Universidad Autónoma de Coahuila
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Investigación de operaciones
Teoría de Grafos
Tarea 2
Alibeit Kakes

por

Jesús López Zavala

1. Problema 1

Encontrar el camino de longitud máxima que une los nodos x_1 y x_6.

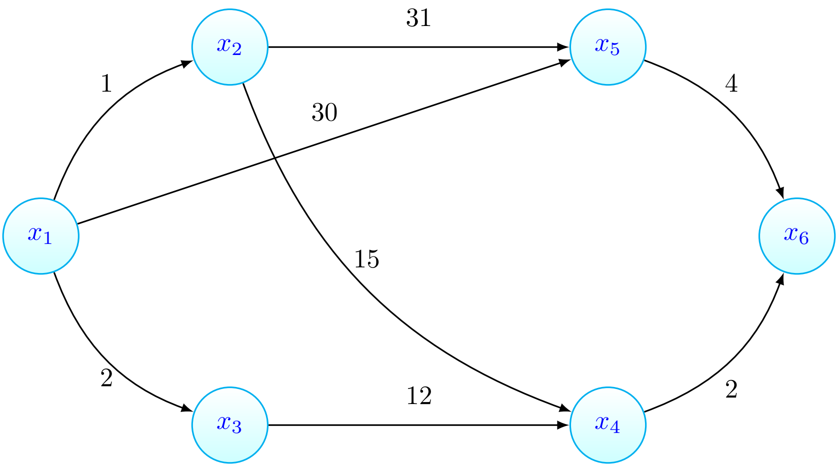

Figura 1

Para resolverlo hay que aplicar el algoritmo de Ford, a continuación se muestran los pasos aplicados para generar cada una de las marcas:

1. Marcaremos el inicio del camino con la marca $(-, 0)$.
2. Marcaremos cada uno de los nodos j con una marca de la forma $(i, e(j))$, donde $e(j) = max\{e(i) + c(i, j)\}$ y $c(i, j)$ es la longitud del arco que conecta a i y a j. Para iniciar tomaremos a x_1 como el nodo i; de forma que las marcas que apareceran en los nodos x_2 y x_3 serán $(x_1, 1)$ y $(x_1, 2)$ respectivamente.

3. Para marcar el nodo $i = x_4$, los nodos $j = \{x_1, x_2, x_3\}$ deberan esta marcados. Como en el paso anterior ésto ya se realizo, ahora podremos elegir entre el conjunto de marcas $e(j)$ la que es máxima, de ésta forma la marca que acompaña al nodo x_4 es $(x_2, 16)$.
4. Para marcar x_4 aplicamos el mismo razonamiento que en el paso anterior y el resultado de la marca es: $(x_2, 32)$.
5. Finalmente el nodo x_6 se quedará con la marca $(x_5, 36)$.

A continuación se muestra el procedimiento hecho anteriormente para conseguir cada una de las marcas.

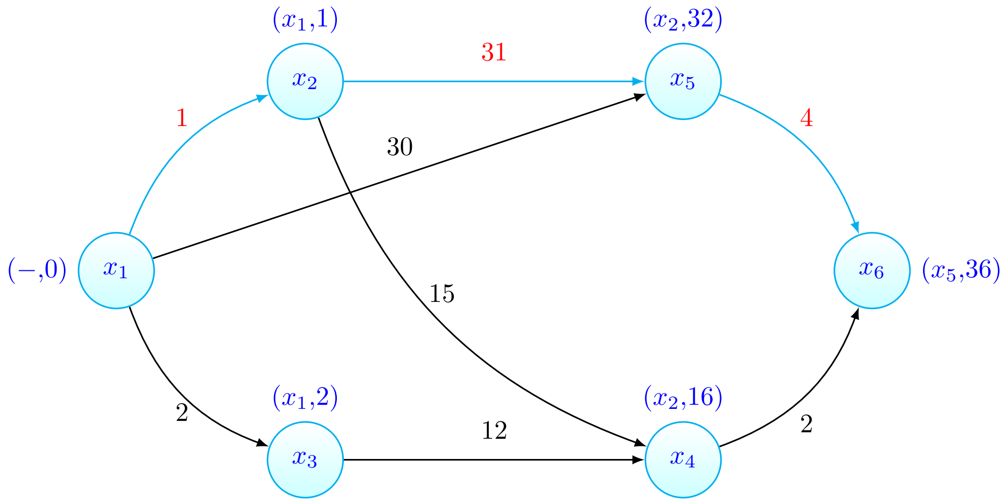

Figura 2: *Marcas realizadas en cada nodo, en azul se muestra el camino óptimo encontrado.*

Para encontrar el camino óptimo realizamos la siguiente operación:

$$e(j) - e(i) = c(ij), \tag{1}$$

y si esta ecuación se cumple entonces nos quedamos con el arco entre ambas marcas. Este análisis conduce al siguiente conjunto de arcos que conforman el camino de longitud máxima:

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_6)\}. \tag{2}$$

2. PROBLEMA

¿Podemos conocer la longitud del camino extremal sin conocer explícitamente los arcos que la componen?. ¿Se pueden marcar más de una vez los vértices?

