

Universidad Autónoma de Coahuila
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Investigación de operaciones
Teoría de Grafos
Tarea 2
Alibeit Kakes

por

Jesús López Zavala

1. PROBLEMA 1

Encontrar el camino de longitud máxima que une los nodos x_1 y x_6 .

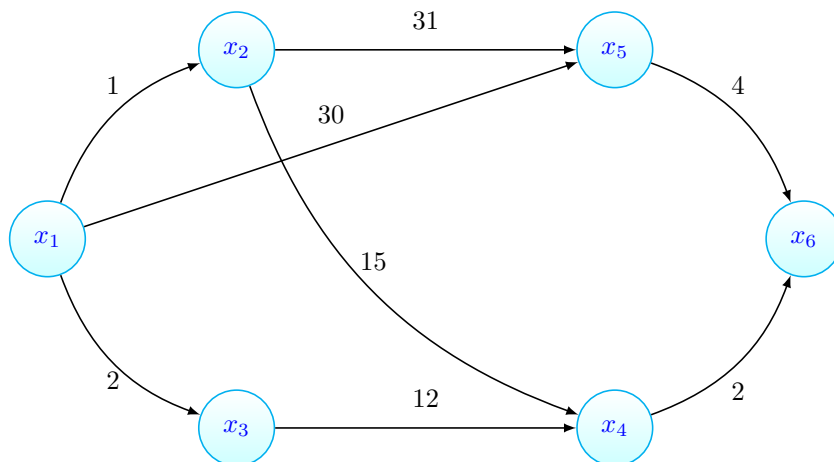


Figura 1

Para resolverlo hay que aplicar el algoritmo de Ford, a continuación se muestran los pasos aplicados para generar cada una de las marcas:

1. Marcaremos el inicio del camino con la marca $(-, 0)$.
2. Marcaremos cada uno de los nodos j con una marca de la forma $(i, e(j))$, donde $e(j) = \max\{e(i) + c(i, j)\}$ y $c(i, j)$ es la longitud del arco que conecta a i y a j . Para iniciar tomaremos a x_1 como el nodo i ; de forma que las marcas que aparecerán en los nodos x_2 y x_3 serán $(x_1, 1)$ y $(x_1, 2)$ respectivamente.

3. Para marcar el nodo $i = x_4$, los nodos $j = \{x_1, x_2, x_3\}$ deberán estar marcados. Como en el paso anterior esto ya se realizó, ahora podremos elegir entre el conjunto de marcas $e(j)$ la que es máxima, de esta forma la marca que acompaña al nodo x_4 es $(x_2, 16)$.
4. Para marcar x_4 aplicamos el mismo razonamiento que en el paso anterior y el resultado de la marca es: $(x_2, 32)$.
5. Finalmente el nodo x_6 se quedará con la marca $(x_5, 36)$.

A continuación se muestra el procedimiento hecho anteriormente para conseguir cada una de las marcas.

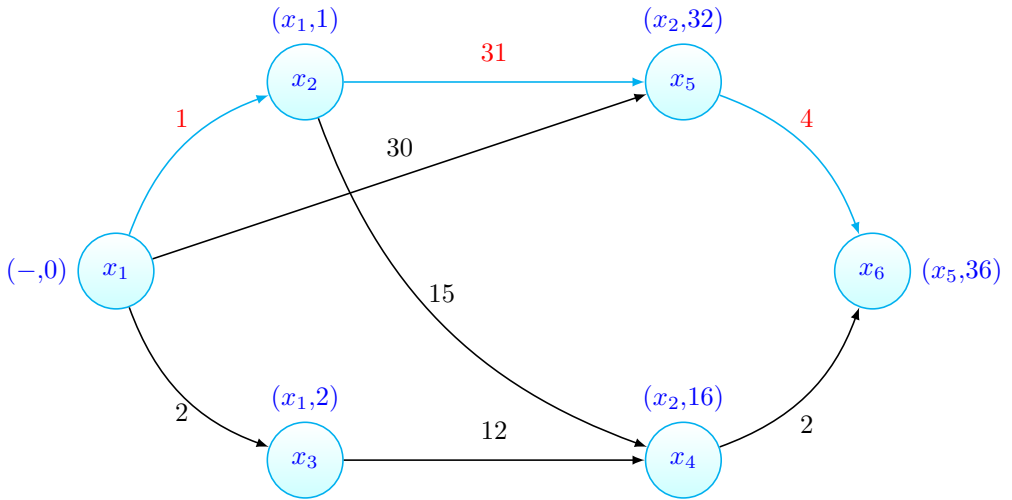


Figura 2: Marcas realizadas en cada nodo, en azul se muestra el camino óptimo encontrado.

Para encontrar el camino óptimo realizamos la siguiente operación:

$$e(j) - e(i) = c(ij), \quad (1)$$

y si esta ecuación se cumple entonces nos quedamos con el arco entre ambas marcas. Este análisis conduce al siguiente conjunto de arcos que conforman el camino de longitud máxima:

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_6)\}. \quad (2)$$

2. PROBLEMA

¿Podemos conocer la longitud del camino extremal sin conocer explícitamente los arcos que la componen?. ¿Se pueden marcar más de una vez los vértices?

Para conocer la longitud del camino extremal es necesario conocer explícitamente la relación que existe entre los vértices (arcos), así como el valor que cada uno de los arcos tiene asignado. Si marcamos más de una vez los vértices, entonces no habrá ambigüedad y el algoritmo con el que se esté trabajando, para nuestro caso el algoritmo de Ford, encontrará todas las soluciones extremas del problema dado. Esto es porque se pondrán más de una marca en un nodo si la longitud medida al llegar a dicho nodo es igual para un determinado número de arcos.

3. PROBLEMA

Formule el algoritmo de Ford para hallar caminos mínimos.

Supongamos que se quiere encontrar el camino mínimo entre los vértices s y t de algún grafo dado, para hacerlo formularemos el algoritmo de Ford como sigue:

1. Marcar el vértice s con la marca $(-, 0)$.
2. Marcar el vértice j con la marca $(i, e(j))$, con

$$e(j) = \min\{e(i) + c(i, j)\}. \quad (3)$$

3. Aplicar el paso anterior hasta llegar al vértice t .
4. Para encontrar el camino mínimo se hace un recorrido desde el vértice t hasta el vértice s buscando los arcos tales que cumplan:

$$e(j) - e(i) = c(i, j), \quad (4)$$

de forma que el conjunto de arcos encontrados es el camino mínimo.

4. PROBLEMA

En el grafo del ejercicio 1, halle el camino de longitud mínima.

A continuación se muestran las marcas obtenidas al aplicar el algoritmo de Ford descrito anteriormente:

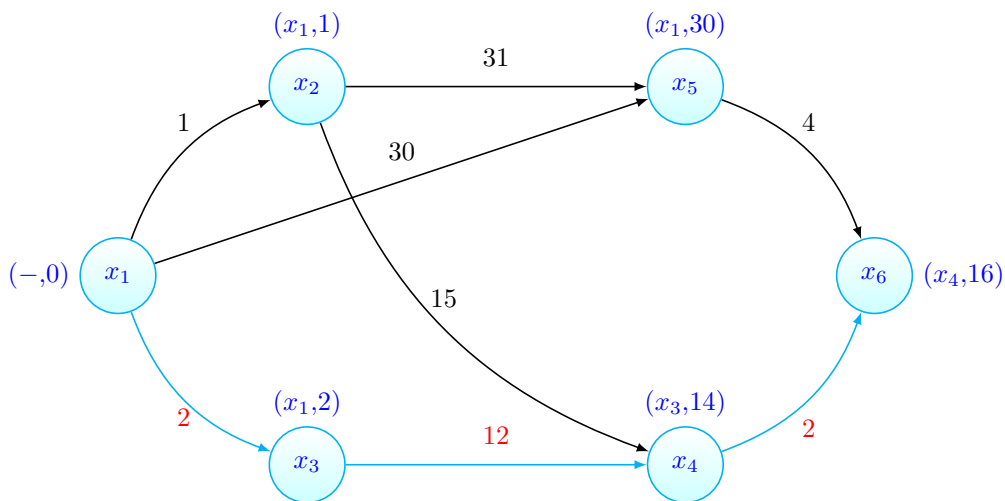


Figura 3: En azul se muestra el camino de longitud mínima.

