Algebra II (Curso 2024-2025)

Doble Grado Matemáticas - Informática

Relación 1

Teoría de Grafos

Ejercicio 1. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa circular. Cada persona estrecha la mano a todos los demás excepto a la persona sentada directamente enfrente de la mesa. Dibuja un grafo que modele la situación.

Ejercicio 2. Seis hermanos (Alonso, Bernardo, Carlos, Daniel, Enrique y Fernando) tiene que emparejarse para compartir habitación en el próximo curso escolar. Cada uno de ellos ha elaborado una lista con los nombres de aquellos con los que quiere emparejarse:

Lista de Alonso: Daniel.

Lista de Bernardo: Alonso, Enrique.

Lista de Carlos: Daniel, Enrique.

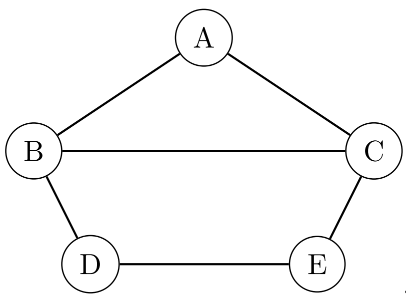
Lista de Daniel: Carlos.

Lista de Enrique: Daniel, Bernardo, Fernando.

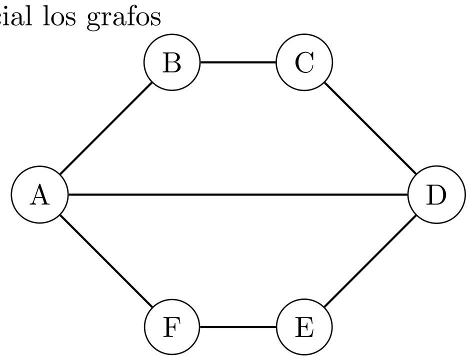
Lista de Fernando: Alonso, Bernardo.

Dibuja el grafo dirigido que modela esta situación.

Ejercicio 3. Expresa en forma matricial los grafos



,



Ejercicio 4. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismo.

Ejercicio 5. ¿Son isomorfos los grafos de la figura 1? ¿Y los de la figura 2? ¿Y los de la 3?.

Figura 1

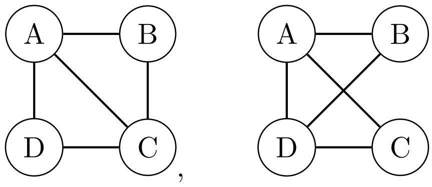


Figura 2:

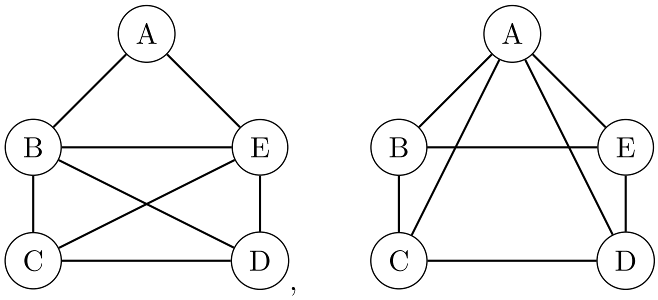
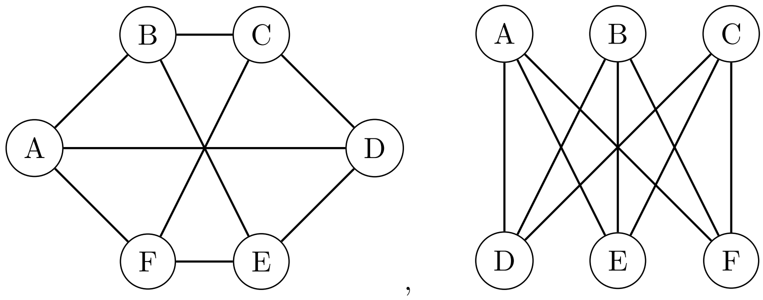


Figura 3:



Ejercicio 6. Demostrar que, en cualquier grafo, el número de vértices de grado impar es par (Así, en un grupo de personas, el número total de personas que estrechan la mano de un número impar de otras personas es siempre par)

Ejercicio 7. Demostrar que si cada vértice de un grafo G es de grado 2, cada componente conexa de G es un ciclo

Ejercicio 8. Los siguientes hechos se conocen de las personas A,B,C,D,E,F,G. A habla inglés; B habla inglés y español; C habla inglés italiano y ruso; D habla japonés y español; E habla alemán e italiano; F habla francés, japonés y ruso; G habla francés y alemán. Demostrar que cada par de personas entre estas siete puede comunicarse (con la ayuda de intérpretes, si es necesario, tomados de los cinco restantes)

Ejercicio 9. Demuestra que en todo grafo con mas de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 10. Prueba que si un grafo G contiene solo dos vértices de grado impar entonces ambos han de encontrarse en la misma componente conexa.

Ejercicio 11. ¿Existe algún grafo regular de grado 5 con 25 vértices?

Ejercicio 12. ¿Existe un grafo completo con 595 lados?

Ejercicio 13. ¿Existe un grafo con 6 vértices cuyos grados sean 1,2,2,3,4 y 4 respectivamente?

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos, dibuja un grafo de Euler que verifique las condiciones, o prueba que tal grafo no existe:

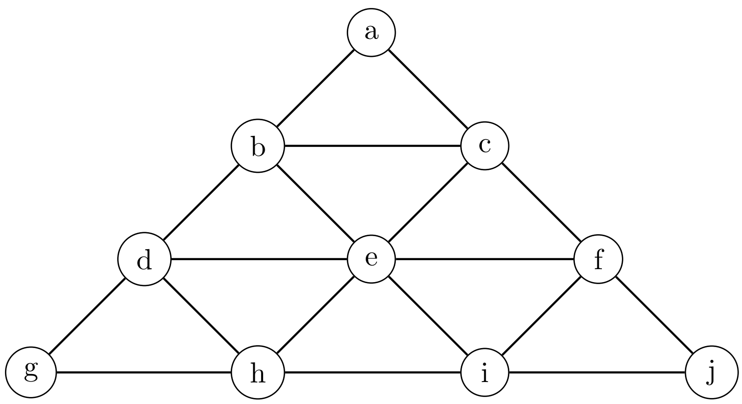
(a) Con un número par de vértices y un número par de lados.

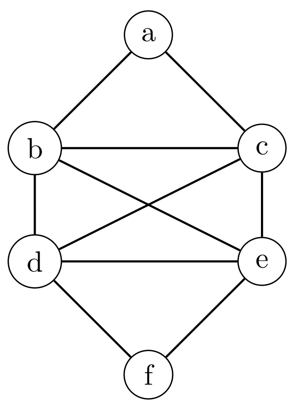
(b) Con un número par de vértices y un número impar de lados.

(c) Con un número impar de vértices y un número par de lados.

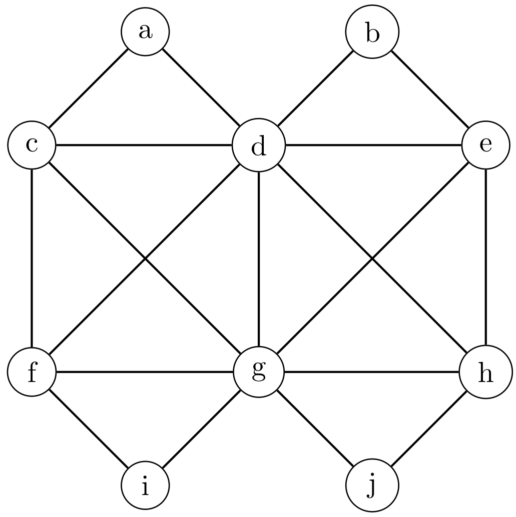
(d) Con un número impar de vértices y un número impar de lados.

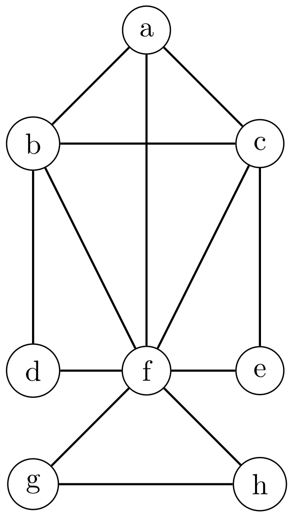
Ejercicio 15. Encuentra un circuito de Euler para los grafos



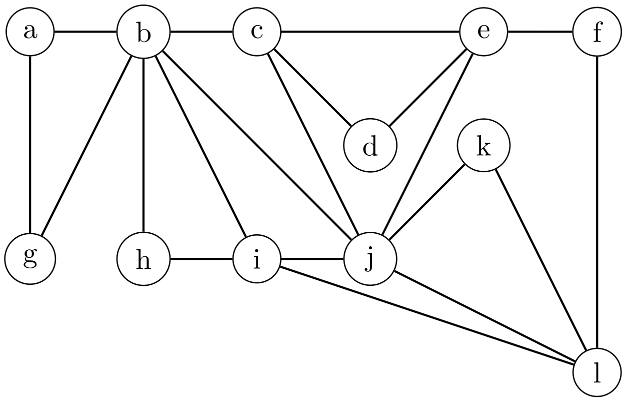


Ejercicio 16. Encuentra un camino de Euler para los grafos

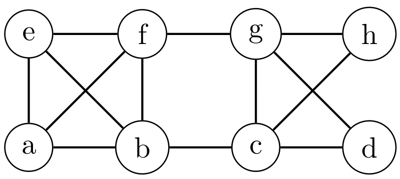




Ejercicio 17. Encontrar un circuito de Euler en el grafo



y un camino de Euler en el grafo



Ejercicio 18. ¿Para qué valores de n el grafo $\mathcal{K}_n$ es un circuito de Euler?

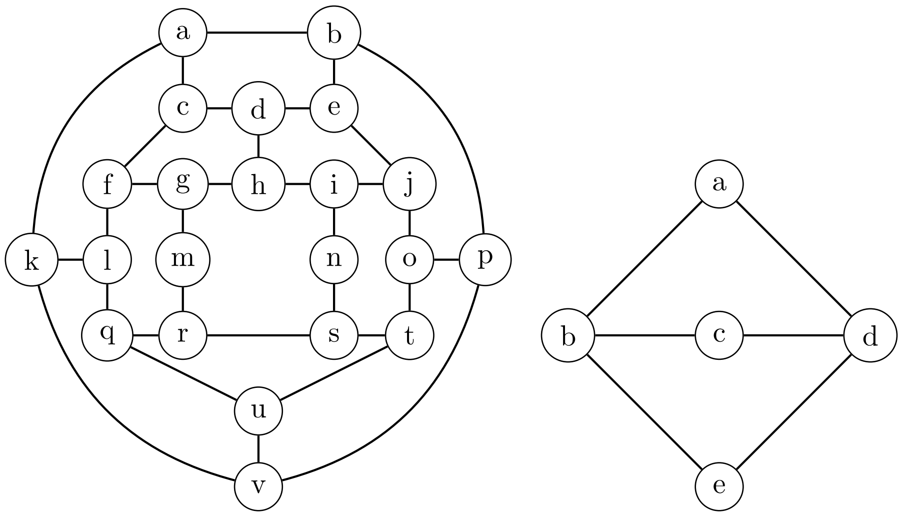
Ejercicio 19. Un viajante vive en la ciudad A y se supone que visita las ciudades B, C y D antes de volver a A. Encontrar la ruta mas corta que consuma este viaje si las distancias entre las cuatro ciudades son, en Km., 120 entre A y B, 70 entre B y C, 140 entre A y C, 180 entre A y D, 100 entre B y D y 110 entre C y D.

Ejercicio 20. El *grafo línea* $L(G)$ de un un grafo G se define como sigue: Los vértices de $L(G)$ son los lados de G, $V(L(G)) = E(G)$; y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y sólamente si los lados correspondientes en G comparten un vértice. Demostrar:

(a) Si G es un grafo conexo regular de grado r, entonces $L(G)$ es un grafo de Euler.

(b) Si G es un grafo de Euler entonces $L(G)$ es Hamiltoniano.

Ejercicio 21. ¿Cuáles de los siguientes grafos contienen un circuito de Hamilton?



Ejercicio 22. 1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión $4 \geq 4 \geq 4 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 2 \geq 1$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo que la tenga a ella como sucesión de grados.

2. El grafo con matriz de adyacencia

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es de Euler o en él hay un camino de Euler entre dos vértices. Razona cual es la situación y encuentra, en su caso, el circuito o el camino de Euler que existe.

Ejercicio 23. 1. En el grafo G cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determina el número de aristas y la sucesión de grados de los vértices y, caso de que G sea de Euler, describe un circuito de Euler en él usando el algoritmo apropiado.

2. Calcula el número de vértices de un grafo plano, conexo y regular de grado 5 con 20 caras.

Ejercicio 24. 1. La siguiente matriz es la matriz de incidencia o adyacencia de un grafo. Razona que caso es y dibuja el correspondiente grafo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Es el grafo anterior de Euler o Hamilton? Razona la respuesta y da un circuito de Euler o Hamilton en caso de que los haya.

2. Aplica el algoritmo para comprobar si la siguiente sucesión

$$6 \geq 4 \geq 4 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3 \geq 3$$

es, o no es, una sucesión gráfica y, en caso de serlo, también aplica el algoritmo para encontrar un grafo que la tenga como sucesión de grados.

Ejercicio 25. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. El grafo completo K_n

   a) Es siempre de Euler,

   b) Es siempre de Hamilton

   c) Dependiendo de n puede ser, o no, de Hamilton o de Euler.

2. He encontrado un grafo plano y conexo con 200 vértices y:

   a) Un número par de caras y un número impar de lados.

   b) Un número par de lados y un número impar de caras.

   c) Un número par de lados y caras.

3. Tengo un grafo con un solo vértice de grado impar v:

   a) Puedo encontrar un camino que empiece en ese vértice v, recorra todos los lados del grafo sólo una vez y vuelva a él.

   b) Si añado un lado que conecte ese vértice con otro cualquiera del grafo, pongamos w, puedo encontrar un camino que empiece en v, recorra todos los lados del grafo (incluido el que he añadido) sólo una vez y termine en w.

   c) Es imposible tener un grafo como ese.

4. En un grafo plano con cinco componentes conexas y 24 lados:

   a) El número de vértices y el número de caras son opuestos módulo 30.

   b) El número de vértices y el número de caras son congruentes módulo 30.

   c) Ninguna de las anteriores es cierta.

5. Dado un grafo regular de grado 1, entonces:

   a) El grafo no puede ser conexo.

   b) El grafo tiene tantas componentes conexas como vértices.

   c) El grafo tiene tantas componentes conexas como lados.

6. Un grafo regular conexo de grado 11 con veinte vértices:

   a) Es siempre de Euler.

   b) Es siempre de Hamilton.

   c) Ninguna de las dos respuestas anteriores es cierta.

7. a) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.
   b) Todos los grafos con cuatro vértices y cuatro lados son isomorfos.
   c) Sólo hay tres grafos con cuatro vértices y cuatro lados no isomorfos.

8. Un grafo cuya matriz de adyacencia es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Es de Euler.
   b) No es de Euler pero hay un camino de Euler entre dos vértices.
   c) No es de Euler pero sus componentes conexas si lo son.

9. Un grafo cuya matriz de incidencia es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Es de Hamilton.
   b) No es de Hamilton pero sus componente conexas si lo son.
   c) No es de Hamilton y tampoco lo son sus componentes conexas.

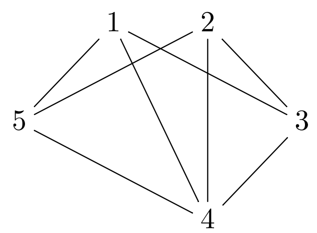
10. La siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Puede ser la matriz de adyacencia de un grafo pero no la de incidencia.
   b) Puede ser la matriz de incidencia de un grafo pero no la de adyacencia.
   c) No puede ser ni la matriz de incidencia de un grafo ni la de adyacencia.

Ejercicio 26. 1. Prueba, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión $3 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2 \geq 2$ es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Prueba que el grafo es plano y que satisface el teorema de la característica de Euler.

2. Considera los grafos, G_1 dado por el diagrama



y G_2 con matriz de incidencia

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Estudia si son o no isomorfos, si son o no planos, si son o no de Euler o si hay un camino de Euler (en caso afirmativo aplica el algoritmo para calcular un circuito o un camino de Euler) y si son o no de Hamilton (encontrando el camino en caso afirmativo).

Ejercicio 27. 1. Si G es un grafo completo con 6 vértices entonces:

a) G es regular de grado 5.
b) G tiene 20 aristas.
c) G es de Euler y de Hamilton.

2. Sea G' un subgrafo completo (pleno) de un grafo G. Entonces:

a) Si G es de Euler también G' es de Euler.
b) Si G es de Hamilton también G' es de Hamilton.
c) Ninguna de las anteriores.

3. *a*) Sólo hay dos grafos con cuatro vértices y 5 lados no isomorfos.
b) Todos los grafos con cuatro vértices y 5 lados son isomorfos.
c) Todos los grafos con cuatro vértices y cinco lados son de Euler.

4. Sea G un grafo plano conexo regular de grado 6 con 15 caras. Entonces:

a) G tiene 13 vértices.
b) El número de vértices es el triple del de aristas.
c) No existe un tal grafo.

5. Salvo isomorfismos, grafos con 50 vértices y 1225 aristas:
   a) Sólo hay 1.
   b) Hay 2.
   c) No existen grafos en esas condiciones.

Ejercicio 28. 1. Considera la sucesión 4,4,4,4,4.
   a) Utiliza el algoritmo dado en clase para probar que la sucesión es una sucesión gráfica y para dibujar un grafo G que la tenga como sucesión gráfica.
   b) Calcula las matrices incidencia y adyacencia del grafo G obtenido en el apartado anterior.
   c) ¿Es G de Euler o tiene un camino de Euler? En caso afirmativo, utiliza el algoritmo dado en clase para calcular el circuito o el camino de Euler.
   d) ¿Es G de Hamilton? En caso afirmativo calcula el circuito de Hamilton.
   e) ¿Es G plano? En caso afirmativo comprueba la fórmula de la característica de Euler.

2. Demuestra que si G es un grafo de Euler con n vértices que solo tiene 2 vértices de grado 2 entonces el número de aristas es $\geq 2n - 2$.

Ejercicio 29. 1. Considera el subconjunto $X = \{(12), (13), (23)\} \subset S_3$ y el siguiente grafo G: Los vértices de G son los elementos de S_3 y hay un lado entre dos vértices x e y si $xy^{-1} \in X$.
   a) Dibuja el grafo.
   b) Calcula sus matrices de incidencia y adyacencia.
   c) ¿Es de Euler o tiene un camino de Euler? En caso afirmativo aplica el algoritmo dado en clase para calcular un ciclo o un camino de Euler.
   d) ¿Es de Hamilton? En caso afirmativo calcula el ciclo de Hamilton.
   e) ¿Es plano? En caso afirmativo comprueba la fórmula de Euler.

2. Si G es un grafo con n vértices y m lados. Prueba que $m \leq \frac{(n(n-1))}{2}$ y que se da la igualdad si y solo si $G = K_n$ es el grafo completo.

Ejercicio 30. Demuestra, utilizando el algoritmo explicado en clase, que la sucesión de grados de los vértices de un octaedro (poliedro regular con 6 vertices, 8 caras y 12 aristas) es gráfica y, utilizando dicho algoritmo, encuentra un grafo G en que los grados de sus vértices sean los términos de esa sucesión. Encuentra las matrices de adyacencia e incidencia de G.

Comprueba que el grafo G es plano y estudia si es de Euler y, en caso afirmativo, determina por algún algoritmo explicado en clase un circuito de Euler para G. ¿Es G un grafo de Hamilton? Razona la respuesta.

Ejercicio 31. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones (todos los grafos a los que se hace referencia son simples, no tienen lazos ni lados paralelos):

1. La sucesión $70, 69, 68, \ldots, 3, 2, 1$.
   - *a*) Es una sucesión gráfica y su grafo asociado es el completo K_{70}.
   - *b*) Es una sucesión gráfica pero su grafo asociado no es K_{70}.
   - *c*) No es una sucesión gráfica.
2. Tengo un grafo conexo con 6 vértices y 9 lados:
   - *a*) Puedo asegurar que es plano.
   - *b*) Puedo asegurar que no es plano.
   - *c*) Puede ser plano o no serlo.
3. La sucesión $4, 4, 4, 4$:
   - *a*) No es una sucesión gráfica pero si le añadimos al final un 2 si lo es.
   - *b*) No es una sucesión gráfica pero si le añadimos al final un 3 si lo es.
   - *c*) No es una sucesión gráfica pero si le añadimos al final un 4 si lo es.
4. Puedo encontrar un grafo plano conexo con:
   - *a*) Un número impar de vértices, un número impar de lados y un número impar de caras.
   - *b*) Un número par de vértices, un número par de lados y un número impar de caras.
   - *c*) Un número impar de vértices, un número par de lados y un número impar de caras.
5. La sucesión $4, 2, 2, 2, 2$:
   - *a*) Es la sucesión de grados de un grafo de Euler y de Hamilton.
   - *b*) Es la sucesión de grados de un grafo de Hamilton y no de Euler.
   - *c*) Es la sucesión de grados de un grafo de Euler y no de Hamilton.

6. Un grafo regular de grado 7:

   a) Tiene que tener al menos 8 vértices y un número impar de lados.

   b) Tiene que tener al menos 8 vértices pero puede tener un número impar o par de lados.

   c) Lo único que puedo afirmar sobre él es que tiene un número par de vértices.

Ejercicio 32. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H =< (1\,2\,3) >$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/_H \sim$ de clases laterales por la izquierda xH.

2. Para cada clase xH denotamos $m(xH)$ al máximo común divisor de los ordenes de los elementos en xH. Considera el grafo G con vértices las clases xH y en el que hay un lado entre xH e yH si $m(xH)$ divide a $m(yH)$ o $m(yH)$ divide a $m(xH)$. Identifica el grafo G dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es G de Euler, de Hamilton o plano?

3. Considera el subgrafo G' obtenido a partir de G eliminando la clase $1H$, ¿es G' de Euler? En caso afirmativo aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 33. Se considera el grupo $Q_2 =< x, y \,|\, x^4 = 1, x^2 = y^2, yx = x^{-1}y >$ y el grafo G cuyos vértices son los elementos de Q_2 y en el que, para cualquier $a \in Q_2$, hay un lado entre a y ax y también un lado entre a y ay.

1. Comprueba que G es un grafo regular dando la sucesión de grados de sus vértices y calcula su matriz de adyacencia.

2. Razona si G es un grafo de Hamilton o plano.

3. Razona si G es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 34. Se considera el grupo $D_4 =< r, s \,|\, r^4 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s >$ y el grafo $\mathbb{G}$ cuyos vértices son los elementos de D_4 y en el que, para cualquier $a \in D_4$, hay un lado entre a y ar y también un lado entre a y as.

1. Calcula la sucesión de grados de $\mathbb{G}$ y calcula su matriz de adyacencia.

2. Razona si $\mathbb{G}$ es un grafo de Euler, de Hamilton o plano.

3. Considera un nuevo grafo $\mathbb{G}'$ obtenido añadiendo a $\mathbb{G}$ un nuevo vértice adyacente a todos los de $\mathbb{G}$. Razona si $\mathbb{G}'$ es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 35. Se considera el grupo diédrico $D_5 =< r, s \,|\, r^5 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s >$ y el grafo $\mathbb{G}$ cuyos vértices son los elementos de D_5 y en el que, para cualquier $a \in D_5$, hay un lado entre a y ar y también un lado entre a y as.

1. Calcula la sucesión de grados de $\mathbb{G}$ y razona si $\mathbb{G}$ es un grafo de Euler, de Hamilton o plano.

2. Considera un nuevo grafo $\mathbb{G}'$ obtenido añadiendo a $\mathbb{G}$ un nuevo vértice adyacente a todos los de $\mathbb{G}$. Razona si $\mathbb{G}'$ es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 36. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones. Todos los grafos a los que se hace referencia son simples (es decir, no tienen lazos ni lados paralelos).

1. La matriz
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
es la de adyacencia de un grafo que:
    - *a*) Es de Euler.
    - *b*) No es de Hamilton.
    - *c*) Es plano.

2. Un grafo plano conexo regular de grado 8 con 23 caras:
    - *a*) No existe.
    - *b*) Tiene 12 aristas.
    - *c*) Tiene 9 vértices.

3. Se tiene que:
    - *a*) Un grafo que es de Euler y de Hamilton siempre es plano.
    - *b*) Un grafo que es plano y de Euler siempre es de Hamilton.
    - *c*) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

4. Se tiene que:

   a) La sucesión 5 5 4 2 2 2 es la sucesión gráfica de un grafo plano.

   b) La sucesión 5 5 4 4 4 4 es la sucesión gráfica de un grafo de Hamilton.

   c) La sucesión 5 4 4 3 3 3 es la sucesión gráfica de un grafo de Euler.