Para conocer la longitud del camino extremal es necesario conocer explícitamente la relacion que existe entre los vértices (arcos), así como el valor que cada uno de los arcos tiene asignado. Si marcamos más de una vez los vértices, entonces no habrá ambiguedad y el algoritmo con el que se esté trabajando, para nuestro caso el algoritmo de Ford, encontrará todos las soluciones extremales del problema dado. Esto es porque se pondran más de una marca en un nodo si la longitud medida al llegar a dicho nodo es igual para un determinado número de arcos.

3. Problema

Formule el algoritmo de Ford para hallar caminos mínimos.

Supongamos que se quiere encontrar el camino mínimo entre los vértices s y t de algún grafo dado, para hacerlo formularemos el algoritmo de Ford como sigue:

1. Marcar el vértice s con la marca $(-, 0)$.
2. Marcar el vértice j con la marca $(i, e(j))$, con

$$e(j) = min\{e(i) + c(i, j)\}. \tag{3}$$

3. Aplicar el paso anterior hasta llegar al vértice t.
4. Para encontrar el camino mínimo se hace un recorrido desde el vértice t hasta el vértice s buscando los arcos tales que cumplan:

$$e(j) - e(i) = c(i, j), \tag{4}$$

de forma que el conjunto de arcos encontrados es el camino mínimo.

4. Problema

En el grafo del ejercicio 1, halle el camino de longitud mínima.

A continuación se muestran las marcas obtenidas al aplicar el algoritmo de Ford descrito anteriormente:

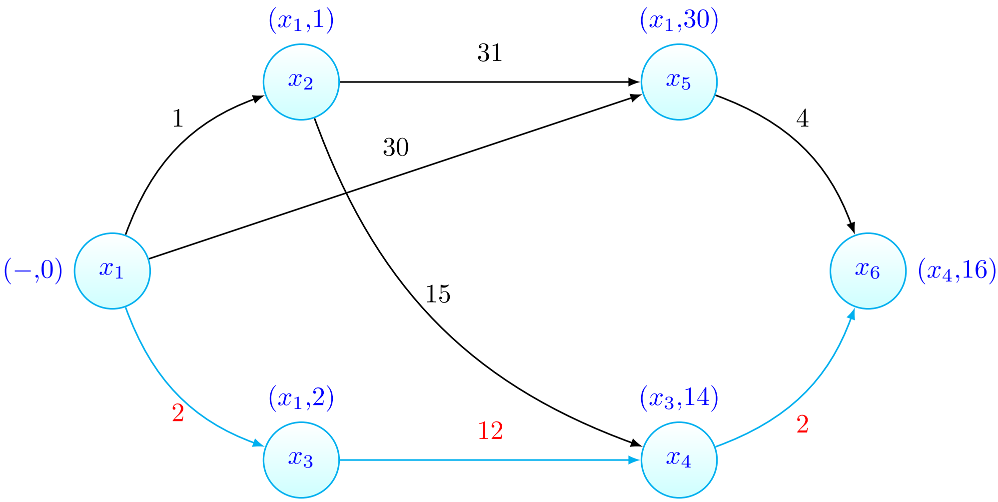

Figura 3: *En azul se muestra el camino de longitud mínima.*

Aplicando la ecuación (4), la cual fue descrita en el paso 4 del problema anterior, obtenemos el siguente conjunto de arcos:

$$U = \{(x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_6)\}, \tag{5}$$

siendo éste el camino de longitud (5) mínima.

5. Problema

En el grafo siguiente halle:

a) Encontrar el camino de longitud máxima que une los nodos α y β.

b) Encontrar el camino de longitud mínima que une los nodos α y β.

c) El recorrido que acumule la menor cantidad de arcos, de α a β.

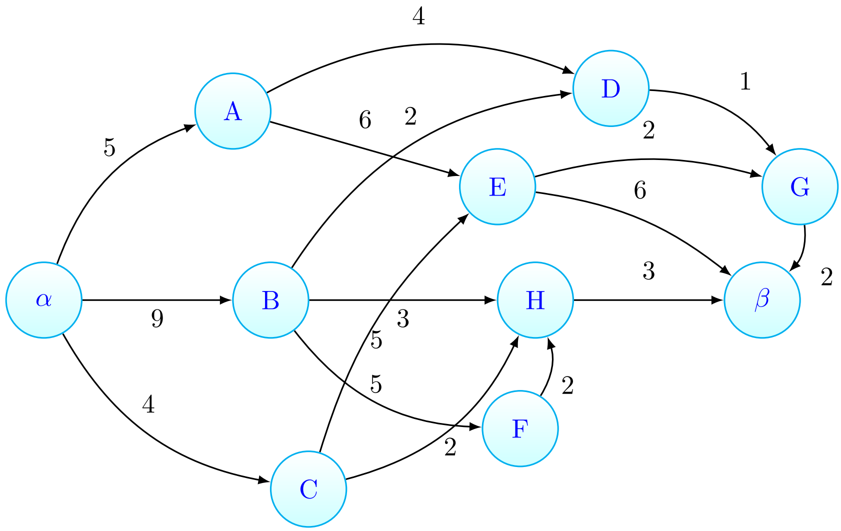

Figura 4

a) Aplicando el algoritmo de Ford se obtiene que el conjunto:

$$U = \{(\alpha, B), (B, F), (F, H), (H, \beta)\}, \tag{6}$$

es el camino de longitud máxima. En la figura se puede observar a este conjunto de arcos coloreados en tono azul:

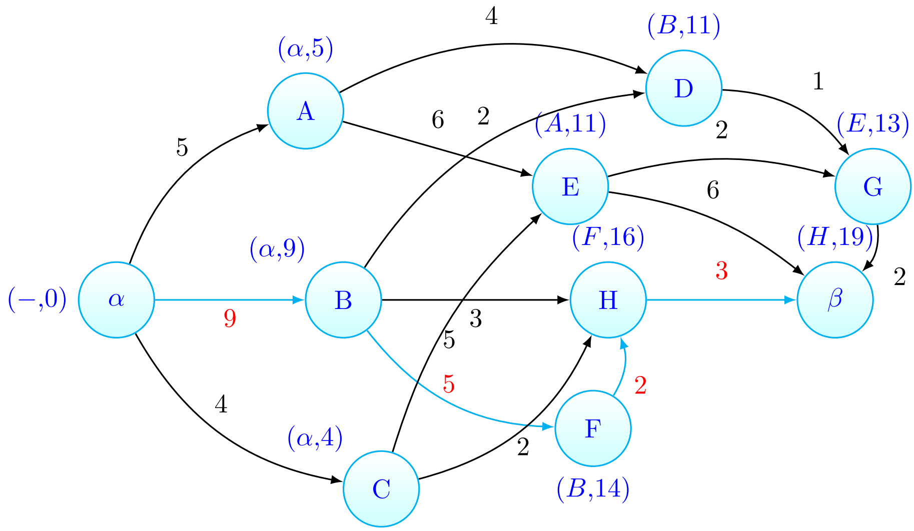

Figura 5: *Camino de longitud máxima entre los nodos α y β.*

b) El algoritmo de Ford para encontrar caminos mínimos conduce a que el siguiente conjunto:

$$U = \{(\alpha, C), (C, H), (H, \beta)\}, \tag{7}$$

es el camino de longitud mínima.
A continuación se muestra la figura con las marcas resultantes en cada vértice, así como los arcos que conforman al conjunto U. Dichos arcos estan coloreados en azul y sus respectivas longitudes se muestran en color rojo:

