ÁLGEBRA III

PRUEBA 2 2022/2023

1. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$.

a) Razonar que K es una extensión de Galois de $\mathbb{Q}$ y calcular el cardinal de su grupo de Galois.

Puesto que $i \in \mathbb{C}$ es una raíz cuarta primitiva de la unidad, sabemos que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ es cuerpo de descomposición del polinomio irreducible $f = x^4 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Esto nos dice que la extensión $\mathbb{Q} \leq K$ es de Galois.

Como $\mathbb{Q} \leq K$ es una extensión de Galois, entonces $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)| = [K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})][\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}]$. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Irr}(i, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})) \underset{\substack{\uparrow \\ i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})}}{=} x^2 + 1 \Rightarrow [K : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})] = 2 \\ \\ \mathrm{Irr}(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}) = x^4 - 5 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)| = 2 \cdot 4 = 8$$

b) Describir los elementos del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Comenzamos calculando las $\mathbb{Q}$-extensiones complejas de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$. Como $\mathrm{Irr}(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}) = x^4 - 5$, entonces habrá exactamente cuatro $\mathbb{Q}$-extensiones de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, η_1, η_2, η_3 y η_4, caracterizadas por sus correspondientes imágenes:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) \arrow[r, "\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4"] & \mathbb{C} \\
\mathbb{Q} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, bend right, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

	η_1	η_2	η_3	η_4
$\sqrt[4]{5} \longmapsto$	$\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$	$i\sqrt[4]{5}$	$-i\sqrt[4]{5}$

Calculemos ahora las η_i-extensiones de $K=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5},i)$. Como $\mathrm{Irr}(i,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}))=x^2+1$, habrá dos η_i-extensiones para cada $i=1,2,3,4$:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta_{i1},\eta_{i2}"] & \mathbb{C} \\
\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "\eta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Raíces del polinomio $(x^2+1)^{\eta_i}=x^2+1$: $\pm i$

	η_{i1}	η_{i2}
$i \longmapsto$	i	$-i$

, $i=1,2,3,4$.

En conclusión:

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)=\left\{\eta_{ij} \;\middle/\; \begin{matrix} 1\le i\le 4 \\ 1\le j\le 2\end{matrix}\right\}, \text{ donde:}$$

	η_{11}	η_{12}	η_{21}	η_{22}	η_{31}	η_{32}	η_{41}	η_{42}
$\sqrt[4]{5} \longmapsto$	$\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$	$i\sqrt[4]{5}$	$i\sqrt[4]{5}$	$-i\sqrt[4]{5}$	$-i\sqrt[4]{5}$
$i \longmapsto$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$

c) Calcular todos los subcuerpos de K que tienen grado 4 sobre $\mathbb{Q}$.

Vamos a determinar el retículo de subgrupos de $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$. Comenzamos calculando el orden de cada elemento de $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$:

∘) $\eta_{11} = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{11}) = 1}$

∘) $\left\{\begin{array}{l} \eta_{12}^2(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{12}^2(i) = i \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_{12}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{12}) = 2}$

$\underline{\langle \eta_{12} \rangle = \{Id, \eta_{12}\}}$

∘) $\left\{\begin{array}{l} \eta_{21}^2(\sqrt[4]{5}) = -\eta_{21}(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{21}^2(i) = i \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_{21}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{21}) = 2}$

$\underline{\langle \eta_{21} \rangle = \{Id, \eta_{21}\}}$

∘) $\left\{\begin{array}{l} \eta_{22}^2(\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{22}^2(i) = i \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_{22}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{22}) = 2}$

$\underline{\langle \eta_{22} \rangle = \{Id, \eta_{22}\}}$

∘) $\left\{\begin{array}{l} \eta_{31}^2(\sqrt[4]{5}) = \eta_{31}(i\sqrt[4]{5}) = \eta_{31}(i)\,\eta_{31}(\sqrt[4]{5}) = -\sqrt[4]{5} \\ \eta_{31}^2(i) = i \end{array}\right\} \Rightarrow \eta_{31}^2 = \eta_{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{31}^4 = \eta_{21}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{31}) = 4}$

$\underline{\langle \eta_{31} \rangle = \{Id, \eta_{31}, \underset{\eta_{21}}{\overset{\shortparallel}{\eta_{31}^2}}, \underset{\eta_{41}}{\overset{\shortparallel}{\eta_{31}^3}}\}}$

•) $\left.\begin{cases} \eta_{32}^2(\sqrt[4]{5}) = \eta_{32}(i)\,\eta_{32}(\sqrt[4]{5}) = -i\cdot i\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{32}^2(i) = i \end{cases}\right\} \Rightarrow \eta_{32}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{32}) = 2}$