Aplicando la ecuación (4), la cual fue descrita en el paso 4 del problema anterior, obtenemos el siguiente conjunto de arcos:

$$U = \{(x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_6)\}, \quad (5)$$

siendo éste el camino de longitud (5) mínima.

5. PROBLEMA

En el grafo siguiente halle:

- Encontrar el camino de longitud máxima que une los nodos α y β .
- Encontrar el camino de longitud mínima que une los nodos α y β .
- El recorrido que acumule la menor cantidad de arcos, de α a β .

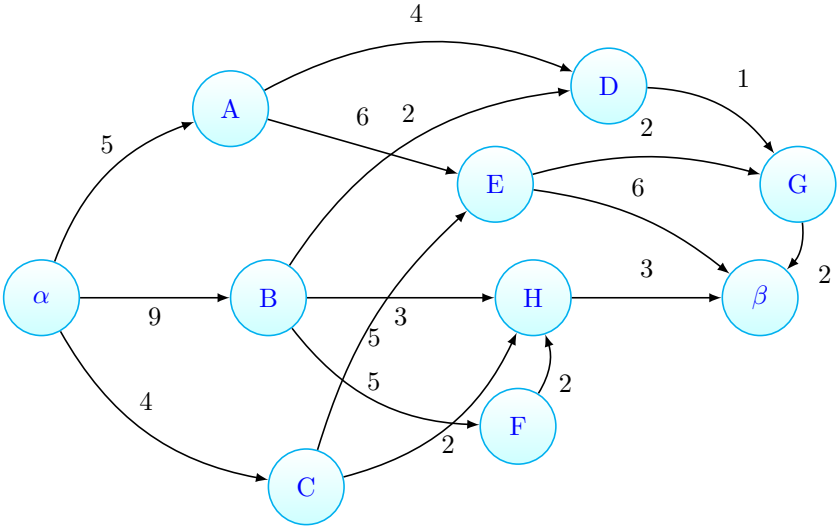


Figura 4

a) Aplicando el algoritmo de Ford se obtiene que el conjunto:

$$U = \{(\alpha, B), (B, F), (F, H), (H, \beta)\}, \tag{6}$$

es el camino de longitud máxima. En la figura se puede observar a este conjunto de arcos coloreados en tono azul:

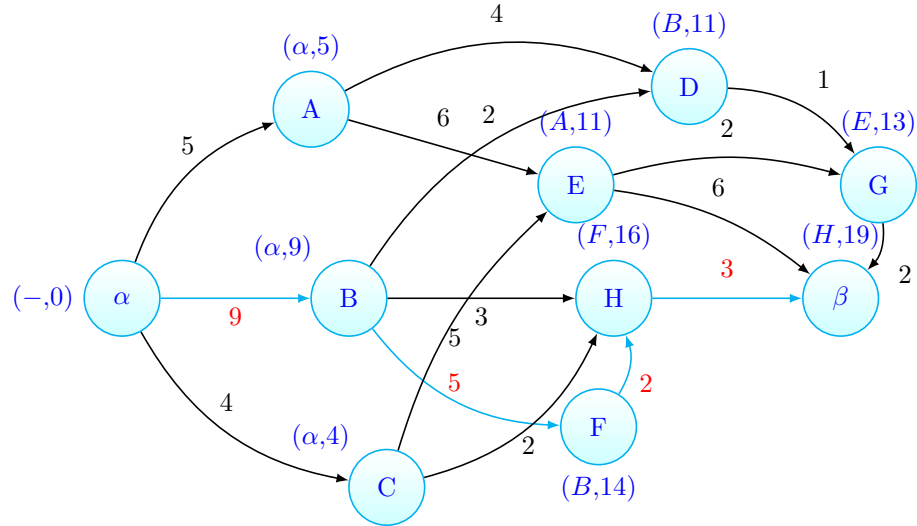


Figura 5: Camino de longitud máxima entre los nodos α y β .

b) El algoritmo de Ford para encontrar caminos mínimos conduce a que el siguiente conjunto:

$$U = \{(\alpha, C), (C, H), (H, \beta)\}, \quad (7)$$

es el camino de longitud mínima.

A continuación se muestra la figura con las marcas resultantes en cada vértice, así como los arcos que conforman al conjunto U . Dichos arcos están coloreados en azul y sus respectivas longitudes se muestran en color rojo:

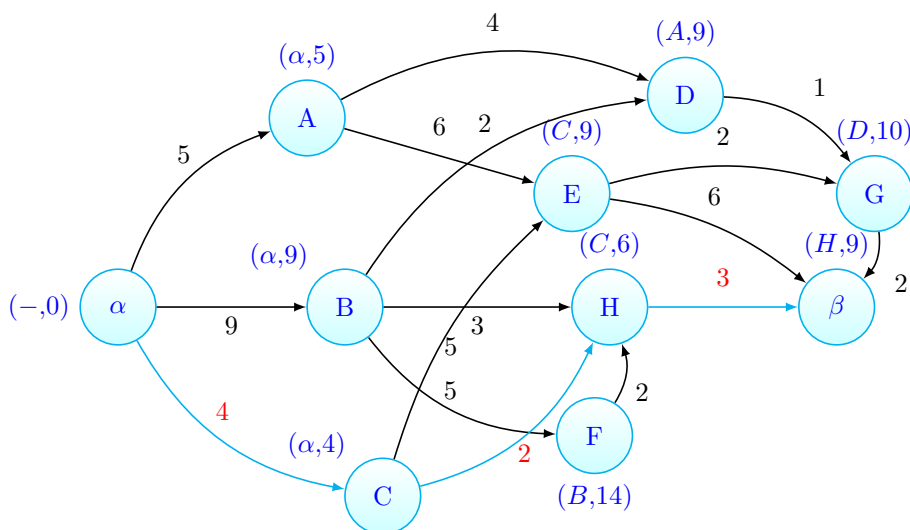


Figura 6

c) Para responder a esta pregunta, sustituiremos los valores predeterminados en cada arco por el valor de 1, luego aplicaremos el algoritmo de Ford para encontrar así todos los posibles conjuntos con el menor número de arcos.

Luego de aplicar el algoritmo, el grafo resultante se muestra a continuación:

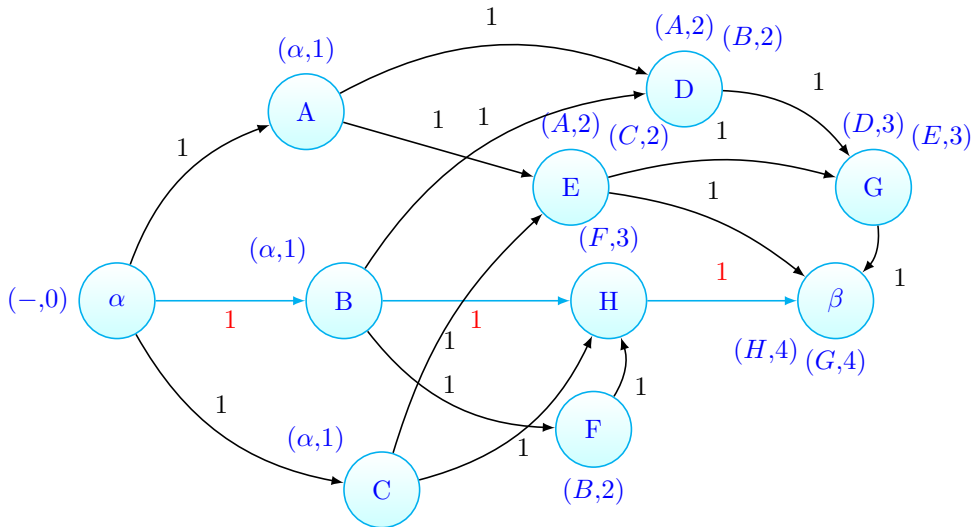


Figura 7: En azul uno de los caminos con menor cantidad de arcos.

Observamos que algunos vértices tienen asignadas más de una marca, ésto se hizo con el fin de encontrar todas las soluciones al problema; las cuales son:

$$U_1 = \{(\alpha, A), (A, E), (E, \beta)\}, \quad (8)$$

$$U_2 = \{(\alpha, B), (B, H), (H, \beta)\}, \quad (9)$$

$$U_3 = \{(\alpha, C), (C, E), (E, \beta)\}, \quad (10)$$

$$U_4 = \{(\alpha, C), (C, H), (H, \beta)\}, \quad (11)$$

6. PROBLEMA

El grafo siguiente representa la estructura gerárquica de una organización, el nodo j es subordinado de i , si j desciende de i y si existe el arco (i, j) , entonces j es subordinado directo de i .

- ¿Cuáles y cuantos subordinados directos tiene cada elemento del sistema?
- ¿Cuál es el total de subordinados de los vértices 1 y 9?
- Halle el camino de mayor clase de subordinación.

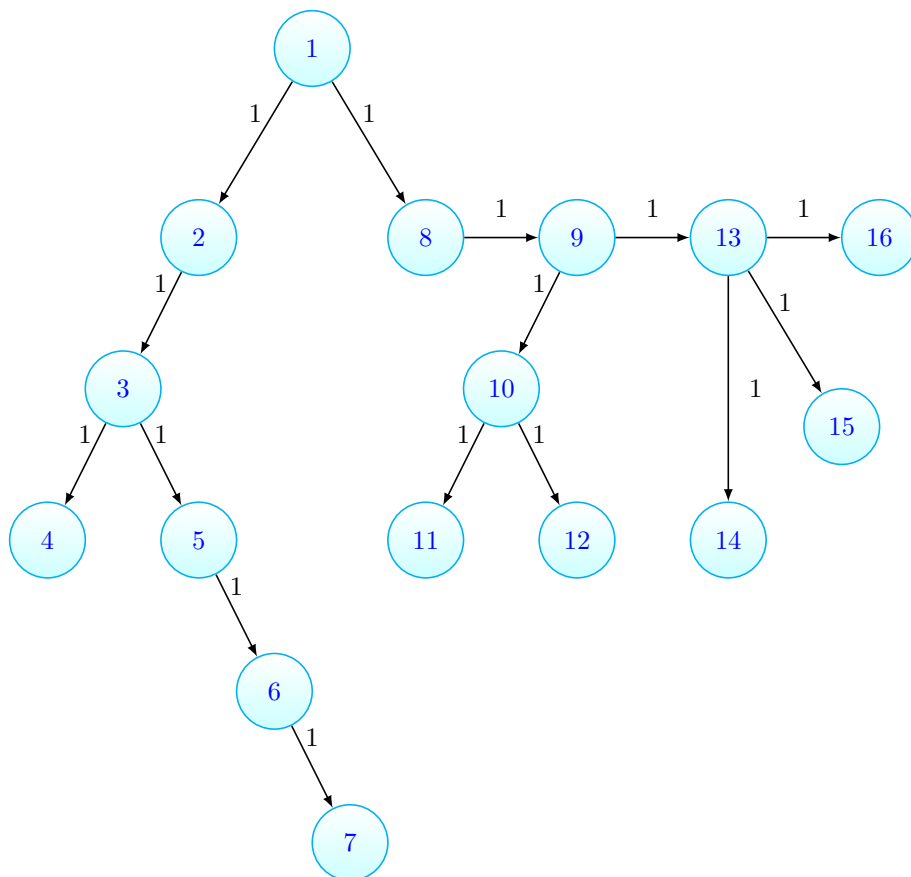


Figura 8

a) Se escribirán los elementos del sistema con sus respectivos subordinados directos. La notación $1, 2, 3, 4\{2, 5\}$, por ejemplo, significará que a los elementos 1, 2, 3 y 4 le corresponden los elementos 2 y 5 como subordinados directos:

1. $4, 7, 11, 12, 14, 15, 16\{\phi\}$.
2. $2\{3\}, 5\{6\}, 6\{7\}, 8\{9\}$.
3. $1\{2, 8\}, 3\{4, 5\}, 9\{10, 13\}, 10\{11, 12\}$.
4. $13\{14, 15, 16\}$.

b) El vértice 1 tiene como subordinados un total de 14 elementos, mientras que el vértice 9 tiene un total de 7 subordinados.

c) Para responder a esta pregunta se le dio el valor de 1 a cada arco que se muestra en la Figura 8, luego se aplicó el algoritmo de Ford para encontrar el camino con mayor número de arcos, los resultados obtenidos se muestran en la siguiente figura:

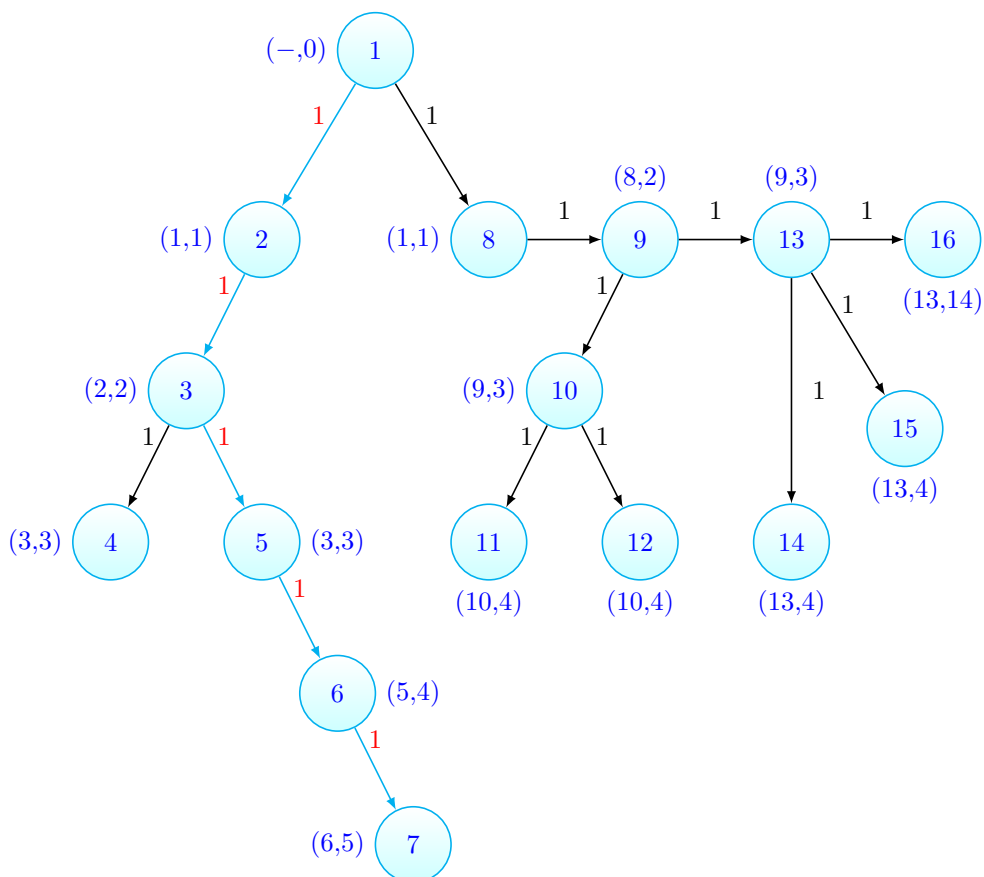


Figura 9: En azul se representa el camino con mayor número de arcos.

El camino con mayor número de arcos es:

$$U = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 7)\}. \quad (12)$$

7. PROBLEMA

Dado el siguiente grafo considere que:

- El valor sobre los arcos mide la distancia entre los vértices. Halle el camino de longitud mínima entre 1 y 6.
- Si no se considera orientación, ¿variaría la longitud del grafo de menor longitud que une dichos vértices?.

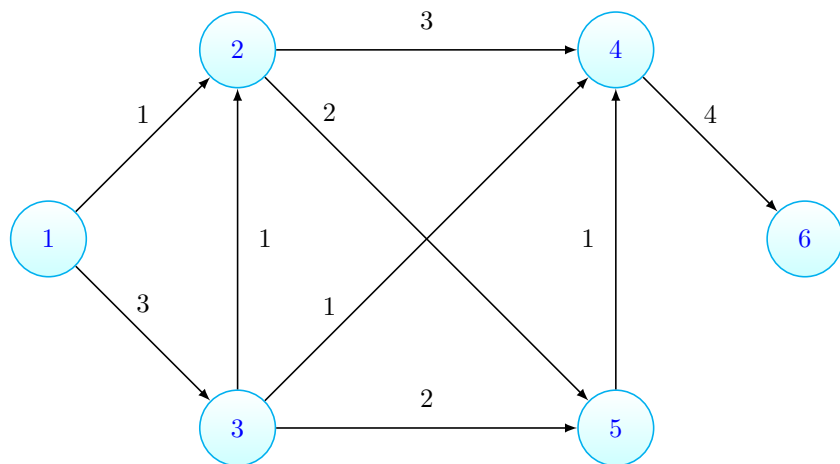


Figura 10

a) Aplicando el algoritmo de Ford:

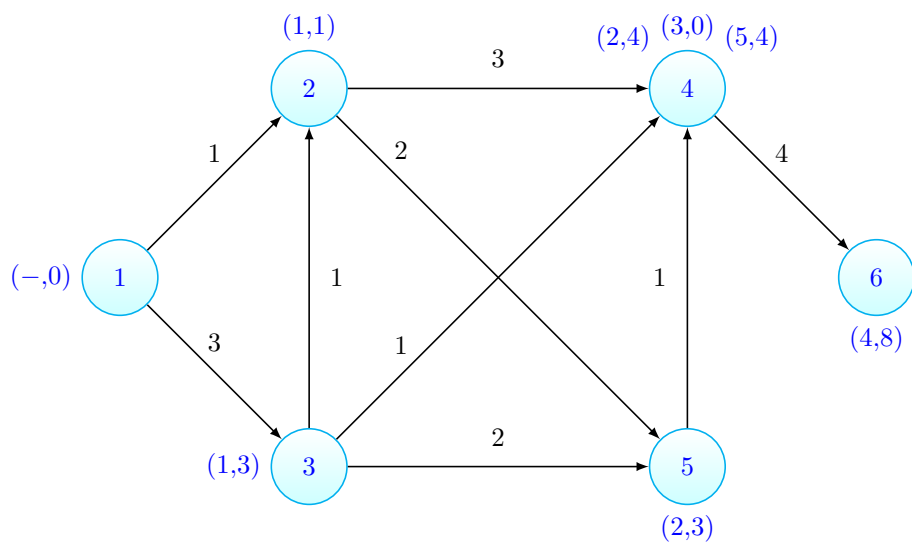


Figura 11

Observamos que en el nodo 4 hay más de una marca, esto sugiere que hay un total de 3 caminos de longitud mínima, los cuales son:

$$U_1 = \{(1, 2), (2, 4), (4, 6)\}, U_2 = \{(1, 2), (2, 5), (5, 4), (4, 6)\}, U_3 = \{(1, 3), (3, 4), (4, 6)\}.$$

b) Si dibujamos el grafo sin orientación, entonces podríamos pensar que es necesario aplicar el algoritmo de Kruskal para encontrar la cadena con mínima longitud, y así compararla con el resultado anterior. Al hacer ésto veremos que el algoritmo da cómo resultado un árbol donde podría haberse omitido una arista a la hora de darle sentido a la situación real; además hay que considerar que la no orientación permite una ruta con mayor libertad, afectando así a la longitud entre los vértices 1 y 6.

8. PROBLEMA

En cada una de las siguientes situaciones explique cómo construir el grafo asociado al problema a resolver, ésto es, qué tomar como vértices y bajo qué ley construir los arcos.

- a) Seis diferentes marcas de alimentos se prueban con un niño de la siguiente forma: cada día se le da a comer al niño dos alimentos diferentes y se toma nota de aquel con el que termina primero. Una vez analizados todos los pares posibles se desea construir un grafo que sirva para determinar el alimento preferido del niño.
 - b) Se desea asociar el mapa de una ciudad, un grafo que represente "la vecindad" entre municipios.
- a) Tomaremos como vértices a los alimentos, es decir:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad (14)$$

además

$$U \subset V \times V. \quad (15)$$

El total de elementos del conjunto U está dado por la combinatoria de $\binom{6}{2}$ y se definirán a la hora de realizar una prueba con un niño en particular.

Ahora diremos que el grafo

$$G(U, V) \quad (16)$$

se construirá tomando en cuenta al par (a, b) , donde a y b son alimentos. Dicha notación significa que el alimento b le gustó más que el alimento a , y se representará gráficamente con un arco dirigido de a a b . Note que:

$$(a, b) \in U. \quad (17)$$

En la siguiente figura se muestra el grafo que se usará a la hora de que se lleve a cabo el experimento con los alimentos. Observe que no está orientado, pero la orientación se realizará a la hora de que se registre el alimento que el niño se termine primero.

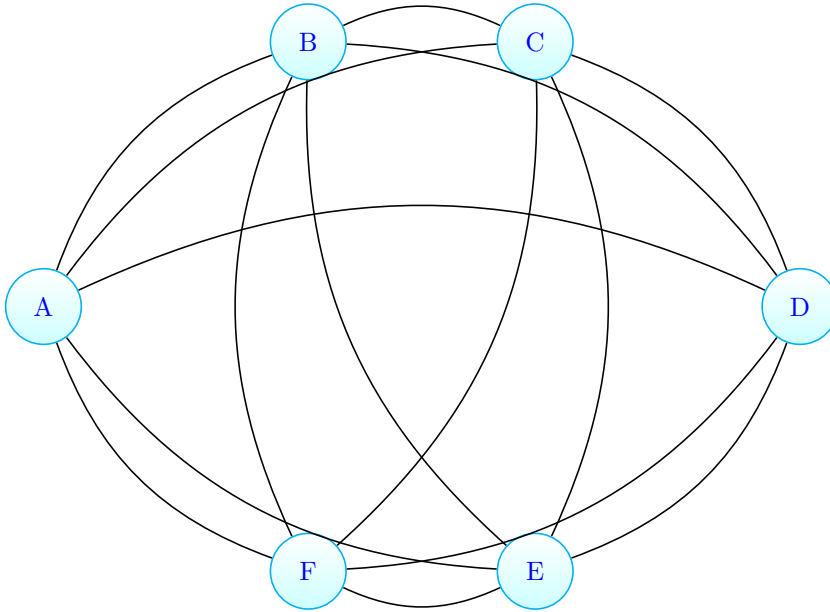


Figura 12

b) Supongamos que hay un total de n municipios en una ciudad. Para asociar un grafo a la vecindad entre municipios, tenemos que definir quienes serán los vértices del grafo. Es conveniente definir a cada municipio como un vértice, entonces el conjunto de vértices estará dado como:

$$V = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}, \quad (18)$$

donde el elemento m_i significa el municipio número i .

Como sólo nos interesa saber qué municipios comparten vecindad, entonces el grafo será no orientado y trazaremos aristas entre los vértices bajo la siguiente regla:

$$(i, j) \in U \subset V \times V, \quad (19)$$

sólo si i es vecino de j .