Ejercicio 37. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H =< (1\,2\,3) >$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/\sim_H$ de clases laterales por la derecha $Hx\,,\, x \in S_4$.

2. Para cada clase Hx denotamos $n(Hx)$ al mínimo común múltiplo de los ordenes de los elementos en Hx. Considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases Hx y en el que hay un lado entre Hx y Hy si $n(Hx)$ divide a $n(Hy)$ o $n(Hy)$ divide a $n(Hx)$. Identifica el grafo $\mathbb{G}$ dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es $\mathbb{G}$ de Euler, de Hamilton o plano?

3. Considera, si es posible, un subgrafo $\mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}$ obtenido al suprimir una arista entre dos vértices de $\mathbb{G}$ de grado impar. ¿Es $\mathbb{G}'$ de Euler? ¿Hay un camino de Euler entre dos vértices de $\mathbb{G}'$? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en $\mathbb{G}'$.

Ejercicio 38. Se considera el grupo A_4 y su subgrupo $H =< (1\,2)(3\,4) >$. Se considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases laterales por la izquierda de H en A_4, xH, y en el que hay un lado entre xH e yH si $m(xH)$ divide a $m(yH)$ o $m(yH)$ divide a $m(xH)$, donde $m(Hx)$ denota el máximo común divisor de los ordenes de los elementos en xH. Razona cual de las siguientes es la respuesta correcta:

1. $\mathbb{G}$ es plano pero no es de Hamilton.

2. $\mathbb{G}$ no es plano y tiene dos vértices conectados por un camino de Euler.

3. $\mathbb{G}$ es de Hamilton pero no es de Euler.

Ejercicio 39. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H =< (1\,2\,3\,4) >$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/_H\sim$ de clases laterales por la izquierda xH. ¿Es $H \lhd S_4$?

2. Para cada clase xH denotamos $m(xH)$ al máximo común divisor de los ordenes de los elementos en xH. Considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases xH y en el que hay un lado entre dos clases xH e yH si $m(xH) = m(yH)$. Identifica el grafo $\mathbb{G}$ dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es $\mathbb{G}$ de Euler, de Hamilton o plano?

3. Considera el subgrafo $\mathbb{G}'$ obtenido a partir de $\mathbb{G}$ eliminando la clase $(1\,3)H$, ¿es $\mathbb{G}'$ de Euler? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler en $\mathbb{G}'$.

Ejercicio 40. Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones. Todos los grafos a los que se hace referencia son simples (es decir, no tienen lazos ni lados paralelos).

1. Se tiene que:

   a) Hay un grafo conexo regular de grado 6 con 22 caras y 24 aristas.

   b) La sucesión 4 4 4 3 3 es la sucesión gráfica de un grafo plano que tiene un camino de Euler entre dos vértices.

   c) Un grafo conexo y plano es de Euler si y solo si es de Hamilton.

2. La matriz
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   es la de adyacencia de un grafo:

   a) Con 11 aristas y que es de Euler y de Hamilton.

   b) Que es conexo y plano pero no de Hamilton.

   c) Que no es de Hamilton ni plano ni de Euler.

Ejercicio 41. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H =< (1\,3\,4) >$.

1. Construye el conjunto cociente $S_4/\sim_H$ de clases laterales por la derecha Hx , $x \in S_4$.

2. Para cada clase Hx denotamos $n(Hx)$ al mínimo común múltiplo de los ordenes de los elementos en Hx. Considera el grafo $\mathbb{G}$ con vértices las clases Hx y en el que hay un lado entre Hx y Hy si $n(Hx)$ divide a $n(Hy)$ o $n(Hy)$ divide a $n(Hx)$. Identifica el grafo $\mathbb{G}$ dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia.

3. ¿Hay alguna condición suficiente que asegure que $\mathbb{G}$ es de Hamilton? ¿Y necesaria para ser plano? ¿Es $\mathbb{G}$ de Euler, de Hamilton o plano?

4. Considera el subgrafo $\mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}$ obtenido al suprimir la arista entre las clases $H(2\,3)$ y $H(2\,4)$. ¿Es $\mathbb{G}'$ de Hamilton, plano o de Euler? ¿Hay un camino de Euler entre dos vértices de $\mathbb{G}'$? En caso afirmativo aplica algún algoritmo dado en clase para calcular un circuito o camino de Euler en $\mathbb{G}'$.