son reales, entonces la ecuación tiene también la raíz $\overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta$ de orden $p+1$ de multiplicidad. Las $2p+2$ raíces dan, por lo tanto, las soluciones:

$$\begin{array}{lll} y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, & y_2 = xe^{(\alpha+i\beta)x}, & \ldots\ y_{p+1} = x^p e^{(\alpha+i\beta)x} \\ \overline{y_1} = e^{(\alpha-i\beta)x}, & \overline{y_2} = xe^{(\alpha-i\beta)x}, & \ldots\ \overline{y_{p+1}} = x^p e^{(\alpha-i\beta)x} \end{array}$$

linealmente independientes. En este caso tomamos como sistema fundamental, las soluciones siguiente:

$$\begin{array}{ll} y_1 = \frac{y_1+\bar{y}_1}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, & y_1^* = \frac{y_1-\bar{y}_1}{2i} = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ y_2 = \frac{y_2+\bar{y}_2}{2} = xe^{\alpha x}\cos\beta x, & y_2^* = \frac{y_2-\bar{y}_2}{2i} = xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ \vdots & \vdots \\ y_{p+1} = \frac{y_{p+1}+\bar{y}_{p+1}}{2} = x^p e^{\alpha x}\cos\beta x, & y_{p+1}^* = \frac{y_{p+1}-\bar{y}_{p+1}}{2i} = x^p e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \end{array}$$

■

En resumen podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.6.12 .
Dada la ecuación diferencial lineal de orden n, con coeficientes constantes $a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$. Si la ecuación característica:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

tiene raíces complejas:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2,\ \ldots, \lambda_p = \alpha_p + i\beta_p,$$

$$\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1,\ \overline{\lambda_2} = \alpha_2 - i\beta_2,\ \ldots, \overline{\lambda_p} = \alpha_p - i\beta_p,$$

de orden de multiplicidad m_1, m_2, …, m_n, respectivamente y las raíces reales:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q,$$

de orden de multiplicidad s_1, s_2, …, s_q, respectivamente entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\alpha_k x}\left(P_{m_k-1}\cos(\beta_k x) + Q_{m_k-1}\operatorname{sen}(\beta_k x)\right) + \sum_{h=1}^{q} e^{\lambda_k x} R_{s_h-1}(x),$$

donde P_{m_k-1}, Q_{m_k-1}, R_{s_h-1} son polinomios arbitrarios en x de grados m_k-1, m_k-1, s_h-1, respectivamente.

Demostración.

Se deja como ejercicio al lector. ■

Ejemplo 4.6.13 .

Resuelva $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$

Solución.

Su ecuación característica es $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$, *por tanto, tiene raíz múltiple* $\lambda_0 = 2$ *real de multiplicidad 3. Luego,* $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ *e* $y_3 = x^2e^{2x}$, *son soluciones particulares. Así,*

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x},$$

es la solución general para $x \in \mathbb{R}$. ▲

Ejemplo 4.6.14 .

Resuelva $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0.$

Solución.

Su ecuación característica es $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0$, *por tanto, que tiene raíces dobles:* $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *y* $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Luego, la ecuación tiene las soluciones particulares:*

$$\begin{array}{ll} y_1 = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), & y_2 = xe^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ y_3 = e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), & y_4 = xe^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{array}$$

que forman sobre $\mathbb{R}$ *un sistema fundamental de soluciones. Luego, la solución general está dada por:*

$$y = (C_0 + C_1x)\, e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (C_2 + C_3x)\, e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

▲

Ejemplo 4.6.15 .

Resuelva $y''' + 2y'' - y' + 6y = 0$

Solución.

Su ecuación característica es $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$. *Luego, tenemos las raíces* $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$. *Por tanto la solución general para* $x \in \mathbb{R}$ *es:*

$$y = C_1e^{-3x} + e^{\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_3\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right].$$

▲

Ejemplo 4.6.16 .
Resuelva $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 16y^{(4)} - 34y^{(3)} + 56y'' - 60y + 25y = 0.$
Solución.
La ecuación característica asociada es $\lambda^6 - 4\lambda^5 + 16\lambda^4 - 34\lambda^3 + 56\lambda^2 - 60\lambda + 25 = (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 - \lambda + 5)^2 = 0$. *Por tanto, las raíces son* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{19}}{2}$ *y* $\lambda_5 = \lambda_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{19}}{2}$. *Luego, la solución general para* $x \in \mathbb{R}$ *es:*

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{\frac{x}{2}} \left[(C_3 + C_4 x) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{19}}{2} x \right) + (C_5 + C_6 x) \cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2} x \right) \right].$$

▲

Ejemplo 4.6.17 .
Resuelva $y^{(5)} + 2y^{(4)} + \frac{3}{4}y''' - \frac{1}{4}y'' = 0.$
Solución.
La ecuación característica es $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = \frac{1}{4}a^2 (a+1)(4a^2 + 4a - 1) = 0$. *Luego, tenemos las raíces* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$ *y* $\lambda_5 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$. *Por lo tanto, la solución general es:*

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^{-x} \left[C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + C_5 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right].$$

▲

Ejercicio. Resuelva $y^{(5)} + y''' + y'' = 0.$

4.6.4. Ecuaciones No Homogéneas

Para determinar una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

podemos usar el **Método de Variación de Parámetros**, que nos permite, conociendo la solución general de la homogénea, encontrar una solución particular de la no homogénea, por medio de n integraciones.

Ejemplo 4.6.18 .
Resuelva $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ *para* $x \neq \frac{\pi}{4}k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Solución.
La ecuación homogénea asociada es $y'' + 4y = 0$, *cuya ecuación característica está dada por* $\lambda^2 + 4 = 0$, *de donde* $\lambda = \pm 2i$. *Con esto, la solución general de la homogénea es* $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$.

Para hallar una solución particular de la no homogénea, usamos el método de variación de las parámetros y tenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1' \cos 2x + C_2' \operatorname{sen} 2x & = & 0 \\ -2C_1' \operatorname{sen} 2x + 2C_2' \cos 2x & = & \frac{1}{\cos 2x} \end{array}\right.$$

que implica, $C_1' = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$ *y* $C_2' = \frac{1}{2}$. *De donde,* $C_1 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A_1$ *y* $C_2 = \frac{1}{2}x + A_2$. *Por tanto,la solución general de la ecuación no homogénea es:*

$$y = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + A_2\right)\operatorname{sen} 2x.$$

▲

Este cálculo para $n > 2$ es demasiado largo y engorroso, por lo que no es recomendable. Frecuentemente en las aplicaciones podemos encontrar por identificación una solución particular. Veamos algunos casos:

1. $f(x) = P_m(x)$.

   La solución particular será también un polinomio en x del mismo grado m. Si $a_n \neq 0$, tomamos para y_p un polinomio arbitrario de grado m, $Q_m(x)$. Calculamos las derivadas y_p', y_p'', $\ldots, y_p^{(n)}$ y lo ponemos en la ecuación diferencial y por identificación calculamos los coeficientes y determinamos $Q_m(x)$.

   Ejemplo 4.6.19 .
   Resuelva $y'' - 2y' + y = 2x^2$.
   Solución.
   La solución homogénea se determina fálcilmente, encontrando $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$. *Para la no homogénea tomemos como* $y_p = Ax^2 + Bx + C$, *pues es un polinomio del mismo grado que* $f(x) = 2x^2$. *Calculando* y_p' *e* y_p'' *y reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos:*

   $$2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 2x^2.$$

   Igualando coeficientes concluimos $A = 2$, $B = 8$ *y* $C = 12$. *Luego, la solución particular es* $y_p = 2x^2 + 8x + 12$. *Finalmente, la solución general es:*

   $$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 + 8x + 12.$$

   ▲

   Si $a_n = 0$, $a_{n-1} = 0$, $\ldots$, $a_{n-k} = 0$ y $a_{n-k-1} \neq 0$ necesitamos tomar $Q(x)$ polinomio de grado $m + k$, es decir, $x^k \cdot Q_m(x)$.

Ejemplo 4.6.20 .
Resuelva $y''' - 2y'' = x^2$.
Solución.
Si suponemos la solución particular $y_p = Ax^2 + Bx + C$, al derivar y reemplazar en la ecuación para identificar los coeficientes del polinomio obtenemos $-2\,(2A) = x^2$, lo que es una contradicción. Esto implica que la solución propuesta no sirve, pues los coeficientes de y e y' son nulos ($a_3 = 0$ y $a_4 = 0$).

Luego, hay que suponer $y_p = (Ax^2 + Bx + C)\,x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$. Derivando hasta orden tres, reemplazando en la ecuación e igualando coeficientes obtenemos $A = -\frac{1}{24}$, $B = -\frac{1}{12}$ y $C = -\frac{1}{8}$, por tanto, $y_p = -\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2$. Como la solución de la homogénea se determina fácilmente, encontramos $y_h = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$. Concluimos finalmente que la solución general es:

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2.$$

▲

Ejemplo 4.6.21 .
Resuelva $y''' - y' = -2x - 1$.
Solución.
Tenemos que el polinomio característico es $\lambda^3 - \lambda = \lambda\,(\lambda + 1)\,(\lambda - 1) = 0$, de donde, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -1$, por tanto, $y_h = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$ es la solución de la homogénea. Para la solución de particular tomamos $y_p = (Ax + B)\,x$. Derivando hasta orden tres, reemplazando en la ecuación no homogénea e igualando coeficientes obtenemos $A = 1$ y $B = 1$, luego, $y_p = (x + 1)\,x$. Con esto,

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + x^2 + x.$$

▲

2. $f\,(x) = e^{\alpha x}P_m\,(x)$.

   La solución particular será de la misma forma, tomamos para y una función de la misma forma $y_p = e^{\alpha x}Q_m\,(x)$, y por medio de identificación encontramos los coeficientes de $Q_m\,(x)$.

Ejemplo 4.6.22 .
Resuelva $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$.
Solución.
Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es $y_h = C_1e^x + C_2xe^x$. Como $\lambda = 2$

no es raíz de la ecuación característica, entonces tomamos como solución particular $y_p = (Ax + B)\, e^{2x}$. Luego,

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^{2x} + 2\,(Ax + B)\, e^{2x} \\ y_p'' &= 4Ae^{2x} + 4\,(Ax + B)\, e^{2x}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial e igualando coeficientes obtenemos $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Por lo tanto, la solución particular de la ecuación no homogénea es $y_p = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) e^{2x}$. Luego, la solución general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{4}\,(x - 1)\, e^{2x}.$$

▲

Si α es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad k, entonces tomamos $y_0 = x^k e^{\alpha x} Q_m\,(x)$ como solución particular.

Ejemplo 4.6.23 .
Resuelva $y'' - 3y' + 2y = (x + x^2)\, e^{3x}$.
Solución.
La ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tiene por raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, por tanto, la solución de la homogénea es $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Como $\lambda = 3$ no es raíz de la ecuación característica podemos considerar como solución particular a $y_P = (Ax^2 + Bx + C)\, e^{3x}$. Luego,

$$\begin{aligned} y_p' &= \big(3Ax^2 + (2A + 3B)\, x + b + 3C\big)\, e^{3x} \\ y_p'' &= \big(9A^2 + (12A + 9B)\, x + 2A + 6B + 9C\big)\, e^{3x} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación no homogénea obtenemos:

$$\big(2Ax^2 + (6A + 2B)\, x + 2A + 3B + 2C\big)\, e^{3x} = \big(x + x^2\big)\, e^{3x}.$$

De donde, $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, y $C = 1$. Luego, la solución general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right) e^{3x}.$$

▲

Ejemplo 4.6.24 .
Resuelva la ecuación $y'' - 2y' + y = xe^x$.
Solución.
De ejemplos anteriores sabemos las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = \lambda_2 =$

1, *por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es* $y_h = C_1e^x + C_2xe^x$. *Como* $\lambda = 1$ *es raíz de orden dos de la ecuación característica, tomamos como solución particular:*

$$y_p = x^2 (Ax + B) e^x = \left(Ax^3 + Bx^2\right) e^x.$$

Luego,

$$\begin{aligned} y_p' &= \left(Ax^3 + (3A + B) x^2 + 2Bx\right) e^x \\ y_p'' &= \left(Ax^3 + (6A + B) x^2 + (6A + 4B)x + 2B\right) e^x. \end{aligned}$$

reemplazando ahora en la ecuación no homogénea y simplificando tenemos:

$$((6B + 6A) x + 2B) e^x = xe^x.$$

Luego, $A = \frac{1}{6}$ *y* $B = 0$, *por lo tanto, la solución particular es* $y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$. *Finalmente, la solución general de la no homogénea es:*

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

▲

3. $f(x) = P_m (x) \cos \alpha x + Q_m (x) \operatorname{sen} \alpha x$.

   Tomamos considerando la fórmula de Euler y el punto 2:

$$y_p = \tilde{P}_m (x) \cos \alpha x + \tilde{Q}_m (x) \operatorname{sen} \alpha x,$$

y determinamos los coeficientes de $\tilde{P}_m (x)$ y $\tilde{Q}_m (x)$ por igualación de coeficientes. Si $i\alpha$ y $-i\alpha$ son raíces múltiples de orden k de la ecuación característica, entonces tomamos:

$$y_p = x^k\tilde{P}_m (x) \cos \alpha x + x^k\tilde{Q}_m (x) \operatorname{sen} \alpha x.$$

Ejemplo 4.6.25 .
Resuelva $y'' + y = \operatorname{sen} 2x$.
Solución.
La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea es $\lambda^2 + 1 = 0$, *cuyas con raíces* $\lambda = \pm i$, *por tanto, la solución* $y_h = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$. *Como* $\lambda = 2i$ *no es raíz de la ecuación característica, asumimos la solución particular* $y_p = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x$. *Derivando hasta orden dos, reemplazando en la ecuación no homogénea e igualando coeficientes obtenemos* $A = -\frac{1}{3}$ *y* $B = 0$. *Por tanto, la solución particular es* $y_p = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 2x$. *Luego, la solución general es:*

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2x.$$

▲

Ejemplo 4.6.26 .
Resuelva $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \operatorname{sen} x$.
Solución.
De la ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ *obtenemos las raíces* $\lambda_1 = 0$ *y* $\lambda_2 = 3$, *por tanto,* $y_h = C_1 + e^{3x}$. *Luego, portulamos* $y_p = ax + be^x + (c\cos x + d\operatorname{sen} x)$ *como solución particular. Como ninguna estas se repite en la solución homogénea tenemos que esta solución particular nos sirve. Derivando hasta orden dos y reemplazando en la ecuación no homogénea obtenemos:*

$$be^x - c\cos x - d\operatorname{sen} x - 3a - 3be^x + 3c\operatorname{sen} x - 3d\cos x = 1 + e^x + \cos x + \operatorname{sen} x,$$

de donde, $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{5}$, *y* $d = -\frac{2}{5}$. *Luego,* $y_p = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}e^x + \left(\frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x\right)$. *Por tanto, la solución general es:*

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x.$$

▲

Ejemplo 4.6.27 .
Resuelva $y'' + y = \operatorname{sen} x$.
Solución.
La ecuación homogénea asociada es $y'' + y = 0$, *cuya ecuación característica es* $\lambda^2 + 1 = 0$ *y tiene raíces* $\lambda = \pm i$, *por tanto, la solución homogénea es* $y_h = C_1\cos x + C_2\cos x$. *Como* $\lambda = i$ *es raíz de la ecuación característica, asumimos la solución particular de la forma* $y_p = (A\operatorname{sen} x + B\cos x)\,x$. *Derivando hasta orden dos, reemplazando en la ecuación no homogénea e igualando coeficientes obtenemos* $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. *Por tanto, a solución particular es* $y_p = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x$. *Finalmente, la solución general es:*

$$y = C_1\operatorname{sen} x + C_2\cos x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x.$$

▲

4. $f(x) = P_m(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

   Entonces la solución particular y_p se toma de la misma forma:

   $$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + \tilde{Q}_m(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

   en el caso que $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ no son raíces de la ecuación característica, y tendrá la forma:

   $$y_p = x^k\tilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + x^k\tilde{Q}_m(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

   en el caso que $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ son raíces múltiples de orden k de la ecuación característica.

Ejemplo 4.6.28 .
Resuelva el problema de valor inicial $y''' - 2y'' + y' - 2y = e^x + \operatorname{sen} x + x$, *con las condiciones iniciales* $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
Solución.
La homogénea asociada tiene ecuación característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 2)$, *por tanto, las raíces son* $\lambda = 2$, $\lambda = i$ *y* $\lambda = -i$. *Luego, la solución de la ecuación homogénea es:*

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x.$$

Postulamos ahora, una solución particular de la no homogénea es de la forma:

$$y = Ae^x + Bx \operatorname{sen} x + Cx \cos x + Dx + E.$$

Derivando tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= Ae^x + (B - Cx)\operatorname{sen} x + (Bx + C)\cos x + D \\ y'' &= Ae^x + (2B - Cx)\cos x - (Bx + 2C)\operatorname{sen} x \\ y''' &= Ae^x - (3C + Bx)\cos x - (3B - Cx)\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación no homogńea e igualando coeficientes obtenemos $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{2}$ *y* $E = -\frac{1}{4}$. *Por tanto, la solución particular buscada es:*

$$y_p = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x \cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Luego, la solución general es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 \cos x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x \cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Para resolver el problema de Cauchy imponemos las condiciones iniciales, obteniéndo el sistema lineal:

$$\left\{ \begin{aligned} C_2 + C_3 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} &= 0 \\ C_1 + 2C_3 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} &= -1 \\ -C_2 + 4C_3 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} &= 1 \end{aligned} \right.$$

de donde, $C_1 = -\frac{19}{15}$, $C_2 = \frac{11}{30}$ *y* $C_3 = \frac{23}{60}$. *Por tanto, la solución buscada es:*

$$y = -\frac{19}{15}\operatorname{sen} x + \frac{11}{30}\cos x + \frac{23}{60}e^{2x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x \cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

▲

Ejemplo 4.6.29 .
Resuelva el problema de valor inicial $y'' - y' = -5e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ *con las condiciones iniciales* $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$.

Solución.
La ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda = 0$, luego tenemos las raíces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, y con ello $y_h = C_1 + C_2 e^x$. Ahora, postulamos una solución particular de la no homogénea del tipo:

$$y_p = e^{-x} (A \cos x + B \operatorname{sen} x).$$

Derivando tenemos:

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{-x} ((B - A) \cos x - (A + B) \operatorname{sen} x) \\ y_p'' &= 2e^{-x} (A \operatorname{sen} x - B \cos x). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial no homogénea e igualando coeficientes obtenemos $A = 2$ y $B = 1$. Por tanto, la solución general es:

$$y_= C_1 + C_2 e^x + e^{-x} (\operatorname{sen} x - 2 \cos x).$$

Finalmente, con las condiciones iniciales tenemos que:

$$y = -4 + 2e^x + e^{-x} (\operatorname{sen} x - 2 \cos x).$$

▲

4.7. La Ecuación de Euler

Definición 4.7.1 (Ecuación de Euler)
Sean $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. La ecuación:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \tag{4.58}$$

se denomina **Ecuación Diferecial de Euler**.

Teorema 4.7.2 .
Por medio del cambio $|x| = e^t$, la ecuación (4.58) se transforma en lineal con coeficientes constantes.

Demostración.
Para $x > 0$ tenemos $x = e^t$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} \\ &= \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \end{aligned}$$

luego,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

Se observa que todos los productos $x^k\frac{d^ky}{dx^k}$ se expresan linealmente con la ayuda de las derivadas $\frac{d^py}{dt^p}$, $p=1,2,\ldots,k$, multiplicado por factores numéricos. Si los reemplazamos en la ecuación (4.58), entonces la ecuación se transforma en una ecuación con coeficientes constantes:

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=f\left(e^t\right),$$

y por lo tanto, la ecuación homogénea asociada es:

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0,$$

la que admite soluciones de la forma $e^{\lambda_k t}$, con λ_k raíz de la ecuación característica, pero $e^{\lambda_k t}=(e^t)^{\lambda_k}=|x|^{\lambda_k}$. Luego, la ecuación de Euler homogénea admite soluciones de la forma $|x|^{\lambda_k}$. ■

Este resultado simplifica enormemente la determinación de la solución general de la ecuación de Euler.

4.7.1. Solución General de una Ecuación de Euler Homogénea

Sea la ecuación de Euler homogénea:

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0. \tag{4.59}$$

Si buscamos una solución de la forma $y=A\,|x|^{\lambda}$, con A una constante, tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned}
y' &= A\lambda\,|x|^{\lambda-1}\\
y'' &= A\lambda\,(\lambda-1)\,|x|^{\lambda-2}\\
\vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots\\
y^{(p)} &= A\lambda\,(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-p+1)\,|x|^{\lambda-p}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en (4.59) tenemos:

$$A\,|x|^{\lambda}\,K_n\,(\lambda)=0,$$

donde $K_n\,(\lambda)$ es la ecuación característica asociada a la ecuación de Euler:

$$K_n\,(\lambda)=a_0\lambda\,(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)+a_1\lambda\,(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+2)+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

Sean λ_1, λ_2, ..., λ_n las raíces de la ecuación característica $K_n\,(\lambda)=0$, según su naturaleza, reales o complejas, y orden de multiplicidad determinaremos el sistema fundamental de soluciones para la ecuación de Euler, en forma análoga como lo hicimos para las ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

La Ecuación Característica $K_n(\lambda) = 0$ Tiene Raíces Reales Simples

Si λ_1, λ_2, ..., λ_n son raíces simples y reales de $K_n(\lambda) = 0$, entonces:

$$y_1 = |x|^{\lambda_1}, \; y_2 = |x|^{\lambda_2}, \; \ldots, \; y_n = |x|^{\lambda_n},$$

forman un sistema fundamental de soluciones. Entonces la solución general de la ecuación de Euler es:

$$y = C_1 |x|^{\lambda_1} + C_2 |x|^{\lambda_2} + \ldots + C_n |x|^{\lambda_n}.$$

Ejemplo 4.7.3 .
Resuelva la ecuación de Euler $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$,
Solución.
La ecuación característica asociada es $\lambda(\lambda - 1) + 6\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$, *por tanto,* $\lambda_1 = -1$ *y* $\lambda = -4$. *Así,* $y_1 = \frac{1}{x}$ *e* $y_2 = \frac{1}{x^4}$ *forman un sistema fundamental de soluciones. Luego, la solución general es:*

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^4}.$$

Otra forma de resolver el problema es suponer $x = e^t$, *por tanto, como vimos* $xy' = \dot{y}$ *y* $x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$. *Reemplazando en la ecuación de Euler dada obtenemos* $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0$, *cuyas raíces características son* $\lambda_1 = -1$ *y* $\lambda_2 = -4$. *Luego,* $y = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$, *pero* $x = e^t$, *por tanto,* $y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^4}$, *que coincide con la solución encontrada anteioremente.*
▲

Ejemplo 4.7.4 .
Resuelva la ecuación $x^2y'' + xy' - y = 0$.
Solución.
Reemplazando $xy' = \dot{y}$ *y* $x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ *obtenemos* $\ddot{y} - y = 0$, *raíces características son* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = -1$. *Luego,* $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. *Retornando a* x *obtenemos,* $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$. ▲

La Ecuación Característica $K_n(\lambda) = 0$ Tiene Raíces Complejas Simples

Supongamos:

$$\lambda = \alpha + i\beta, \; \bar{\lambda} = \alpha - i\beta.$$

En el caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes estas raíces introducían las soluciones:

$$y = e^{\alpha t} \cos \beta t, \; y^* = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t,$$

pero en la ecuación de Euler se hace $|x| = e^t$ o $t = \ln|x|$, luego:

$$y = |x|^{\alpha} \cos(\beta \ln|x|), \; y^* = |x|^{\alpha} \operatorname{sen}(\beta \ln|x|).$$

Luego, si la ecuación característica $K_n(\lambda) = 0$ de una ecuación de Euler tiene las raíces complejas conjugadas simples:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \; \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \; \ldots, \lambda_m = \alpha_m + i\beta_m,$$

$$\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1,\ \overline{\lambda_2} = \alpha_2 - i\beta_2,\ \ldots, \overline{\lambda_m} = \alpha_m - i\beta_m,$$

entonces las funciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= |x|^{\alpha_1} \cos\left(\beta_1 \ln |x|\right), & y_1^* &= |x|^{\alpha_1} \operatorname{sen}\left(\beta_1 \ln |x|\right), \\ &\vdots & &\vdots \\ y_m &= |x|^{\alpha_m} \cos\left(\beta_m \ln |x|\right), & y_m^* &= |x|^{\alpha_m} \operatorname{sen}\left(\beta_m \ln |x|\right), \end{aligned}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Euler.

Ejemplo 4.7.5 .
Reselva la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' + 2y = 0.$
Solución.
La ecuación característica asociada es $\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ *entonces* $\lambda_1 = 1 + i$ *y* $\lambda_2 = 1 - i$. *Por lo tanto, las soluciones son* $y_1 = x\cos(\ln|x|)$ *e* $y_2 = x\operatorname{sen}(\ln|x|)$. *Luego, la solución general es:*

$$y = x\left[C_1 \cos(\ln|x|) + C_2 \operatorname{sen}(\ln|x|)\right].$$

▲

Ejemplo 4.7.6 .
Resuelva $x^2y'' + 2xy' + y = 0.$
Solución.
La ecuación característica es $\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, *cuyas soluciones son* $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *y* $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Por tanto,*

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right].$$

▲

Ejemplo 4.7.7 *Resuelva* $x^2y'' + 3xy' + y = 0.$
Solución.
La ecuación característica asociada es $\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$, *entonces* $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. *Luego,*

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 + C_2 \ln|x|\right).$$

▲

La Ecuación Característica $K_n(\lambda) = 0$ Tiene la Raíz Real $\lambda = \alpha$ de Orden $p+1$ de Multiplicidad

En el caso de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes tendríamos que las funciones $e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$, $t^2e^{\alpha t}$, ..., $t^pe^{\alpha t}$ son soluciones. Luego, en el caso de la ecuación de Euler tenemos que son soluciones $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha \ln|x|$, $|x|^\alpha \ln^2|x|$,..., $|x|^\alpha \ln^p|x|$. Luego,

$$|x|^\alpha \left(C_0 + C_1 \ln|x| + C_2 \ln^2|x| + \ldots + C_p \ln^p|x|\right),$$

es el aporte a la solución general de valor propio $\lambda = \alpha$.

Ejemplo 4.7.8 . *Resuelva* $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.
Solución.
La ecuación característica asociada es $\lambda(\lambda-1) + 5\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$*, por tanto,* $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$*. Luego son soluciones particulares* $y_1 = \frac{1}{x^2}$ *e* $y = \frac{\ln|x|}{x^2}$*. Así, la solución general para* $x \neq 0$ *es:*

$$y = \frac{1}{x^2}\left(C_1 + C_2 \ln|x|\right).$$

▲

La Ecuación Característica $K_n(\lambda) = 0$ Tiene Raíces Complejas $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ de orden $p+1$ de multiplicidad

Entonces análogamente deducimos que las funciones:

$$\begin{aligned}
y_1 &= |x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|), & y_1^* &= |x|^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln|x|),\\
y_2 &= |x|^\alpha \ln|x| \cos(\beta \ln|x|), & y_2^* &= |x|^\alpha \ln|x| \operatorname{sen}(\beta \ln|x|),\\
&\vdots & &\vdots\\
y_{p+1} &= |x|^\alpha \ln^p|x| \cos(\beta \ln|x|), & y_{p+1}^* &= |x|^\alpha \ln^p|x| \operatorname{sen}(\beta \ln|x|),
\end{aligned}$$

son soluciones que aporta la raíz múltiple y la solución general contendrá como parte de ella a:

$$\left(C_0 + C_1 \ln|x| + \ldots + C_p \ln^p|x|\right)|x|^\alpha \cos(\beta \ln|x|) + \left(C_0^* + C_1^* \ln|x| + \ldots + C_p^* \ln^p|x|\right)|x|^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln|x|),$$

donde C_0, C_1, ..., C_p, C_0^*, C_1^*, ..., C_p^* son $2p+2$ constantes arbitrarias.

Teorema 4.7.9 . **(Resumen)**
Sea la ecuación diferencial de Euler de orden n*:*

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0, \tag{4.60}$$

donde $a_n \in \mathbb{R}$*. Si la ecuación característica:*

$$a_0\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n-1) + a_1\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+2) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

tiene las raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2,\ \ldots, \lambda_p = \alpha_p + i\beta_p,$$
$$\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1,\ \overline{\lambda_2} = \alpha_2 - i\beta_2,\ \ldots, \overline{\lambda_p} = \alpha_p - i\beta_p,$$

de orden de multiplicidad m_1, m_2, ..., m_p *respectivamente y las raíces reales* γ_1, γ_2, ..., γ_q *de orden de multiplicidad* s_1, s_2, ..., s_q *respectivamente, entonces la solución general de la ecuación diferencial (4.60) es:*

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=1}^{p} |x|^{\alpha_k} \left[P_{m_k-1}(\ln|x|)\cos(\beta_k \ln|x|) + Q_{m_k-1}(\ln|x|)\operatorname{sen}(\beta_k \ln|x|)\right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{q} |x|^{\gamma_k} R_{s_h-1}(\ln|x|), \end{aligned}$$

donde P_{m_k-1}, Q_{m_k-1}, R_{s_h-1} *son polinomios arbitrarios en* $\ln|x|$ *de grado respectivamente* $m_k - 1$, $m_k - 1$ *y* $s_h - 1$.

Ejemplo 4.7.10 .
Resuelva $x^4y^{(4)} + 6x^3y^{(3)} + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0.$
Solución.
La ecuación característica es:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 6\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 9\lambda(\lambda-1) + 3\lambda + 1 = 0,$$

o equivalentemente, $(\lambda^2+1)^2 = 0$, *por lo tanto,* $\lambda_{1,2} = i$ *y* $\lambda_{3,4} = -i$. *Por tanto, la solución general de la ecuación dada en un intervalo que no contenga al origen es:*

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)\cos(\ln|x|) + (C_3 + C_4\ln|x|)\operatorname{sen}(\ln|x|).$$

▲

Las ecuaciones de la forma:

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

también son ecuaciones de Euler y se reducen a ecuaciones lineales y homogéneas de coeficientes constantes haciendo la sustitución:

$$e^t = |ax+b|.$$

Ejemplo 4.7.11 .
Resuelva $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0.$
Solución.
Buscamos una solución de la forma $|x+1|^\lambda$, *entonces la ecuación característica es* $\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, *luego* $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 2$. *Por lo tanto, la solución general es:*

$$y = C_1|x+1| + C_2|x+1|^2.$$

▲

4.7.2. Solución General de una Ecuación de Euler No Homogénea

Para determinar una solución particular de una ecuación de Euler no homogénea, usamos el **Método de Variación de Parámetros**.

Ejemplo 4.7.12 .
Resuelva $x^2y'' - 5xy' + 5y = x + 1$.
Solución.
La ecuación homogénea asociada es $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$*, cuya solución característica está dada por* $\lambda(\lambda - 1) - 5\lambda + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$*, de donde,* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 5$*. Luego, la solución homogénea es:*

$$y = C_1x + C_2x^5.$$

Para obtener una solución particular de la no homogénea usamos el método de variación de las parámetros. Por lo cual, tenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1'x + C_2'x^5 & = & 0 \\ C_1' + 5C_2'x^4 & = & \frac{x+1}{x^2} \end{array}\right.$$

cuya solución es $C_1' = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ *y* $C_2' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)$*. Integrando tenemos* $C_1 = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4x} + A_1$ *y* $C_2 = -\frac{1}{16x^4} - \frac{1}{20x^5} + A_2$*. Por tanto, la solución general para* $x \neq 0$ *es:*

$$y = C_1x + C_2x^5 - \frac{1}{4}x\ln|x| - \frac{1}{16}x + \frac{1}{5}.$$

▲

Ejemplo 4.7.13 .
Resuelva $x^3y'' - x^2y' - 3xy + 16\ln x = 0$.
Solución.
Arreglando la ecuación tenemos:

$$x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16\ln x}{x}.$$

Tomando la homogénea tenemos que su ecuación característica es $\lambda(\lambda - 1) - \lambda - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$*, de donde* $\lambda_1 = 3$ *y* $\lambda_2 = -1$*. Por tanto, la solución de la homogénea, escrita en términos de* t *es:*

$$y_h = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}.$$

Luego, por variación de parámetros tenemos el sistema escrito en t*:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1'e^{-t} + C_2'e^{3t} & = & 0 \\ -C_1'e^{-t} + 3C_2'e^{3t} & = & -\frac{16t}{e^t \cdot e^{2t}} \end{array}\right.$$

cuya solución es $C_1' = \frac{4t}{e^{2t}}$ *y* $C_2' = -\frac{4t}{e^{6t}}$. *Integrando obtenemos* $C_1 = -(1+2t)\,e^{-2t}$ *y* $C_2 = \frac{1}{9}(1+6t)\,e^{-6t}$. *Por tanto, la solución genetal es:*

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} - (1+2t)\,e^{-3t} + \frac{1}{9}(1+6t)\,e^{-3t}.$$

Pero, volviendo a variable inicial obtenemos:

$$y(t) = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 - \frac{1}{x^3}(1+2\ln|x|) + \frac{1}{9x^3}(1+6\ln|x|)\,.$$

▲

4.8. Ejercicios Propuestos

1. Demuestre que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones indicadas.

   a) $y = e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x)$, $y'' + 2y' + 2y = 0$.

   b) $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x)$, $y'' - 4y' + 8y = 0$.

   c) $y = x(\operatorname{sen} x - \cos x)$, $y'' + y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x)$.

   d) $y = (C_1 + C_2x)\,e^{-3x}$, $y'' + 6y' + 9y = 0$.

   e) $y = x^2\ln x$, $xy^{(3)} = 2$.

   f) $x = y^2 + y$, $y'y^{(3)} = 3y''^2$.

   g) $x + C = e^{-y}$, $y'' = y^2$.

   h) $x = y + \ln y$, $yy'' + y'^3 - y'^2 = 0$.

2. Verifique que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones que se indican.

   a) $y = C_1\operatorname{sen} x + C_2\cos x$, $y'' + y = 0$.

   b) $\operatorname{sen}(y - C_2) = e^{x-C_1}$, $y'' = y'(1+y'^2)$.

   c) $y = C_1x + C_2\ln x$, $x^2(1-\ln x)\,y'' + xy' - y = 0$.

   d) $y = \sqrt{(x+C_1)^2 + C_2}$, $yy'' + y'^2 = 0$.

   e) $x + C_2 = y^3 + C_1y$, $y'' + 6yy'^3 = 0$.

   f) $x + C_2 = \ln(y + C_1)$, $y'' = y'(1+y'^2)$.

   g) $(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = 1$, $y'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

   h) $y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x})$, $xy'' + 2y' - xy = 0$.

   i) $C_1x + C_2 = \ln(C_1y - 1)$, $yy'' = y'^2 + y'$.

3. Resuelva los problemas de valor incial.

   a) $y^{(3)} = xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.
   b) $y^{(4)} = x$.
   c) $y^{(3)} = x \ln x$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.
   d) $y^{(3)} = x + \cos x$.
   e) $y^{(3)} = x(x+2)^{-5}$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.
   f) $y''^2 - 5y' + 6y = 0$.
   g) $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$.
   h) $y''^2 - 2y''y' + 3 = 0$.
   i) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.
   j) $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$.
   k) $1 + y'^2 = 2yy''$.
   l) $y^3 y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
   m) $y^{(3)} = 3yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = \frac{2}{3}$.
   n) $yy'' = y'^2$.
   ñ) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
   o) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.
   p) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
   q) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

4. Estudie si las funciones dadas son linealmente independientes en sus respectivos dominios de definición.

   a) $3,\ 2x$.
   b) $3,\ 8,\ x,\ x^3$.
   c) $3x,\ x,\ x^2$.
   d) $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$.
   e) $\cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \cos 4x$.
   f) $\operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ 1$.
   g) $4,\ \cos^2 x,\ \operatorname{sen}^2 x$.
   h) $1,\ e^x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x$.

5. Calcule el Wronskiano de los siguientes sistemas de funciones.

   a) $4,\ \frac{x}{3}$.
   b) $3x,\ \frac{2}{x}$.
   c) $2,\ 6,\ x^2$.
   d) $e^x,\ xe^x$.
   e) $e^x,\ e^{-x},\ 3e^{-x}$.
   f) $1,\ \cos x,\ \cos \frac{x}{2}$.
   g) $\log_a x,\ \log_a x^2$, donde $a > 0$, $a \neq 1$.
   h) $\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

6. Escriba la ecuación diferencial lineal homogénea conociendo sus ecuaciones características.

   a) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.
   b) $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$.
   c) $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$.
   d) $(\lambda^2 + 1) = 0$.
   e) $\lambda^5 = 0$.
   f) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

7. Forme la ecuación diferencial lineal homogénea conocidas las raíces de su ecuación característica y escriba su solución general.

   a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.
   b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.
   c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.
   d) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.
   e) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$.
   f) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$.
   g) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.
   h) $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$.
   i) $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$.
   j) $\lambda_1 = -ki$, $\lambda_2 = ki$.

8. Forme la ecuación diferencial lineal homogénea si se dan sus sistemas fundamentales de soluciones.

   a) e^{-x}, e^{x}.
   b) $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$.
   c) e^{2x}, e^{3x}, e^{-x}.
   d) xe^{-x}, e^{x}, e^{-x}.
   e) 1, x, e^{x}.
   f) 1, $e^{-x}\operatorname{sen} x$, $e^{-x}\cos x$.

9. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) $y'' - y = 0$.
   b) $3y'' - 2y' - 8y = 0$.
   c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.
   d) $y^{(3)} + 6y'' + 11y' - 6y = 0$.
   e) $y'' - 2y' - 2y = 0$.
   f) $y^{(7)} - 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.
   g) $4y'' - 8y' + 5y = 0$.
   h) $y^{(3)} - 8y = 0$.
   i) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
   j) $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
   k) $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$.
   l) $y^{(4)} - y = 0$.

m) $y^{(7)} = 0$.

n) $y''' - 3y'' - 2y = 0$.

ñ) $2y''' - 3y'' + y' = 0$.

10. Determine la forma de la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea, si se conocen las raices de su ecuación característica y el segundo miembro $f(x)$.

    a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

    b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

    c) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

    d) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

    e) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ f(x) = e^{-x}(ax + b)$.

    f) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

    g) $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i,\ f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

    h) $\lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i,\ f(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$.

    i) $\lambda_1 = -ki,\ \lambda_2 = ki,\ f(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$.

    j) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ f(x) = e^{-x}(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$.

    k) $\lambda_1 = -1 - i,\ \lambda_2 = -1 + i,\ f(x) = e^{-x}(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$.

    l) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

    m) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

    n) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

    ñ) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

    o) $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

    p) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}$.

    q) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}$.

    r) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}$.

    s) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1,\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}$.

    t) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}$.

    u) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}$.

    v) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$.

    w) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = 1,\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$.

    x) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = k,\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$.

    y) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$.

z) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = 1,\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$.

z') $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = k,\ f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$.

11. Encuentre una solución particular para las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

a) $y'' + 3y' = 3$.

b) $y'' - 7y' = (x-1)^2$.

c) $y'' + 3y' = e^x$.

d) $y'' + 7y' = e^{-7x}$.

e) $y'' - 8y' + 16 = (1-x)\, e^{4x}$.

f) $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.

g) $4y'' - 3y' = xe^{\frac{3x}{4}}$.

h) $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$.

i) $y'' - 4y' = xe^{4x}$.

j) $y'' + 25y = \cos 5x$.

k) $y'' + y = \operatorname{sen} x - \cos x$.

l) $y'' + 16y = \operatorname{sen}(4x + \alpha)$.

m) $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$.

n) $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$.

ñ) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x$.

o) $y'' + k^2 y = k \operatorname{sen}(kx + \alpha)$.

p) $y'' + k^2 y = k$.

q) $y'' + 4y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$.

r) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

s) $y''' + y = x$.

t) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 1$.

u) $y''' + y' = 2$.

v) $y''' + y'' = 3$.

w) $y^{(4)} - y = 1$.

x) $y^{(4)} - y' = 2$.

y) $y^{(4)} - y'' = 3$.

z) $y^{(4)} - y''' = 4$.

a') $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 1$.

b') $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' = e^{4x}$.

c') $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' = e^{-x}$.

d') $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' = xe^{-x}$.

e') $y^{(4)} + 4y''' + 4y = \operatorname{sen} 2x$.

12. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 2y' + y = 2$.

b) $y'' + 2y' + 1 = 0$.

c) $y'' + 9y - 9 = 0$.

d) $y''' + y'' = 1$.

e) $5y''' - 7y'' - 3 = 0$.

f) $y^{(4)} - 6y''' + 6 = 0$.

g) $3y^{(4)} + y''' = 2$.

h) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1$.

i) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

j) $y'' + 8y' = 8x$.

k) $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

l) $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

m) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

n) $y'' + 5y' + 6y = 10\,(1 - x)\,e^{-2x}$.

ñ) $y'' + y' + y = (x + x^2)\,e^{x}$.

o) $y'' + 4y' - 2y = 8 \operatorname{sen} 2x$.

p) $y'' + y = 4x \cos x$.

q) $y'' + 2y' = 4e^{x}\,(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

r) $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x$.

s) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\,(2x + \operatorname{sen} 2x)$.

t) $4y'' + 8y' = x \operatorname{sen} x$.

u) $y'' + y' - 2y = xe^{x}$.

v) $y'' - 3y' + 2y = (x + x^2)\,e^{3x}$.

w) $y''' - y'' + y' - y = x + x^2$.

x) $y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$.

y) $y'' + y = 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$.

z) $y'' + 4y = x\operatorname{sen}^2 x$.

a') $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$.

b') $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$.

c') $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \operatorname{sen} x$.

d') $y'' + 2y' + 1 = 3\operatorname{sen} 2x + \cos x$.

e') $y'' - 4y' + 4y = 4x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$.

f') $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

g') $y'' + 9y' = 6e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

h') $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

i') $y'' + 6y' + 9y = 10\operatorname{sen} x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

j') $y'' - y' = -5e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$.

13. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 y'' + xy' - y = 0$.

b) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$.

c) $x^2 y'' + 2xy' + y = 0$.

d) $(x + 2)^2 y'' + 3(x + 2) y' - 3y = 0$.

e) $(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1) y' + 4y = 0$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales, empleando el método de variación de parámetros.

a) $y'' + 4y' = \frac{1}{\cos 2x}$.

b) $y'' + y' = \operatorname{tg}^2 x$.

c) $y'' - y = \frac{1}{e^x - 1}$.

d) $y'' - y' = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

e) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

f) $y'' + y' = -\frac{1}{x}$.

g) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \operatorname{sen} x}$.

h) $y'' - y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x \cos x}}$.

i) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

j) $y'' - y = \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7 x \cos^8 x}}$.

15. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales sabiendo que y_1 e y_2 son soluciones particulares de la ecuación homogénea.

a) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

b) $(x^2 - 1)\, y'' = 6y$, $y_1 = P_n(x)$ un polinomio.

c) $(2x + 1)\, y'' + (4x - 2)\, y' - 8y = 0$, $y_1 = e^{mx}$.

d) $(3x + 2x^2)\, y'' - 6\,(1 + x)\, y' + 6y = 6$, $y_1 = P_n\,(x)$ un polinomio.

e) $x^2\,(\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

f) $(1 + x^2)\, y'' + xy' - y + 1 = 0$, $y_1 = x$.

g) $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$.

Capítulo 5

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

5.1. Propiedades Generales

5.1.1. Generalidades

Definición 5.1.1 (Sistema de Ecuaciones Diferenciales)
La relación:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F_1\left(t,x,x',\ldots,x^{(m)},y,y',\ldots,y^{(n)},z,z',\ldots,z^{(p)}\right) & = & 0 \\ F_2\left(t,x,x',\ldots,x^{(m)},y,y',\ldots,y^{(n)},z,z',\ldots,z^{(p)}\right) & = & 0 \\ F_3\left(t,x,x',\ldots,x^{(m)},y,y',\ldots,y^{(n)},z,z',\ldots,z^{(p)}\right) & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

donde F_1, F_2, F_3 son tres funciones definidas sobre $[a,b]\times\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\times\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{p+1}$, forman un **Sistema de Tres Ecuaciones Diferenciales con Tres Funciones Incógnitas** x, y, z.

Se pide determinar las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, definidas sobre un mismo intervalo $[a,b]$ derivables hasta el orden m, n, p respectivamente, funciones que junto con sus derivadas verifican la ecuación (5.1) para todo $t\in[a,b]$. Un sistema de tres funciones reales $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ que cumple éstas condiciónes, se dice que forma una solución del sistema (5.1)

Si al menos uno de los números m, n, p es mayor que 1, el sistema (5.1) se dice de orden superior, si $m=n=p=1$, entonces (5.1) se llama sistema de primer orden.

De un modo semejante se puede definir un sistema de r ecuaciones con r funciones incógnitas de orden superior.

Si el sistema (5.1) está resuelto respecto de las derivadas de orden mayor, es decir, en la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^{(m)} & = & f_1\left(t,x,x',\ldots,x^{(m-1)},y,y',\ldots,y^{(n-1)},z,z',\ldots,z^{(p-1)}\right)=0 \\ y^{(n)} & = & f_2\left(t,x,x',\ldots,x^{(m-1)},y,y',\ldots,y^{(n-1)},z,z',\ldots,z^{(p-1)}\right)=0 \\ z^{(p)} & = & f_3\left(t,x,x',\ldots,x^{(m-1)},y,y',\ldots,y^{(n-1)},z,z',\ldots,z^{(p-1)}\right)=0 \end{array}\right. \tag{5.2}$$

recibe el nombre de **Canónico** o **Explícito**.

Ejemplo 5.1.2 .
Un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden con m funciones incógnitas $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_m(t)$ explícito, es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & f_1(t,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ y_2'(t) & = & f_2(t,y_1,y_2,\ldots,y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m'(t) & = & f_m(t,y_1,y_2,\ldots,y_m) \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Si introducimos las matrices columnas:

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad y \quad F=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix},$$

entonces el sistema se escribe matricialmente así:

$$\frac{dY}{dt}=F(t,Y). \tag{5.4}$$

Una solución del sistema (5.3) o bien (5.4) sobre un intervalo $[a,b]$, es un sistema de m funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_m(t)$, derivables sobre $[a,b]$ que verifica el sistema (5.3) o bien (5.4) para todo $t\in[a,b]$. ▲

5.1.2. Transformacion de un Sistema de Orden Superior en un Sistema de Primer Orden

Teorema 5.1.3 .
Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede ser transformado en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, introduciendo nuevas funciones incógnitas.

Demostración.

Consideremos el sistema (5.2) e introduzcamos las siguientes funciones incógnitas:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{dx}{dt}=x_1, & \frac{dx_1}{dt}=x_2, & \frac{dx_2}{dt}=x_3, & \ldots & \frac{dx_{m-2}}{dt}=x_{m-1}\\
\frac{dy}{dt}=y_1, & \frac{dy_1}{dt}=y_2, & \frac{dy_2}{dt}=y_3, & \ldots & \frac{dy_{n-2}}{dt}=y_{n-1}\\
\frac{dz}{dt}=z_1, & \frac{dz_1}{dt}=z_2, & \frac{dz_2}{dt}=z_3, & \ldots & \frac{dz_{p-2}}{dt}=z_{p-1}.
\end{array}$$

Si observamos que:

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}},\ \frac{dy_k}{dt}=\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}},\ \frac{dz_k}{dt}=\frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}},$$

entonces el sistema (5.2) se transforma en el sistema de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{m-1}}{dt} &= f_1\left(t,x,x_1,\ldots,x_{m-1},y,y_1,\ldots,y_{n-1},z,z_1,\ldots,z_{p-1}\right)\\
\frac{dy_{n-1}}{dt} &= f_2\left(t,x,x_1,\ldots,x_{m-1},y,y_1,\ldots,y_{n-1},z,z_1,\ldots,z_{p-1}\right)\\
\frac{dz_{p-1}}{dt} &= f_3\left(t,x,x_1,\ldots,x_{m-1},y,y_1,\ldots,y_{n-1},z,z_1,\ldots,z_{p-1}\right),
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{array}{lllll}
\frac{dx}{dt}=x_1, & \frac{dx_1}{dt}=x_2, & \frac{dx_2}{dt}=x_3, & \ldots & \frac{dx_{m-2}}{dt}=x_{m-1}\\
\frac{dy}{dt}=y_1, & \frac{dy_1}{dt}=y_2, & \frac{dy_2}{dt}=y_3, & \ldots & \frac{dy_{n-2}}{dt}=y_{n-1}\\
\frac{dz}{dt}=z_1, & \frac{dz_1}{dt}=z_2, & \frac{dz_2}{dt}=z_3, & \ldots & \frac{dz_{p-2}}{dt}=z_{p-1}.
\end{array}$$

Es decir, en un sistema canónico de primer orden con $m+n+p$ ecuaciones. Así hemos demostrado el teorema. ■

Teorema 5.1.4 .

1. *La resolución de una ecuación diferencial de orden n, se puede reducir a la resolución de un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.*

2. *Resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, se puede reducir a la resolución de una ecuación diferencial de orden n e inversamente.*

Demostración.

1. Consideramos la ecuación diferencial de orden n resuelta respecto de $y^{(n)}$:

   $$y^{(n)}=f\left(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right). \tag{5.5}$$

   Si introducimos las funciones $y_1=y'$, $y_2=y_1'$, $y_3=y_2'$, $y_{n-1}=y_{n-2}'$ la ecuación (5.5) se transforma en un sistema de n ecuaciones de primer orden

   $$\frac{dy}{dt}=y_1,\ \frac{dy_1}{dt}=y_2,\ \ldots\ \frac{dy_{n-2}}{dt}=y_{n-1}\ \frac{dy_{n-1}}{dt}=f\left(t,y,y_1,\ldots,y_{n-1}\right).$$

2. Sea ahora el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = & f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} & = & f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} & = & f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{5.6}$$

Derivamos $n-1$ veces la primera ecuación de (5.6) y derivamos luego $n-2$ veces todas las otras ecuaciones del mismo sistema obteniéndo $n^2 - n + 1$ ecuaciones. Eliminando de entre estas ecuaciones a y_2, y_3, y_4, ..., y_n y todas sus derivadas (en total $n^2 - n$ incógnitas) tenemos así $n^2 - n + 1$ ecuaciones y $n^2 - n$ incógnitas. El resultado de la eliminación es una relación entre y_1 y sus derivada hasta el orden n

$$y_1^{(n)} = \Phi\left(t, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{5.7}$$

Es decir, resolver el sistema (5.6) se ha reducido a resolver la ecuación (5.7). Por tanto, hemos así demostrado el teorema.

■

Observaciones.

1. Puesto que toda ecuación diferencial de orden n es equivalente con un sistema de n ecuaciones de primer orden, podemos decir que un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior, es equivalente con un sistema de primer orden.

2. Todo resultado para un sistema de n ecuaciones de primer orden, puede ser usado para el estudio de ecuaciones diferenciales de orden superior.

3. Si logramos obtener la solución general de la ecuación diferencial (5.7), entonces podemos obtener la solución general de la ecuación (5.6), sólamente derivando y con algunos cálculos algebraicos.

Ejemplo 5.1.5 .
Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & x + 2y \\ \frac{dy}{dt} & = & -2x + 5y \end{cases}$$

Solución.
Por un lado, derivando la primera ecuación obtenemos $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$. *Reemplazando* $\frac{dy}{dt}$ *resulta* $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 4x + 10y$.

Por otro, despejando y *de la primera ecuación dada y reemplazando en la segunda obtenemos* $\frac{dy}{dt} = -\frac{9}{2}x + \frac{5}{2}\frac{dx}{dt}$. *Igualando esta expresión a la original de* $\frac{dy}{dt}$ *resulta* $y = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$. *Finalmente reemplazando esta expresión de* y *en la última de* $\frac{d^2x}{dt^2}$ *tenemos:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0,$$

cuya solución es $x(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}$. *Como* $y = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x$ *obtenemos* $y(t) = C_1e^{3t} + C_2(\frac{1}{2} + t)e^{3t}$. *Por tanto, la solución general del sistema es la familia de curvas* (Γ) *definida para* $t \in \mathbb{R}$ *por:*

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= C_1e^{3t} + C_2te^{3t} \\ y &= C_1e^{3t} + C_2(\frac{1}{2} + t)e^{3t}. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 5.1.6 .
Resuelva el sistema:

$$\begin{array}{rcl|} \dot{x} &=& y \\ \dot{y} &=& z \\ \dot{z} &=& x \\ \hline \end{array}$$

Solución.
Derivando la primerra ecuación obtenemos $\ddot{x} = \dot{y} = z$. *Derivando nuevamente tenemos* $\dddot{x} = \dot{z} = x$, *por tanto,* $\dddot{x} - x = 0$, *que tiene por solución:*

$$x(t) = C_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right].$$

Puesto que $y = \dot{x}$ *tenemos:*

$$y(t) = C_1e^t + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\sqrt{3}C_2 - C_1\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \left(\sqrt{3}C_1 + C_2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right].$$

Finalmente, como $z = \dot{y}$ *el lector no tendrá dificultad en concluir el ejemplo.* ▲

5.2. Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones

5.2.1. Problema de Cauchy

Consideremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{cases} \tag{5.8}$$

con f y g contínuas en un dominio $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3$. El problema de determinar una solución (t) e $y(t)$ del sistema (5.8) que para $t = t_0$, tome los valores iniciales x_0 e y_0, $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{D}$, se llama **Problema de Cauchy**.

El teorema que sigue, nos da condiciones suficientes para que esta solución exista y sea única, además el método de demostración de aproximaciones sucesivas nos entrega un método efectivo de construcción para la solución.

Teorema 5.2.1 . (De Existencia y Unicidad)
Supongamos el sistema (5.8) satisface las siguientes hipótesis:

1. *Sea* (t_0, x_0, y_0) *un punto del espacio* $\mathbb{R}^3$. *Las funciones* $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ *son contínuas en el intervalo cerrado* $\mathbb{D}$ *definido por:*
$$\mathbb{D} = \{|t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b,\ |y - y_0| \leq c\}.$$
2. *Las funciones* f *y* g *satisfacen la condición de Lipschitz para todo* (t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) *en* $\mathbb{D}$.
$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| &\leq A|x_2 - x_1| + B|y_2 - y_1| \\ |g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| &\leq A|x_2 - x_1| + B|y_2 - y_1|, \end{aligned}$$
donde $A > 0$ *y* $B > 0$ *son constantes.*

En estas condiciones existe una solución del sistema dado $x = \varphi(t)$ *e* $y = \phi(t)$ *con las funciones* φ *y* ϕ *derivables sobre el intervalo* $|t - t_0| \leq h$, *donde* $h \leq a$ *tal que en* $t = t_0$ *toma los valores* $x_0 = \varphi(t_0)$ *e* $y_0 = \phi(t_0)$.

Demostración.
Las funciones $f(t, x, y)$ y $g(t, x, y)$ son contínuas sobre el intervalo cerrado $\mathbb{D}$, por lo tanto, son acotadas sobre $\mathbb{D}$. Sea $M > 0$ tal que tengamos:
$$|f(t, x, y)| \leq M,\ |g(t, x, y)| \leq M,$$
$\forall (t, x, y) \in \mathbb{D}$, tomemos $h = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}\}$. Para la determinación de la solución $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ usaremos el *Método de Aproximaciones Sucesivas*, presentado en la demostración del teorema de existencia para ecuaciones diferenciales de primer orden. El método consiste en construir, de aproximación en aproximación, dos sucesiones de funciones
$$\begin{aligned} &x_0,\ x_1(t), \ldots,\ x_n(t), \ldots \\ &y_0,\ y_1(t), \ldots,\ y_n(t), \ldots \end{aligned}$$
y demostraremos que cada sucesión converge uniformemente a la función $\varphi(t)$, y $\phi(t)$ respectivamente, funciones que cumplen las condiciones del enunciado del teorema.

La aproximación de orden cero para la primera sucesion es x_0, y para la segunda es y_0, es decir, los valores iniciales. Las siguientes aproximaciones se definen así:
$$\left.\begin{array}{ll} x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0, y_0)ds, & y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x_0, y_0)ds \\ x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s), y_1(s))ds, & y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x_1(s), y_1(s))ds \\ \vdots & \vdots \\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s), y_{n-1}(s))ds, & y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, x_{n-1}(s), y_{n-1}(s))ds \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \quad (5.9)$$
De esta manera obtenemos las siguientes dos sucesiones de funciones
$$\begin{aligned} &x_0,\ x_1(t), \ldots,\ x_n(t), \ldots \\ &y_0,\ y_1(t), \ldots,\ y_n(t), \ldots \end{aligned}$$
con las siguientes propiedades:

1. Las aproximaciones $x_n(t)$ e $y_n(t)$, $\forall n$ cumplen la condición inicial pues $x_n(t_0) = x_0$ e $y_n(t_0) = y_0$, puesto que para $t = t_0$, las integrales son nulas.

2. Las aproximaciones $x_n(t)$ e $y_n(t)$ son funciones contínuas sobre $[t_0 - h, t_0 + h]$.

   En efecto, como f y g son contínuas sobre $\mathbb{D}$, tenemos que todas las integrales que intervienen en (5.9) son funciones contínuas $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

3. Si $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, entonces $x \in [x_0 - b, x_0 + b]$ e $y_n \in [y_0 - c, y_0 + c]$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Lo que demostraremos por recurrencia. Tenemos:

   $$|f(t, x_0, y_0)| \leq M, \;\; |g(t, x_0, y_0)| \leq M,$$

   es decir,

   $$\begin{aligned} |x_1 - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_0, y_0)ds\right| \leq M \left|\int_{t_0}^{t} ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b, \\ |y_1 - y_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} g(s, x_0, y_0)ds\right| \leq M \left|\int_{t_0}^{t} ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq c, \end{aligned}$$

   puesto que $h = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}\}$.
   Supongamos ahora que las aproximaciones de orden $n-1$ cumplen esta condición $x_{n-1} \in [x_0 - b, x_0 + b]$ e $y_{n-1} \in [y_0 - c, y_0 + c]$, de aquí resulta que:

   $$|f(t, x_{n-1}, y_{n-1})| \leq M, \;\; |g(t, x_{n-1}, y_{n-1})| \leq M,$$

   podemos escribir, por lo tanto:

   $$\begin{aligned} |x_n(t) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}, y_{n-1})ds\right| \leq M \left|\int_{t_0}^{t} ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b, \\ |y_n(t) - y_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} g(s, x_{n-1}, y_{n-1})ds\right| \leq M \left|\int_{t_0}^{t} ds\right| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq c, \end{aligned}$$

   por lo tanto para $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, todas las aproximaciones pertenecen al intervalo $[x_0 - b, x_0 + b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$.

Demostraremos ahora que las sucesiones de funciones:

$$\begin{array}{c} x_0, \;\; x_1(t), \ldots, \;\; x_n(t), \ldots \\ y_0, \;\; y_1(t), \ldots, \;\; y_n(t), \ldots \end{array}$$

convergen uniformemente sobre el segmento $[t_0 - h, t_0 + h]$, a las funciones $\varphi(t)$, $\phi(t)$ respectivamente cuando $n \to \infty$. La convergencia de estas series es equivalente con la convergencia de las series de funciones:

$$\begin{array}{c} x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots \\ y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \end{array} \tag{5.10}$$

puesto que las sucesiones de las sumas parciales de ambas series son justamente las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$.

Para demostrar que las series (5.10) convergen uniformemente sobre el segmento considerado es suficiente construir una serie numérica mayorante, con términos positivos, y convergente, esto es el Criterio M de Weierstrass.

Demostremos que tenemos:

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| &\leq M\,(A+B)^{n-1}\,\tfrac{|t-t_0|^n}{n!} \\ |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq M\,(A+B)^{n-1}\,\tfrac{|t-t_0|^n}{n!} \end{aligned} \tag{5.11}$$

para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Mostraremos esta desigualdad por inducción. Tenemos:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_0, y_0)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} f(s, x_0, y_0)ds \leq M|t - t_0| \\ |y_1(t) - y_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} g(s, x_0, y_0)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} g(s, x_0, y_0)ds \leq M|t - t_0|. \end{aligned}$$

Es decir, para $n = 1$ se cumplen las desigualdades (5.11). Supongamos ahora que se cumplen para hasta $n-1$, demostraremos que se cumplen para n. Tenemos:

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s, x_{n-1}, y_{n-1}\right) - f\left(s, x_{n-2}, y_{n-2}\right)\right] ds\right|,$$

y si usamos la condición de Lipschitz y (5.11) para $n-1$, resulta:

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} [A|x_{n-1} - x_{n-2}| + B|y_{n-1} - y_{n-2}|]ds\right| \\ &\leq (A+B)\left|\int_{t_0}^{t} M(A+B)^{n-2}\frac{|s-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}ds\right|, \end{aligned}$$

integrando obtenemos:

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq M\,(A+B)^{n-1}\,\frac{|t-t_0|^n}{n!}.$$

Análogamente se procede para la otra desigualdad de (5.11).

Puesto que $|t - t_0| \leq h$, de lo anterior deducimos las desigualdades:

$$\begin{aligned} |x_n\,(t) - x_{n-1}\,(t)| &\leq M\,(A+B)^{n-1}\,\frac{h^n}{n!} \\ |y_n\,(t) - y_{n-1}\,(t)| &\leq M\,(A+B)^{n-1}\,\frac{h^n}{n!} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las series (5.10) son absoluta y uniformemente convergentes sobre el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$, puesto que son mayoradas por la serie de términos positivos, convergente.

$$M\,(A+B)^{-1}\,\frac{[(A+B)\,h]^n}{n!},$$

por lo tanto, las sucesiones de funciones definidas por:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}, y_{n-1})ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s), \phi(s)\right) ds \\ \phi(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} g(s, x_{n-1}, y_{n-1})ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} g\left(s, \varphi(s), \phi(s)\right) ds\end{aligned}$$

son funciones contínuas sobre $[t_0 - h, t_0 + h]$. Tenemos, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f\left(\tau, \varphi(\tau), \phi(\tau)\right) d\tau \\ \phi(t) &= y_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} g\left(\tau, \varphi(\tau), \phi(\tau)\right) d\tau\end{aligned} \tag{5.12}$$

Como f y g son contínuas se sigue que φ y ϕ son derivables. Si derivamos (5.12) obtenemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f\left(t, \varphi, \phi\right), \ \frac{d\phi}{dt} = g\left(t, \varphi, \phi\right),$$

para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, es decir, φ y ϕ son las soluciones buscadas. Las funciones φ y phi verifican las condiciones iniciales, puesto que para $t = t_0$ en (5.12) las integrales son nulas y $\varphi\left(t_0\right) = x_0$ y $\phi\left(t_0\right) = y_0$.

Nos queda demostrar que la solución $\varphi\left(t\right)$ y $\phi\left(t\right)$ así encontrada es única en las condiciones iniciales dadas. Supongamos que existe otra solución $u\left(t\right)$ y $v\left(t\right)$ que satisface la misma condición inicial, entonces tenemos:

$$u\left(t\right) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, u(s), v(s)\right) ds, \ v\left(t\right) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g\left(s, u(s), v(s)\right) ds,$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\left|x_n\left(t\right) - u\left(t\right)\right| &= \left|\int_{t_0}^{t} \left[f\left(s, x_{n-1}, y_{n-1}\right) - f\left(s, u(s), v(s)\right)\right] ds\right| \\ \left|y_n\left(t\right) - v\left(t\right)\right| &= \left|\int_{t_0}^{t} \left[g\left(s, x_{n-1}, y_{n-1}\right) - g\left(s, u(s), v(s)\right)\right] ds\right|\end{aligned}$$

y usando la condición de Lipschitz:

$$|x_n(t) - u(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left(A|x_{n-1} - u| + B|y_{n-1} - v|\right) ds\right|,$$

de donde resulta, por recurrencia:

$$\begin{aligned}|x_n - u| &\leq M\left(A + B\right)^{n-1}\frac{h^n}{n!} \\ |y_n - v| &\leq M\left(A + B\right)^{n-1}\frac{h^n}{n!}.\end{aligned}$$

Deducimos así que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = u(t)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = v(t)$, es decir, $u(t) = \varphi(t)$ y $v(t) = \phi(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, lo que demuestra la unicidad.

Por tanto, el teorema queda completamente probado. ∎

Para sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden, explícitas, tenemos el siguiente teorema de existencia, que se demuestra de manera análoga.

Teorema 5.2.2 .
Sea:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = & f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} & = & f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} & = & f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden que cumplen las siguientes condiciones:

1. *Sea $(t, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ un punto de $\mathbb{R}^{n+1}$, las funciones $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, son contínuas en el intervalo cerrado $\mathbb{D}$ definido por:*

$$\mathbb{D} = \{|t - t_0| \leq a,\ |y_k - y_{k0}| \leq b,\ k = 1, 2, 3 \ldots, n\}.$$

2. *Para todo $(t, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \in \mathbb{D}$, $(t, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) \in \mathbb{D}$ las funciones f_k satisfacen la desigualdad de Lipschitz:*

$$\begin{aligned} |f_k(t, y_{11}, \ldots, y_{n1}) - f_k(t, y_{12}, \ldots, y_{n2})| \ \leq \ & A_1|y_{11} - y_{12}| + A_2|y_{21} - y_{22}| + \ldots \\ & \ldots + A_n|y_{n1} - y_{n2}|, \end{aligned}$$

con A_1, A_2, …, A_n constantes positivas.

En estas condiciones existe una solución del sistema dado, y esta es de la forma $y_1 = \varphi_1(t)$, $y_2 = \varphi_2(t)$, …, $y_n = \varphi_n(t)$, donde las funciones φ_k son derivables sobre un intervalo $|t - t_0| \leq h$ con $h \leq a$, y que para $t = t_0$, toma respectivamente los valores $\varphi_k(t_0) = y_{k0}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Las funciones φ_1, φ_2, φ_3, …, φ_n verifican el siguiente sistema de ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= y_{10} + \int_{t_0}^{t} f_1(s, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, ds \\ \varphi_2(t) &= y_{20} + \int_{t_0}^{t} f_2(s, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, ds \\ \varphi_3(t) &= y_{30} + \int_{t_0}^{t} f_3(s, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, ds \\ \vdots \ & \ \vdots \quad \vdots \\ \varphi_n(t) &= y_{n0} + \int_{t_0}^{t} f_n(s, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, ds. \end{aligned}$$

5.2.2. Consecuencias del Teorema de Existencia y Unicidad

1. En el enunciado del teorema de existencia y unicidad y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0} son fijos, pero arbitrarios, por tanto, tenemos el siguiente resultado:

   Teorema 5.2.3 .
   La solución de un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

   $$\frac{dy_k}{dt} = f_k\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \tag{5.13}$$

   con f_k contínuas y con derivadas parciales de primer orden contínuas en un dominio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, depende de n constantes arbitrarias.

   Demostración.

   En efecto, si las funciones f_k son contínuas y con derivadas parciales de primer orden contínuas, entonces las funciones f_k cumplen las condiciones de Lipschitz en $\mathbb{D}$, es decir se cumplen las condiciones del teorema de existencia en $\mathbb{D}$.

   El conjunto de las soluciones, definidas del teorema de existencia en $\mathbb{D}$, se llama integral general del sistema (5.13) en $\mathbb{D}$.

   El conjunto de estas soluciones, forma una familia de curvas, que dependen de n constantes arbitrarias. ■

   Una solución del sistema (5.13) que se obtiene de la solución general dando valores particulares a las constantes arbitrarias se llama **Solucion Particular**.

   El problema de la determinación de una solución particular $y_1(t)$, $y_2(t)$,..., $y_n(t)$ del sistema (5.13) que para $t = t_0$ tome los valores iniciales $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$, se llama el problema de Cauchy.

2. Hemos visto que una ecuación diferencial de orden n:

   $$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{5.14}$$

   se transforma en un sistema de $n-$ecuaciones diferenciales lineales, al introducir $n-1$ funciones $y_1 = y'$, $y_2 = y_1' = y''$, ... $y_{n-1} = y^{(n-1)}$, entonces tenemos:

   $$\frac{dy}{dx} = y_1,\ \frac{dy_1}{dx} = y,\ \ldots\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y_1, \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{5.15}$$

   cuya solución depende de n constantes arbitrarias. Deduciremos de aquí que la solución general de una ecuación diferencial de orden n:

   $$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

   depende de n constantes arbitrarias.

3. Sea el sistema (5.15), el sistema en el que se transforma la ecuación diferencial (5.14) de orden n. Del teorema de existencia y unicidad, resulta que si en el punto $x_0 \in [a,b]$ nos dan los valores

$$y(x_0) = y_0,\ y_1(x_0) = y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y_{n-1}(x_0) = y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1},$$

entonces el sistema (5.15) tiene una solución única que cumple estas condiciones iniciales.

5.3. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

5.3.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Homogéneos

Definición 5.3.1 . (Sistema de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden) *Sean $a_{ij}(t)$, $f_j(t) \in \mathcal{C}^1$ y $a_{10}(t) \neq 0$, $i,j = 0,1,2,\ldots,n$ en $[a,b]$, entonces:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} L_1\left[y_1,\ldots,y_n\right] & = & a_{10}(t)\frac{dy_1}{dt} + a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n = f_1(t) \\ L_2\left[y_1,\ldots,y_n\right] & = & a_{20}(t)\frac{dy_2}{dt} + a_{21}(t)y_1 + \ldots + a_{2n}(t)y_n = f_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n\left[y_1,\ldots,y_n\right] & = & a_{n0}(t)\frac{dy_n}{dt} + a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n = f_n(t) \end{array}\right. \tag{5.16}$$

se llama un **Sistema de n Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden** *con n incógnitas y_1, y_2, …, y_n,* **no homogéneo**.

Si $f_j(t) = 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, $t \in [a,b]$ el sistema se dice **homogéneo**.

Nos ocuparemos ahora de sistemas homogéneos:

$$\begin{array}{rcl} L_1\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right] & = & 0 \\ L_2\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right] & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n\left[y_1,y_2,\ldots,y_n\right] & = & 0 \end{array}$$

5.3.2. Forma Matricial de un Sistema Lineal

Si introducimos las matrices:

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} a_{10}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{20}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n0}(t) \end{bmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T,\ \frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} & \frac{dy_2}{dt} & \cdots & \frac{dy_n}{dt} \end{bmatrix}^T \text{ y } F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

entonces el sistema (5.16) se escribe matricialmente como:

$$A_0(t)\frac{dY}{dt} + A_1(t)\,Y = F(t),$$

en ambos casos $A_0(t) \neq 0$ sobre $[a,b]$. Si $F = 0$ tenemos el sistema es homogéneo:

$$A_0(t)\frac{dY}{dt} + A_1(t)Y = 0.$$

5.3.3. Soluciones Particulares

Definición 5.3.2 . (Solución del Sistema Homogéneo)
Un sistema de n funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t) \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ forman una **Solución del Sistema Homogéneo** *(5.15) sobre $[a,b]$ si verifica el sistema (5.15) $\forall t \in [a,b]$.*

Ejemplo 5.3.3 .
Para el sistema lineal de primer orden homogéneo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 16y \end{cases}$$

tenemos que las funciones $x = e^{4t}$ e $y = \frac{1}{4}e^{4t}$, $t \in \mathbb{R}$, forman una solución de. ▲

Teorema 5.3.4 .
Si y_1, y_2, …, y_n e $\widetilde{y}_1$, $\widetilde{y}_2$, …, $\widetilde{y}_n$, $t \in [a,b]$ son soluciones del sistema homogéneo:

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0,$$

$k = 1, 2 \ldots, n$, entonces las funciones:

$$C_1y_1 + C_2\widetilde{y}_1,\ C_1y_2 + C_2\widetilde{y}_2,\ \ldots\ C_1y_n + C_2\widetilde{y}_n,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, forman una solución del sistema dado sobre $[a,b]$.

Demostración.
El operador L_k es lineal, por lo tanto, podemos escribir:

$$L_n[C_1y_{11} + C_2y_{21}, \ldots, C_1y_{1n} + C_2y_{2n}] = C_1L_k[y_{11}, \ldots, y_{1n}] + C_2L_k[y_{21}, \ldots, y_{2n}] = 0.$$

■

En general, si:

$$\begin{array}{llll} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nn}, \end{array}$$

son n soluciones del sistema homogéneo (5.15), entonces:

$$\begin{array}{c} C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_n y_{n1}, \\ C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{n2}, \\ \vdots \\ C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_n y_{nn}, \end{array}$$

donde C_1, C_2, ..., C_n son n constantes arbitrarias, es también solución del sistema (5.15).

Definición 5.3.5 . (Sistema Fundamental de Soluciones, Wronskiano)
Las siguientes n soluciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n} \\ y_2 & = & y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn} \end{array} \right. \tag{5.17}$$

del sistema homogéneo

$$L_k \left[y_1, y_2, \ldots, y_n \right] = 0, \tag{5.18}$$

$k = 1, 2 \ldots, n$, definidas sobre $[a, b]$, se dice que forman un **Sistema Fundamental de Soluciones** *sobre el mismo intervalo. Si el determinante:*

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$\forall t \in [a, b]$ se llama **Wronskiano** *de las funciones y_1, y_2, ..., y_n.*

Observaciones

1. Si el determinante $W(t)$ no se anula en ningún punto del intervalo $[a, b]$, entonces el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas C_1, C_2, ..., C_n dado por:

$$\left. \begin{array}{rcl} C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \ldots + C_n y_{1n} & = & 0 \\ C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{2n} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \ldots + C_n y_{nn} & = & 0 \end{array} \right|$$

admite para todo $t \in [a, b]$, sólo la solución trivial $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, lo que resulta inmediatamente aplicando el Teorema de Rouche.

Diremos que el sistema (5.16) con $W(t) \neq 0$ sobre $[a, b]$ es linealmente independiente (L.I.) sobre $[a, b]$.

2. Se puede demostrar, igual que para las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior que si y_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ son n soluciones del sistema (5.18) definidas en $[a, b]$, con a_{ij} contínuas y $a_{10} \neq 0$ sobre $[a, b]$ y si $W(t_0) \not\equiv 0$ para $t_0 \in [a, b]$, entonces este no se anula en ningún punto de $[a, b]$, pues tenemos la relación

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{a_{11}}{a_{01}} + \frac{a_{22}}{a_{20}} + \ldots + \frac{a_{nn}}{a_{n0}}\right) ds},$$

llamada **Fórmula de Abel-Liouville-Jacobi**.

5.3.4. Solucion General de un Sistema Homogéneo

Teorema 5.3.6 .
Sean el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{10}(t)\frac{dy_1}{dt} + a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n &=& 0 \\ a_{20}(t)\frac{dy_2}{dt} + a_{21}(t)y_1 + \ldots + a_{2n}(t)y_n &=& 0 \\ \vdots &\vdots& \vdots \\ a_{n0}(t)\frac{dy_n}{dt} + a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n &=& 0 \end{array}\right. \tag{5.19}$$

con $a_{ij}(t) \in \mathcal{C}^1$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, $a_{10}(t) \neq 0$ sobre $[a, b]$ y

$$\left\{\begin{array}{llll} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nn}, \end{array}\right. \tag{5.20}$$

un sistema fundamental de soluciones sobre $[a, b]$. Entonces, la solución general del sistema (5.19) sobre $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ esta dada por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& C_1y_{11} + C_2y_{21} + \ldots + C_ny_{n1}, \\ y_2 &=& C_1y_{12} + C_2y_{22} + \ldots + C_ny_{n2}, \\ \vdots &\vdots& \vdots \\ y_n &=& C_1y_{1n} + C_2y_{2n} + \ldots + C_ny_{nn}, \end{array}\right. \tag{5.21}$$

donde C_1, C_2, ..., C_n son constantes arbitrarias.

Demostración.

La solución general del sistema (5.19) en $\mathbb{D} = [a, b] \times \mathbb{R}^n$, es el conjunto de soluciones en $\mathbb{D}$ definidas por el Teorema 5.2.1, tal que por cada punto del dominio $\mathbb{D}$ pasa una y sólo una solución.

Si los a_{ij}, tienen derivadas de primer orden contínuas y $a_{10} \neq 0$ sobre $[a, b]$, entonces estamos en las condiciones del Teorema 5.2.1, puesto que el sistema se escribe:

$$\frac{dy_k}{dt} = -\frac{a_{k1}}{a_{k0}}y_1 - \frac{a_{k2}}{a_{k0}}y_2 - \ldots - \frac{a_{kn}}{a_{k0}}y_n,$$

o bien:

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = -\sum_{h=1}^{n} \frac{a_{kh}}{a_{k0}} y_h,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, f_k contínuas, con primera derivada contínua sobre $[a, b]$, y puesto que todas las funciones que la componen tienen esta propiedad, entonces son también acotadas, y por tanto, cumplen la condicion de Lipschitz sobre $[a, b]$.

Queda demostrar que podemos disponer de las constantes C_1, C_2, ..., C_n tal que para todo $t \in [a, b]$ y cualquier $(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ podemos determinar la solución $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ del sistema (5.19) que satisface las condiciones iniciale:,

$$y_1(t_0) = y_{10},\ y_2(t_0) = y_{20}, \ldots,\ y_n(t_0) = y_{n0}.$$

Imponiendo estas condiciones a la solución (5.21), obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1 y_{11}(t_0) + C_2 y_{21}(t_0) + \ldots + C_n y_{n1}(t_0) & = & y_{10} \\ C_1 y_{12}(t_0) + C_2 y_{22}(t_0) + \ldots + C_n y_{n2}(t_0) & = & y_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 y_{1n}(t_0) + C_2 y_{2n}(t_0) + \ldots + C_n y_{nn}(t_0) & = & y_{n0} \end{array}\right. \tag{5.22}$$

que es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas C_1, C_2, ..., C_n, con el $W\left(t_0\right) \neq 0$ por hipótesis $\forall t \in [a, b]$. Resolviendo el sistema (5.22) obtenemos, según la regla de Cramer una solución ynica $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, ..., $\bar{C}_n$, la que al reemplazarla en (5.21) resulta la solución buscada. Por lo tanto, de (5.21) podemos obtener la solución al problema de Cauchy en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, del sistema de ecuaciones diferenciales (5.19).

Queda por demostrar que un sistema de n ecuaciones lineales (5.19) tiene efectivamente n soluciones particulares linealmente independientes, y por lo tanto, que forman un sistema fundamental de soluciones, lo que se deja como propuesto al lector. ■

Ejemplo 5.3.7 .
El sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} & = & 5x - 16y \end{array}\right.$$

tiene soluciones particulares $x_1 = e^{4t}$, $x_2 = e^{-17t}$, $y_1 = \frac{1}{4}e^{4t}$ *e* $y_2 = -5e^{-17t}$, *que forman un sistema fundamental de soluciones, puesto que:*

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{4t} & \frac{1}{4}e^{4t} \\ e^{-17t} & -5e^{-17t} \end{vmatrix} = -\frac{21}{4}e^{-13t} \neq 0,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. *Luego, la solución general del sistema es:*

$$\begin{cases} x(t) &= C_1 e^{4t} + C_2 e^{-17t} \\ y(t) &= \frac{C_1}{4} e^{4t} - 5C_2 e^{-17t}. \end{cases}$$

▲

Se verifica fácilmente que el sistema lineal homogéneo, de primer orden que tiene por sistema fundamental de soluciones a (5.20) está dado por:

$$L_k[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} \frac{dy_k}{dt} & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{dy_{1k}}{dt} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dy_{nk}}{dt} & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 5.3.8 .

Forme el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, que admite como sistema fundamental de soluciones a $x_1 = \cos t$, $y_1 = \operatorname{sen} t$, $x_2 = 4\operatorname{sen} t$ *e* $y_2 = 4\cos t$, *para* $t \in [0, \pi]$.

Solución.