9. PROBLEMA

Un agricultor dispone de un terreno de 5 hectáreas dividido en 4 partes iguales. Se pueden sembrar 4 productos A, B, C, D. Para evitar el empobrecimiento del terreno es necesario rotar cada año el cultivo en cada una de las 4 partes. Al comenzar se debe cultivar cada uno de los productos en una de las 4 partes.

<div>Año $n - 1$ \ Año n</div>	A	B	C	D
A		5		6
B			7	
C	3			9
D	5	7	4	

Cuadro 1

Los números significan la ganancia relativa en nurtientes obtenida si en un año sembramos tal producto a partir de otro sembrado el año anterior. El espacio en blanco significa, rotación imposible.

- a) Hallar el grafo que represente las posibles rotaciones del cultivo en los primeros 4 años de siembra.
- b) ¿Qué secuencia de rotaciones brinda la mayor ganancia en estos 4 años?.
- c) ¿Cómo obtener la mejor sucesión de rotaciones para la parcela que se sembró inicialmente con A?

a) El siguiente grafo representa las rotaciones del cultivo en los primeros 4 años de siembra:

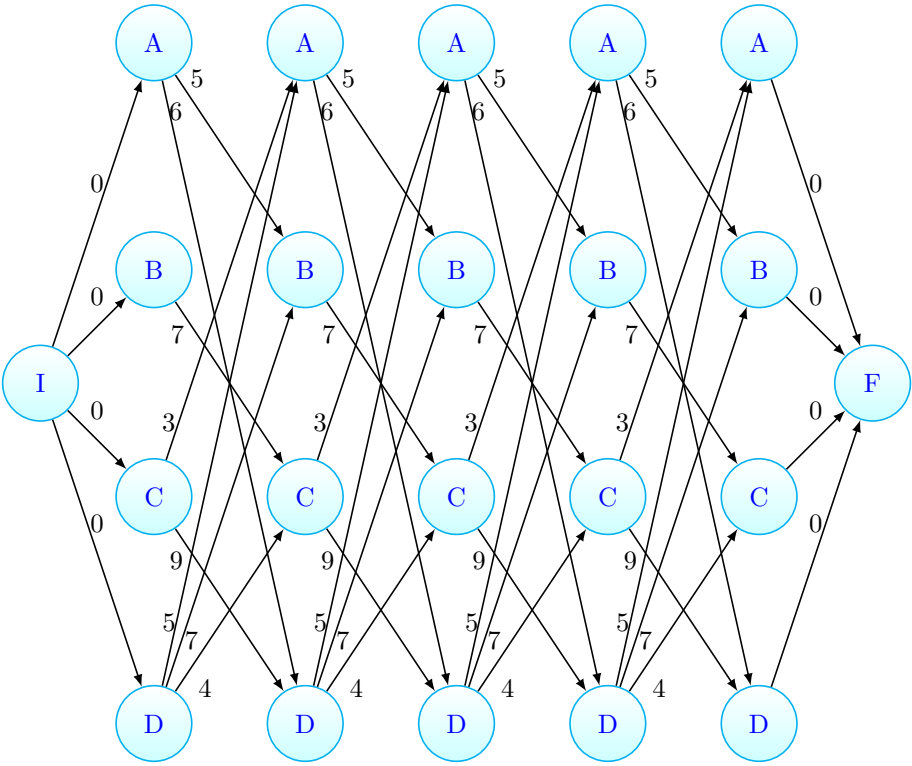


Figura 13

b) Para ello vamos a aplicar el algoritmo de Ford, las marcas resultantes se muestran a continuación:

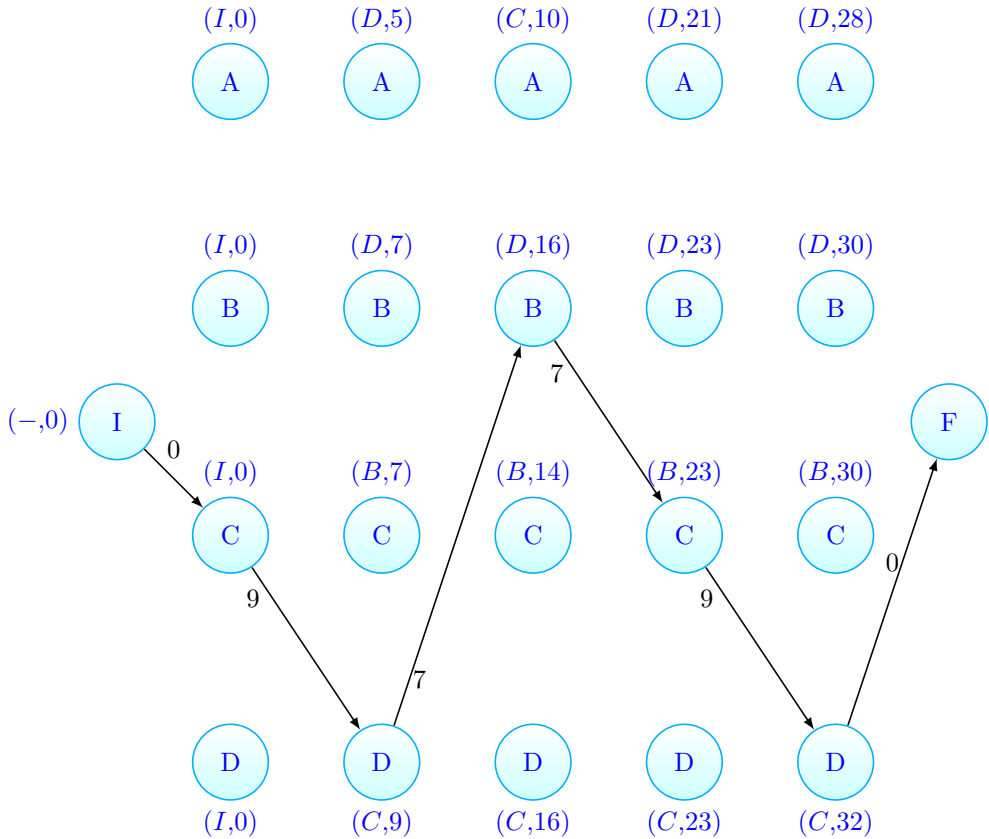


Figura 14: Para evitar confusión, se han omitido todos los caminos del grafo y se ha dejado sólo el que brinda la mayor ganancia en los 4 años.

La rotación que brinda la mejor ganancia en los 4 años esta asociada a la parcela donde al inicio se sembró el producto C. Esta rotación es: C, D, B, C, D. En términos de camino óptimo luce como:

$$U = \{(I, C), (C, D), (D, B), (B, C), (C, D)\}. \quad (20)$$

c) La mejor rotación de sucesiones para la parcela donde al inicio se sembró el producto A es: A, D, B, C, D, que en notación de camino óptimo es:

$$U = \{(I, A), (A, D), (D, B), (B, C), (C, D)\}. \quad (21)$$

10. PROBLEMA

Construya los grafos asociados a un proyecto cuyas actividades y antecedentes se dan a continuación:

Actividades	Antecedentes
1 -2	—
1 -3	—
1 -4	—
1 -5	—
2 -4	1 -2
3 -4	1 -3
4 -5	2 -4, 1 -4, 3 -4
5 -6	4 -5, 1 -5
6 -7	6 -6

Cuadro 2

El grafo asociado es:

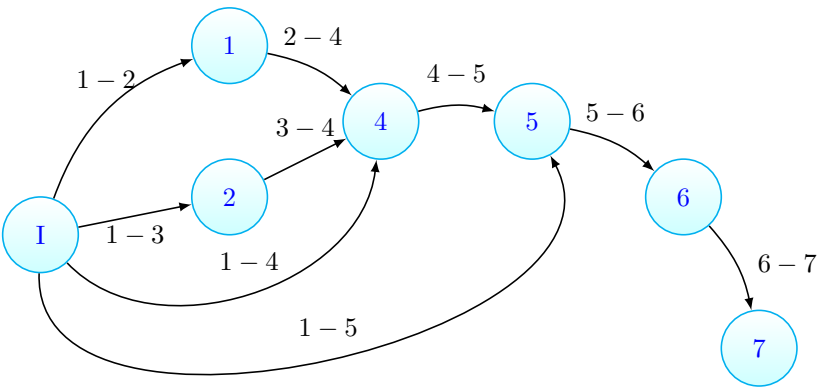


Figura 15

11. PROBLEMA

Analice, en los grafos representados por las figuras 16 y 17, que se dan a continuación, la necesidad o no de arcos artificiales. En el caso del grafo 18, construya el listado de actividades verdaderas con sus correspondientes antecedentes.