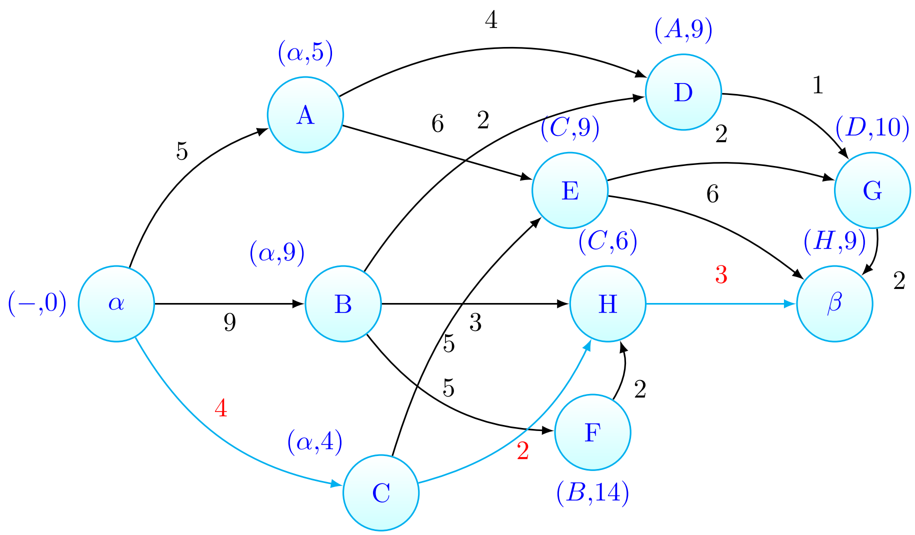

Figura 6

c) Para responder a esta pregunta, sustituiremos los valores predeterminados en cada arco por el valor de 1, luego aplicaremos el algoritmo de Ford para encontrar así todos los posibles conjuntos con el menor número de arcos.
Luego de aplicar el algoritmo, el grafo reslultante se muestra a continuación:

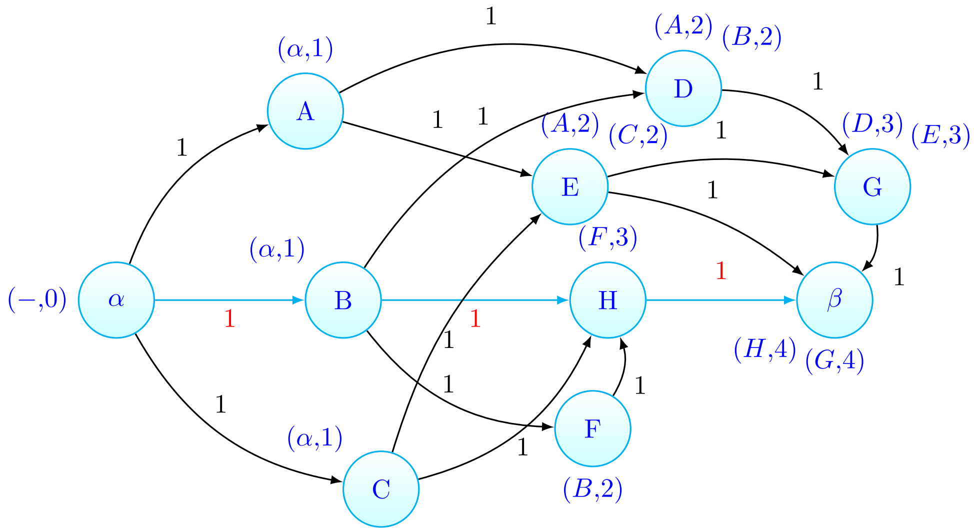

Figura 7: *En azul uno de los caminos con menor cantidad de arcos.*

Observamos que algunos vértices tienen asignadas más de una marca, ésto se hizo con el fin de encontrar todas las soluciones al problema; las cuales son:

$$U_1 = \{(\alpha, A), (A, E), (E, \beta)\}, \tag{8}$$

$$U_2 = \{(\alpha, B), (B, H), (H, \beta)\}, \tag{9}$$

$$U_3 = \{(\alpha, C), (C, E), (E, \beta)\}, \tag{10}$$

$$U_4 = \{(\alpha, C), (C, H), (H, \beta)\}, \tag{11}$$

$$U_5 = \{(\alpha, C), (C, E), (E, G), (G, \beta)\}, \tag{12}$$

$$U_4 = \{(\alpha, A), (A, E), (E, G), (G, \beta)\}. \tag{13}$$

6. PROBLEMA

El grafo sigueinte representa la estructura gerárgica de una organización, el nodo j es subordinado de i, si j desciende de i y si existe el arco (i, j), entonces j es subordinado directo de i.

a) ¿Cuáles y cuantos subordinados directos tine cada elemento del sistema?

b) ¿Cuál es el total de subordinados de los vértices 1 y 9?

c) Halle el camino de mayor clase de subordinación.

