Algebra II (Curso 2024-2025)

Doble Grado Matemáticas - Informática

Relación 5

Grupos resolubles

Ejercicio 1. Sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de composición entonces G tiene una serie de composición.

Ejercicio 2. Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si y sólo si G es finito.

Ejercicio 3. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Ejercicio 4. Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $l(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de G entonces $l(G) = l(H) + l(G/H)$.

Ejercicio 5. Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de factores de composición de los siguientes grupos:
a) El grupo diédrico D_4; b) El grupo alternado A_4;
c) El grupo simétrico S_4; d) El grupo diédrico D_5;
e) El grupo de cuaternios Q_2; f) El grupo cíclico C_{24};
g) El grupo simétrico S_5.

Ejercicio 6. Sea G un grupo finito, y

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{r-1} \triangleright G_r = \{1\}$$

una serie normal de G. Demostrar que

$$l(G) = \sum_{i=0}^{r-1} l\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right), \qquad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right).$$

Ejercicio 7. Si $G_1, G_2 \ldots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que

$$l(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \sum_{i=1}^{r} l(G_i), \quad fact(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i).$$

Ejercicio 8. Sea G un grupo cíclico de orden p^n con p primo. Demostrar que $l(G) = n$ y que $fact(G) = (\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p, \overset{(n)}{\ldots}, \mathbb{Z}_p)$

Ejercicio 9. Sea G un grupo cíclico de orden n. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_r}).$$

Aplica el resultado cuando $n = 12$ y compara su longitud y factores de composición con los del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

Ejercicio 10. Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(D_n) = e_1 + \cdots + e_r + 1,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_r}, \mathbb{Z}_2).$$

Ejercicio 11. Demostrar que D_4, D_5, S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

Ejercicio 12. Sean H y K subgrupos normales de un grupo G tales que G/H y G/K son ambos resolubles. Demostrar que $G/(H \cap K)$ también es resoluble.

Ejercicio 13. Sea G un grupo resoluble y sea H un subgrupo normal no trivial de G. Demostrar que existe un subgrupo no trivial A de H que es abeliano y normal en G.

Ejercicio 14. Demuestra que todo p-grupo finito es resoluble.

Ejercicio 15. Demuestra que todo grupo de orden pq, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Ejercicio 16. Demuestra que todo grupo de orden p^2q, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Ejercicio 17. Demuestra que si p_1, p_2, p_3 son tres primos tales que $p_3 > p_1p_2$ entonces cualquier grupo de orden $p_1p_2p_3$ es resoluble.

Ejercicio 18.

1. Demuestra que todo grupo de orden 70 es resoluble.
2. Demuestra que todo grupo de orden 24 es resoluble.
3. Demuestra que todo grupo de orden 100 es resoluble.
4. Demuestra que todo grupo de orden 48 es resoluble.
5. Sea G un grupo de orden 200. Demuestra que $G \times D_{41}$ es resoluble.
6. Demuestra que todo grupo de orden 63 es soluble (sin usar que es un caso particular de un grupo de orden p^2q con p y q primos).