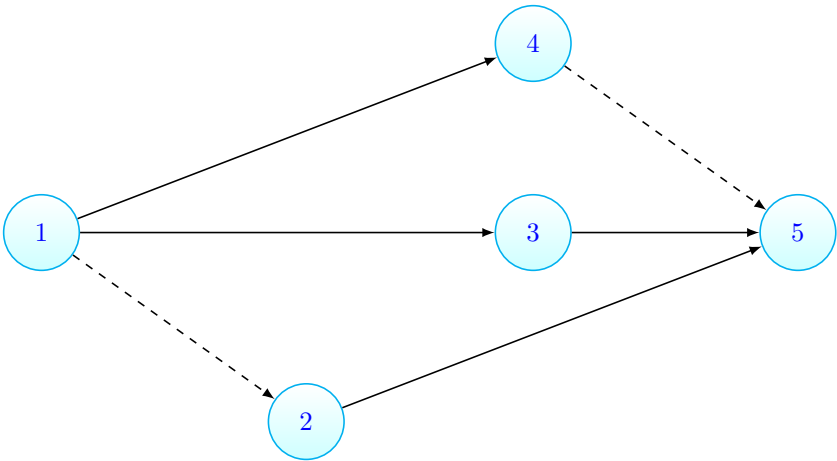


Figura 16

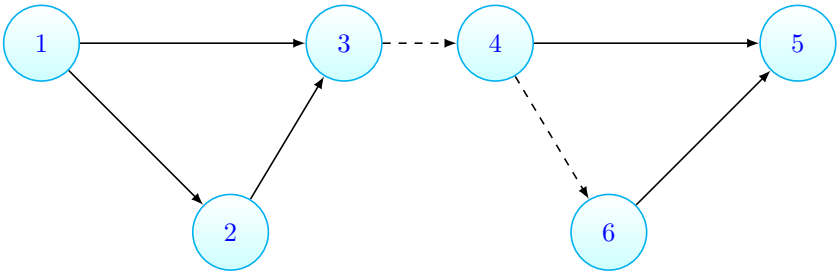


Figura 17

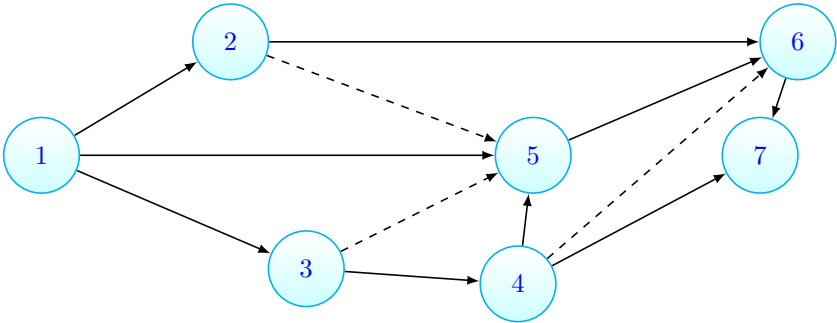


Figura 18

En los grafos de las figuras 16 y 17 podemos omitir uno de los dos arcos que aparecen en cada figura:

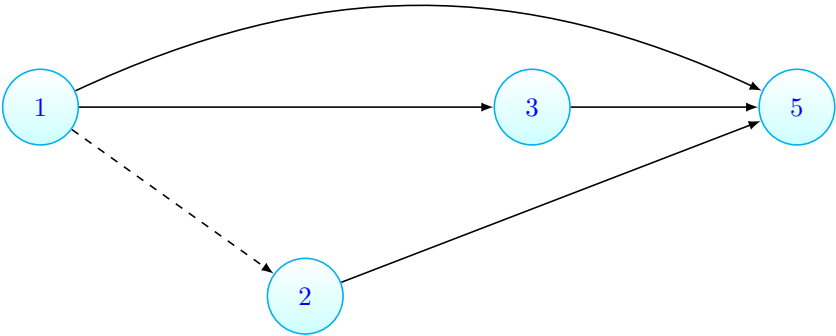


Figura 19

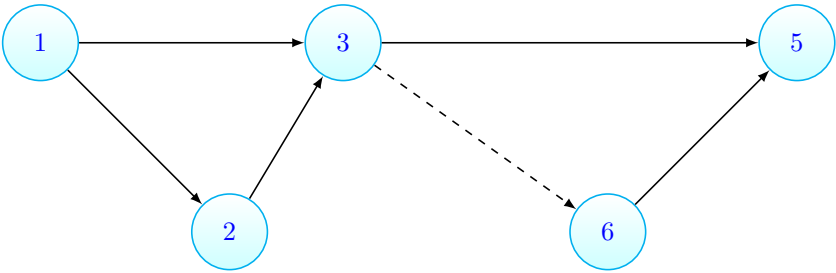


Figura 20

El listado correspondiente a las actividades de la figura 18 es:

Actividades	Antecedentes
1 -a	—
1 -b	—
1 -c	—
1 -d	—
1 -e	—
1 -f	—
1 -g	—
2 -a	1 -b, 1 -c, 1 -d, 1 -e
3 -a	1 -a, 2 -a, 1 -f

Cuadro 3

Al hacer un diagrama de estas actividades obtendremos la idea principal del grafo mostrado en la figura 18. Observe que en la figura 18 es importante la introducción de arcos artificiales para darle sentido al siguiente diagrama:

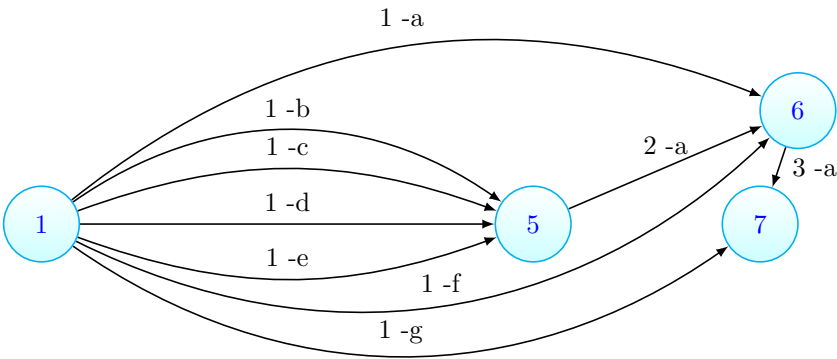


Figura 21

12. PROBLEMA

¿Puede estar asociado el siguiente grafo a un proyecto? ¿Por qué?

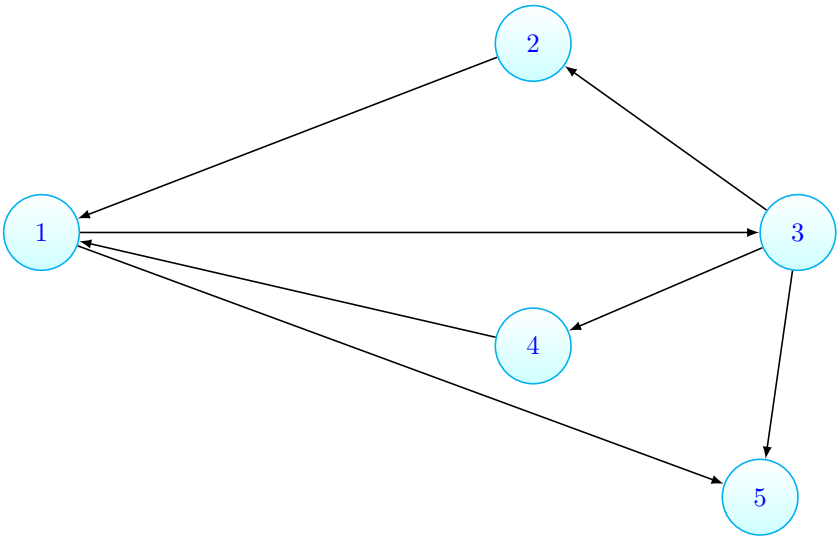


Figura 22

La respuesta es no, porque el grafo asociado a un proyecto no puede tener corcuitos por la naturaleza del mismo.

13. PROBLEMA

Analice la existencia o no de circuitos en el grafo asociado a la siguiente tabla.

Actividades	Antecedentes
A	B
B	A
C	B
D	C
E	A
F	A
G	E, K, J
H	I, M
I	E, K
J	I, M
K	L, D
L	I, M
M	L, D

Cuadro 4

Rápidamente la tabla muestra la existencia de circuitos ya que la actividad A necesita que la actividad B esté terminada, mientras que la actividad B necesita como antecedente a la actividad A. Algo similar ocurre con L y M.

14. PROBLEMA

Detremine la duración mínima del proyecto cuyo grafo aparece a continuación:

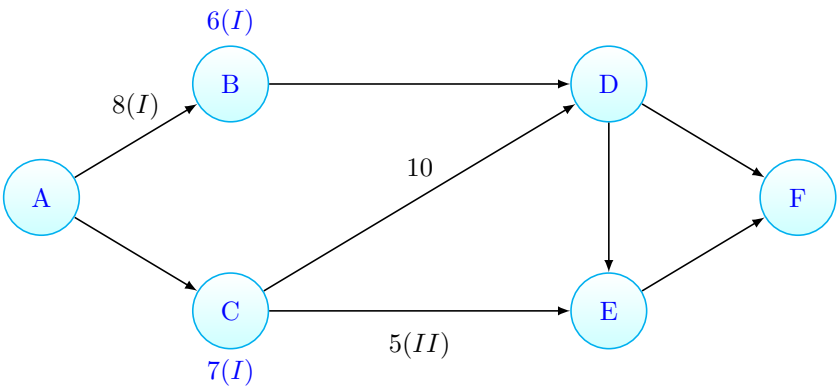


Figura 23

Observamos que algunos nodos tienen asociado un número. Para poder aplicar el algoritmo de Ford, convertiremos la marca en un arco y pondremos el valor de cero a los arcos que no tienen asociado ningún valor. A continuación se muestra este procedimiento y las marcas resultantes después de haber aplicado el algoritmo de Ford:

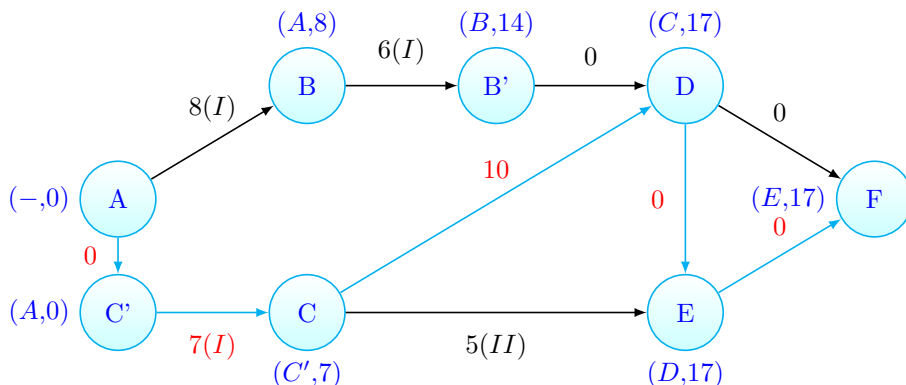


Figura 24

De esta forma la duración mínima del proyecto es de 17 está determinada por el camino:

$$U = \{(A, C'), (C', C), (C, D), (D, E), (E, F)\}. \quad (22)$$

15. PROBLEMA

Un individuo quiere estudiar cierta carrera mediante cursos libres y conoce las asignaturas de que consta, así como las reacciones entre ellas. Además, de acuerdo con la dificultad y extensión de los programas, se ha calculado cuántas semanas de estudio necesita dedicarle a cada asignatura, lo que se muestra en la siguiente tabla:

- ¿En que tiempo mínimo podría vencer la carrera?
- Con el propósito de eliminar la acumulación excesiva de asignaturas a un mismo tiempo ¿qué asignaturas permitirán un corrimiento a la propuesta inicial y qué tiempo?, ¿es posible no estudiar más de 4 asignaturas simultáneamente? ¿qué plan de estudios usted propone?
- De acuerdo a su plan, ¿en qué periodo sería más intenso el estudio?
- El grafo que representa todas las posibles rutas de acuerdo al programa, está representado en la siguiente figura:

Asignaturas	Tiempo de estudio	Antecedentes
Geometría Analítica (A)	10	–
Análisis I (B)	16	–
Análisis II (C)	16	B, A, D
Álgebra I (D)	14	–
Álgebra II (E)	14	D
Mecánica Clásica (F)	16	A, B
Mecánica Celeste (G)	18	C, E
Trigonometría Esférica (H)	12	D
Geografía (I)	10	La primera mitad de F
Astronomía I (J)	16	H, F, N
Astronomía II (K)	18	J, I, G
Astronomía III (L)	20	K
Programación (M)	10	–
Cálculo Numérico (N)	10	M
Filosofía I (O)	14	–
Filosofía II (P)	14	O

Cuadro 5

Luego de aplicar el algoritmo de Ford observamos que el tiempo mínimo en que puede vencer la carrera es 88.

b) Para hacer un análisis prestemos atención al siguiente diagrama de barras: Observamos

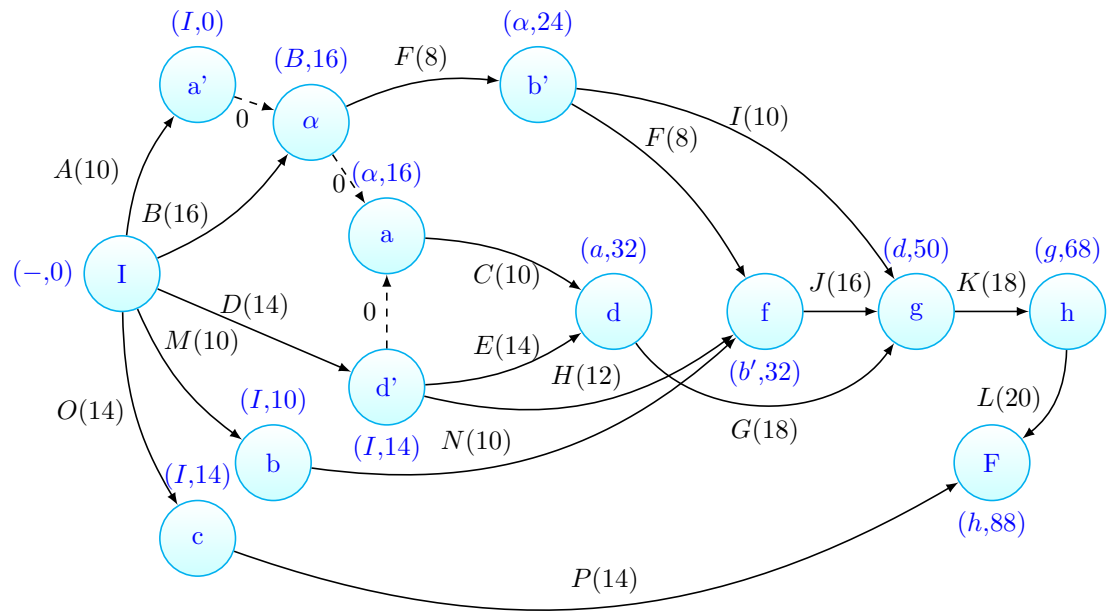


Figura 25: En cada arco se encuentra el nombre de la materia a cursar con su respectiva duración entre paréntesis.

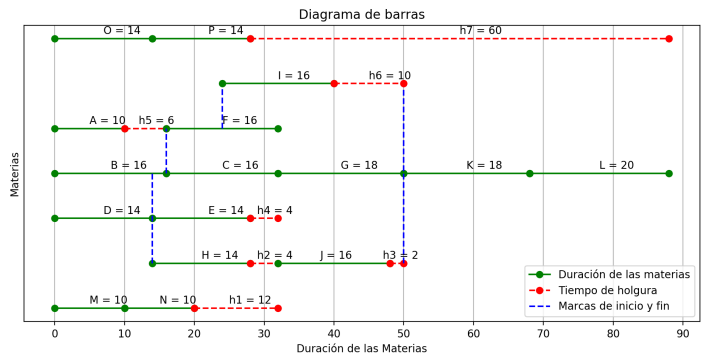


Figura 26

que las materias que pueden ser movidas sin afectar el tiempo crítico de duración de la carrera, son P y O con una holgura de $h_7 = 60$ semanas. Existen otras materias que pueden ser removidas pero esto no evitaría una acumulación excesiva. Observemos la holgura que existe en los lapsos de tiempo h_2 y h_4 , durante este tiempo es posible no estar estudiando mas de 4 materias simultáneamente. El plan que se propone es tomar las materias O y P a partir de la semana 50 para

evitar cualquier carga excesiva de materias. Además es conveniente tomar en cuenta las holguras h_2 y h_4 , ya que estas permitirán no tener un acumulamiento de materias por lo menos en 4 semanas. Con este plan el periodo más intenso será a partir de la semana 16 hasta la 28.

16. PROBLEMA

El ciudadano X va cada día de su casa al trabajo en bicicleta, como tiene conocimientos de Teoría de Grafos, quiere encontrar el camino más corto, pero para su desgracia ese camino está muy controlado por la policía que es muy rigurosa en las leyes de tránsito. Luego de algunas multas el ciudadano llega a la conclusión de que el camino más corto no es el más económico; por eso decidió seleccionar la vía con mayor probabilidad de no ser interceptado por la policía y para ello, obtuvo las probabilidades para cada pedazo de trayectoria, según se muestra:

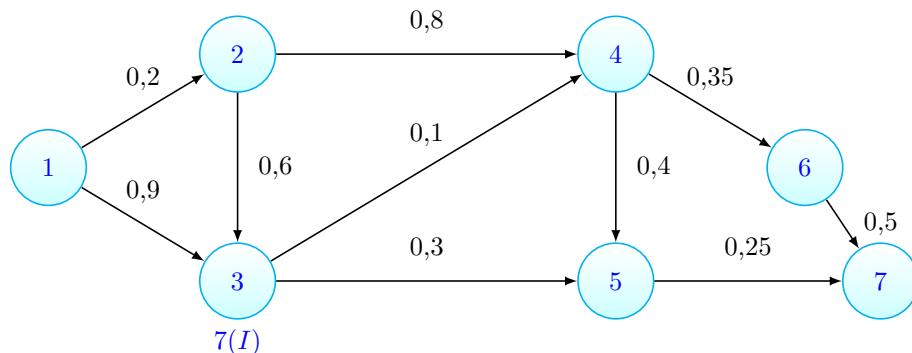


Figura 27

Aplicando el algoritmo de Ford obtenemos las siguientes marcas:

Como el valor que tiene cada arco es la probabilidad de no ser interceptado, entonces el camino con mayor probabilidad es aquel que resulta más económico. Para este caso tenemos dos posibles caminos:

$$U_1 = \{(1, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 7)\} \quad (23)$$

$$U_2 = \{(1, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 7)\} \quad (24)$$

17. PROBLEMA

Represente un grafo por el método arco-tarea, el proyecto que conforman las tareas de la tabla siguiente y determine que tareas no pueden atrasarse sin retrasar el proyecto:

Para ello vamos a dibujar el grafo que representa el proyecto, poniendo las actividades como arcos:

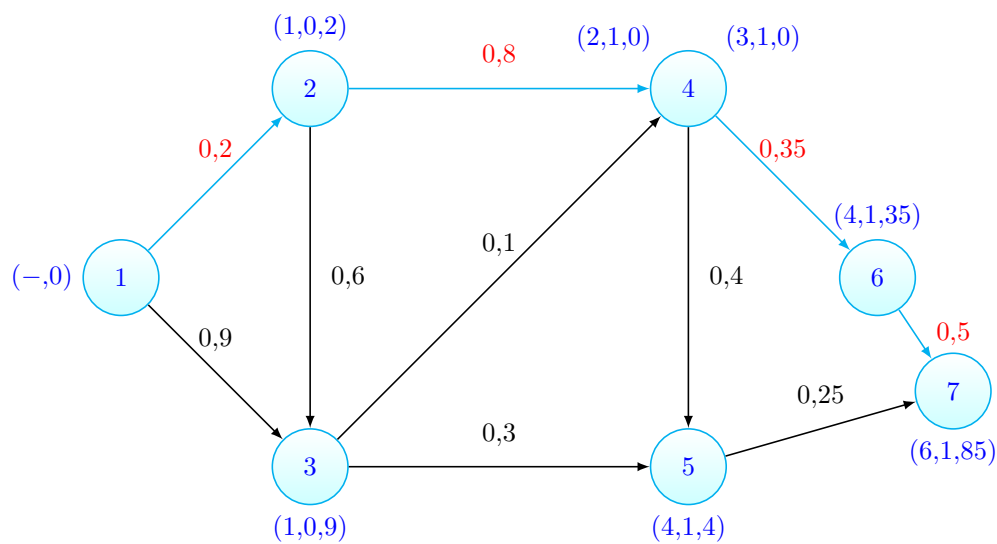


Figura 28: La figura muestra uno de los dos posibles caminos más económicos.

Tarea	Duración	Antecedentes
I	10	–
II	18	–
III	12	I y II
IV	2	I
V	15	III y IV
VI	20	IV y III

Cuadro 6

Las tareas que estan en el camino crítico no pueden atrasarse, ya que depende de ellas la duración total del proyecto. EL camino crítico queda determinado por:

$$U = \{(I, 2), (2, 3), (3, F)\}.$$

(25)

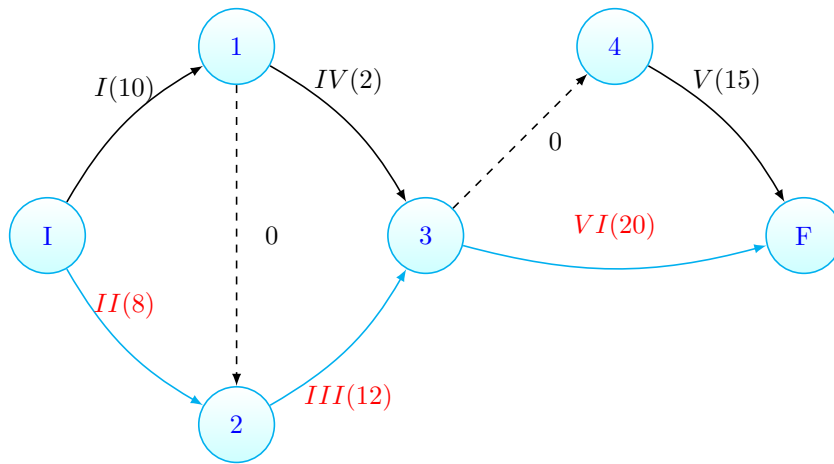


Figura 29: *En azul se muestra el camino crítico del proyecto.*