$\underline{\langle \eta_{32} \rangle = \{Id, \eta_{32}\}}$

•) $\left.\begin{cases} \eta_{41}^2(\sqrt[4]{5}) = -\eta_{41}(i)\,\eta_{41}(\sqrt[4]{5}) = -i\cdot(-i\sqrt[4]{5}) = -\sqrt[4]{5} \\ \eta_{41}^2(i) = i \end{cases}\right\} \Rightarrow \eta_{41}^2 = \eta_{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{41}^4 = \eta_{21}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{41}) = 4}$

$$\underline{\langle \eta_{41} \rangle = \{Id, \eta_{41}, \underset{\eta_{21}}{\overset{\shortparallel}{\eta_{41}^2}}, \underset{\eta_{31}}{\overset{\shortparallel}{\eta_{41}^3}}\} = \langle \eta_{31} \rangle}$$

•) $\left.\begin{cases} \eta_{42}^2(\sqrt[4]{5}) = -\eta_{41}(i)\,\eta_{41}(\sqrt[4]{5}) = i\cdot(-i\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{42}^2(i) = i \end{cases}\right\} \Rightarrow \eta_{42}^2 = Id \Rightarrow \underline{ord(\eta_{42}) = 2}$

$\underline{\langle \eta_{42} \rangle = \{Id, \eta_{42}\}}$

De esta forma, vemos que $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$ contiene un subgrupo propio cíclico de orden 4 y cinco subgrupos propios cíclicos de orden 2, luego, $Aut_{\mathbb{Q}}(K) \cong D_4 = \langle r, s \,/\, r^4 = 1 = s^2,\ sr = r^3 s \rangle$.

Por tanto, nos faltan dos subgrupos propios de orden 4 que no son cíclicos. Estos son $\langle \eta_{31}^2, \eta_{22} \rangle = \underline{\langle \eta_{21}, \eta_{22} \rangle} = \{Id, \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{21}\eta_{22}\} = \underline{\{Id, \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{12}\}}$

y $\langle \eta_{22}\eta_{31}, \eta_{31}^2 \rangle = \underline{\langle \eta_{32}, \eta_{21} \rangle} = \{Id, \eta_{32}, \eta_{21}, \eta_{32}\eta_{21}\} = \underline{\{Id, \eta_{32}, \eta_{21}, \eta_{42}\}}$.

De esta forma, nos queda el siguiente retículo de subgrupos de $Aut_{\mathbb{Q}}(K)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) & & \\
 & \langle \eta_{21}, \eta_{22} \rangle \arrow[ur, "2"] & \langle \eta_{31} \rangle \arrow[u, "2"] & \langle \eta_{32}, \eta_{21} \rangle \arrow[ul, "2"'] & \\
\langle \eta_{12} \rangle \arrow[ur, "2"] & \langle \eta_{22} \rangle \arrow[u, "2"] & \langle \eta_{21} \rangle \arrow[ul, "2"] \arrow[u, "2"] \arrow[ur, "2"] & \langle \eta_{32} \rangle \arrow[u, "2"] & \langle \eta_{42} \rangle \arrow[ul, "2"'] \\
 & & \{Id\} \arrow[ull, "2"] \arrow[ul, "2"] \arrow[u, "2"] \arrow[ur, "2"] \arrow[urr, "2"'] & &
\end{tikzcd}$$

De acuerdo con la conexión de Galois, los subcuerpos de K de grado 4 sobre $\mathbb{Q}$ están en correspondencia biyectiva con los subgrupos de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ de índice 4 o, lo que es lo mismo, con los elementos de orden 2 de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$. De esta forma, los subcuerpos de K de grado 4 sobre $\mathbb{Q}$ son:

- $K^{\langle \eta_{12} \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$
- $K^{\langle \eta_{22} \rangle} = \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{5})$
- $K^{\langle \eta_{21} \rangle} = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$
- $K^{\langle \eta_{32} \rangle} = \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{5}(1+i)\right)$
- $K^{\langle \eta_{42} \rangle} = \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{5}(1-i)\right)$

d) Calcular todos los subcuerpos de K.

Solo nos faltan los subcuerpos de K de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$. De nuevo, de acuerdo a la conexión de Galois, dichos subcuerpos están en correspondencia biyectiva con los subgrupos de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ de índice 2 o, lo que es lo mismo, con los elementos de orden 4 de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$. De esta forma, los subcuerpos de K de grado 2 sobre $\mathbb{Q}$ son:

- $K^{\langle \eta_{21}, \eta_{22} \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
- $K^{\langle \eta_{31} \rangle} = \mathbb{Q}(i)$
- $K^{\langle \eta_{32}, \eta_{21} \rangle} = \mathbb{Q}(i\sqrt{5})$

De esta forma, el retículo de subcuerpos de K es: