Funções - 08.10.25

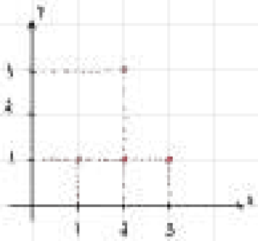
- Definição: $f: S \to T$

  - precisa de um conjunto de valores (domínio)
  - um outro conjunto associado (contradomínio)
  - função propriamente dita

- Cada elemento do domínio deve ter 1, e apenas 1 valor associado ao contradomínio
- Função é uma relação binária
- Um y pode ter vários x, mas um x só tem um y

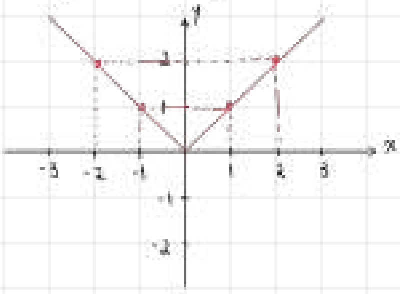
Prática 23

a) $f: S \to T$, $S = T = \{1,2,3\}$, $f = \{(1,1),(2,3),(3,1),(2,1)\}$



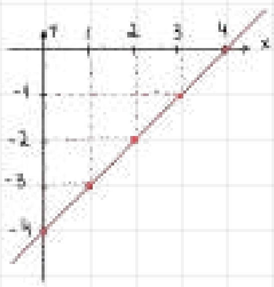
Não define uma função, pois o mesmo x pertence a mais de um y, ferindo a definição.

b) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = |x|$



É função

c) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(x) = x - 4$

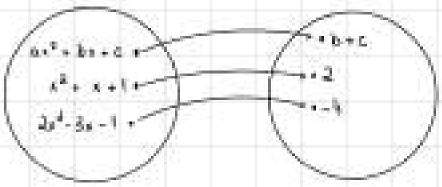


Não é uma função, pois para $x = 0, 1, 2$ e 3, $y \notin \mathbb{N}$

d) $f: S \to T$, S = pessoas, T = CPF → Não é função, pois nem todas as pessoas têm CPF.

e) $g: S \to T$, $S = \{1972, 1973, 1974, 1975\}$, $T = \{20\,000, 30\,000, 40\,000, 50\,000, 60\,000\}$. É uma função, pois pelo menos 1 x pertence a 1 y

f) $h: S \to T$; S: polinômios quadráticos em x ; $T = \mathbb{Z}$; $h(ax^2+bx+c) = b+c \Rightarrow$ É função

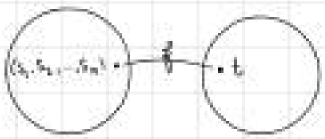


g) É função

h) Não é função, pois quando $x = 5$, temos 2 valores possíveis

Funções · 10/10/25

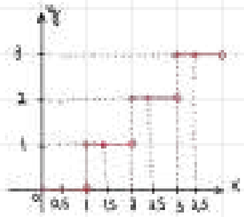
- Podemos ter funções com n variáveis



- função chão: associa a cada número real x o maior inteiro $\leq x$. Ex: $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$ truncamento
- função teto: associa a cada número real x o menor inteiro $\geq x$. Ex: $\lceil 2,9 \rceil = 3$ arredondamento

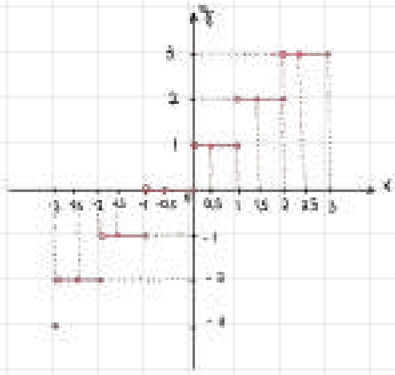
Prática 86

a)



$\lfloor x \rfloor$

b)



$\lceil x \rceil$

Prática 87

$S = \{1,2,3\}$

$T = \{1,4,9\}$

$f: S \to T = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$

$g: S \to T \cdot g(n) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} (4k-2)}{2}$

$g(1) = \dfrac{4 \cdot 1 - 2}{2} \Rightarrow g(1) = 1 \quad \therefore (1,1)$

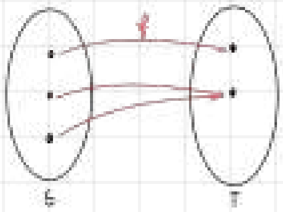
$g(2) = \dfrac{(4 \cdot 1 - 2) + (4 \cdot 2 - 2)}{2} \Rightarrow g(2) = \dfrac{2+6}{2} \Rightarrow g(2) = 4 \quad \therefore (2,4)$

$g(3) = \dfrac{(4 \cdot 1 - 2) + (4 \cdot 2 - 2) + (4 \cdot 3 - 2)}{2} \Rightarrow g(3) = \dfrac{2+6+10}{2} \Rightarrow g(3) = 9 \quad \therefore (3,9)$

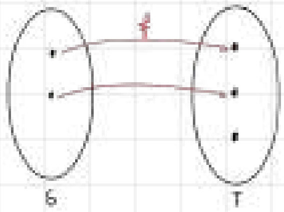
Função : 17/10

Propriedades :

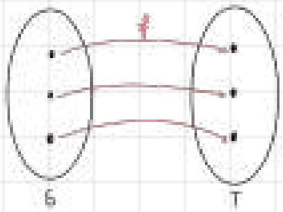
• sobrejetora : a imagem é igual ao contradomínio



• injetora : os elementos do domínio só flecham 1, e apenas 1, elemento do contradomínio



• bijetora : todos os elementos do domínio flecham 1, e apenas 1, elemento do contradomínio, além da imagem ser igual ao contradomínio



Funções - 22/10

Exercícios 7.3

1 a) $S = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$T = \{8, 9, 10, 11\}$

$S \to T = \{8, 9, 10\}$

b) 8. 10.

c) 7, 6

d) Não. Não.

7 a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + 1$

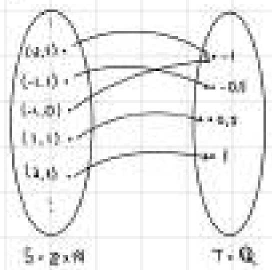
É função. Não é injetora. Não é sobrejetora, pois $0 \in \mathbb{N}$ e $\nexists\, x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 1 = 0$

b) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(x) = 1/x$

Não é função, pois $0 \in \mathbb{N}$ e 0 não divide ninguém.

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $h(z, n) = \dfrac{z}{(n+1)}$

É função sobrejetora.



9 Que x é inteiro ($x \in \mathbb{Z}$).

aplicar log

11 $2^k < n < 2^{k+1} \to k = \lfloor \log n \rfloor$ e $k+1 = \lceil \log n \rceil$

Demo:

Temos que se $2^k < n < 2^{k+1}$, aplica-se $\log n$ a todos os termos da desigualdade:

$$\log_2(2^k) < \log_2 n < \log_2(2^{k+1})$$

Como $\log n$ é a inversa da função exponencial, temos:

$$k < \log n < k+1$$

Interpretando a desigualdade, temos que o valor de $\log n$ está entre os inteiros k e $k+1$, logo:

menor Z   maior Z

$$k = \lfloor \log n \rfloor \text{ e } k+1 = \lceil \log n \rceil$$

c.q.d.

Funções 24/30

Prática 32

$A = \{(0,0), (-1,2), (1,3), (-2,4), (2,5) \dots\}$

Eles tem a mesma cardinalidade pois ambos são infinitos

Prática 33

a) $g \circ f\,(2,3) = g(f(2,3)) = g(2,3^2) = g(5,29) = L5,29] \therefore g \circ f\,(2,3) = 5$

b) $f \circ g\,(2,3) = f(g(2,3)) = f(L2,3]) = f(2) = 2^2 \therefore f \circ g\,(2,3) = 4$

Prática 34

Temos que $f: S \to T$ e $g: T \to V$ e f e g são injetivas. Queremos demonstrar que $g \circ f(x)$ também será injetiva. Assim, $g \circ f(x) = g(f(x))$ e suponha que $g \circ f(s_1) = g \circ f(s_2)$ (objetivo: provar que $s_1 = s_2$). Se $g \circ f(s_1) = g \circ f(s_2) \Rightarrow g(f(s_1)) = g(f(s_2))$, e como g é injetiva, temos $f(s_1) = f(s_2)$. Como f é injetiva, concluímos que $s_1 = s_2$ e $g \circ f(x)$ também será injetiva.

Prática 39

$f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$

Exercício 3.7

a) Não.

b) Sim.

c) Não.

d) Sim.

3.8

a) f não, g não, h sim.

b) $h \circ g \circ f = \{(a,4), (b,6), (c,4)\}$

Funções - 29/10

Ordem de grandeza

- Compara a taxa de crescimento de diferentes funções $\rightarrow$ $f = \Theta(g)$, então $g = \Theta(f)$
- relação binária: $f \rho g \Leftrightarrow$ existem constantes positivas n_0, c_1 e c_2, tais que $\forall x \geq n_0$, $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$, sendo S o conjunto de domínio e contradomínio iguais aos números reais não negativos

- Exemplo 41 = Prática 40

a) $f(x) = 3x^2$

$g(x) = 200x^2 + 140x + 7$

$n_0 = 2$

$c_1 = 1/100$

$c_2 = 1$

para $x = 2$:

$$c_1 \, g(x) \leq f(x) \leq c_2 \, g(x) \Rightarrow 1/100\,(200(2^2) + 140 \cdot 2 + 7) \leq 3 \cdot 2^2 \leq 1\,(200(2^2) + 140 \cdot 2 + 7)$$

$$\Rightarrow \frac{1087}{100} \leq 12 \leq 1087 \Rightarrow 10{,}87 \leq 12 \leq 1087$$

para $x = 3$:

$$1/100\,(200(3^2) + 140 \cdot 3 + 7) \leq 3 \cdot 3^2 \leq 200(3^2) + 140 \cdot 3 + 7 \Rightarrow 22{,}27 \leq 27 \leq 2227$$

para $x = 4$:

$$1/100\,(200(4^2) + 140 \cdot 4 + 7) \leq 3 \cdot 4^2 \leq 200(4^2) + 140 \cdot 4 + 7 \Rightarrow 37{,}67 \leq 48 \leq 3767$$

para $x = 5$:

$$1/100\,(200(5^2) + 140 \cdot 5 + 7) \leq 3 \cdot 5^2 \leq 200(5^2) + 140 \cdot 5 + 7 \Rightarrow 57{,}07 \leq 75 \leq 5707$$

b) Não

$$1/100\,(200(1^2) + 140 \cdot 1 + 7) \leq 3 \cdot 1^2 \leq 200(1^2) + 140 \cdot 1 + 7 \Rightarrow 3{,}47 \leq 3 \leq 347 \rightsquigarrow F$$

c) para $n_0 = 1$:

$c_1 = 1/1000$
$c_2 = 1$
apenas peguei um c_1 menor para a inequação funcionar

- A relação ρ é uma relação de equivalência em S. Por exemplo, para demonstrar que $f \rho f$ (reflexiva), podemos tomar $n_0 = c_1 = c_2 = 1$ e temos $1 \cdot f(x) \leq f(x) \leq 1 \cdot f(x)$

• Prática 4!

a) ρ é simétrica: se $f \rho g$, então $g \rho f$, ou seja, para $x \geq n_0$, $c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x)$ e $\frac{1}{c_2} f(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{c_1} g(x)$

b) ρ é transitiva: se $f \rho g$ e $g \rho h$, então $f \rho h$

• Questão: fazer a transitiva usando $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 200x^2 + 140x + 7$ e $h(x) = x^2$

para $f \rho g$: $n_0 = 1$, $c_1 = 1/200$ e $c_2 = 1$
para $g \rho h$: $n_0 = ?$, $c_1 = ?$ e $c_2 = ?$
para $f \rho h$: $n_0 = ?$, $c_1 = ?$ e $c_2 = ?$

$g \rho h$:

$d_1 h(x) \leq g(x) \leq d_2 h(x) \Rightarrow d_1 x^2 \leq 200x^2 + 140x + 7 \leq d_2 x^2$

$\therefore d_1 = 1$

$d_2 = 1000$

$n_0 = 1$

$x \geq 1$

$f \rho h$:

$c_1 h(x) \leq f(x) \leq c_2 h(x) \Rightarrow c_1 x^2 \leq 3x^2 \leq c_2 x^2$

$\therefore e_1 = c_1 \cdot d_1 \therefore e_1 = 1/200$

$e_2 = c_2 \cdot d_2 \therefore e_2 = 1000$

$n_0 = 1$

$x \geq 1$

Funções - 31/10

Prática 42

Demo:

$f = \Theta(x^2) \Rightarrow 3x^2 = \Theta(x^2) \Rightarrow c_1x^2 \leq 3x^2 \leq c_2x^2$ $c=3$ $\Rightarrow 3x^2 \leq 3x^2 \leq 3x^2 \; \forall x \geq 1$

$g = \Theta(x^2) \Rightarrow 200x^2 + 140x + 7 \Rightarrow c_1x^2 \leq 200x^2 + 140x + 7 \leq c_2x^2 \Rightarrow 1x^2 \leq 200x^2 + 140x + 7 \leq 300x^2 \; \forall x \geq 2$

Para $x = 2$:

$3x^2 \leq 3x^2 \leq 3x^2 \Rightarrow 12 \leq 12 \leq 12$
$x^2 \leq 200x^2 + 140x + 7 \leq 300x^2 \Rightarrow 4 \leq 1087 \leq 1200$

Para $x = 3$:

$3x^2 \leq 3x^2 \leq 3x^2 \Rightarrow 27 \leq 27 \leq 27$
$x^2 \leq 200x^2 + 140x + 7 \leq 300x^2 \Rightarrow 9 \leq 2247 \leq 2700$

Exemplo 42

Seja $f(x) = x$ e $h(x) = x^2$. Podemos demonstrar por contradição que f não é $\Theta(x^2)$

Demo:

$c_1x^2 \leq f(x) \Rightarrow c_1x^2 \leq x \Rightarrow c_1x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{c_1}$ → absurdo!

Exemplo: busca sequencial (linear)

Elemento: 17

Dados:

0	1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	11	13	15	17

$n = 8$

No pior caso, o algoritmo faz $n = 8$ comparações. O algoritmo da busca sequencial é $\Theta(n)$.

Busca binária

(1º) Os dados DEVEM estar ORDENADOS.

Elemento: 17

Dados:

0	1	2	3	4
11	13	17	19	23
limite inferior		meio		limite superior

$n = 5$

$li = 0$

$ls = n - 1$

$meio = \frac{(li + ls)}{2}$

$ls = meio - 1$
$li = meio + 1$

Ele vai fazendo essas divisões até achar o número, que deve estar no meio.

Aritmética legal: $f(x_1) + f(x_2) = x + x^2 = \Theta(x^2)$ — [illegible]

Funções - 05/11

Big O: $f(x) \le c_2\, g(x) = O(g)$

Exercício 42

Demo:

Escolhendo $n_0 = 1$, analogamente $c_1 = \frac{1}{100}$ e $c_2 = 100$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, temos $x \ge n_0 \mid c_1 g(x) \le f(x) \le c_2 g(x) \Rightarrow c_1(17x+1) \le x \le c_2(17x+1)$

Para $x = 1$:

$\frac{1}{100}(17\cdot 1+1) \le 1 \le 100(17\cdot 1+1) \Rightarrow 0{,}18 \le 1 \le 1800$

Para $x = 2$:

$\frac{1}{100}(17\cdot 2+1) \le 2 \le 100(17\cdot 2+1) \Rightarrow 0{,}35 \le 2 \le 3500$

Para $x = 3$:

$\frac{1}{100}(17\cdot 3+1) \le 3 \le 100(17\cdot 3+1) \Rightarrow 0{,}52 \le 3 \le 5200$

Logo, $x = \Theta(17x+1)$, c.q.d.

Exercício 43

Demo:

Escolhendo $n_0 = 2$, analogamente $c_1 = \frac{1}{10}$ e $c_2 = 10$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, temos $x \ge n_0 \mid c_1 g(x) \le f(x) \le c_2 g(x) \Rightarrow c_1(x^3/2) \le 3x^2 - 7x \le c_2(x^3/2)$

Para $x = 2$:

$\frac{1}{10}(2^3/2) \le 3(2^2) - 7(2) \le 10(2^3/2) \Rightarrow 0{,}4 \le 10 \le 40$

Para $x = 3$:

$\frac{1}{10}(3^3/2) \le 3(3^3) - 7(3) \le 10(3^3/2) \Rightarrow 1{,}35 \le 60 \le 135$

Para $x = 4$:

$\frac{1}{10}(4^3/2) \le 3(4^3) - 7(4) \le 10(4^3/2) \Rightarrow 3{,}2 \le 164 \le 320$

Logo, $x = \Theta(x^3/2)$, c.q.d.

Exercício 43'

Demo:

Seja $f(x) = 17x+1$ e $g(x) = 5x^2+1$. Podemos demonstrar por absurdo que $f \ne \Theta(g)$

$c_1 g(x) \le f(x)$

Demonstrações : 07/11

Demonstração direta:

- se P é V, então Q é V
- conjectura: aprova com vários exemplos, mas não para n
- contra-exemplo: pelo menos 1 caso que prova que a equação é falsa

Exemplo 2

"x é divisível por 6" → "x é divisível por 3"

Dem:

Usaremos demonstração direta. Seja $x \in \mathbb{Z}$ e x divisível por 6, isto é, $x = k \cdot 6$, com $k \in \mathbb{Z}$, e $x = k(2 \cdot 3)$, fazendo $m = 2k$, temos $x = m \cdot 3$, $m \in \mathbb{Z}$.

Logo, x é divisível por 3. c.q.d.

Demonstração contrapositiva: $\sim P \to \sim Q$

Prática 2:

"Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes o inteiro é divisível por 4"

Dem:

Usaremos demonstração direta. Seja $x \in \mathbb{Z}$ e x é divisível por 6, isto é, $x = k \cdot 6$, com $k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os membros por 2, temos $2x = 2(k \cdot 6) = 2x = 2(k \cdot 3 \cdot 2) = 2x = 4(k \cdot 3)$. Fazendo $m = k \cdot 3$, temos $2x = 4m$.

Logo, $2x$ é divisível por 4. c.q.d.

Demonstração - 14/11

Demonstração por indução:

Exemplo 12

Dem:

$P(1): 2^1 > 1$ é verdadeira.

Supondo que $P(k): 2^k > k$, é verdadeira, queremos concluir a partir daí $P(k+1): 2^{k+1} > k+1$ para $k \in \mathbb{Z}^+_*$, com $k \geq 1$. Começando pelo lado esquerdo de $P(k+1)$, temos que $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$. Usando a hipótese de indução $2^k > k$ e multiplicando ambos os lados por 2, temos $2^k \cdot 2 > k \cdot 2$. Podemos escrever então que $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 = k+k \geq k+1$, o que resulta em $2^{k+1} > k+1$

Exemplo 13

Provar para qualquer inteiro positivo n, $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

Dem:

Vamos demonstrar por indução que $P(n): 2^{2n}-1$ é divisível por 3, para $n \in \mathbb{Z}^+_*$.

Base: Temos $P(1): 2^{2\cdot 1}-1 = 2^2-1 = 3$, que é divisível por 3, isto é, $P(1)$ é verdadeira.

H.I.: Supondo que $P(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{Z}^+_*$ com $k \geq 1$, isto é, $P(k): 2^{2k}-1$ é divisível por 3.

P.I.: Queremos demonstrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, $P(k+1): 2^{2(k+1)}-1$ é divisível por 3.

Como $2^{2k}-1$ é divisível por 3, temos $2^{2k}-1 = 3m$, $m \in \mathbb{Z}^+_*$ $\therefore 2^{2k} = 3m+1$.

Para $P(k+1)$, temos $2^{2(k+1)}-1 = 2^{2k+2} = 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 \overset{H.I.}{=} (3m+1)\cdot 4 - 1 = 12m+3 = 3(4m+1)$.

Sejendo $q = 4m+1 \in \mathbb{Z}^+_*$, concluímos que $2^{2(k+1)}-1 = 3q$, assim $2^{2(k+1)}-1$ é múltiplo de 3.

Conclusão: Logo, $P(n): 2^{2n}-1$ é múltiplo de 3, para $n \in \mathbb{Z}^+_*$

Exemplo 14:

Provar que $n^2 > 3n$, para $n \geq 4$.

Dem:

Vamos demonstrar por indução que $P(n): n^2 > 3n$ é verdadeira, para $n \in \mathbb{Z}^+_*$, com $n \geq 4$.

Base: Temos $P(4): 4^2 > 3\cdot 4 = 16 > 12$, isto é, $P(4)$ é verdadeira.

H.I.: Supondo que $P(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{Z}^+_*$ com $k \geq 4$, isto é, $P(k): k^2 > 3k$.

P.I.: Queremos demonstrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é, $P(k+1): (k+1)^2 > 3(k+1)$ é verdadeira.

Para $P(k+1)$, temos $(k+1)^2 = k^2 + 2k\cdot 1 + 1^2 = k^2 + 2k + 1 \overset{H.I.}{>} 3k + 2k + 1 \geq 3k + 2\cdot 4 + 1$ (para $k \geq 4$) $= 3k+9 > 3k+3 = 3(k+1)$.

Assim, $P(k+1)$ é verdadeira.

Conclusão: Logo, $P(n): n^2 > 3n$ é V para todo $n \in \mathbb{Z}^+_*$, com $n \geq 4$.