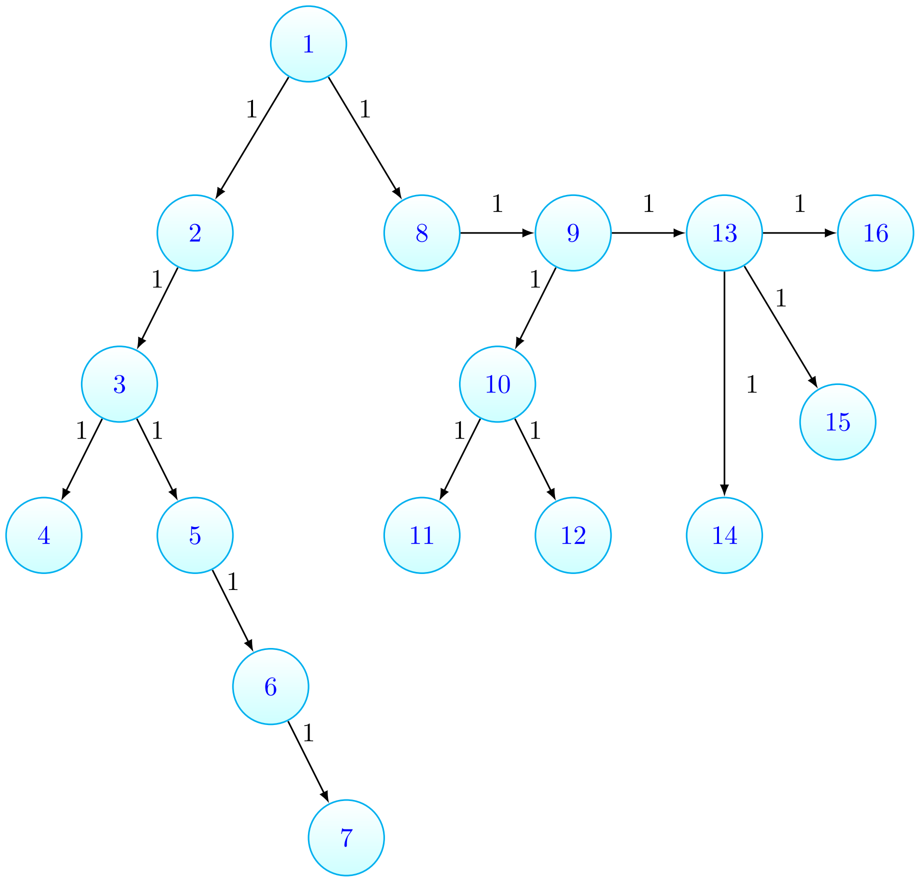

Figura 8

a) Se escribiran los elementos del sistema con sus respectivos subordinados directos. La notación $1, 2, 3, 4\{2, 5\}$, por ejemplo, significará que a los elementos 1, 2, 3 y 4 le corresponden los elementos 2 y 5 como subordinados directos:

1. $4, 7, 11, 12, 14, 15, 16\{\phi\}$.
2. $2\{3\}, 5\{6\}, 6\{7\}, 8\{9\}$.
3. $1\{2, 8\}, 3\{4, 5\}, 9\{10, 13\}, 10\{11, 12\}$.
4. $13\{14, 15, 16\}$.

b) El vértice 1 tiene como subordinados un total de 14 elementos, mientras que el vértice 9 tiene tiene un total de 7 subordinados.

c) Para responder a esta pregunta se le dio el valor de 1 a cada arco que se muestra en la Figura 8, luego se aplicó el algoritmo de Ford para encontrar el camino con mayor número de arcos, los resultados obtenidos se muestran en la siguiente figura:

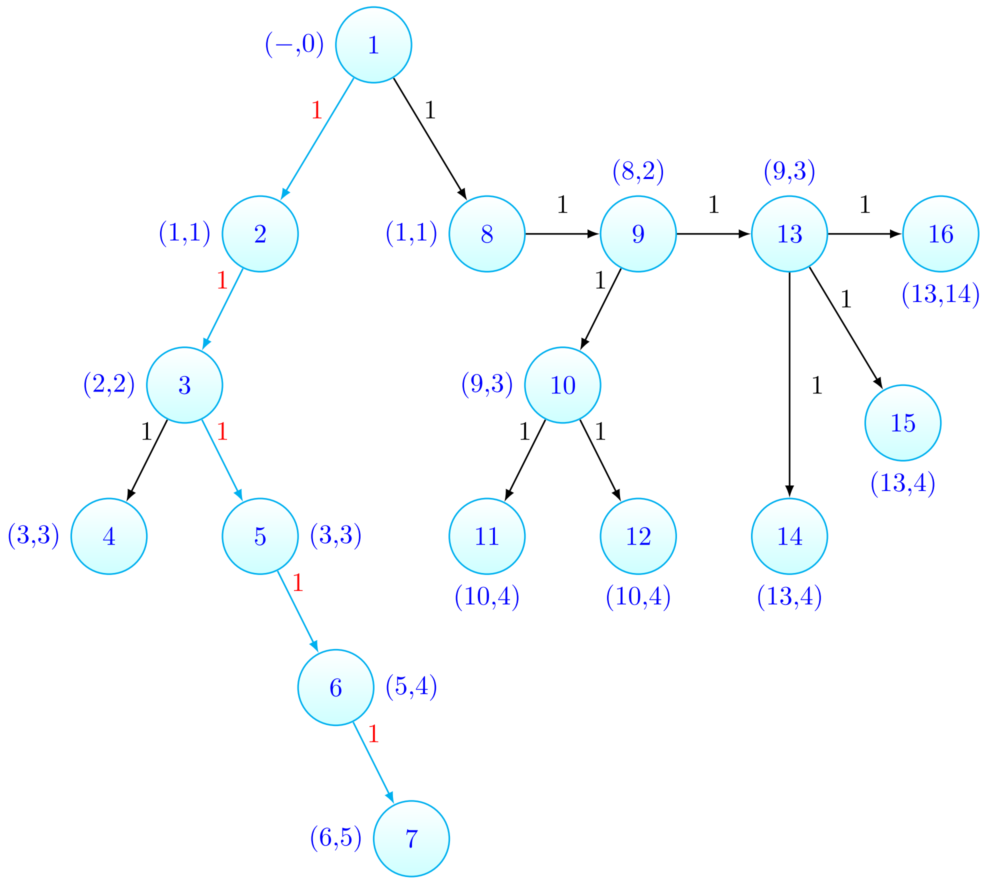

Figura 9: *En azul se representa el camino con mayor número de arcos.*

El camino con mayor número de arcos es:

$$U = \{(1,2),(2,3),(3,5),(5,6),(6,7)\}. \tag{14}$$

7. Problema

Dado el siguiente grafo considere que:

a) El valor sobre los arcos mide la distancia entre los vértices. Halle el camino de longitud mínima entre 1 y 6.

b) Si no se considera orientación, ¿variaría la longitud del grafo de menor longitud que une dichos vértices?.

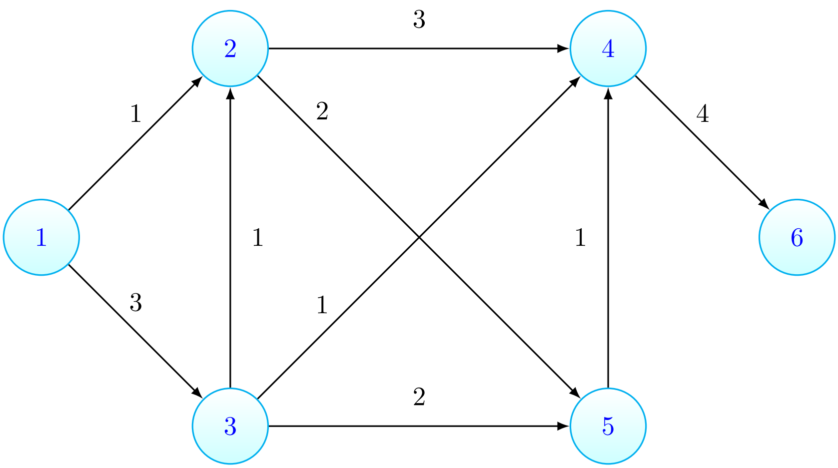

Figura 10

a) Aplicando el algoritmo de Ford:

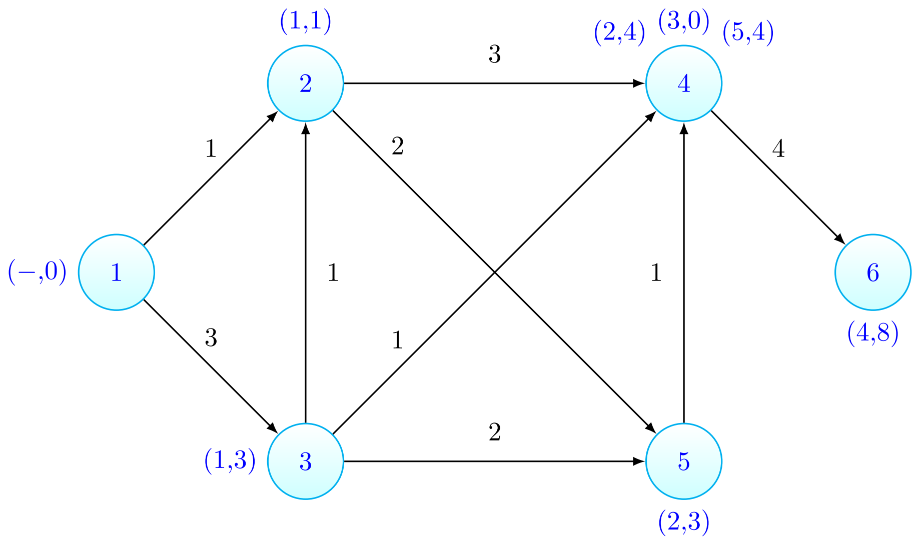

Figura 11: *hola muchbaibdfunl*

Observamos que en el nodo 4 hay más de una marca, ésto sugiere que hay un total de 3 caminos de longitud mínima, los cuales son:

$$U_1 = \{(1,2),(2,4),(4,6)\}, U_2 = \{(1,2),(2,5),(5,4),(4,6)\}, U_3 = \{(1,3),(3,4),(4,6)\}. \tag{15}$$

b) Si dibujamos el grafo sin orientación, entonces pordríamos pensar que es necesario aplicar el algoritmo de Kruskal para encontrar la cadena con mínima longitud, y así compararla con el resultado anterior. Al hacer ésto veremos que el algoritmo da cómo resultado un árbol donde podría haberse omitido una arista a la hora de darle sentido a la situación real. Ésta observacion conduce a pensar que todo depende de la situación real que se quiere resolver, por lo tanto, la longitud no varía.

8.

En cada una de las siguientes situaciones explique cómo construir el grafo asociado al problema a resolver, ésto es, qué tomar como vértices y bajo que ley construir los arcos.

a) Seis diferentes marcas de alimentos se prueban con un niño de la siguiente forma: cada día se le da a comer al niño dos alimentos diferentes y se toma nota de aquel con el que termina primero. Una vez analizados todos los pares posibles se desea construir un grafo que sirva para determinar el alimento preferido del niño.

b) Se desea asociar el mapa de una ciudad, un grafo que represente ”la vecindad” entre municipios.

   a) Tomaremos como vértices a los alimentos, es decir:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \tag{16}$$

además

$$U \subset V \times V. \tag{17}$$

El total de elementos del conjunto U está dado por la combinatoria de $\binom{6}{2}$ y se definiran a la hora de realizar una prueba con un niño en particular.

Ahora diremos que el grafo

$$G(U, V) \tag{18}$$

se construirá tomando en cuenta al par (a, b), donde a y b son alimentos. Dicha notación significa que el alimento b le gustó más que el alimento a, y se representará graficamente con un arco dirigido de a a b. Note que:

$$(a, b) \in U. \tag{19}$$

En la siguiente figura se muestra el grafo que se usará a la hora de que se lleve a cabo el experimento con los alimentos. Observe que no está orientado, pero la orientación se realizará a la hora de que se registre el alimento que el niño se termine primero.

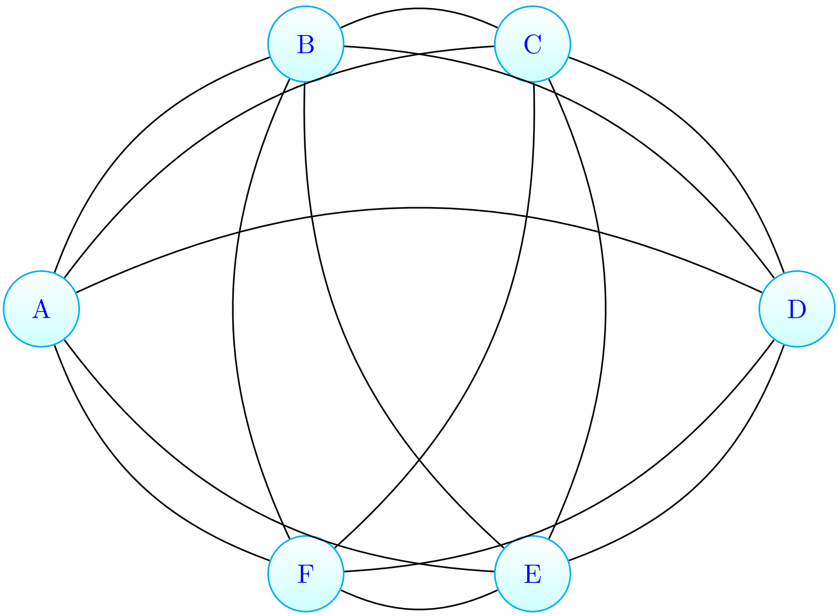

Figura 12

b) Supongamos que hay un total de n municipios en una ciudad. Para asociar un grafo a la vecindad entre municiopios, tenemos que definir quienes serán los vértices del grafo. Es conveniente definir a cada municipio como un vértice, entonces el conjunto de vértices estará dado como:

$$V = \{m1, m2, ..., m_n\}, \tag{20}$$

donde el elemento m_i significa el municipio número i.

Como sólo nos interesa saber qué municipios comparten vecindad, entones el grafo será no orientado y trazaremos aristas entre los vértices bajo la siguiente regla:

$$(i, j) \in U \subset V \times V, \tag{21}$$

sólo si i es vecino de j.

9. Problema

10.

Un agricultor dispone de un terreno de 5 hectáreasdividido en 4 partes iguales. Se pueden sembrar 4 productos A, B, C, D. Para evitar el empobrecimiento del terreno es necesario rotar cada año el cultivo en cada una de las 4 partes. Al comenzar se debe cultivar cada uno de los productos en una de las 4 partes.

Año n / Año $n-1$	A	B	C	D
A		5		6
B			7	
C	3			9
D	5	7	4	

Cuadro 1

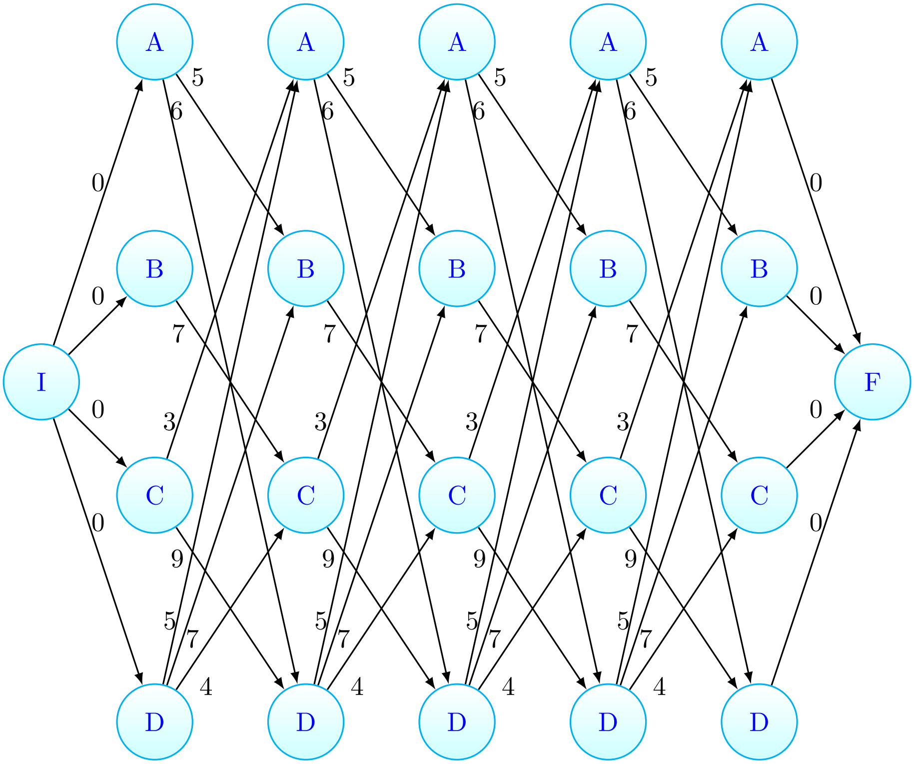

Figura 13

11. Problema

Construya los grafos asociados a un proyecto cuyas actividades y antecedentes se dan a continuación:

Actividades	Antecedentes
1 -2	–
1 -3	–
1 -4	–
1 -5	–
2 -4	1 -2
3 -4	1 -3
4 -5	2 -4, 1 -4, 3 -4
5 -6	4 -5, 1 -5
6 -7	6 -6

Cuadro 2

El grafo asociado es:

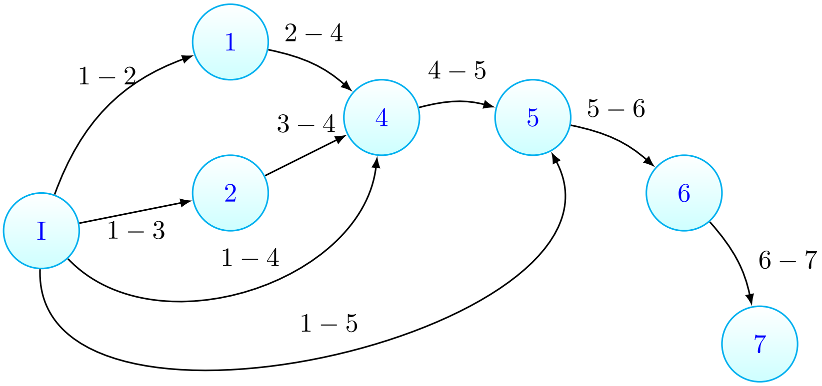

Figura 14

12. Problema que resolvimos en clase as

Un autor, Dpto. de Matemáticas, Universidad de ...
Correo electrónico: `autor@uni.es`
Página web: `http://www.uni.es/personales/autor.html`