Producto directo de una familia de grupos

En esta sección generalizamos los resultados anteriores para mas de dos grupos. Las demostraciones no las escribo.

Sea $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de grupos y sea $G = \prod_\lambda G_\lambda$ su producto cartesiano. Definimos una operación interna en G por componentes: $\forall g, h \in G, (gh)_\lambda = g_\lambda h_\lambda$.

Lema . *G con la operación recién definida tiene estructura de grupo.*

Definición . $G = \prod_\lambda G_\lambda$ con la estructura que acabamos de definir se llama *producto directo* de la familia de grupos G_λ.

Si $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ es finito, escribimos $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. Si todos los productos G_λ son el mismo grupo H, escribimos $G = H^\Lambda$ ($G = H^n$ si es finito) y lo llamamos *potencia directa* de H.

Para todo $\lambda \in \Lambda$ existen dos aplicaciones:

$$\begin{array}{ll} p_\lambda : G \to G_\lambda, & p_\lambda(g) = g_\lambda \\ i_\lambda : G_\lambda \to G, & i_\lambda x = g \end{array}$$

donde $g_\mu = x$ si $\mu = \lambda$, $g_\mu = 1$ en otro caso.

Estas aplicaciones son las *proyecciones* y las *inyecciones* respectivamente.

Lema . *1. $\forall \lambda \in \Lambda$, p_λ y i_λ son homomorfismos de grupos.*

2. $\forall \lambda \in \Lambda$, $p_\lambda i_\lambda = 1_{G_\lambda}$. Para $\lambda \neq \mu$, $p_\lambda i_\mu$ es trivial.

3. $\forall \lambda \in \Lambda$, p_λ es sobre y i_λ es inyectiva.

4. $G'_\lambda = Im(i_\lambda) \cong G_\lambda$ es normal en G.

Teorema . Propiedad universal del producto directo. *Sea $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de grupos y sea $G = \prod_\lambda G_\lambda$ su producto directo, con proyecciones $p_\lambda : G \to G_\lambda$. Para cualquier familia de homomorfismos de grupos (con el mismo conjunto de índices) $\{f_\lambda : H \to G_\lambda\}$ existe un único homomorfismo $f : H \to G$ tal que $\forall \lambda, f_\lambda = p_\lambda f$. Además, cualquier otro grupo que verifique esta propiedad es isomorfo a G.*

El teorema dice que existe un único f que hace conmutativos todos los diagramas:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "f_\lambda"] & \\ G \arrow[r, "p_\lambda"'] & G_\lambda \end{tikzcd}$$

Teorema . *Sea $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de grupos, y para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $H_\lambda < G_\lambda$. Entonces $\prod_\lambda H_\lambda < \prod_\lambda G_\lambda$.*

Teorema . *Sea $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de grupos. Existe un monomorfismo $\prod_\lambda Aut(G_\lambda) \to Aut(\prod_\lambda G_\lambda)$.*

Producto directo de una familia finita de grupos

En esta sección citamos algunas propiedades específicas para productos de un número finito de grupos. Empezamos con una ley asociativa:

Teorema

1. *Sean G_1, G_2, G_3 tres grupos arbitrarios. Entonces*

$$(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times G_2 \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3)$$

2. *Sean $G_1, \ldots, G_n$ grupos. Para todo $k = 1, \ldots, n-1$ se verifica:*

$$(\prod_1^k G_\lambda) \times (\prod_{k+1}^n G_\lambda) \cong \prod_1^n G_\lambda$$

Veamos ahora cual es la relación entre órdenes de grupos y el orden de su producto:

Teorema *Sean $G_1, \ldots, G_n$ grupos cualesquiera y sea $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.*

1. *$|G| = |G_1| \cdots |G_n|$. En particular, G es finito si y sólo si todos los G_λ son finitos.*
2. *$\forall (g_1, \ldots, g_n) \in G$, $o((g_1, \ldots, g_n)) = m.c.m.(o(g_1), \ldots, o(g_n))$*

Sea G un grupo y $G_1, \ldots, G_n$ subgrupos suyos. Siempre podemos definir una aplicación

$$\phi : G_1 \times \ldots \times G_n \to G$$

así: $\phi(g_1, \ldots, g_n) = g_1 \cdots g_n$ (el producto en G). En general, ϕ no es homomorfismo ni sobre ni inyectiva. Pero como en el caso $n = 2$, tenemos:

Teorema *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La aplicación ϕ es un isomorfismo*
2. *Para $\lambda = 1, \ldots, n$, $G_\lambda \trianglelefteq G$, $G_1 \cdots G_n = G$ y $(G_1 \cdots G_{i-1}) \cap G_i = 1$ para $i = 2, \ldots, n$.*
3. *Para $\lambda \neq \mu$ $g_\lambda \in G_\lambda$ y $g_\mu \in G_\mu$, $g_\lambda g_\mu = g_\mu g_\lambda$; $G = G_1 \vee \cdots \vee G_n$ y $(G_1 \cdots G_{i-1}) \cap G_i = 1$ para $i = 2, \ldots, n$.*

4. *Para* $\lambda \neq \mu$ $g_\lambda \in G_\lambda$ *y* $g_\mu \in G_\mu$, $g_\lambda g_\mu = g_\mu g_\lambda$; *todo elemento* $g \in G$ *se expresa de manera única como* $g = g_1 \cdots g_n$ *donde* $g_\lambda \in G_\lambda$

Teorema *Sea* $G_1, \ldots, G_n$ *una familia finita de grupos finitos tales que sus órdenes son primos relativos dos a dos. Sea* $G = \prod_1^n G_\lambda$. *Entonces:*

1. $\forall L < G$ $\exists_1 H_\lambda < G_\lambda$ *tales que* $L = H_1 \times \cdots \times H_n$.

2. $Aut(G_1) \times \cdots \times Aut(G_n) \cong Aut(G)$.