El Wronskiano del sistema de soluciones es:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & 4\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & 4\cos t \end{vmatrix} = 4\cos 2t \neq 0, \ \forall t \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

luego, son un sistema fundamental $\forall [a,b] \subset [0,\pi]$, *que no contenga a* $\frac{\pi}{4}$ *y* $\frac{3\pi}{4}$. *Bajo esta condición tenemos:*

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & x & y \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 4\cos t & 4\operatorname{sen} t & 4\cos t \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $\dot{x}\cos 2t + x\operatorname{sen} 2t - y = 0$, *y*

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & x & y \\ \cos t & \cos t & \operatorname{sen} t \\ -4\operatorname{sen} t & 4\operatorname{sen} t & 4\cos t \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $\dot{y}\cos 2t - x + y\operatorname{sen} 2t = 0$. *Por tanto,*

$$\begin{cases} \dot{x}\cos 2t + x\operatorname{sen} 2t - y &= 0 \\ \dot{y}\cos 2t - x + y\operatorname{sen} 2t &= 0 \end{cases}$$

es el sistema requerido. ▲

5.3.5. Sistemas de Ecuaciones Lineales y No Homogéneos

Teorema 5.3.9 .
Sea el sistema de n ecuaciones diferenciales no homogéneas:

$$L_k\left[y_1, y_2, \ldots, y_n\right] = f_k\left(t\right), \tag{5.23}$$

f_k contínua en $[a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Su solución general se obtiene agregando a la solución general del homogéneo $L_k\left[y_1, y_2, \ldots, y_n\right] = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ una solución particular del sistema no homogéneo.

Demostración.
Sea $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, …, $\bar{y}_n$ una solución particular del sistema no homogéneo, es decir:

$$L_k\left[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\right] = f_k\left(t\right),$$

$t \in [a, b]$. Hacemos el cambio de funciones:

$$y_1 = z_1 + \bar{y}_1,\ y_2 = z_2 + \bar{y}_2, \ldots,\ y_n = z_n + \bar{y}_n,$$

por lo que tenemos:

$$L_k\left[z_1 + \bar{y}_1, z_2 + \bar{y}_2, \ldots, z_n + \bar{y}_n\right] = f_k\left(t\right),$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Luego,

$$L_k\left[z_1, z_2, \ldots, z_n\right] + L_k\left[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\right] = f_k\left(t\right),$$

pero

$$L_k\left[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n\right] = f_k\left(t\right),$$

$\forall k = 1, 2, \ldots, n$, por lo tanto:

$$L_k\left[z_1, z_2, \ldots, z_n\right] = 0, \tag{5.24}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Luego, resolver el sistema no homogéneo (5.23) se reduce a resolver el sistema homogéneo (5.24), cuando se conoce una solución particular del no homogéneo. ∎

Para determinar una solución particular del no homogéneo,usamos el **Método de Variación de Parámetros**.

Teorema 5.3.10 .
Dado el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneo

$$L_k\left[y_1, y_2, \ldots, y_n\right] = a_{k0}\frac{dy_k}{dt} + a_{k1}(t)y_1 + \ldots + a_{kn}(t)y_n = f_k(t), \tag{5.25}$$

$a_{k1}(t)$, $f_k(t)$ contínuas sobre $[a,b]$ y $a_{k0}(t) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea y_{k1}, y_{k2}, ..., y_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n$ un sistema fundamental de soluciones sobre $[a,b]$ del sistema homogéneo,

$$L_k\left[y_1, y_2, \ldots, y_n\right] = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Una solución particular $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ..., $\bar{y}_n$ del sistema no homogéneo (5.25) sobre $[a,b]$ está dada por:

$$\bar{y}_k = y_{1k}\int C_1'(t)dt + y_{2k}\int C_2'(t)dt + \ldots + y_{nk}\int C_n'(t)dt, \tag{5.26}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$ donde $C_1'(t)$, ..., $C_n'(t)$ es solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_{11}C_1'(t) + y_{21}C_2'(t) + \ldots + y_{n1}C_n'(t) & = & \frac{f_1(t)}{a_{10}(t)} \\ y_{12}C_1'(t) + y_{22}C_2'(t) + \ldots + y_{n2}C_n'(t) & = & \frac{f_2(t)}{a_{20}(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1n}C_1'(t) + y_{2n}C_2'(t) + \ldots + y_{nn}C_n'(t) & = & \frac{f_n(t)}{a_{n0}(t)} \end{array}\right. \tag{5.27}$$

Luego, efectuando cálculos tenemos:

$$\int C_1'(t)dt = \varphi_1(t) + A_1, \ldots, \int C_n'(t)dt = \varphi_n(t) + A_n,$$

y obtenemos la solución general del sistema no homogéneo dada por:

$$y_k = A_1y_{1k} + A_2y_{2k} + \ldots + A_ny_{nk} + y_{1k}\varphi_1(t) + \ldots + y_{nk}\varphi_n(t),$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración.

Sea y_{k1}, y_{k2}, y_{k3}, ..., y_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n$ un sistema fundamental de soluciones sobre $[a,b]$ del sistema homogéneo, por tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$y_k = C_1y_{1k} + C_2y_{2k} + \ldots + C_ny_{nk},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, donde C_1, C_2, ..., C_n son n constantes arbitrarias.

Supongamos ahora que C_k son funciones de t. Si derivamos a y_k en esta hipótesis y teniendo en cuenta las condiciones (5.27), constatamos que y_k verifica el sistema no homogéneo (5.23). En efecto, reemplazando en la ecuación L_k del sistema tenemos:

$$a_{k0}\sum \_h = 1^n C_h\frac{dy_{hk}}{dt} + a_{10}\sum_{h=1}^{n} y_{hk}\frac{dC_h}{dt} + \sum_{h=1}^{n} a_{kh}\left(\sum_{j=1}^{n} C_jy_{jk}\right) = f_k\left(t\right),$$

y teniendo en cuenta la relación k de (5.27) queda solamente:

$$\sum_{h=1}^{n} C_kL_k(y_{1h}, y_{2h}, \ldots, y_{nh}) = 0,$$

relación que se verifica idénticamente sobre $[a,b]$. Lo que demuestra el teorema. ■

Ejemplo 5.3.11 .
Considere el sistema de ecuaciones diferenciales definido para $t \in [1, \infty)$*:*

$$\begin{cases} t^2 \frac{dx}{dt} - 4tx + 4y &= t \\ t\frac{dy}{dt} - 2tx + y &= t^2 \end{cases}$$

El homogéneo asociado es:

$$\begin{cases} t^2 \frac{dx}{dt} - 4tx + 4y &= 0 \\ t\frac{dy}{dt} - 2tx + y &= 0 \end{cases}$$

que admite las soluciones $x_1 = 1$, $y_1 = t$, $x_2 = 2t^2$ *e* $y_2 = t^3$, *con el Wronskiano:*

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{vmatrix} = -t^3 \neq 0,$$

en el dominio de definición del sistema dado. Luego, la solución general del homogéneo es:

$$\begin{aligned} x_h &= C_1 + 2C_2t^2 \\ y_h &= C_1t + C_2t^3. \end{aligned}$$

Aplicando variación de parámetros para hallar una solución particular del sistema no homogéneo tenemos:

$$\begin{cases} C_1' + 2C_2't^2 &= \frac{1}{t} \\ C_1't + C_2't^3 &= t \end{cases}$$

cuya solución es $C_1' = 2 - \frac{1}{t}$, $C_2' = \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2}$. *De donde,* $C_1 = 2t - \ln t$, $C_2 = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}$. *Luego, la solución general del no homogéneo es:*

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 + 2C_2t^2 + 2t - \ln t + 2t^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) = C_1 + 2C_2t^2 + 4t - \ln t - 1 \\ y(t) &= C_1t + C_2t^3 + t(2t - \ln t) + t^3\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) = C_1t + C_2t^3 + 3t^2 - t\ln t - \frac{1}{2}t. \end{aligned}$$

▲

5.4. Sistema de Ecuaciones Lineales con Coeficiantes Constantes

5.4.1. Sistemas Homogéneos

Un sistema de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &= 0 \\ \frac{dy_2}{dt} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n &= 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

se llama **Sistema de n Ecuaciones Diferenciales Lineales con n Funciones Incógnitas, con Coeficientes Constantes y Homogéneo**.

Ejemplo 5.4.1 .
Encuentre la solución general del sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{lrcl} (a) & \dot{x}+3x-2y & = & 0 \\ (b) & \dot{y}+2y-2z & = & 0 \\ (c) & \dot{z}-2z+3x & = & 0 \end{array}\right|$$

Solución.
De (a) obtenemos $y=\frac{1}{2}(\dot{x}+3x)$. Derivando (a) y despecjando $\dot{y}=\frac{1}{2}(\ddot{x}+3\dot{x})$. Por su parte, de (b) tenemos $z=\frac{1}{2}(\dot{y}+2y)$, que al reemplazar las expresiones y e $\dot{y}$ encontradas resulta $z=\frac{1}{4}\ddot{x}+\frac{5}{4}\dot{x}+\frac{3}{2}x$, lo que implica $\dot{z}=\frac{1}{4}\dddot{x}+\frac{5}{4}\ddot{x}+\frac{3}{2}\dot{x}$. Reemplazando en (c) obtenemos la ecuación de tercer orden:

$$\dddot{x}+3\ddot{x}-4\dot{x}=0,$$

cuya ecuación característica es $\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda=0$, lo que implica:

$$x(t)=C_1+C_2e^t+C_3e^{-4t}.$$

Como $y=\frac{1}{2}(\dot{x}+3x)$ tenemos:

$$y(t)=2C_2e^t-\frac{C_3}{2}e^{-4t}+\frac{3}{2}C_1.$$

Por su parte, de la relación $z=\frac{1}{4}\ddot{x}+\frac{5}{4}\dot{x}+\frac{3}{2}x$ resulta:

$$z(t)=3C_2e^t+\frac{C_3}{2}e^{-4t}+\frac{3}{2}C_1.$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$\left\{\begin{array}{lcr} x(t) & = & C_1+C_2e^t+C_3e^{-4t} \\ y(t) & = & 2C_2e^t-\frac{C_3}{2}e^{-4t}+\frac{3}{2}C_1 \\ z(t) & = & 3C_2e^t+\frac{C_3}{2}e^{-4t}+\frac{3}{2}C_1. \end{array}\right.$$

▲

Las operaciones de eliminación pueden ser largas y complicadas, pero es posible evitarlas del siguiente modo: Puesto que, un sistema lineal con coeficientes constantes siempre es equivalente con una ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes que admite soluciones de la forma $e^{\lambda t}$, entonces buscaremos para el sistema (5.28), directamente soluciones de esa forma:

$$y_1=A_1e^{\lambda t},\ y_2=A_2e^{\lambda t},\ \dots,\ y_n=A_ne^{\lambda t}. \tag{5.29}$$

Si derivamos (5.29), reemplazamos en (5.28), factorizamos por $e^{\lambda t}$ y eliminamos esta exponencial obtenemos el sistema algebraico en A_1, A_2, ..., A_n:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (a_{11}+\lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n & = & 0 \\ a_{21}A_1 + (a_{22}+\lambda)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn}+\lambda)A_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.30}$$

al que le imponemos que admita ademas otras soluciones, fuera de la trivial $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$. De acuerdo con el Teorema de Rouche se debe cumplir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5.31}$$

llamada **Ecuación característica** del sistema (5.28).

Lo mismo que para las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes, la determinacion de la solución general del sistema (5.28) se ha reducido a resolver la ecuación algebraica (5.31).

Tendremos también aquí situaciones diferentes según la naturaleza de las raíces de la ecuación característica, llamadas **Valores Propios**.

1. λ es una raíz simple de la ecuación característica (5.31), entonces el sistema admite una solución de la forma:

$$y_1 = A_1 e^{\lambda t},\ y_2 = A_2 e^{\lambda t}, \ldots,\ y_n = A_n e^{\lambda t}.$$

   Si reemplazamos λ en la ecuación algebraica (5.30) determinamos A_2, ..., A_n en función de A_1. Si reemplazamos $A_1 = 1$ obtenemos una solución particular del sistema dado (5.28).

2. Si $\lambda = \alpha \pm i\beta$ son raíces complejas simples de la ecuación característica (5.31), entonces son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (5.28).

$$y_1 = (A_1 \cos\beta t + B_1 \operatorname{sen}\beta t)e^{\alpha t}, \ldots, y_n = (A_n \cos\beta t + B_n \operatorname{sen}\beta t)e^{\alpha t}.$$

   Si reemplazamos estas soluciones en la ecuación diferencial (5.28) obtenemos por identificación un sistema algebraico que determina A_2, B_2, ..., A_n, B_n en función de A_1 y B_1. Tomando $A_1 = 0$ y $B_1 = 1$ y luego, $A_1 = 1$ y $B_1 = 0$ obtenemos dos soluciones del sistema (5.28).

3. λ es una raíz real de la ecuación característica de orden de multiplicidad $p+1$, entonces la solución del sistema (5.28) relativa a esta raíz es de la forma:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & (A_{11} + A_{12}t + \ldots + A_{1p+1}t^p)e^{\alpha t} \\ y_2 & = & (A_{21} + A_{22}t + \ldots + A_{2p+}t^p)e^{\alpha t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & (A_{n1} + A_{n2}t + \ldots + A_{np+1}t^p)e^{\alpha t} \end{array}$$

y todas las constantes A_{ij} se determinan en función de A_{11}, A_{12}, ..., A_{1p+1} remplazando en el sistema (5.28) e identificando.

4. $\lambda = \alpha \pm i\beta$ raíces complejas de la ecuación característica de orden de multiplicidad $p+1$. La solución del sistema (5.28) que aporta esta raíz es:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & (A_{11} + A_{12}t + \ldots + A_{1p+1}t^p)e^{\alpha t}\cos\beta t + (B_{11} + B_{12}t + \ldots + B_{1p+1}t^p)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & (A_{n1} + A_{n2}t + \ldots + A_{np+1}t^p)e^{\alpha t}\cos\beta t + (B_{n1} + B_{n2}t + \ldots + B_{np+1}t^p)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \end{array}$$

Todas las constantes A_{ij}, B_{ij} se determinan en función de A_{11}, A_{12}, ..., A_{1p+1}, B_{11}, B_{12}, ..., B_{1p+1} reemplazando en el sistema (5.28) e identificando.

Ejemplo 5.4.2 .
Resuelva el problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} + 3y - 4x & = & 0 \\ \dot{y} + x - 2y & = & 0 \end{array}\right|$$

$x(0) = 0$, $y(0) = 2$.
Solución.
Despejando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ el sistema queda como:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 4x - 3y \\ \dot{y} & = & -x + 2y \end{array}\right|$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

lo que implica $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. Por tanto, las soluciones del sistema son de la forma:

$$\begin{array}{rcl} x & = & A_1e^t + A_2e^{5t}, \\ y & = & B_1e^t + B_2e^{5t}. \end{array}$$

Si las reemplazamos en la primera o en la segunda ecuación del sistema tenemos $B_1 = A_1$ y $B_2 = -\frac{1}{3}A_2$. Así, solución general del sistema es:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & A_1e^t + A_2e^{5t} \\ y(t) & = & A_1e^t - \dfrac{1}{3}A_2e^{5t}. \end{array}$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos la solución final:

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{5t} \\ y(t) &= \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{5t}. \end{cases}$$

▲

Otra manera de llegar a la solución es encontrar los valores propios de la matriz del sistema, lo que se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4.3 .
Resuelva:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - 4y \\ \dot{y} &= -x + y \end{cases}$$

Solución.
Para los valores propios tenemos:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, $\lambda_1 = -3$ *y* $\lambda_2 = 2$. *Con esto, calculamos los valores propios obteniendo:*

$$v_{\lambda=-3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_{\lambda=2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t},$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} x(t) &= 4C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} \\ y(t) &= C_1e^{-3t} - C_2e^{2t}. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 5.4.4 .
Resuelva:

$$\begin{array}{rcl|} \dot{y} - 2y + z &=& 0 \\ \dot{z} - y - 2z &=& 0 \\ \hline \end{array}$$

Solución.
El sistema se escribe como:

$$\begin{array}{rcl|} \dot{y} &=& 2y - z \\ \dot{z} &=& y + 2z \\ \hline \end{array}$$

Por lo que, la matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

obtenemos los valores propios $\lambda_1 = 2+i$ *y* $\lambda_2 = 2-i$. *Luego,*

$$\begin{aligned} y(t) &= (A_1 \cos t + A_2 \operatorname{sen} t)\, e^{2t}, \\ z(t) &= (B_1 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t)\, e^{2t}. \end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones diferenciales dadas obtenemos las relaciones $A_2 = -B_1$ *y* $B_2 = A_1$, *por tanto,*

$$\begin{aligned} y(t) &= (A_1 \cos t - B_1 \operatorname{sen} t)\, e^{2t}, \\ z(t) &= (B_1 \cos t + A_1 \operatorname{sen} t)\, e^{2t}. \end{aligned}$$

Haciendo $A_1 = 1$ *y* $B_1 = 0$ *tenemos* $y = \cos t e^{2t}$ *y* $z = \operatorname{sen} t e^{2t}$. *Por su parte, tomando* $A_1 = 0$ *y* $B_1 = 1$ *tenemos* $y = -\operatorname{sen} t e^{2t}$ *y* $z = \cos t e^{2t}$. *Estas funciones forman un sistema fundamental de soluciones, por tanto, la solución general del sistema es:*

$$\begin{cases} y(t) = (A_1 \cos t - B_1 \operatorname{sen} t)\, e^{2t}, \\ z(t) = (B_1 \cos t + A_1 \operatorname{sen} t)\, e^{2t}. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 5.4.5 .
Resuelva:

$$\begin{array}{rcl|} \dot{y} & = & -3y - z \\ \dot{z} & = & y - z \\ \hline \end{array} \tag{5.32}$$

Solución.
La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

obtenemos los valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. *Luego,*

$$\begin{aligned} y(t) &= (A_1 + A_2 t)\, e^{-2t} \\ z(t) &= (B_1 + B_2 t)\, e^{-2t}. \end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones dadas obtenemos las relaciones $B_2 = -2A_2$ y $B_1 = -(A_1 + A_2)$. Luego,

$$\begin{aligned} y(t) &= (A_1 + A_2 t)\, e^{-2t} \\ z(t) &= -(2A_2 t + (A_1 + A_2))\, e^{-2t}. \end{aligned}$$

Tomando $A_1 = A_2 = 1$ obtenemos como solución general:

$$\begin{cases} y(t) &= C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} \\ z(t) &= -2C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{-2t}. \end{cases}$$

▲

Ejercicio. Resuelva el sistema lineal de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y \end{aligned}\right|$$

5.4.2. Método de Euler para Sistemas Lineales y Homogéneos con Coeficientes Constantes

Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= a_0 x + b_0 y + c_0 z \\ \dot{y} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \dot{z} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{aligned}\right| \tag{5.33}$$

buscamos soluciones de la forma:

$$x = \zeta e^{\lambda t},\ y = \mu e^{\lambda t},\ z = \nu e^{\lambda t}. \tag{5.34}$$

Reemplazando (5.34) en (5.33) obtenemos en sistema para ζ, μ y ν:

$$\left.\begin{aligned} (a_0 - \lambda)\zeta + b_0\mu + c_0\nu &= 0 \\ a_1\zeta + (b_1 - \lambda)\mu + c_1\nu &= 0 \\ a_2\zeta + b_2\mu + (c_2 - \lambda) &= 0 \end{aligned}\right| \tag{5.35}$$

el cual posee solución no nula cuando su determinante Δ es igual a cero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 & c_0 \\ a_0 & b_1 - \lambda & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Este determinante se llama **Ecuación Característica** y tiene raíces λ_1, λ_2 y λ_3 reales y distintas. Sustituyendo en (5.35) λ por λ_i, $i = 1, 2, 3$ y resolviendo el sistema encontramos ζ_i, μ_i, y ν_i, $i = 1, 2, 3$, y con ello los tres sistemas de soluciones particulares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \zeta_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_1 = \mu_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_1 = \nu_1 e^{\lambda_1 t}, \\ x_2 &= \zeta_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y_2 = \mu_2 e^{\lambda_2 t}, \quad z_2 = \nu_2 e^{\lambda_2 t}, \\ x_3 &= \zeta_3 e^{\lambda_3 t}, \quad y_3 = \mu_3 e^{\lambda_3 t}, \quad z_3 = \nu_3 e^{\lambda_3 t}. \end{aligned}$$

Luego, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.6 .
Resuelva el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} \dot{x} &=& 3x - y + z \\ \dot{y} &=& -x + 5y - z \\ \dot{z} &=& x - y + 3z \end{array}\right|$$

utilizando el Método de Euler.
Solución.
La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

y tiene por valore propios a $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ *y* $\lambda_3 = 6$. *El sistema (5.35) queda escrito como:*

$$\left.\begin{array}{rcl} (3-\lambda)\zeta - \mu + \nu &=& 0 \\ -\zeta + (5-\lambda)\mu - \nu &=& 0 \\ \zeta - \mu + (3-\lambda)\nu &=& 0 \end{array}\right|$$

Para este sistema tenemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 & \Rightarrow \quad (\zeta,\mu,\nu) = (1,0,-1) \\ \lambda_2 = 3 & \Rightarrow \quad (\zeta,\mu,\nu) = (1,1,1) \\ \lambda_3 = 6 & \Rightarrow \quad (\zeta,\mu,\nu) = (1,-2,1) \end{cases}$$

Luego, la solución general del sistema dado es:

$$\begin{cases} x(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t} \\ y(t) &= C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t} \\ z(t) &= -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 5.4.7 .
Resuelva:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& x - 5y \\ \dot{y} &=& 2x - y \end{array}\right|$$

Solución.
La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

y tiene valores propios $\lambda_1 = 3i$ *y* $\lambda_2 = -3i$. *Por su parte, el sistema (5.35) queda escrito como:*

$$\left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)\zeta - 5\mu & = & 0 \\ 2\zeta + (-1-\lambda)\mu & = & 0 \end{array}\right| \tag{5.36}$$

Para este sistema tenemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3i & \Rightarrow \quad (\zeta, \mu) = (5, 1-3i) \\ \lambda_2 = -3i & \Rightarrow \quad (\zeta, \mu) = (5, 1+3i) \end{cases}$$

Por tanto, $x_1 = 5e^{-3it}$, $y_1 = (1-3i)e^{-3it}$, $x_2 = 5e^{3it}$ *e* $y_2 = (1+3i)e^{3it}$. *Ahora, pasamos a un nuevo sistema fundamental:*

$$\begin{array}{ll} \tilde{x} = \frac{x_1+x_2}{2}, & \tilde{x}_2 = \frac{x_1-x_2}{2i} \\ \tilde{y} = \frac{y_1+y_2}{2}, & \tilde{y}_2 = \frac{y_1-y_2}{2i} \end{array}$$

con lo que obtenemos $\tilde{x}_1 = 5\cos 3t$, $\tilde{x}_2 = -5\operatorname{sen} 3t$, $\tilde{y}_1 = \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t$ *e* $\tilde{y}_2 = \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t$. *Por tanto, la solución general es:*

$$\begin{cases} x(t) & = & C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = 5C_1\cos 3t + 5C_2\operatorname{sen} 3t \\ y(t) & = & C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1\cos 3t + 3C_1\operatorname{sen} 3t + C_2\operatorname{sen} 3t - 3C_2\cos 3t \end{cases}$$

▲

Una vez hallada la primera solución particular se podría haber escrito la solución general del sistema por medio de la fórmula:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & C_1\mathsf{Re}(x_1) + C_2\mathsf{Im}(x_1) \\ y(t) & = & C_1\mathsf{Re}(y_1) + C_2\mathsf{Im}(y_1). \end{array}$$

Es decir:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 5\cos 3t - 5i\operatorname{sen} 3t \\ y_1 & = & (\cos 3t - 3\operatorname{sen} 3t) - i(\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t), \end{array}$$

por lo tanto:

$$\begin{cases} x(t) & = & 5C_1\cos 3t - 5C_2\operatorname{sen} 3t \\ y(t) & = & C_1\cos 3t - 3C_1\operatorname{sen} 3t - C_2\operatorname{sen} 3t - 3C_2\cos 3t \end{cases}$$

Ejercicio. Resuelva el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + y \\ \dot{y} & = & 4y - x \end{array}\right|$$

5.4.3. Sistemas No Homogéneos

Veremos el método por medio de un sistema de tres ecuaciones no homogéneas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' + a_1x + b_1y + c_1z & = & f_1(t) \\ y' + a_2x + b_2y + c_2z & = & f_2(t) \\ z' + a_3x + b_3y + c_3z & = & f_3(t) \end{array}\right. \tag{5.37}$$

Supongamos que conocemos la solución general del homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 \\ y & = & C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 \\ z & = & C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 \end{array}\right. \tag{5.38}$$

por lo que buscamos una solución particular del sistema homogéneo (5.37) de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2 + C_3(t)x_3 \\ y & = & C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 + C_3(t)y_3 \\ z & = & C_1(t)z_1 + C_2(t)z_2 + C_3(t)z_3 \end{array}\right. \tag{5.39}$$

Reemplazando (5.39) en la ecuación (5.37), por ejemplo en la primera, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 + C_1(x_1' + a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1) + & & \\ +C_2(x_2' + a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2) + C_3(x_3' + a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3) & = & f_1(t), \end{array} \tag{5.40}$$

pero todas las sumas de los paréntesis son ceros. Luego, tenemos:

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t)$$

Análogamente se obtiene reemplazando (5.39) en la segunda y tercera ecuación de (5.37):

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = f_2(t),\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 = f_3(t).$$

Por lo tanto, tenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 & = & f_1(t) \\ C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 & = & f_2(t) \\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 & = & f_3(t) \end{array}\right.$$

Del que obtenemos C_1', C_2' y C_3'. Integrando tenemos C_1, C_2 y C_3.

Ejemplo 5.4.8 .
Resuelva:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} + 2x + 4y & = & 1 + 4t \\ \dot{y} + x - y & = & \frac{3}{2}t^2 \end{array}\right.$$

Solución.
El sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & -2x-4y \\ \dot{y} & = & -x+y \end{cases}$$

que según vimos en el Ejemplo 5.4.3 tiene por solución:

$$\begin{cases} x(t) & = & 4C_1e^{-3t}+C_2e^{2t} \\ y(t) & = & C_1e^{-3t}-C_2e^{2t}. \end{cases}$$

Haciendo variación de parámetros tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 4C_1'e^{-3t}+C_2'e^{2t} & = & 1+4t \\ C_1'e^{-3t}-C_2'e^{2t} & = & \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

que tiene por solución $C_1' = \frac{1}{5}\left(1+4t+\frac{3}{2}t^2\right)e^{3t}$ *y* $C_2' = \frac{1}{5}\left(1+4t-6t^2\right)e^{-2t}$*. Integrando obtenemos:* $C_1 = \frac{1}{10}t(2-t)e^{3t}$ *y* $C_2 = \frac{1}{5}t(1+3t)e^{-2t}$*. Por tanto,*

$$\begin{aligned} x &= 4C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}+4e^{-3t}\cdot\frac{1}{10}t(2-t)e^{3t}+e^{2t}\cdot\frac{1}{5}t(1+3t)e^{-2t} \\ y &= C_1e^{-3t}-C_2e^{2t}+e^{-3t}\cdot\frac{1}{10}t(2-t)e^{3t}-e^{2t}\cdot\frac{1}{5}t(1+3t)e^{-2t}, \end{aligned}$$

que una vez reducida queda:

$$\begin{cases} x(t) & = & 4C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}+t+\frac{1}{5}t^2 \\ y(t) & = & C_1e^{-3t}-C_2e^{2t}-\frac{7}{10}t^2 \end{cases}$$

siendo esta la solución del problema no homogéneo. ▲

Ejemplo 5.4.9 .
Resuelva

$$\begin{array}{rcl|} \dot{x} & = & 3-2y \\ \dot{y} & = & 2x-2t \\ \hline \end{array}$$

Solución.
El sistema homogéneo asociado:

$$\begin{array}{rcr|} \dot{x} & = & -2y \\ \dot{y} & = & 2x \\ \hline \end{array}$$

tiene por valores propios a $\lambda_1 = 2i$ *y* $\lambda_2 = -2i$*, por lo que la solución es de la forma:*

$$\begin{aligned} x &= A_1\cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t \\ y &= B_1\cos 2t + B_2 \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema homogéneo obtenemos las relaciones $B_2 = A_1$ y $A_2 = -B_1$. Sólo por costumbre, cambienos A_1 por C_1 y B_2 por C_2, por tanto,

$$\begin{cases} x(t) &= C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t \\ y(t) &= C_1 \operatorname{sen} 2t + C_2 \cos 2t. \end{cases}$$

Con esto, el sistema de variación de parámetros queda como:

$$\begin{cases} C_1' \cos 2t - C_2' \operatorname{sen} 2t &= 3 \\ C_1' \operatorname{sen} 2t + C_2' \cos 2t &= -2t \end{cases}$$

cuya solución es $C_1' = 3\cos 2t - 2t \operatorname{sen} 2t$ y $C_2' = -3\operatorname{sen} 2t - 2t\cos 2t$. Integrando tenemos $C_1 = \operatorname{sen} 2t + t\cos 2t$ y $C_2 = \cos 2t - t \operatorname{sen} 2t$. Por lo tanto, la solución general adquiere la forma:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t + (\operatorname{sen} 2t + t\cos 2t)\cos 2t - (\cos 2t - t\operatorname{sen} 2t)\operatorname{sen} 2t \\ y &= C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t + (\operatorname{sen} 2t + t\cos 2t)\operatorname{sen} 2t + (\cos 2t - t\operatorname{sen} 2t)\cos 2t, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{cases} x(t) &= C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t + t \\ y(t) &= C_1 \cos 2t - C_2 \operatorname{sen} 2t + 1. \end{cases}$$

▲

5.5. Ejercicios Propuestos

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos.

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -7x + y \\ \frac{dy}{dt} &= 5y - 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= z + x \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + z \\ \frac{dz}{dt} &= 3x + y \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 8y \\ \frac{dy}{dt} &= -2z \\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 8y - 2z \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 8y \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= y + z \\ \frac{dy}{dt} &= z + x \\ \frac{dz}{dt} &= x + y \end{cases}$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones no homogéneos.

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ \frac{dy}{dt} &= 2y - 2t - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -x + y + z + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z + e^{3t} \\ \frac{dz}{dt} &= -x + y + z + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 2y + 2z - 2e^t \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 2y \\ \frac{dz}{dt} &= -4y - 3z + 4e^t \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 4x + y + 36t \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y - 2e^t \end{cases}$

3. Encuentre la solución de los problemas de valor inicial.

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y \end{cases}, \ x(0) = -2, \ y(0) = 8.$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + y \\ \frac{dz}{dt} &= y + z \end{cases}, \ x(0) = 1, \ y(0) = 1, \ z(0) = -1.$

c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 7y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y + z \\ \frac{dz}{dt} &= y + z \end{cases}, \ x(0) = 1, \ y(0) = 0, \ z(0) = 1.$

d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 8x - t \end{cases}, \ x(0) = 0, \ y(0) = 1.$

e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 2y + \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= y + \operatorname{sen} t \end{cases}, \ x(0) = 1, \ y(0) = 0.$

Capítulo 6

Resolución Mediante Series de Potencias y Transformada de Laplace

6.1. Resolución Mediante Series de Potencias

6.1.1. Desarrollo de la Solución en una Serie de Potencias

Partamos recordando una definición de utilidad:

Definición 6.1.1 . (Función Analítica, Punto Singular)
Una función f se dice **Analítica** *en x_0 si admite un desarrollo en serie de potencia en torno a ese punto. Si f no analítica en x_0, entonces x_0 se dice un* **Punto Singular**.

Consideremos ahora, la ecuación de segundo orden:

$$y'' + p\,(x)\,y' + q\,(x)\,y = 0, \tag{6.1}$$

donde suponemos que los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son analíticos, con esto, podemos escribir (6.1) como:

$$y'' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) y' + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) y = 0. \tag{6.2}$$

Por lo que parece natural buscar la solución de la ecuación en la misma forma:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{6.3}$$

Reemplazando esto en la ecuación (6.2) junto a las expresiones de sus derivadas de primer y segundo orden y' e y'' obtenemos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = 0. \tag{6.4}$$

Multiplicando las series de potencias, reuniendo términos semejantes e igualando a cero los coeficientes de las distintas potencias, resultan las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^0: & 2c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0 \\ x^1: & 6c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0 \\ x^2: & 12c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \tag{6.5}$$

Cada una de las ecuaciones en (6.5) contiene un coeficiente indeterminado más que la anterior, los coeficientes c_0 y c_1 se mantienen arbitrarios y desempeñan el papel de constantes arbitrarias.

De la primera ecuación encontramos c_2 en función de c_0 y c_1. De la segunda resulta c_3, de la tercera c_4, etc. En general, de la $(k+1)-$ésima ecuación determinamos c_{k+2} una vez conocidos c_2, c_3, …, c_{k+1}.

En la práctica conviene proceder del modo que sigue: Puesto que buscamos dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$:

para y_1 tomamos $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$,
para y_2 tomamos $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$,

que es equivalente con las condiciones iniciales:

$$\begin{Bmatrix} y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0, \\ y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1. \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

Y como sabemos toda solución de la ecuación (6.1) será combinación lineal de las soluciones y_1 e y_2.

Si las condiciones iniciales son de la forma $y(0) = A$ e $y'(0) = B$, entonces, tendremos:

$$y = Ay_1(x) + By_2(x).$$

Teorema 6.1.2 .
Si las series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = p(x) \quad y \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = q(x),$$

son convergentes para $|x| < r$, entonces la serie de potencia (6.3) construída como se indicó anteriormente también es convergente para $|x| < r$ y es solución de la ecuación (6.1). En particular, si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x, la serie (6.3) será convergente para cualquier valor de x.

Ejemplo 6.1.3 .
Encuentre la solución en forma de serie de potencias de la ecuación:

$$y'' - xy' - 2y = 0. \tag{6.7}$$

Solución.
Buscamos y de la forma:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{6.8}$$

por lo tanto,

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad \text{e} \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}. \tag{6.9}$$

Reemplazando (6.8) y (6.9) en (6.7) tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0 \\
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k} - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0 \\
\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k} - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0 \\
\sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k+2)c_k\right] x^k + 2c_2 - 2c_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de las distintas potencias de x obtenemos $c_2 = c_0$ y $c_{k+2} = \frac{c_k}{k+1}$. A partir de esto, si consideramos $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, tenemos:

$$c_2 = 1,\ c_3 = \frac{c_1}{2} = 0,\ c_4 = \frac{1}{3},\ c_5 = 0,\ c_6 = \frac{1}{15}, \ \text{ etc.}$$

Por consiguiente:

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{15} + \ldots$$

Análogamente con $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$ encontramos:

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} + \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

▲

Ejemplo 6.1.4 .
Encuentre la solución usando series de potencias:

$$y' - 2xy = 0, \qquad y(0) = 1, \tag{6.10}$$

Solución.
Buscamos la solución y *de la forma:*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

por tanto,

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

Reemplazando en la ecuación (6.10) tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2 c_k x^{k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Acomodando los índices de las sumatorias y ordenando obtenemos:

$$c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[k c_k - 2c_{k-2}\right] x^{k-1} = 0,$$

de donde, $c_1 = 0$ *y* $c_k = \frac{2c_{k-2}}{k}$. *Como* $y\,(0) = 0$, *entonces* $c_0 = 0$. *Con esto,*

$$c_2 = \frac{2c_0}{2} = 1,\ c_3 = \frac{2c_1}{3} = 0,\ c_4 = \frac{2c_2}{4} = \frac{1}{2},\ c_5 = \frac{2c_3}{5} = 0,\ c_6 = \frac{2c_4}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}\ \ldots$$

Continuando de esta forma vemos que $c_{2k+1} = 0$ *y* $c_{2k} = \frac{1}{k!}$. *Por tanto, la solución buscada es:*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}.$$

▲

6.1.2. Desarrollo de la Solución en una Serie de Potencia Generalizada

Definición 6.1.5 . **(Punto Singular Regular)**
Un punto x_0 *de la ecuación (6.1) se dice* **Singular Regular** *si las funciones* $(x - x_0)\,p\,(x)$ *y* $(x - x_0)^2\,q\,(x)$ *son analíticas en* x_0. *En caso contrario se dice un punto* **Singular Irregular**.

Definición 6.1.6 . (Serie de Potencias Generalizada)
Una serie de la forma

$$x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

con $c_0 \neq 0$ *y* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *es convergente en un determinado recinto* $|x| < r$ *y* ρ *es un número dado se llama* **Serie de Potencias Generalizada**. *Si* $\rho \in \mathbb{N}$*, entonces la serie de potencias ordinaria.*

Teorema 6.1.7 .
Si $x = 0$ *es un punto singular regular de la ecuación (6.1), es decir, cuyos coeficientes* $p(x)$ *y* $q(x)$ *admiten los desarrollos:*

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x} \quad y \quad q(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{x^2},$$

donde las series de los numeradores son convergentes en cierto recinto $|x| < r$ *y los coeficientes* a_0, b_0, b_1 *no son simultáneamente nulos. Entonces la ecuación (6.1) posee al menos una solución en forma de serie de potencias generalizada:*

$$y = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{6.11}$$

$c_0 \neq 0$ *que converge al menos en el mismo recinto* $|x| < r$.

Para hallar el exponente ρ y los coeficientes c_k es necesario reemplazar la serie (6.11) en la ecuación (6.1), simplificar por x^{ρ} e igualar a cero los coeficientes de las potencias de x. En este caso, el número ρ se halla de la **Ecuación determinativa**:

$$\rho\,(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \tag{6.12}$$

donde $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} xp(x)$ y $b_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 q(x)$.

Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son las raíces de la ecuación determinativa, entonces distinguiremos tres casos:

1. Si $(\rho_1 - \rho_2) \notin \mathbb{Z}$, entonces podemos construir dos soluciones de (6.1) de la forma (6.11), a saber:

   $$y_1 = x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{e} \quad y_2 = x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k,$$

   donde $c_0 \neq 0$ y $d_0 \neq 0$.

2. Si $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces podemos escribir, por lo general, sólo una serie de la forma (6.11) que es solución de (6.1):

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0} c_k x^k,$$

donde $c_0 \neq 0$.

3. Si $\rho_1 = \rho_2$, entonces podemos escribir sólo una serie de la forma (6.11) que es solución de (6.1).

Sólo en el primer caso tenemos dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linealmente independientes. En el segundo y tercer caso hemos construído sólo una solución. La otra se obtiene en la forma:

$$y_2 = A y_1(x) \ln x + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Puede ocurrir que en y_2, A sea cero, luego, y_2 resulta en forma de una serie de potencia generalizada.

Ejemplo 6.1.8 .
Resuelva la ecuación:

$$2x^2 y'' + (3x - 2x^2) y' - (x+1) y = 0. \tag{6.13}$$

Solución.
Escribimos la ecuación dada de la forma:

$$y'' + \frac{3-2x}{2x} y' - \frac{x+1}{2x^2} y = 0,$$

y buscamos la solución $y(x)$ en la forma:

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

con $c_0 \neq 0$. Para encontrar ρ, escribimos la ecuación determinativa:

$$\rho\,(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0 = 0,$$

donde $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3-2x}{2} = \frac{3}{2}$ y $b_0 = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x+1}{2} = -\frac{1}{2}$. Luego,

$$\rho(\rho - 1) + \frac{3}{2}\rho - \frac{1}{2} = 0,$$

lo que implica $\rho_1 = \frac{1}{2}$ *y* $\rho_2 = -1$. *Por tanto,*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ y_2(x) &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \end{aligned}$$

con $x > 0$. *Para hallar los coeficientes* c_0, c_1, ..., $c_n, \ldots$ *sustituímos* y_1 *y sus derivadas* y_1' *e* y_1''*:*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\frac{1}{2}}, \\ y_1'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) c_k x^{k-\frac{1}{2}}, \\ y_1''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right) c_k x^{k-\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

en la ecuación (6.13), tenemos:

$$2x^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) c_k x^{k-\frac{3}{2}} + (3x - 2x^2) \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) c_k x^{k-\frac{1}{2}} - (x+1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) c_k x^{k+\frac{1}{2}} = 0, \quad (6.14)$$

Luego de las transformaciones, (6.14) toma la forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(2k+3) c_k x^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1) c_k x^{k+\frac{3}{2}} = 0.$$

Como buscamos una solución para $x > 0$, *podemos simplificar por* $x^{\frac{1}{2}}$ *y tenemos:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(2k+5) c_{k+1} - 2(k+1) c_k\right] x^{k+1} = 0,$$

de donde,

$$c_{k+1} = \frac{2c_k}{2k+5}.$$

Haciendo $c_0 = 1$ *obtenemos* $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{2}{5\cdot 7}$, $c_3 = \frac{2^3}{5\cdot 7\cdot 9}$, $\cdots$ *Generalizando tenemos:*

$$c_n = \frac{2^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)},$$

para $n \in \mathbb{N}$. *Luego,*

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2k+3)}\right].$$

Análogamente, se podemos encontrar los coeficientes de la otra serie y, por lo tanto, hallar $y_2(x)$. Luego, la solución general de la ecuación (6.13) es:

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Queda al lector calcular $y_2(x)$ y demostrar que es $\frac{e^x}{x}$. ▲

6.1.3. La Ecuación de Bessel

Sea $p > 0$ una constante, la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{6.15}$$

se denomina **Ecuación de Bessel**.

Escribiendo (6.15) en la forma:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0,$$

tenemos $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = \frac{x^2-p^2}{x^2}$, por lo tanto, $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} xp(x) = 1$ y $b_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2q(x) = -p^2$. Luego, la ecuación determinativa para ρ es $\rho(\rho-1)+1\rho-p^2 = 0$, que implica $\rho_1 = p$ y $\rho_2 = -p$.

Busquemos la primera solución particular de la ecuación de Bessel en forma de serie de potencias generalizada:

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

reemplazamos y, y' e y'' en la ecuación (6.15) tenemos:

$$x^2 \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+p)(k+p-1)x^{k+p-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} c_k(k+p)x^{k+p-1} + (x^2-p^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+p} = 0,$$

o bien, después de algunas transformaciones elementales, y simplificación por x^p:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+p)(k+p-1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+p)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} p^2 c_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+p)^2 - p^2\right] c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} &= 0 \end{aligned}$$

De aquí, igualando los coeficientes de las distintas potencias de x a cero, tenemos:

$$\begin{array}{rrcl} x^0: & (p^2-p^2)c_0 & = & 0 \\ x^1: & ((1+p)^2-p^2)\,c_1 & = & 0 \\ x^2: & ((2+p)^2-p^2)\,c_2+c_0 & = & 0 \\ x^3: & ((3+p)^2-p^2)\,c_3+c_1 & = & 0 \\ x^4: & ((4+p)^2-p^2)\,c_4+c_2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^k: & ((k+p)^2-p^2)\,c_k+c_{k-2} & = & 0 \end{array} \tag{6.16}$$

La primera de las relaciones (6.16) se cumple para todo c_0. De la segunda relación tenemos que $c_1 = 0$. De la tercera $c_2 = \frac{c_0}{(2+p)^2-p^2} = \frac{-c_0}{2^2(1+p)}$. De la cuarta $c_3 = 0$. De la quinta $c_4 = \frac{c_2}{(4+p)^2-p^2} = \frac{-c_2}{2^3(2+p)} = \frac{c_0}{2^4(1+p)(2+p)\cdot 1\cdot 2}$. Es evidente que todos los coeficientes de subíndice impar son cero, es decir:

$$c_{2k+1} = 0, \quad \forall k.$$

Los coeficientes de subíndice par son de la forma:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}(p+1)(p+2)\cdots(p+k)\cdot k!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Para simplificar los cálculos que siguen, hagamos:

$$c_0 = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)},$$

donde $\Gamma(\nu)$ es la **Función Gamma de Euler**. La función Gamma de Euler, $\Gamma(\nu)$, se define para todos los valores positivos y para todos los valores complejos con parte real positiva de la forma que sigue:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\nu-1}dx.$$

Esta función Γ posee las siguientes propiedades importantes:

1. $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)$, $k \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma(k+1) = k!$, $k \in \mathbb{N}$.

Ahora considerando $c_0 = \frac{1}{2^p\Gamma(\nu)(p+1)}$ y las propiedades de la función Γ ocupémonos de la transformación del coeficiente c_{2k}:

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}\cdot(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+k)\cdot k!\cdot(2^p\cdot\Gamma(p+1))} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\cdot k!\cdot\Gamma(p+k+1)}, \end{aligned}$$

pues por la propiedad 3 tenemos que $(p+1)(p+2)\cdots(p+k)\Gamma(p+1)$ es igual con $\Gamma(p+k+1)$. Ahora la solución particular de la ecuación de Bessel, que indicaremos con J_p toma la forma:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

llamada **Función de Bessel de Primera Especie de Orden** p.

Análogamente, buscamos la segunda solución particular de la ecuación de Bessel de la forma:

$$y = x^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

donde $-p$ es la segunda solución de la ecuación determinativa. Es claro que esta solución se puede obtener de la solución $J_p(x)$ sustituyendo p por $-p$, puesto que en la ecuación (??) p está elevado a una potencia par, por lo tanto, tenemos:

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p},$$

llamada **Función de Bessel de Primera Especie de Orden** $-p$.

Si p no es un entero, las soluciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son L.I, puesto que sus desarrollos en series comienzan con potencias distintas de x, luego la combinación $\alpha_1 J_p(x) + \alpha_2 J_{-p}(x)$ puede ser idénticamente nuela sólo para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Si p es un entero, las funciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son L.D, pues:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Así pues, cuando $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, en lugar de $J_{-p}(x)$ hay que buscar otra solución que sea L.I con $J_p(x)$, para lo que introducimos una nueva función:

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)}. \tag{6.17}$$

Es evidente que Y_p es solución de la ecuación (6.15), pues es una combinación lineal de las soluciones particulares $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$.

Pasando al límite en (6.17) cuando p tiende a un número entero se obtiene la solución particular $Y_p(x)$ L.I con $J_p(x)$ y determinada ya para valores enteros de p. $Y_p(x)$ se llama **Función de Bessel de Segunda Especie de Orden** p.

Hemos construído un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Bessel para todo p entero o racional, la que puede representarse como:

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x),$$

donde A y B son constantes arbitrarias. No obstante para cuando p no es entero, la solución general de la ecuación de Bessel puede tomar la forma:

$$y = AJ_p(x) + BJ_{-p}(x).$$

Es frecuente en aplicaciones encontrarse con la ecuación:

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)y = 0, \tag{6.18}$$

que con el cambio de variable $\zeta = kx$ se reduce a la ecuación de Bessel:

$$\zeta^2\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \zeta\frac{dy}{d\zeta} + (\zeta^2 - p^2)y = 0,$$

cuya solución general, cuando p no es entero es:

$$y = \alpha_1 J_p(\zeta) + \alpha_2 J_{-p}(\zeta),$$

y por tanto, la solución general de la ecuación (6.18) queda dada por:

$$y = \alpha_1 J_p(kx) + \alpha_2 J_{-p}(kx),$$

Además, para el caso cuando p es un entero tenemos:

$$y = \alpha_1 J_p(kx) + \alpha_2 Y_p(kx).$$

Una clase más amplia de ecuaciones son las de la forma:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + (b + cx^m)y = 0, \tag{6.19}$$

donde a, b, $c > 0$ y $m \neq 0$ son constantes, las que se reducen a una ecuación de Bessel introduciendo una nueva variable t y una nueva función u, según las fórmulas:

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} u, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

donde $\alpha = \frac{a-1}{2}$, $\beta = \frac{m}{2}$, $\gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m}$ y $p^2 = \frac{(a-1)^2-4b}{m^2}$, quedando de la forma:

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - p^2)u = 0.$$

Notemos que cuando $c = 0$, la ecuación (6.19) es la ecuación de Euler.

6.2. Resolución Mediante Transformada de Laplace

6.2.1. Transformada de Laplace

Definición 6.2.1 . (Transformada de Laplace)
Sea $f(t)$ una función integrable definida en $[0, \infty)$. La **Transformada de Laplace** *de $f(t)$ es la función $F(s)$ dada por la integral:*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt =: \mathcal{L}\left[f\right](s).$$

Ejemplo 6.2.2 .
Encontremos la trasnformada de $f(t) = 1$, para $t > 0$.

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{-e^{-sT}}{s}\right] = \frac{1}{s},$$

para $s > 0$, pues si $s < 0$ la integral impropia diverge. Por lo tanto, $F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$.
Calculemos ahora $\mathcal{L}[e^{at}]$, donde a esconstante:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a},$$

para $s > a$, pues si $s < a$ la integral impropia diverge. ▲

Definición 6.2.3 . **(Función de Orden Exponencial al Infinito)**
Una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es de **Orden Exponencial al Infinito** *si es seccionalmente continua, es decir, continua salvo en un número finito de puntos y si existen dos constantes $M > 0$ y $\eta > 0$ y un valor $t_0 > 0$ de su dominio, tales que:*

$$|f(t)| \leq Me^{\eta t}, \tag{6.20}$$

para todo $t > t_0$. Lo anterior lo denotaremos por $f(t) = \mathcal{O}(e^{\eta t})$, si $t \to \infty$.

Proposición 6.2.4 .
La transformada de Laplace existe para toda función f de orden exponencial al infinito.

Demostración.
Supongamos que $f(t)$ es de orden exponencial al infinito, por tanto, existen constantes $M > 0$ y $\eta > 0$ y un valor $t_0 > 0$ del dominio de f, tales que se satisface (6.20). Luego,

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \leq |f(t)|\, e^{-st} \leq Me^{-(s-\eta)t},$$

para $t \geq t_0$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|f(t)e^{-st}\right| dt &= \int_0^{t_0}\left|f(t)e^{-st}\right| dt + \int_{t_0}^\infty \left|f(t)e^{-st}\right| dt\\ &= \int_0^{t_0}\left|f(t)e^{-st}\right| dt + \int_{t_0}^\infty Me^{-(s-\eta)t}dt.\end{aligned}$$

La integral entre 0 y t_0 es finita, pues por hipótesis f es seccionalmente contínua y $t_0 < \infty$. Por su parte, la integral impropia de la función $t \mapsto Me^{-(s-\eta)t}$ converge si y sólo si $s > \eta$. Concluyendo la demostración. ■

Definición 6.2.5 . **(Función Escalón Unitario)**
La **Función Escalón Unitario** *se define como:*

$$\mu(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0. \end{cases}$$

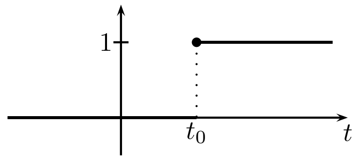

Figura 6.1: Función escalón unitario $\mu(t-t_0)$.

En la siguiente tabla tenemos algunas transformadas de Laplace elementales útiles para el trabajo porterior, consideramos $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha, t_0 \in \mathbb{R}$ como constantes:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	Observación
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > a$
$\operatorname{sen} \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$s > 0$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\mu(t-t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$	$s > 0$

6.2.2. Algunas Propiedades de la Transformada de Laplace

Proposición 6.2.6 . (Linealidad)
Sean $f, g : [0.\infty) \to \mathbb{R}$ funciones de orden exponancial al infinito, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(t)](s) + \beta \mathcal{L}[g(t)](s).$$

Demostración.
Queda como ejercicio al lector, pues basta aplicar la definición. ■

Ejemplo 6.2.7 .
Determine $\mathcal{L}[11 + 5e^{4t} - 6 \operatorname{sen} 2t](s)$.
Solución.
Aplicando la linealidad y las transformadas elementales tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[11 + 5e^{4t} - 6 \operatorname{sen} 2t\right](s) &= \mathcal{L}[11] + \mathcal{L}\left[5e^{4t}\right] + \mathcal{L}[-6 \operatorname{sen} 2t] \\
&= \mathcal{L}[1] + 5\mathcal{L}\left[e^{4t}\right] - 6\mathcal{L}[\operatorname{sen} 2t] \\
&= \frac{11}{s} + \frac{5}{s-4} - \frac{12}{s^2+4},
\end{aligned}$$

definida para $s > 4$. ▲

Teorema 6.2.8 . (Desplazamiento)
Si la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$ existe para todo $s > a$, entonces:

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right](s) = F(s-\alpha).$$

Demostración.

Por definición tenemos:

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}f(t)\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}f(t)dt = F(s-\alpha).$$

■

Ejemplo 6.2.9 .
Encuentre la transformada de Laplace de $f(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.
Solución.
Sabemos que $\mathcal{L}[\operatorname{sen}\beta t](s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} =: F(s)$, por lo tanto, por la propiedad de traslación de $F(s)$ tenemos:

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\right](s) = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+b^2} = F(s-\alpha).$$

▲

Proposición 6.2.10 . (Desplazamiento)
Si la transformada de Laplace $\mathcal{L}[g](s) = F(s)$ existe y lo mismo ocurre para $f(t) = g(t-t_0)\mu(t-t_0)$, entonces:

$$\mathcal{L}[f](s) = e^{-t_0 s}F(s).$$

Demostración.

Por definición tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[g(t-t_0)\mu(t-t_0)](s) \\ &= \int_{t_0}^\infty g(t-t_0)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty g(u)e^{-t_0 s}e^{-us}du \\ &= e^{-t_0 s}\mathcal{L}[g] = e^{-t_0 s}F(s), \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $u = t - t_0$. ■

Ejemplo 6.2.11 .
Encuentre la transformada de $f(t) = e^{-t}\mu(t-2)$.
Solución.
Podemos escribir f como $f(t) = e^{-2}e^{-(t-2)}\mu(t-2)$, luego:

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[e^{-2}e^{-(t-2)}\mu(t-2)\right] = e^{-2}\mathcal{L}\left[e^{-(t-2)}\mu(t-2)\right] = e^{-2}e^{-2s}\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] = \frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}.$$

▲

Proposición 6.2.12 . (Transformada de la Derivada)
Sea $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ funciones contíuas y de orden exponencial al infinito, además, supomgamos que $f^{(n)}$ es contínua por tramos en $[0,\infty)$. Entonces,

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$.

Demostración.
Procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos:

$$\mathcal{L}\left[f'\right](s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f'(t)e^{st}dt,$$

integrando por partes considerando $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)dt$ tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f'\right](s) &= \lim_{T\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]\Big|_0^T + s\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \\ &= -f(0) + \lim_{T\to\infty} f(T)e^{sT} + s\int_0^\infty f(t)e^{st}dt \\ &= \mathcal{L}\left[f\right](s) - f(0) + \lim_{T\to\infty} f(T)e^{-sT}.\end{aligned}$$

Pero $\lim\limits_{T\to\infty} f(T)e^{-sT} = 0$, para $s > 0$, pues f es de orden exponencial. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\left[f'\right](s) = s\mathcal{L}\left[f\right](s) - f(0).$$

Supongamos válida la afirmación para n, es decir, tenemos la hipótesis de inducción:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Debemos demostrar para $n+1$, es decir;

$$\mathcal{L}\left[f^{(n+1)}\right](s) = s^{n+1}F(s) - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - s^{n-2}f''(0) - \ldots - f^{(n)}(0).$$

En efecto,

$$\mathcal{L}\left[f^{(n+1)}\right](s) = \mathcal{L}\left[\left(f^{(n)}\right)'\right](s) = s\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) - f^n(0).$$

Reemplazando la hipótesis de inducción y acomodando concluimos lo que queremos mostrar.
■

Ejemplo 6.2.13 .
Encuentre la transformada de la solución de: $y'' - y = -t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Solución.

Tomando la transformada a ambos miembros, usando las propiedades de linealidad, derivadas tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y''-y\right] &= \mathcal{L}\left[-t\right] \\
\mathcal{L}\left[y''\right]-\mathcal{L}\left[y\right] &= -\mathcal{L}\left[t\right] \\
s^2\mathcal{L}\left[y\right]-sy(0)-y'(0)-\mathcal{L}\left[y\right] &= -\mathcal{L}\left[t\right] \\
s^2\mathcal{L}\left[y\right]-1-\mathcal{L}\left[y\right] &= -\frac{1}{s^2} \\
\left(s^2-1\right)\mathcal{L}\left[y\right] &= 1-\frac{1}{s^2} \\
\mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

▲

Proposición 6.2.14 . **(Multiplicación por t^n)**
Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función de orden exponencial al infinito. Entonces $g(t) = t^n f(t)$ para $t > 0$ es de orden exponencial al infinito y su transformada de Laplace está dada por:

$$\mathcal{L}\left[g\right](s) = \mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[f\right](s).$$

Demostración.
Notemos que $\frac{d^n}{ds^n}e^{-st} = (-1)^n t^n e^{-st}$. Como f es contínua y de orden exponencial al infinito, podemos derivar con respecto a s bajo el signo integral, por lo que obtenemos:

$$\int_0^T t^k f(t)e^{-st}dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

al tomar límite cuando $T \to \infty$, la integral del lado izquierdo converge si y sólo si aquella del lado derecho lo hace, es decir, si $\mathcal{L}\left[f\right](s)$ existe. De esto resulta lo que queríamos mostrar.
■

Ejemplo 6.2.15 . *Determine la transformada de Laplace de $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$.*
Solución.
Como conocemos $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} t\right] = \frac{1}{s^2+1}$, podemos aplicar la propiedad de multiplicación por t^n con $n = 2$, teniéndo:

$$\mathcal{L}\left[t^2 \operatorname{sen} t\right] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} t\right] = \frac{2\left(3s^2-1\right)}{\left(s^2+1\right)^3}.$$

▲

Teorema 6.2.16 . **(de Lerch)**
Si dos funciones f y g poseen transformada de Laplace con igual dominio, y en el coinciden, entonces $f(t) = g(t)$ para todo t en que ambas funciones son contínuas.

Definición 6.2.17 . (Transformada Inversa de Laplace)
La **Transformada Inversa de Laplace** *de $F(s)$ es aquella función $f(t)$ contínua en $[0,\infty)$ tal que:*

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = F(s). \tag{6.21}$$

La función $f(t)$ se denota por $\mathcal{L}^{-1}\left[F\right](s)$.

A causa del Teorema de Lerch la transformada inversa de Laplace está únicamente determinada sólo en los puntos de continuidad. En el caso que todas las funciones que satisfacen (6.21) sean discontínuas en $[0,\infty)$ se elige a $\mathcal{L}^{-1}\left[F\right](s)$ como contínua por tramos, contínua casi en todas partes, y que satisfaga (6.21).

Ejemplo 6.2.18 .
Determine $\mathcal{L}^{-1}\left[F\right]$ para:

1. $F(s) = \frac{1}{s^3}$.
2. $F(s) = \frac{1}{s^2+9}$.
3. $F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+5}$.

Solución.

1. *Si* $F(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{s^3}\right] = \frac{1}{2}t^2$.
2. $F(s) = \frac{1}{s^2+9} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$.
3. $F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+5} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t\cos 2t$.

▲

Proposición 6.2.19 . (Linealidad de la Transformada de Laplace Inversa)
Supongamos que $\mathcal{L}^{-1}\left[F_1\right]$ y $\mathcal{L}^{-1}\left[F_2\right]$ existen y son contínuas en $[0,\infty)$ y sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ cualquier constante arbitraria. Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\alpha F_1+\beta F_2\right] = \alpha\mathcal{L}^{-1}\left[F_1\right]+\beta\mathcal{L}^{-1}\left[F_2\right].$$

Demostración.
Queda como ejercicio al lector. ■

Ejemplo 6.2.20 .
Determine:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right].$$

Solución. *Aplicando la linealidad de la transformada de Laplace inversa:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right] &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-6}\right]-6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right]+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+5}\right]\\
&= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-6}\right]-6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right]+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]\\
&= 5e^{6t}-6\cos 3t+\frac{3}{2}e^{-2t}\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

▲

Para determinar las transformadas inversas de funciones más complejas podemos usar fracciones parciales o el producto de convolución.

Definición 6.2.21 . (Producto de Convolución)
Dadas las funciones integrables $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definimos su **Producto de Convolución** *para $t > 0$, denotado por $f * g$ como:*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Teorema 6.2.22 . (de Convolución)
Sean f y g dos funciones de tipo exponencial al infinito, entonces su producto de convolución posee transformada de laplace y tenemos:

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s).$$

Demostración.

Como f y g son de orden exponencial al infinito su producto de convolución es también de orden exponencial al infinito. En efecto,

$$\begin{aligned}
|(f*g)(t)| &= \left|\int_0^t f(x)g(t-x)dx\right|\\
&\leq \int_0^t |f(s)|\,|g(t-x)|\,dx\\
&\leq MN\int_0^t e^{\eta t}e^{\zeta(t-x)}dx,
\end{aligned}$$

donde $M, N > 0$ son constantes. De la última desigualdad deducimos que $(f*g)(t)$ es de orden exponencial al infinito.

Para la segunda parte del teorema aplicamos el Teorema de Fubini para intercambiar las integrales iteradas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f*g] &= \int_0^{\infty} e^{-st}\int_0^t f(x)g(t-x)dxdt \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}f(x)g(t-x)1_{[0,t]}(x)dxdt \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx}e^{-s(t-x)}f(x)g(t-x)1_{[0,\infty)}(t-x)dxdt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx}f(s)\left(\int_0^{\infty} e^{-su}g(u)du\right)dx \\
&= \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s),
\end{aligned}$$

para todo s perteneciente al dominio común de las transformadas de f y g. ■

Ejemplo 6.2.23 .
Aplicando convolución encuentre $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4+s^2}\right]$.
Solución.
Notemos que podemos escribir $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right]$*. Llamemos* f *a la función tal que* $\mathcal{L}[f]=\frac{1}{s^2}$ *y* g *a la que cumple* $\mathcal{L}[g]=\frac{1}{s^2+1}$*. Entonces tenemos* $f(t)=t$ *y* $g(t)=\operatorname{sen} t$*. Del Teorema 6.2.22 tenemos que* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right]=f(t)*g(t)$*, es decir,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right] &= \int_0^t x\operatorname{sen}(t-x)dx \\
&= t-\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

▲

6.2.3. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales

Proposición 6.2.24 .
Sea f *una función de orden exponencial al infinito, entonces cada solución de la ecuación diferencial:*

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t),$$

es de orden exponencial al infinito y tiene transformada de Laplace.

Ejemplo 6.2.25 .
Resuelva el problema de valor inicial $y''-2y'+5y=-8e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=12$.
Solución.

Aplicando transformada de Laplace y sus propiedades tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y''-2y'+5y\right] &= \mathcal{L}\left[-8e^{-t}\right]\\
\mathcal{L}\left[y''\right]-2\mathcal{L}\left[y'\right]+5\mathcal{L}\left[y\right] &= -8\mathcal{L}\left[e^{-t}\right]\\
s^2\mathcal{L}\left[y\right]-sy(0)-y'(0)-2s\mathcal{L}\left[y\right]+2y(0)+5\mathcal{L}\left[y\right] &= -8\mathcal{L}\left[e^{-t}\right]\\
s^2\mathcal{L}\left[y\right]-2s-12-2s\mathcal{L}\left[y\right]+4+5\mathcal{L}\left[y\right] &= -\frac{8}{s+1}\\
\mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}.
\end{aligned}$$

Separando en farcciones parciales y acomodando tenemos:

$$\mathcal{L}\left[y\right]=\frac{3(s-1)+8}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}.$$

Por lo tanto, aplicando la transformada inversa obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3(s-1)+8}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}\right] &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right]+4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\\
&= e^t\cos 2t+4e^t\operatorname{sen}2t-e^{-t}.
\end{aligned}$$

Finalmente, concluimos que solución del problema de Cauchy dado es:

$$y(t)=3e^t\cos 2t+4e^t\operatorname{sen}2t-e^{-t}.$$

▲

Ejemplo 6.2.26 .
Resuelva el problema de valor inicial $y''+4y'+3y=1$, $y(0)=3$, $y'(0)=-2$.
Solución.
Tomando transformada y aplicando propiedades tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y''+4y'+3y\right] &= \mathcal{L}\left[1\right]\\
\mathcal{L}\left[y''\right]+4\mathcal{L}\left[y'\right]+3\mathcal{L}\left[y\right] &= \mathcal{L}\left[1\right]\\
s^2\mathcal{L}\left[y\right]-sy(0)-y'(0)+4s\mathcal{L}\left[y\right]-4y(0)+3\mathcal{L}\left[y\right] &= \mathcal{L}\left[1\right]\\
s^2\mathcal{L}\left[y\right]-3s+2+4s\mathcal{L}\left[y\right]+8+3\mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{1}{s}\\
\mathcal{L}\left[y\right](s^2+4s+3) &= \frac{1}{s}+3s+10\\
\mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{3s^2+10s+1}{s(s^2+4s+3)}.
\end{aligned}$$

Separando en fracciones parciales resulta:

$$\mathcal{L}\left[y\right]=\frac{1}{3s}+\frac{3}{s+1}-\frac{1}{3(s+3)}.$$

Finalmente, aplicando transformada inversa obtenemos por solución el problema de Cauchy:

$$y(t) = \frac{1}{3} + 3e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t}.$$

▲

Ejemplo 6.2.27 .
Resuelva $y''' - y'' + 4y' - 4y = -3e^t + 4e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 3$.
Solución.
Tomando transformada, aplicando propiedades y reduciendo tenemos:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{5s^3 - 17s^2 + 17s - 2}{(s-1)(s-2)(s^3 - s^2 + 4s - 4)}$$

Luego, descomponiendo en fracciones parciales:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{25(s-1)} - \frac{3}{5(s-1)^2} + \frac{1}{2(s-2)} + \frac{288 - 27s}{50(s^2+4)}.$$

Aplicando transformada inversa obtenemos que la solución buscada es:

$$y = \frac{1}{25}e^t - \frac{3}{5}te^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{77}{50}\operatorname{sen} 2t - \frac{27}{50}\cos 2t.$$

▲

Ejemplo 6.2.28 .
Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x + \dot{y} - y &= 0 \\ \ddot{y} - 5\dot{y} + 4y - \dot{x} + x &= 0 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.
Solución.
Aplicando transformada y sus propiedades obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} (s-2)(s-1)\mathcal{L}[x] + (s-1)\mathcal{L}[y] &= 1 \\ -(s-1)\mathcal{L}[x] + (s-4)(s-1)\mathcal{L}[y] &= s-5 \end{cases}$$

Despejando $\mathcal{L}[x]$ *y* $\mathcal{L}[y]$ *obtenemos:*

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^3 - 7s^2 + 15s - 9}, \quad \mathcal{L}[y] = \frac{s^2 - 7s + 11}{s^3 - 7s^2 + 15s - 9}.$$

Al separar en fracciones parciales lo anterior se escribe como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x] &= \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s-3)} + \frac{1}{2(s-3)^2} \\ \mathcal{L}[y] &= \frac{4}{5(s-1)} - \frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{2(s-3)^2}. \end{aligned}$$

Tomando transformada inversa obtenemos como solución del sistema diferencial dado:

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{1}{2}te^{3t} \\ y(t) &= \frac{5}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{2}te^{3t}. \end{cases}$$

▲

Ejemplo 6.2.29 .

Resuelva $y'' - 7y' + 10y = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ t, & t > 1 \end{cases}$, $y(0) = y'(0) = 0.$

Solución.

Escribiendo el lado derecho de la ecuación diferencial en términos de la función escalón unitario tenemos:

$$y'' - 7y' + 10y = 1 + (t-1)\,\mu(t-1).$$

Aplicando transformada de Laplace y sus propiedades obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(s^2 - 7s + 10\right)\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} \\ \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s(s-5)(s-2)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s-5)(s-2)}. \end{aligned}$$

Separando en fracciones parciales tenemos:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{10s} + \frac{1}{15(s-5)} - \frac{1}{6(s-2)} + \left(\frac{7}{100s} + \frac{1}{10s^2} + \frac{1}{55(s-5)} - \frac{1}{12(s-2)}\right)e^{-s}.$$

Aplicando transformada inversa resulta:

$$y = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{6}e^{2t} + \left(\frac{7}{100} + \frac{1}{10}t + \frac{1}{75}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{2t}\right)\mu(t-1),$$

o equivalentemente:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{10} + \frac{1}{15}e^{5t} - \frac{1}{6}e^{2t}, & t \leq 1 \\ \frac{17}{100} + \frac{1}{10}t + \frac{2}{25}e^{5t} - \frac{1}{4}e^{2t}, & t > 1. \end{cases}$$

▲

6.3. Ejercicios Propuestos

1. Integre las ecuaciones diferenciales utilizando series de potencias.

   a) $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$.

   b) $4xy' + 2y' + y = 0$.

c) $(1+x)\,y' - ny = 0$.

d) $9x\,(1-x)\,y'' - 12y' + 4y = 0$.

e) $y'' + xy' + y = 0$.

f) $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y\,(0) = y'\,(0) = 0$.

g) $y'' - (1+x^2)\,y = 0$, $y\,(0) = -2$, $y'\,(0) = 2$.

h) $y'' - ye^x = 0$.

i) $y' = x^2 + y^2$, $y\,(0) = 0$.

j) $y' = e^y + xy$, $y\,(0) = 0$.

k) $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$.

l) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$.

m) $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$.

n) $x^2y'' - 2xy' + (x^4 - 1)\,y = 0$.

ñ) $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$.

2. En los ejericios siguientes encuentre los tres primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial para las condiciones iniciales indicadas.

   a) $y' = 1 - xy$, $y\,(0) = 0$.

   b) $y' = \frac{y-x}{y+x}$, $y\,(0) = 0$.

   c) $y' = y \operatorname{sen} x$, $y\,(0) = 1$.

   d) $y'' + xy = 0$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 1$.

   e) $y'' - y' \operatorname{sen} x = 0$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 1$.

3. Demuestre la justeza de las siguientes relaciones.

   a) $J_p'\,(x) = J_{p-1}\,(x) - \frac{p}{x}J_p\,(x)$.

   b) $J_p'\,(x) = -J_{p+1}\,(x) + \frac{p}{x}J_p\,(x)$.

   c) $J_{p+1}\,(x) = \frac{2p}{x}J_p\,(x) - J_{p-1}\,(x)$.

   d) $J_2\,(x) = J_0''\,(x) - \frac{1}{x}J_0'\,(x)$.

4. Aplique transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy:

   a) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

   b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t} \operatorname{sen} t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

   c) $y'' + 4y' - 5y = te^t$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   d) $x^{(4)} + 4x^{(3)} + 6x'' + 4x' + x = 2\cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x^{(3)} = 1$.

   e) $ty'' + 4y' + 9ty = 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{4}$.

f) $y''' - y = 5$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

h) $y'' + 2ty - 4y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$

i) $y' + y = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$, $y'(0) = 0$.

j) $y'' + 4y' - 12y = \begin{cases} e^{2t}, & t < 2 \\ t^2, & t \geq 2 \end{cases}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

5. Aplique transformada de Laplace para resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} x' + y &= t \\ y' + 4x &= 0 \end{cases}$, tal que $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

b) $\begin{cases} z' + x &= \operatorname{sen} t \\ x' - y &= e^t \\ y' + z + x &= 1 \end{cases}$, tal que $x(0) = z(0) = 1$, $y(0) = 1$.

c) $\begin{cases} z'' - x + 2y &= 3e^{-t} \\ -2z' + 2x' + y &= 0 \\ 2z' - 2x + y' + 2y'' &= 0 \end{cases}$, tal que $z(0) = z'(0) = 1$, $x(0) = y(0) = 2$, $y'(0) = -2$

d) $\begin{cases} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{cases}$, tal que $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Capítulo 7

Pequeña Introducción a la Teoría de Estabilidad

7.1. Estabilidad según Liapunov

Definición 7.1.1 . (Estable, Inestable, Asintóticamente Estable)
Considere el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \tag{7.1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$*. Entonces:*

1. *Una solución* $\varphi_i(t)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, del sistema (7.1) que satisface las condiciones iniciales* $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, se dice* **Estable según Liapunov** *si* $\forall \varepsilon > 0$*,* $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que para cada cualquier otra solución* $x_i(t)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *del sistema (7.1), cuyos valores iniciales satisfacen:*

$$|x_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \tag{7.2}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$*, se verifica la desigualdad:*

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \tag{7.3}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$*,* $\forall t \geq t_0$.

2. *Si para valores* $\delta > 0$*, arbitrariamente pequeños, no se cumple la desigualdad (7.3), al menos para una solución* $x_i(t)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, la solución* $\varphi_i(t)$ *se llama* **Inestable**.

3. *Si en las condiciones (7.2), además del cumplimiento de (7.3), se cumple también la condición:*

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \tag{7.4}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$*, la solución* $\varphi_i(t)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, se llama* **Asintóticamente estable**.

El estudio de la estabilidad de una solución $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, del sistema (7.1) se puede reducir al estudio de la estabilidad de la **Solución Trivial**, $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de un sistema análogo al sistema (7.1) dado por:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{7.5}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, donde se satisface $F_i(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En este caso, se dice que $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es un **Punto de Equilibrio** del sistema (7.5), también se les llama punto singular o de reposo.

Para el caso de puntos de equilibrio, las definiciones de estabilidad e inestabilidad se puede formular así: el punto de equilibrio $x \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es estable según Liapunov, si para cualquier $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que para toda solución:

$$x_i(t), \quad \text{tal que, } x_i(t_0) = X_{i0},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, satisface la condición:

$$|X_{i0}| < \delta \Rightarrow |x_i(t)| < \varepsilon, \ \forall t > t_0. \tag{7.6}$$

El significado geométrico para el caso $n = 2$ es como sigue: por muy estrecho que sea el cilindro de radio ε con centro el eje Ot existe en el plano $t = t_0$ un entorno del punto $(0, 0, t_0)$ de amplitud 2δ tal que para todas las curvas integrales $x_1(t)$, $x_2(t)$ que salen de este entorno, se mantienen dentro del cilindro $\forall t > t_0$ como se muestra en la Figura 7.1.

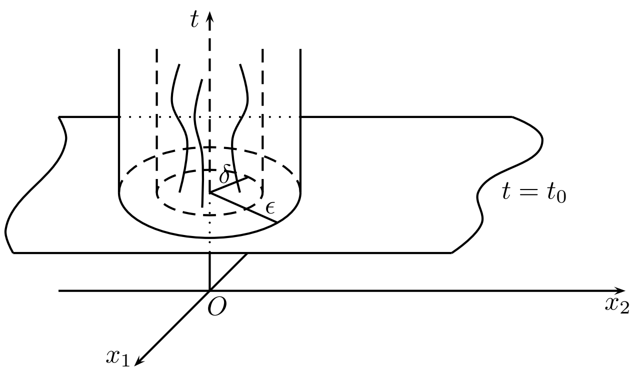

Figura 7.1: Interpretación geométrica de la estabilidad.

Si además de la desigualdad (7.6), se cumple también la condición:

$$\lim_{t \to \infty} |x_i(t)| = 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, el **Punto de Equilibrio es Asintóticamente Estable**.

Si para valores $\delta > 0$ arbitrariamente pequeños no se cumple la condición (7.6) al menos para una solución $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, el **Punto de Equilibrio es Inestable**.

Ejemplo 7.1.2 .
Estudie la estabilidad del sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & -y \\ \frac{dy}{dt} & = & x \end{array}\right. \tag{7.7}$$

tal que $y(0) = x(0) = 0$.
Solución.
La solución del sistema (7.7) que satisface las condiciones iniciales dadas es $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. *Cualquier solución del sistema que satisface las condiciones iniciales* $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ *tendrá la forma:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t \\ y(t) & = & x_0 \operatorname{sen} t - y_0 \cos t \end{array}\right.$$

Tomamos un ε *arbitrario y mostramos que existe un número* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\begin{array}{rcl} |x_0 - 0| & < & \delta \\ |y_0 - 0| & < & \delta \end{array} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} |x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t| & < & \varepsilon \\ |y(t) - 0| = |x_0 \operatorname{sen} t - y_0 \cos t| & < & \varepsilon \end{array}\right\} \forall t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{rcccl} |x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t| & \leq & |x_0 \cos t| + |y_0 \operatorname{sen} t| & \leq & |x_0| + |y_0| \\ |x_0 \operatorname{sen} t - y_0 \cos t| & \leq & |x_0 \operatorname{sen} t| + |y_0 \cos t| & \leq & |x_0| + |y_0| \end{array}\right\} \tag{7.8}$$

luego,

$$\text{si } |x_0| + |y_0| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} |x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t| < \varepsilon \\ |x_0 \operatorname{sen} t - y_0 \cos t| < \varepsilon \end{array}\right\} \forall t \tag{7.9}$$

Por tanto, tomamos $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$. *Entonces si* $|x_0| < \delta$ *y* $|y_0| < \delta$ *en virtud de (7.8) se cumplirá la desigualdad (7.9),* $\forall t > 0$. *Luego, la solución nula es estable, sin embargo, esta no es asintótica.* ▲

7.2. Tipos Elementales de Puntos de Equilibrio

Sea dado el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos con coeficientes constantes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} & = & a_{21}x + a_{22}y \end{array}\right. \quad \text{con} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.10}$$

El punto $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, en el que se anulan los segundos miembros de la ecuación (7.10) es un punto de equilibrio.

Para estudiar los puntos de equilibrio del sistema (7.10) debemos formar la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{7.11}$$

y encontrar las raíces λ_1 y λ_2. Según sea su naturaleza son posibles los siguientes casos:

1. Reales: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   a) Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, tenemos un punto singular de estabilidad asintótica, llamando **Nodo estable**, lo que se ilustra en la Figura 7.2.

   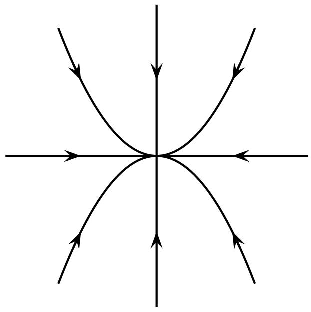

   Figura 7.2: $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, Nodo estable.

   b) Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ tenemos un punto singular de inestabilidad, llamado **Nodo inestable**, lo que se ilustra en la Figura 7.3.

   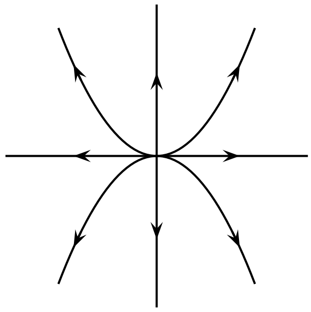

   Figura 7.3: $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, Nodo inestable.

   c) Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ tenemos un punto singular de inestabilidad llamado **Punto silla**, lo que se ilustra en la Figura 7.4.

   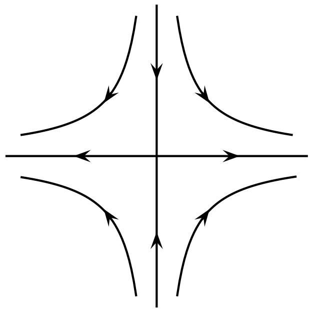

   Figura 7.4: $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, Punto silla.

2. Raíces complejas: $\lambda_1 = p + iq$ y $\lambda_2 = p - iq$.

a) Si $p < 0,\ q \neq 0$ tenemos un punto singular de estabilidad asintótica, llamado **Foco estable**, lo que se ilustra en la Figura 7.5.

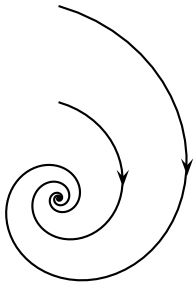

Figura 7.5: $p < 0$ y $q \neq 0$, Foco estable.

b) Si $p > 0$ y $q \neq 0$ tenemos un punto singular de inestabilidad, llamado **Foco inestable**, lo que se ilustra en la Figura 7.6.

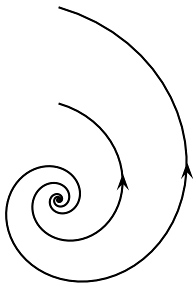

Figura 7.6: $p > 0$ y $q \neq 0$, Foco inestable.

c) Si $p = 0$ y $q \neq 0$ tenemos un punto singular estable, llamando **Centro**, lo que se ilustra en la Figura 7.7.

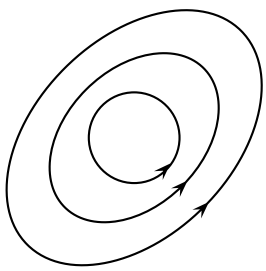

Figura 7.7: $p = 0$ y $q \neq 0$, Centro.

3. Raíces múltiples: $\lambda_1 = \lambda_2$.

a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ tenemos un punto singular de estabilidad asintótica, llamado **Nodo estable**, lo que se ilustra en la Figura 7.8.

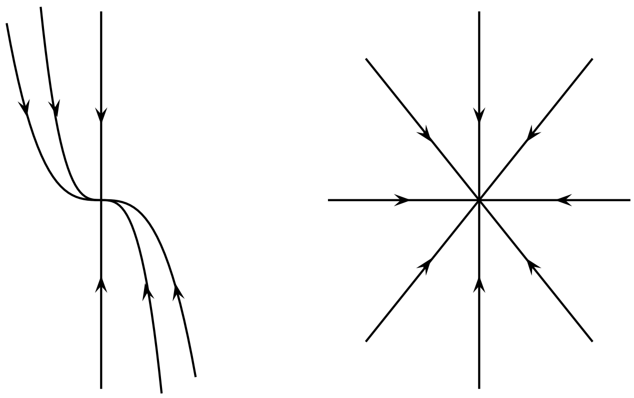

Figura 7.8: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, Nodo estable.

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ tenemos un punto singular inestable, llamado **Nodo inestable**, lo que se ilustra en la Figura 7.9.

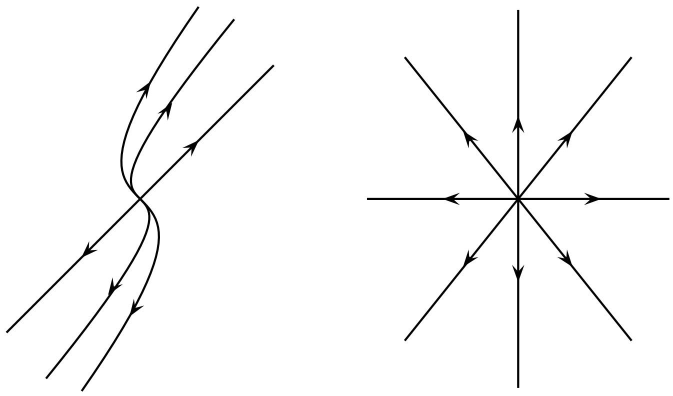

Figura 7.9: $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, Nodo inestable.

Ejemplo 7.2.1 . *Determine el carácter del punto de equilibrio* $(0,0)$ *del sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= 5x - y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{cases}$$

Solución.
La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

cuyas solucines son $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$ *y* $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$*, es decir, raíces reales distintas y positivas. Luego,* $(0,0)$ *es un punto singular inestable (nodo inestable).* ▲

7.3. Ejercicios Propuestos

1. Estudie la estabilidad según Liapunov de las soluciones de las siguientes ecuaciones y sistemas diferenciales.

   a) $\dot{x} = x + t$, $x(0) = 1$.

   b) $\dot{x} = 2t(x+1)$, $x(0) = 0$.

   c) $\dot{x} = -x + t^2$, $x(1) = 1$.

   d) $\dot{x} = 2 + t$, $x(0) = 1$.

   e) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - 13y \\ \dot{y} & = & \frac{1}{4}x - 2y \end{array} \right.$, $x(0) = y(0) = 0$.

   f) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -x - 3y \\ \dot{y} & = & x - y \end{array} \right.$, $x(0) = y(0) = 0$.

2. Determine el carácter de los puntos de equilibrio para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

   a) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & 3x + y \\ \dot{y} & = & -2x + y \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & -x + 3y \\ \dot{y} & = & -x + y \end{array}$

   c) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & -2x - y \\ \dot{y} & = & 3x - y \end{array}$

   d) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & 3x + 7y \\ \dot{y} & = & 2x + 5y \end{array}$

   e) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & -2x + \frac{5}{7}y \\ \dot{y} & = & 7x - 3y \end{array}$

   f) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & -x + 2y \\ \dot{y} & = & x + y \end{array}$

   g) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & 3x - y \\ \dot{y} & = & x + y \end{array}$

   h) $\begin{array}{rcr} \dot{x} & = & -x - y \\ \dot{y} & = & x - 3y \end{array}$

   i) $\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3x \\ \dot{y} & = & 3y \end{array}$

Capítulo 8

Ejercicios Resueltos

1. Resuelva el problema de Cauchy $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

   Solución.
   Separando variables tenemos:
   $$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\operatorname{sen} x},$$
   por lo que integrando resulta:
   $$\ln(\ln y) = \ln|\csc x - \cot x| + \ln C.$$
   o equivalentemente:
   $$\ln y = C(\csc x - \cot x).$$
   Imponiendo la condición inicial obtenemos $C = 0$, por tanto, $\ln y = 0$, o bien, $y = 1$.

2. Resuelva $\frac{dy}{dx} = -2\frac{x-2y+1}{5x-y-4}$, $y(1) = 2$, donde $5x - y - 4 \neq 0$.

   Solución.
   Las rectas $x - 2y + 1 = 0$ y $5x - y - 4 = 0$ se cortan en el punto $(1, 1)$, por lo tanto, consideramos el cambio de variables $x = u + 1$ e $y = v + 1$, de donde, $dx = du$ y $dy = dv$. Con esto obtenemos la ecuación homogénea:
   $$\frac{dv}{du} = -2\frac{u - 2v}{5u - 4v}.$$
   Sea $v = uz$, lo que implica $\frac{dv}{du} = z + v\frac{dz}{du}$, por tanto,
   $$z + v\frac{dz}{du} = -2\frac{1 - 2z}{5 - z},$$

de donde separando variables:

$$\frac{du}{u} = \frac{5-z}{z^2-z-2}dz.$$

Integrando resulta:

$$\ln|z-2| - 2\ln|z+1| = \ln|u| + \ln C.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos y retornando a las variables u y v tenemos:

$$\frac{v-2u}{(u+v)^2} = C,$$

de donde en términos de x e y nos queda:

$$y - 2x + 1 = C\,(x+y-2)^2\,.$$

Imponiendo la condición inicial obtenemos $C = 1$ y por tanto:

$$y - 2x + 1 = (x+y-2)^2\,.$$

3. Resuelva el problema $x\sqrt{x}y' - y\sqrt{x} + y^2 = 0$, $y\,(1) = 2$.

   $\boxed{\textbf{Solución.}}$
   Dividiento entre $x\sqrt{x} \neq 0$ obtenemos la ecuación de Bernoulli:

   $$y' - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x\sqrt{x}}y^2 = 0,$$

   con $\alpha = 2$. Sea $z = y^{1-2} = y^{-1}$, lo que implica $z' = -y^{-2}y'$. Así, obtenemos la ecuación lineal:

   $$z' + \frac{1}{x}z - \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0.$$

   Aplicando (2.29) resulta:

   $$z = \frac{C}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

   Pero $y = \frac{1}{z}$, por lo que obtenemos:

   $$y = \frac{x}{C + 2\sqrt{x}}.$$

   Como $y\,(1) = 2$ resulta $C = -\frac{3}{2}$. Luego,

   $$y = \frac{2x}{4\sqrt{x} - 3}.$$

4. Encuentre las trayectorias isogonales a la familia de curvas $y^2 = 4Cx$, que corta en un ángulo $\theta = 45°$, es decir, $m = \operatorname{tg}\alpha = 1$.

   $\boxed{\textbf{Solución.}}$

   Derivando respecto a x obtenemos $2yy' = 4C$. Al eliminar C entre la ecuación dada y la anteriormente encontrada resulta $2xyy' - y^2 = 0$, de donde, $y' = \frac{y}{2x}$. Como $k = \operatorname{tg}\theta$ y $\theta = 45°$, tenemos $k = 1$, por lo que, reemplazamos y' por $\frac{y'-1}{1+y'}$. Con esto y luego de ordenar obtenemos la ecuación homogénea:

$$y' = \frac{2x+y}{2x-y}.$$

   Hagamos $y = xz$, lo que implica $y' = z + xz'$, por tanto, luego de separar variables obtenemos:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2-z}{z^2-z+2}dz.$$

   Integrando tenemos:

$$\frac{3\sqrt{7}}{7}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2z-1)\right) - \frac{1}{2}\ln\left|z^2-z+2\right| = \ln|x| + C,$$

   pero $z = \frac{y}{x}$, lo que junto a las propiedades de los logarítmos permite concluir:

$$\frac{3\sqrt{7}}{7}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{7}}{7x}(2y-x)\right) - \frac{1}{2}\ln\left|y^2-xy+2x^2\right| = C.$$

5. Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $x^2 + y^2 - 2Cy = a^2$.

   $\boxed{\textbf{Solución.}}$

   Derivando respecto a x obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2-2Cy-a^2 & = & 0 \\ 2x+2yy'-2Cy' & = & 0 \end{array}\right|$$

   Ahora, al eliminar C de entre estas ecuaciones resulta:

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2-a^2}.$$

   Dado que buscamos las trayectorias ortogonales cambiamos y' por $\frac{-1}{y'}$, por lo tanto, luego de ordenar tenemos:

$$-2xyy' = x^2 - y^2 + a^2.$$

   Para resolverla, hagamos $u = y^2$, es decir, $u' = 2yy'$, con lo que una vez ordenada obtenemos la ecuación lineal:

$$u' - \frac{1}{x}u + x - \frac{1}{x}a^2 = 0.$$

Aplicando (2.29) tenemos como solución general $u = cx - x^2 - a^2$. Pero $u = y^2$, por lo que concluimos:

$$x^2 + y^2 - Cx + a^2 = 0.$$

6. Resuelva $xy' = \sqrt{y} - 2y$ y luego encuentre las soluciones singulares.

Solución.
Sea $y' = p$, por tanto, la ecuación queda $xp = \sqrt{y} - 2y$. Derivando respecto a y resulta:

$$p\frac{dx}{dy} + x\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2.$$

Notando que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$, reemplazando $x = \frac{\sqrt{y}-2y}{p}$ y ordenando obtenemos:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1 - 6\sqrt{y}}{2\sqrt{y}\left(\sqrt{y} - 2y\right)}.$$

Sea $u = \sqrt{y}$, lo que implica $du = \frac{du}{2\sqrt{y}}$, por tanto:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1 - 6u}{u\,(1 - 2u)}du.$$

Integrando tenemos:

$$\ln|p| + \ln|C| = \ln|u| + \ln|2u - 1|\,,$$

Aplicando propiedades de los logarítmos concluimos que $pC = \sqrt{y}\left(2\sqrt{y} - 1\right)^2$ y de antes $x = \frac{\sqrt{y}-2y}{p}$. Eliminando p de estas ecuaciones resulta:

$$y = \frac{(x - C)^2}{4x^2}.$$

Por tanto, $y = 0$ es solución singular para $x = C$.

7. Resuelva la ecuación $3xyy' = x^2 + y^2$ tal que $y(1) = 1$.

Solución.
La ecuación es homogénea, por lo que hacemos $y = xz$, de donde $y' = z + xz'$. Reemplazando en la ecuación y ordenando obtenemos:

$$3z\,(xz' + z) = 1 + z^2.$$

Separando variables resulta:

$$\frac{3z}{1 - 2z^2}dz = \frac{dx}{x}.$$

Integrando tenemos:

$$-\frac{3}{4}\ln\left|1-2z^2\right| = \ln|x| + \ln|C|\,.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos y considerando que $z=\frac{y}{x}$ obtenemos:

$$\left(1-\frac{2y^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{4}} = Cx.$$

Imponiendo la condición incial resulta $C=1$. Por tanto, la solución buscada es $x=\left(1-\frac{2y^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

8. Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2y+9}{3x-6y+19}$.

   Solución.
   Las rectas $x-2y+9=0$ y $3x-6y+19=0$ son paralelas, por lo que hacemos el cambio $z=x-2y$, de donde $y'=\frac{1}{2}(1-z')$. Luego:

   $$\frac{1}{2}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)=\frac{z+9}{3z+19},$$

   separando variables resulta:

   $$dx=\frac{3z+19}{z+1}dz.$$

   Integrando y volviendo a las variables originales obtenemos la solución general:

   $$8\ln|x-2y+1|+x-3y=C.$$

9. Resuelva la ecuación $y'=\sqrt{\frac{x^2-1}{y^2-1}}$ para los casos $|x|\leq 1$ e $|y|<1$ y $|x|\geq 1$ e $|y|>1$.

   Solución.
   Supongamos $|x|\leq 1$ e $|y|<1$. Por tanto, la ecuación se escribe:

   $$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}.$$

   Al separar las variables e integrar resulta:

   $$\operatorname{arc\,sen} y + y\sqrt{1-y^2} = \operatorname{arc\,sen} x + x\sqrt{1-x^2}+C.$$

   Si suponenmos $|x|\geq 1$ e $|y|>1$, tenemos:

   $$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x^2-1}{y^2-1}}$$

   Separando variables e integrando obtenemos:

   $$y\sqrt{y^2-1}-\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right| = x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$$

10. Resuelva la ecuación $yy'^2 - (1+2xy)\,y' + 2x = 0$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

Esta ecuación es algebraica en y', por tanto,

$$y' = \frac{(1+2xy) \pm \sqrt{(1+2xy)^2 - 8yx}}{2y},$$

de donde $y' = \frac{1}{y}$ e $y' = 2x$. Integrando estas soluciones obtenemos $y^2 = 2x + C$ e $y = x^2 + K$.

11. Resuelva la ecuación $y^2 + y'^2 = 1$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

La ecuación tiene la forma $f(y, y') = 0$. Por tanto, consideramos la parametrización $y = \operatorname{sen} t$ e $y' = \cos t$. De $y' = \frac{dy}{dx} = \cos t$ obtenemos $dx = \frac{dy}{\cos t}$, pero $dy = \cos t dt$, por tanto, $dx = dt$, es decir, $x = t + C$. Por tanto, la solución es:

$$\begin{cases} x &= t + C \\ y &= \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Eliminando el parámetro t obtenemos la solución general bajo la forma $y = \operatorname{sen}(x - C)$.

12. Resuelva la ecuación $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$

La ecuación es del tipo Clairaut, por tanto, hacemos $y' = p$, por tanto, $y = xp + \frac{1}{p}$. Derivando respecto a x resulta:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}.$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx} = p$ y agrupando resulta:

$$\left(x - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0,$$

de donde $\frac{dp}{dx} = 0$, lo que implica $p = C$, es decir, $y = Cx + \tilde{C}$. Por otro lado, $x = \frac{1}{p^2}$. Concluimos que:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{p^2} \\ y &= \frac{2}{p} \end{cases}$$

13. Resuelva la ecuación $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2ydy = 0$

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Llamemos $P = x^2 + y^2 + 2x$ y $Q = 2y$, con lo que tenemos $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, por lo que la ecuación no es exacta. Buscamos un factor integrante:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 1,$$

luego, $\ln \mu = \int dx$, de donde $\mu = e^x$ es el factor integrante. Con esto obtenemos la ecuación exacta:

$$\left(x^2 + y^2 + 2x\right) e^x dx + 2ye^x dy = 0.$$

Por tanto,

$$g(x, y) = \int 2ye^x dy + k(x) = y^2 e^x + k(x).$$

Derivando respecto a x y recordando que $\frac{\partial g}{\partial x} = (x^2 + y^2 + 2x)\, e^x$ obtenemos que $k'(x) = (x^2 + 2x)\, e^x dx$, es decir, $k(x) = x^2 e^x$. Concluimos que $(x^2 + y^2)\, e^x = C$.

14. Resuelva la ecuación $y' = \sqrt{4 - y^2}$, $y \in [-2, 2]$.

    $\boxed{\textbf{Solución.}}$
    Separando variables tenemos e integrando obtenemos:

    $$\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y}{2}\right) = x + C,$$

    de donde:

    $$y = 2 \operatorname{sen}(x + C).$$

15. Resuelva la ecuación $y' = y^3 + 1$.

    $\boxed{\textbf{Solución.}}$
    Separando variables e integrando obtenemos:

    $$\frac{1}{3}\ln|y+1| - \frac{1}{6}\ln\left|y^2 - y + 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2y-1)\right).$$

16. Resuelva la ecuación $y' = x + y$.

    $\boxed{\textbf{Solución.}}$
    Sea $z = x + y$, lo que implica $z' = 1 + y'$. Luego, la ecuación queda como:

    $$z' - 1 = z,$$

    separando variables, integrando y acomodando resulta:

    $$z = Ce^x - 1.$$

    Pero como $z = x + y$ obtenemos finalmente que:

    $$y = Ce^x - x - 1.$$

17. Resuelva la ecuación $y' = \sqrt{y-x}$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Sea $y - x = z$, de donde $y' - 1 = z'$. Por tanto:

$$z' + 1 = \sqrt{z},$$

separando variables e integrando obtenemos:

$$\ln|z-1| + 2\sqrt{z}\ln\left|\sqrt{z}-1\right| - \ln\left|1+\sqrt{z}\right| = x + C,$$

de donde:

$$\ln|y-x-1| + 2\sqrt{y-x}\ln\left|\sqrt{y-x}-1\right| - \ln\left|1+\sqrt{y-x}\right| = x + C.$$

18. Resuelva $\frac{dy}{1-y} = dx - \frac{dx}{1+x}$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Integrando directamente obtenemos:

$$-\ln|1-y| = x - \ln|1+x| + \ln|C|,$$

pero $x = \ln e^x$, por lo que aplicando las propiedades de los logarítmos resulta:

$$(1-y)^{-1} = \frac{Ce^x}{1+x},$$

de donde:

$$y = 1 - \frac{1+x}{Ce^x}.$$

19. Resuelva el problema de Cauchy $(1+y^2) + xyy' = 0$, $y(1) = 0$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Separando variables e integrando obtenemos:

$$\ln|x| + \ln|C| = -\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos y arreglando adecuadamente obtenemos:

$$C^2x^2\left(1+y^2\right) = 1.$$

Como $y(1) = 0$ tenemos que $C = 1$, por lo tanto:

$$x^2\left(1+y^2\right) = 1.$$

20. Resuelva $y' = \sqrt{xy}$, $y(0) = 1$.

Solución.

Separando variables e integrando obtenemos:

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C,$$

de donde:

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)^2.$$

Pero $y(0) = 1$ implica que $C = 2$, por lo tanto:

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\right)^2.$$

21. Resuelva $2x\sqrt{4-y^2} + yy' = 0$, $y(1) = 2$.

Solución.

Separando variables e integrando resulta:

$$x^2 + C = \sqrt{4-y^2}.$$

Como $y(1) = 2$, entonces $C = -1$, por lo tanto:

$$x^2 - 1 = \sqrt{4-y^2}.$$

22. Resuelva $xy^2(xy' + y) = a^2$.

Solución.

Sea $z = xy$, entonces $z' = y + xy'$. Por tanto,

$$xy^2\left(xy' + y\right) = a^2.$$

Separando variables queda:

$$z^2dz = a^2xdx.$$

Integrando y retornando a las variables originales obtenemos:

$$\frac{x^3y^3}{3} = \frac{a^2x^2}{2} + C.$$

23. Resuelva $2y' + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$.

Solución.

Hacemos $z = xy$, entonces $z' = y + xy'$. Por tanto,

$$2\left(\frac{z'-y}{x}\right) + \frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Reduciendo y separando variables obtenemos:

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{dx}{2x}.$$

Integrando y retornando a la varoable original resulta:

$$\frac{1}{xy-1} = \ln x^2 + C.$$

24. Resuelva $y' = e^{x-y} - e^x$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Sea $v = e^{-y}$, entonces $v' = -e^{-y}y'$, de donde $y' = -\frac{v'}{v}$. Luego, tenemos:

$$-\frac{v'}{v} = e^x (v-1).$$

Separando variables e integrando resulta:

$$\ln\left|\frac{v-1}{v}\right| = -e^x + C,$$

de donde:

$$\ln|1-e^y| = -e^x + C.$$

25. Resuelva $x + yy' + p\sqrt{x^2+y^2} = 0$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Sea $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, por tanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{d\rho\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta d\theta}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta}$. Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}
\rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta\left(\frac{d\rho\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta d\theta}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta}\right) + p\rho &= 0\\
\rho\cos\theta + \rho\left(\frac{d\rho\operatorname{sen}^2\theta + \rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta}\right) + p\rho &= 0\\
\rho\cos\theta + \rho\left(\frac{d\rho - d\rho\cos^2\theta + \rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta}\right) + p\rho &= 0\\
\rho\cos\theta + \rho\left(\frac{d\rho - \cos\theta(d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta)}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta}\right) + p\rho &= 0\\
\rho\cos\theta + \frac{\rho d\rho}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta} - \rho\cos\theta + p\rho &= 0\\
\frac{\rho d\rho}{d\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta d\theta} + p\rho &= 0.
\end{aligned}$$

Luego, separando variables obtenemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{p \operatorname{sen} \theta d\theta}{1 + p\cos\theta},$$

de donde:

$$\ln|\rho| = -\ln|1 + p\cos\theta| + \ln|C|.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$\rho = \frac{C}{1 + p\cos\rho}.$$

Pero $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\cos\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Luego:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + px = C.$$

26. Encuentre la solución general de $2xyy' = x^2 + 3y^2$.

Solución.
Sea $y = xz$, de donde $y' = z + xz'$. Entonces:

$$2x^2 z\,(z'x + z) = x^2 + 3x^2 z^2.$$

Separando variables obtenemos:

$$\frac{zdz}{1 + 2z^2} = \frac{dx}{x},$$

integrando resulta:

$$\frac{1}{4}\ln\left|1 + 2z^2\right| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Multiplicando por cuatro, aplicando las propiedades de los logarítmos y retornando a las variables originales obtenemos:

$$x^2 + 2y^2 = cx^6.$$

27. Resuelva la ecuación $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right)$.

Solución.
Sea $z = \frac{y-2x}{x+1}$, lo que implica $z' = \frac{y'-2}{x+1} - \frac{y-2x}{(x+1)^2}$, luego $y' = \left(z' + \frac{y-2x}{(x+1)^2}\right)(x+1) + 2$. Por tanto,

$$\left(z' + \frac{y - 2x}{(x+1)^2}\right)(x+1) + 2 = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} z.$$

Reduciendo y separando variables obtenemos:

$$\frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x+1},$$

integrando resulta:

$$\ln|\operatorname{sen} z| = \ln|x+1| + \ln|C|.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos y retornando a las varoables originales obtenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right) = C(x+1).$$

28. Resuelva la ecuación $2x+y=(4x-y)\,y'$.

Solución.
Sea $y=xz$, lo que implica $y'=z+xz'$. Reemplazando en la ecuación, reduciendo y separando variables obtenemos:

$$\frac{dx}{x} = \frac{4-z}{z^2-3z+2}dz.$$

Integrando resulta:

$$\ln|x| + \ln|C| = 2\ln|z-2| - 3\ln|z-1|.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos y retornando a las variables originales obtenemos:

$$(y-2x)^2 = C(y-x)^3.$$

29. Resuelva $(3x+3y-1)\,dx + (x+y+1)\,dy = 0$.

Solución.
Por un lado, las rectas $3x+3y-1=0$ y $x+y+1=0$ son paralelas y por otro, la ecuación dada se escribe:

$$y' = -\frac{3(x+y)-1}{x+y+1},$$

por lo que consideramos el cambio $u=x+y$, de donde, $u'=1+y'$. Con esto, y luego de separar variables obtenemos:

$$dx = \frac{u+1}{2(1-u)}.$$

Integrando tenemos:

$$x + C = -\frac{1}{2}u - \ln|u-1|.$$

Retornando a las variables originales y acomodando obtenemos:

$$(x+y-1)^2 = Ce^{-(3x+y)}.$$

30. Resuelva $(x+y)\,dx + xdy = 0$, $y(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Podemos escribir la ecuación de la forma:

$$y' = -1 - \frac{y}{x}.$$

Por lo que sea $z = \frac{y}{x}$, de donde $y' = z + xz'$. Luego, de sustituir y separar variables obtenemos:

$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando resulta:

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + \ln|C|\,.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos y volviendo a las variables originales tenemos:

$$x^2 + 2xy = C.$$

31. Resuelva $(8y+10x)\,dx + (5y+7x)\,dy = 0$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Podemos escribir la ecuación de la forma:

$$y' = -\frac{10x+8y}{7x+5y}.$$

Consideremos $y = xz$, lo que implica $y' = z + xz'$, ahora reemplazando en la ecuación anterior y separando variables obtenemos:

$$-\frac{5z+7}{5\left(z^2+3z+2\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando resulta:

$$-\frac{3}{5}\ln|z+2| - \frac{2}{5}\ln|z+1| = \ln|x| + \ln|C|\,.$$

Multiplicando por -5, aplicando las propiedades de los logarítmos y volviendo a las variables originales obtenemos:

$$(2x+y)^3\,(x+y)^2 = C.$$

32. Resuelva la ecuación $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$.

$\boxed{\textbf{Solución.}}$
Las rectas $y+2=0$ y $x+y-1=0$ se cortan en el punto $(3,-2)$, por tanto, hacemos $x = u+3$ y $y = v-2$, de donde, $dx = du$ y $dy = dv$. Sustituyendo tenemos:

$$v' = \frac{2v^2}{(u+v)^2}.$$

Sea ahora, $v = uz$, lo que implica $v' = z + uz'$. Por tanto, una vez sustituido y separadas las variables resulta:

$$-\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)} = \frac{du}{u}.$$

Integrando obtenemos:

$$-\ln|z| - 2\operatorname{arc\,tg}(z) = \ln|u| + \ln|C|.$$

Retornando a las variables u y u tenemos:

$$-\ln\left|\frac{v}{u}\right| - 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{u}\right) = \ln|u| + \ln|C|.$$

haciendo lo mismo para x e y resulta:

$$-\ln\left|\frac{y+2}{x-3}\right| - 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y+2}{x-3}\right) = \ln|x-3| + \ln|C|.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos:

$$y = Ce^{-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y+2}{x-3}\right)} - 2.$$

33. Resuelva $y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$.

Solución.

Sea $y = xz$, lo que implica $y' = x + xz'$. Luego,

$$z + xz' = \frac{2z}{3-z^2}.$$

Separando variables obtenemos:

$$\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}dz = \frac{dx}{x}.$$

Integrando resulta:

$$-3\ln|z| + \ln|z+1| + \ln|z-1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Aplicando propiedades de los logarítmos y retornando a las variables originales obtenemos:

$$y^2 - x^2 = Cy^3.$$

34. Resuelva $y + xy^2 = xy'$.

Solución.

Escribiendo la ecuación en la forma $(y + xy^2)\,dx - xdy = 0$ tenemos $P = y + xy^2$ y $Q = -x$, lo que implican $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$, por tanto $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Luego,

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y},$$

es independiente de x , por lo que, $\mu = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y^2}$ es un factor integrante. Multiplicando la ecuación por él tenemos:

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2}dy = 0,$$

ecuación que es exacta. Luego,

$$g\,(x, y) = -\int \frac{x}{y^2}dy + k(x) = \frac{x}{y} + k(x).$$

Derivando respecto a x y recordando que $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y} + x$ obtenemos $k'(x) = x$, de donde $k(x) = \frac{x^2}{2}$. Por tanto, la solución es:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

35. Resuelva la ecuación $(1 + x^2)\,y'' = 2xy'$.

Solución.

Sea $y' = z$, entonces al sustituir y separar variables obtenemos:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1 + x^2}dx.$$

Integrando resulta

$$\ln|z| = \ln\left|1 + x^2\right| + \ln|C|\,.$$

Aplicando las propiedades de los logarítmos obtenemos $z = C\,(1 + x^2)$, pero $y' = z$, por lo que, integrando nuevamente resulta:

$$y = Cx + C\frac{x^3}{3} + \tilde{C}.$$

36. Resuelva la ecuación $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2y^2}$.

Solución.

Escribiendo la ecuación de la forma $y' + \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2y^2} = 0$, vemos que es una Bernoulli con

$\alpha = -2$. Por tanto, sea $z = y^3$, entonces $z' = 3y^2y'$. Luego obtenemos la ecuación lineal:

$$z' + \frac{3z}{x} - \frac{3}{x^2} = 0.$$

Aplicando (2.29) resulta:

$$z = \frac{C}{x^3} + \frac{3}{2x}.$$

Retornando a y concluimos:

$$y^3 = \frac{C}{x^3} + \frac{3}{2x}.$$

37. Resuelva y encuentre soluciones singulares $y'^2 - y + 1 = 0$.

Solución.
Sea $y' = p$ entonces $y = 1 + p^2$, de donde $dy = 2pdp$. Pero $\frac{dy}{dx} = p$ o bien $dy = pdx$. Luego, reemplando en la expresión de dy tenemos $dx = 2dp$, es decir, $x = 2p + C$. Por tanto,

$$\begin{cases} x &= 2p + C \\ y &= 1 + p^2 \end{cases}$$

Para las soluciones singulares eliminamos p, con lo que obtenemos:

$$y = 1 + \frac{(x - C)^2}{4}.$$

Derivando respecto a C resulta $-\frac{2(x-C)}{4} = 0$, de donde, $x = C$. Entonces, $y = 1$ es solución singular.

38. Encuentre, si existen, soluciones singulares de $x\left(1 + y'^2\right) + y'^4 - 3y'^2 - 2yy' = 0$.

Solución.
Sea $y' = p$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x(1 + p^2) + p^4 - 3p^2 - 2yp &= 0 \\ 2xp + 4p^3 - 6p - 2y &= 0 \\ 1 + p^2 - 2p^2 &= 0. \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos $p = \pm 1$. Luego, si $p = 1$ tenemos $y = x - 1$ como solución singular y si $p = -1$ resulta $y = 1 - x$ como solución singular.

39. Forme la ecuación diferencial lineal homogénea si se conoce el sistema fundamental de soluciones.

   a) $\sqrt{2}$, $3e^{-x}$, $4x$.
   b) 1, $2e^{2x}$, $3xe^{2x}$.

Solución.

a) Formando y calculando el determinante:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 3e^{-x} & -3e^{-x} & 3e^{-x} & 3e^{-x} \\ 4x & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

obtenemos como ecuación diferencial $y''' + y'' = 0$.

b) Como en el caso anterior formamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2e^{2x} & 4e^{2x} & 8e^{2x} & 16e^{2x} \\ 3xe^{2x} & 3e^{2x} + 6xe^{2x} & 12e^{3x} + 12xe^{2x} & 24e^{2x} + 24xe^{2x} \end{vmatrix} = 0,$$

de donde obtenemos $y''' + y'' = 0$.

40. Resuelva la ecuación $(x+2)^2 y'' + 3(x+2) y' - 3y = 0$.

Solución.

La ecuación dada es una del tipo reducible a ecuación de Euler, basta hacer $u = x+2$. Así, tenemos $u^2 y'' + 3uy' - 3y = 0$, cuya ecuación característica es:

$$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda - 3 = 0.$$

Como sus raíces son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 1$, tenemos que la solución es $y = \frac{C_1}{u^3} + C_2 u$, o en términos de x:

$$y = \frac{C_1}{(x+2)^3} + C_2(x+2).$$

41. Resuelva la ecuación $y' + 2xy = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, aplicando variación de parámetros.

Solución.

Resolvamos primero la ecuación homogénea $y' + 2xy = 0$. Separando variables e integrando obtenemos $\ln y = -x^2 + \ln C$, pero $-x^2 = \ln e^{-x^2}$, por lo que, la solución se escribe $y = Ce^{-x^2}$.

Ahora, para resolver la ecuación no homogénea hacemos $y = C(x)e^{-x^2}$, de donde, $y' = [C'(x) - 2xC(x)]\, e^{-x^2}$. Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$C'(x) = 1,$$

de donde $C(x) = x$. Por lo tanto, la solución general es:

$$y = Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}.$$

42. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $4y'' + 8y' = x \operatorname{sen} x$.

b) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

Solución.

a) Resolvemos primero la ecuación homogénea $4y'' + 8y' = 0$. Su ecuación característica es $\lambda^2 + 8\lambda = 0$, de donde, $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$. Luego, $y_h = C_1 + C_2 e^{-2x}$. Para la no homogénea usamos variación de parámetros, por lo que nos queda el sistema:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1' + C_2' e^{-2x} & = & 0 \\ C_1' - 2C_2' e^{-2x} & = & x \operatorname{sen} x \end{array} \right.$$
que tiene por solución $C_1' = \frac{1}{3} x \operatorname{sen} x e^{2x}$ y $C_2' = \frac{1}{3} x \operatorname{sen} x$. Integrando resulta $C_1 = \frac{1}{15}\left(\frac{4}{5} - x\right) e^{2x} \cos x + \frac{1}{15}\left(2x - \frac{3}{5}\right) e^{2x} \operatorname{sen} x$ y $C_2 = \frac{1}{3}(\operatorname{sen} x - x \cos x)$. Por tanto, la solución de la ecuación no homogénea es:
$$\begin{aligned} y &= C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{15}\left(\frac{4}{5} - x\right) e^{2x} \cos x + \frac{1}{15}\left(2x - \frac{3}{5}\right) e^{2x} \operatorname{sen} x \\ &\quad + \frac{1}{3} e^{-2x} (\operatorname{sen} x - x \cos x). \end{aligned}$$

b) Como antes resolvemos primero la homogénea $y'' - 3y' + 2y = 0$. Su ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, y tiene por raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, luego, $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Para la no homogénea, por variación de parámetros tenemos:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1' e^x + C_2' e^{2x} & = & 0 \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} & = & xe^x \end{array} \right.$$
cuya solución es $C_1' = -x$ y $C_2' = xe^{-x}$. Integrando resulta $C_1 = -\frac{x^2}{2}$ y $C_2 = -(x+1)e^{-x}$. Por tanto, la solución de la ecuación no homogénea es:
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) e^x.$$

43. Resuelva
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3x - y + z \\ \dot{y} & = & -x + 5y - z \\ \dot{z} & = & x - y + 3z \end{array} \right.$$

Solución.
La matriz del sistema es:
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

y tiene por valores propios $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$. Con esto sus vectores propios son:

$$v_{\lambda_1=2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_2=3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_{\lambda_3=6} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema tiene por solución:

$$\begin{cases} x(t) &= -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t} \\ y(t) &= C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t} \\ z(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t} \end{cases}$$

44. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{cases}$$

Solución.
La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

y tiene por valores propios $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. Por tanto, tenemos $x(t) = e^{2t}(A_1 \cos t + A_2 \operatorname{sen} t)$ e $y(t) = e^{2t}(B_1 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t)$. Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema obtenemos las relaciones $A_2 = -B_1$ y $B_2 = A_1$. Sólo por costumbre, llamemos $C_1 = A_1$ y $C_2 = B_1$, luego:

$$\begin{cases} x(t) &= e^{2t}(C_1 \cos t - C_2 \operatorname{sen} t) \\ y(t) &= e^{2t}(C_2 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t). \end{cases}$$

45. Resuelva:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - 2y \\ \dot{y} &= -5x + y \end{cases}$$

Solución.
La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix},$$

y tiene por valores propios $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 3$. Con esto sus vectores propios son:

$$v_{\lambda_1=-4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad v_{\lambda_2=3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema tiene por solución:

$$\begin{cases} x(t) &= C_1e^{-4t} + C_2e^{3t} \\ y(t) &= C_2e^{-4t} - \frac{5}{2}C_3e^{3t} \end{cases}$$

46. Resuelva el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & -12x+7y \\ \dot{y} & = & -7x+2y\end{array}\right.$$

Solución.

La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix},$$

y tiene por valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$. Luego, tenemos $x(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-5t}$ e $y(t) = (B_1 + B_2 t)\, e^{-5t}$. Reemplazando en la primera de las ecuaciones del sistema obtenemos las relaciones entre los coeficientes $B_1 = A_1 + \frac{1}{7}A_2$ y $B_2 = A_2$. Por tanto, la solución del sistema es:

$$\left\{\begin{array}{rcl}x(t) & = & (A_1 + A_2 t)\, e^{-5t} \\ y(t) & = & \left(A_1 + \left(A_1 + \frac{1}{7}A_2\right) t\right) e^{-5t}\end{array}\right.$$

47. Resuelva:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & 3x+2y \\ \dot{y} & = & -5x+y\end{array}\right.$$

Solución.

La matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix},$$

Tiene por valores propios $\lambda_1 = 2+3i$, $\lambda_2 = 2-3i$. Por tanto, tenemos $x(t) = e^{2t}(A_1 \cos 3t + A_2 \operatorname{sen} 3t)$ e $y(t) = e^{2t}(B_1 \cos 3t + B_2 \operatorname{sen} 3t)$. Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema obtenemos las relaciones $A_2 = \frac{1}{3}(A_1 + 2B_1)$ y $B_2 = -\frac{1}{3}(5A_1 + B_1)$. Luego:

$$\left\{\begin{array}{rcl}x(t) & = & e^{2t}\left(A_1 \cos t + \frac{1}{3}(A_1 + 2B_1) \operatorname{sen} t\right) \\ y(t) & = & e^{2t}\left(B_1 \cos t - \frac{1}{3}(5A_1 + B_1) \operatorname{sen} t\right).\end{array}\right.$$

48. Aplicando un series resuelva la ecuación $y' = y + x^2$, $y(0) = 1$.

Solución.

Supongamos $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, lo que implica $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$. Reemplazando en la ecuación diferencial tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + x^2 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + x^2 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)c_{k+1} - c_k\right] x^k &= x^2.\end{aligned}$$

De aquí, $c_1 = c_0$, $c_2 = \frac{c_0}{2}$, $c_3 = \frac{c_0+2}{4!}$, luego para $k > 2$ tenemos $c_{k+1} = \frac{c_k}{k+1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_0 x + \frac{c_0}{x} + \frac{c_0}{2!}x^2 + \frac{c_0+2}{4!}x^4 + \frac{c_0+2}{5!}x^5 + \ldots + \\ &= c_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) + 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \\ &= c_0 e^x + 2e^x - 2x - x^2 - 2. \end{aligned}$$

Como $y(0) = 1$ vemos que $c_0 = 1$, así:

$$y = e^x + 2e^x - 2x - x^2 - 2.$$

49. Aplique series para resolver $y'' + y = 0$.

Solución.

Sea $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, lo que implica $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$ e $y'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k k\,(k-1)\,x^{k-2}$. Luego, reemplazando en la ecuación diferencial tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0, \end{aligned}$$

de donde:

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+1)\,(k+2)},$$

es decir, $c_2 = -\frac{c_0}{2!}$, $c_3 = -\frac{c_1}{2\cdot 3}$, $c_4 = -\frac{c_2}{3\cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$, $c_5 = -\frac{c_3}{4\cdot 5} = \frac{c_1}{5!}$, $\ldots$ Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!}x^2 - \frac{c_1}{3!}x^3 + \frac{c_0}{4!}x^4 + \frac{c_1}{5!}x^5 \ldots \\ &= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

50. Resuelva $xy'' + y' + xy = 0$, aplicando series.

Solución.

Como antes, sea $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, entonces $y' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$ e $y'' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k k\,(k-1)\,x^{k-2}$.

Luego, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} &= 0 \\
\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k c_{k+1} x^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^{k} &= 0 \\
\sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)k c_{k+1} + (k+1)c_{k+1} + c_{k-1}\right] x^k + c_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, $c_1 = 0$ y

$$c_{k+1} = -\frac{c_{k-1}}{(k+1)^2}.$$

Esto implica, $c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = 0$. Además, $c_2 = -\frac{c_0}{2^2}$, $c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}$, $c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}$, ... Luego,

$$
\begin{aligned}
y &= c_0 - \frac{c_0}{2^2}x^2 + \frac{c_0}{2^2 4^2}x^4 - \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}x^6 + \ldots \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} \cdot (n!)^2}.
\end{aligned}
$$

Esta función corresponde a una **Función de Bessel de Orden Cero** $J_0(x)$.

51. Resuelva la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$:

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) y = 0,$$

o equivalentemente:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0.$$

Solución.

Vemos que $x = 0$ es un punto singular regular, pues:

$$\begin{cases} x a(x) &= 1 \\ x^2 b(x) &= x^2 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

analíticas a $x = 0$. La ecuación indicial es:

$$\rho(\rho - 1) + \rho - \frac{1}{4} = 0,$$

de donde, $r = \pm\frac{1}{2}$, raíces que difieren en 1. Por lo tanto, suponemos una solución de la forma

$$y = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Luego, tenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)+\left(k+\frac{1}{2}\right)+x^2-\frac{1}{4}\right] x^{k-\frac{3}{2}} = 0,$$

o bien:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(k^2+k)x^{k-\frac{3}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}} &= 0 \\ 2C_1 x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+3)C_{k+2} + C_k\right] x^{k+\frac{1}{2}} &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $C_1 = 0$ y $C_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+3)}$. Luego, los coeficientes con subíndice impar son nulos y los pares son $C_2 = -\frac{C_0}{3!}$, $C_4 = -\frac{C_2}{4\cdot 5} = \frac{C_0}{5!}$, $C_6 = -\frac{C_0}{7!}$, ... Con esto:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{x}\left(C_0 - \frac{C_0}{3!}x^2 + \frac{C_0}{5!}x^4 - \frac{C_0}{7!}x^6 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_0 x - \frac{C_0}{3!}x^3 + \frac{C_0}{5!}x^5 - \dots\right) \\ &= \frac{C_0}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ obtenemos análogamente:

$$y_2 = \frac{C_1}{\sqrt{x}} \cos x.$$

52. Aplique transformada de Laplace para resolver el problema $y'' + y' - 6y = t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución.

Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y''+y'-6y\right] &= \mathcal{L}\left[t\right] \\ \mathcal{L}\left[y''\right] + \mathcal{L}\left[y'\right] - 6\mathcal{L}\left[y\right] &= \mathcal{L}\left[t\right] \\ s^2\mathcal{L}\left[y\right] - sy'(0) - y(0) + s\mathcal{L}\left[y\right] - sy(0) - 6\mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{1}{s^2} \\ \left(s^2+s-6\right)\mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{1}{s^2\left(s+3\right)\left(s-2\right)}. \end{aligned}$$

Separando en fracciones parciales y aplicando transformada inversa obtenemos:

$$y = \frac{1}{20}e^{2t} - \frac{1}{45}e^{-3t} - \frac{1}{36} - \frac{1}{6}t.$$

Apéndice A

Maple en Ecuaciones Diferenciales

A.1. Sobre Maple

Maple es un software matemático capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue desarrollado originalmente en 1981 por el *Grupo de Cálculo Simbólico* de la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá. Su sitio oficial en internet es *http://www.maplesoft.com*, donde está disponible información sobre el software, sus versiones y forma de adquisición.

Este pequeño apéndice no pretende describir completamente el uso de Maple para resolver ecuaciones diferenciales, sino simplemente mostrar un software útil para trabajarlas.

A.2. Elementos de Maple para Ecuaciones Diferenciales

Maple cuenta con un paquete especializado para ecuaciones diferenciales denominado **DEtools**, para ejecutarlo debemos escribir:

```
[>with(DEtools);
```

desplegándose en pantalla toda la serie de herramientas disponibles. Nosotros sólo comentaremos algunas de ellas.

Cabe señalar que al terminar una instrucción en Maple con dos puntos (:) no se desplegará por pantalla su ingreso, pero si estará asignada en el programa.

A.2.1. Notación Diferencial en Maple

Para denotar una derivada en Maple podemos utilizar el comando **Diff** o mediante el operador D. Por ejemplo, la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + 2xy + e^x = 0$, se ingresa:

[>Diff(y(x),x)+2xy(x)+e∧x=0);

desplegándose en pantalla:

$$\frac{d}{dx}y(x) + 2xy + e^x = 0$$

o bien:

[>D(y)(x)+2xy(x)+e∧x=0);

obteniéndo:

$$D(y)(x) + 2xy + e^x = 0$$

Para denotar $\frac{d^2y}{dx^2}$ tenemos: Diff(y,x$2) y en general para derivadas de orden n utilizamos: Diff(y,x$n).

A.2.2. odeadvisor

El comando **odeadvisor** indica el tipo de ecuación que ha sido considerada. Por ejemplo, para $\frac{dy}{dx} = \frac{y+5}{x^2+1}$ se ingresa:

[>eq1:=D(y)(x)=(y(x)+5)/(x∧2+1);

mostrándose en pantalla:

$$eq1 := D(y)(x) = \frac{y(x) - 1}{x^2 + 1}$$

entendiéndose que a $eq1$ se le ha asignado la ecuación diferencial dada. Para saber su tipo hacemos:

[>oseadvisor(eq1);

obteniéndo como respuesta:

[_separable]

lo que significa que la ecuación ingresada es del tipo *Variables Separables*.

A.2.3. dsolve

El comando **dsolve** resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias con y sin condiciones iniciales. Por ejemplo,

[>dsolve(eq1,y(x));

entrega como solución:

$$y(x) = 1 + e^{\arctan(x)}\_C1$$

Si buscamos la solución que cumple con $y(0) = 1$ escribimos:

[>dsolve({eq1,y(0)=1},y(x));

con lo que obtenemos:

$$y(x) = 1$$

Consideremos ahora, el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3x + 4y \\ \dot{y} & = & 5x - 16y \end{array} \right.$$

Su solución general se encuentra mediante:

[>eq2:=D(x)(t)=3·x(t)+4·y(t);

$$eq2 := D(x)(t) = 3 \cdot x(t) + 4 \cdot y(t)$$

[>eq3:=D(y)(t)=5·x(t)-16·y(t);

$$eq3 := D(x)(t) = 5 \cdot x(t) - 16 \cdot y(t)$$

[>dsolve({eq2,eq3},{x(t),y(t)});

$$\left\{ x(t) = -\frac{1}{5}C1\_e^{-17t} + 4C2\_e^{4t}, y(t) = \_C1e^{-17t} + \_C2e^{4t} \right\}$$

Para encontrar la solución del sistema que cumple las condiciones iniciales $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ tenemos:

[>dsolve({eq2,eq3, $x(0) = 1, y(0) = 0$},{x(t),y(t)});

$$\left\{ y(t) = \frac{5}{21}e^{4t} - \frac{5}{21}e^{-17t}, x(t) = \frac{20}{21}e^{4t} + \frac{1}{21}e^{-17t} \right\}$$

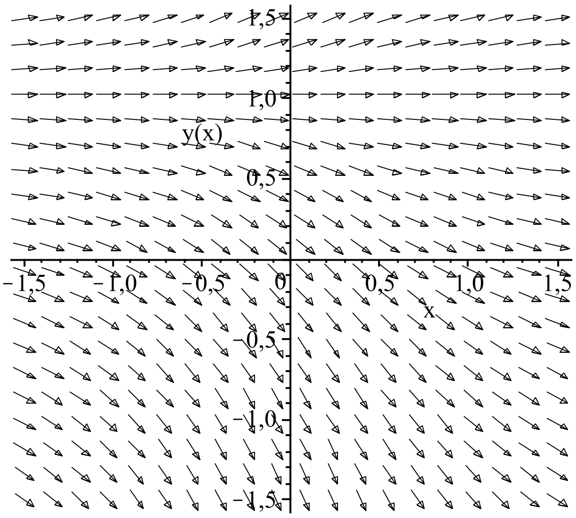

Figura A.1: Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = \frac{y+5}{x^2+1}$.

A.2.4. DEplot

El comando **DEplot** grafica el campo de direcciones de una ecuación diferencial, más específicamente dibuja flechas para indicar la dirección en que una curva solución procederá a pasar por un punto dado (x, y), mediante el crecimiento de x. Otro paquete siempre necesario es el espacializado para gráficos llamado **plots**, que se ejecuta mediante:

[>with(plots);

El campo de direcciones de $eq1$, se encuentra mediante:

[>DEplot(eq1,y(x),x =-1.5..1.5,y=-1.5..1.5,arrows=MEDIUM,color=black);

obteniéndose la Figura A.1. El tamaño de las flechas (arrows) se puede elegir entre SMALL, MEDIUM y LARGE, por su parte el color también es a elección del usuario, pero ingresado en idioma inglés.

También es posible hacer un gráfico de este tipo para sistemas de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, el campo gradiente del sistema compuesto por $eq2$ y $eq3$ se determina medinate:

[>DEplot(eq2,eq3,x(t),y(t),t=-5..5,x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5,arrows=MEDIUM,
color=black);

Esto se muestra en la Figura A.2. Notemos que para este caso aparece, en el comando de Maple, una nueva variable, t, que es de quien dependen las soluciones x e y del sistema de ecuaciones diferenciales.

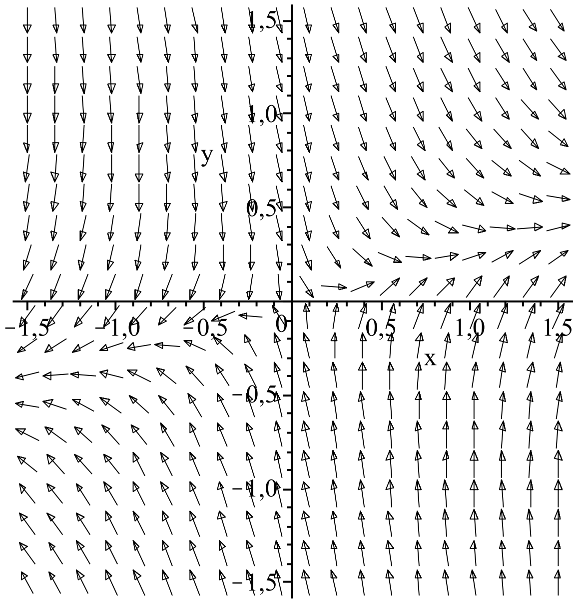

Figura A.2: Campo de direcciones de $\dot{x} = 3x + 4y$, $\dot{y} = 5x - 16y$.

En el siguiente ejemplo graficaremos, en un mismo sistema coordenado, el campo de direcciones y una solución particular. Consideremos ahora, la equación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = xy,$$

cuya solución general es $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ y la condición inicial $y(0) = 2$. Entonces tenemos:

[>eq4:=D(y)(x)=x·y(x);

$$eq4 := D(y)(x) = x \cdot y(x)$$

[>ci:=y(0)=2;

$$ic := y(0) = 2$$

[>dsolve({eq4,ic},y(x));

$$y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x^2}$$

[>plot1:=plot(2·e∧((1/2)·x∧2),x=-1.5..1.5,y=0..6):

[>plot2:=DEplot(eq4,y(x),x=-1.5..1.5,y=0..6,arrows=MEDIUM,color=black):

[>display(plot1,plot2);

En la Figura A.3 se muestra el resultado de este último comando, el que reune los gráficos generados por las instrucciones plot y DEplot.

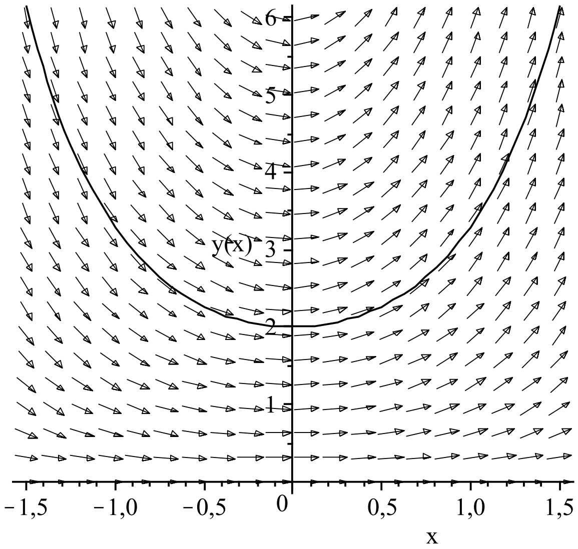

Figura A.3: Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = xy$ y su solución particular $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2}$.

A.2.5. particularsol

El comando **particularsol** permite encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes o variables.

Por ejemplo, una solución particular de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea $y'' - 2y' + y = x^2e^{-x}$ se encuentra como:

[>particularsol(Diff(y(x),x$2)-2·Diff(y(x),x)+y(x)=x∧2·e∧{-x});

$$y(x) = \frac{1}{8}\left(3 + 4x + 2x^2\right)e^{-x}$$

A.2.6. laplace e invlaplace

Las sentencias **laplace** e **invlaplace** determinan la transformada y la transformada inversa de laplca respectivamente, pero requieren cargar previamente el paquete **inttrans**. Veamos unos ejemplos:

[>with(inttrans):

[>f:=sin t+t∧2+e∧{$2t$};

$$f := \sin t + t^2 + e^{2t}$$

[>laplace(f,t,s);

$$\frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s-2}$$

[>F:=s/(s∧2-4)+1/(s∧2)+1/(s+1);

$$F := \frac{s}{s^2-4} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

[>invlaplace(F,s,t);

$$\cos 2t + t + e^{-t}$$

A.2.7. Solución en Serie de Potencias

Con el comando **dsolve** es posible encontrar la solución de una ecuación diferencial mediante series de potencias. Veamos un ejemplo:

[>eq5:=Diff(y(x),x$2)+y(x)=0;

$$eq5 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) + y(x) = 0$$

[>dsolve(eq5,y(0)=1,(D(y))(0)=0,y(x),series);

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^2 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

De igual forma se puede obtener la solución usando transformada de laplace cambiando *series* por *laplace*.

Índice de figuras

Índice alfabético

Bibliografía

[1] Arnold V., *Equaçoes Diferenciais Ordinárias*, Editorial MIR, 1985.

[2] Halanay A., *Differential Equation*, New York Academic Press, 1966.

[3] Rosculet M., *Analizá Matematicá*, Editura Didactica Si Pedagogica Bucuresti.

[4] Sotomayor J., *Liçoes de Equaçoes Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 1979.