Cálculo I

ÍNDICE

Tema 1

Números reales

Comprender el conjunto de los números reales, su estructura y sus principales propiedades, es el primer paso imprescindible en el estudio del Análisis Matemático. Presentaremos dicho conjunto sin dar una definición concreta de número real, pues lo importante no es saber qué es un número real, sino qué propiedades tiene el conjunto de los números reales. Lo que haremos será enumerar una serie de propiedades de este conjunto que admitimos como axiomas y son el punto de partida en nuestro trabajo. Naturalmente los axiomas están elegidos de forma que de ellos puedan deducirse todas las demás propiedades de los números reales.

Admitimos pues la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$, cuyos elementos son los *números reales*, que tiene todas las propiedades que iremos enumerando como axiomas y que se refieren a tres estructuras presentes en el conjunto $\mathbb{R}$: dos operaciones y una relación de orden.

1.1. Suma y producto de números reales

En el conjunto $\mathbb{R}$ disponemos de una operación llamada *suma*, que a cada par (x,y) de números reales asocia un único número real, la suma de x con y, denotado por $x+y$. También tenemos otra operación llamada *producto*, que a cada par (x,y) asocia un único número real, el producto de x con y, que se denota por $x \cdot y$, o simplemente xy. En una suma $x+y$ decimos que x e y son los *sumandos*, mientras que en un producto xy decimos que x e y son los *factores*. Los primeros tres axiomas nos aseguran que estas operaciones tienen propiedades que nos deben resultar muy familiares:

A1 [Asociatividad] *La suma y el producto son operaciones asociativas:*

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \quad (xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

A2 [Conmutatividad] *La suma y el producto son operaciones conmutativas:*

$$x+y = y+x\,, \quad xy = yx \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

A3 [Distributividad] *El producto tiene la propiedad distributiva con respecto a la suma:*

$$x(y+z) = (xy)+(xz) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$$

Observemos que los axiomas anteriores ni siquiera aseguran todavía que el conjunto $\mathbb{R}$ no sea vacío, pero enseguida van a aparecer explícitamente los primeros números reales.

A4 [Elementos neutros] *Existen dos números reales distintos que son elementos neutros para la suma y para el producto, respectivamente.*

Comentemos brevemente este último axioma. Un elemento neutro para la suma será un $c \in \mathbb{R}$ tal que $x + c = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Comprobamos inmediatamente que c es único, le llamamos *cero* y le denotamos por 0. Es costumbre denotar por $\mathbb{R}^*$ al conjunto de los números reales distintos de cero, o números reales *no nulos*: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Análogamente, tendremos un único elemento neutro para el producto, el número real *uno*, denotado por 1, que se caracteriza porque $1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Obsérvese que el axioma anterior nos garantiza que $1 \neq 0$, es decir, $1 \in \mathbb{R}^*$. Veamos ya el último axioma sobre la suma y el producto de números reales.

A5 [Elementos simétricos] *Cada número real tiene un elemento simétrico respecto de la suma y cada número real no nulo tiene un simétrico respecto del producto.*

Este axioma requiere también algunas aclaraciones. Para $x \in \mathbb{R}$, un elemento simétrico de x respecto de la suma será un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. Se comprueba inmediatamente que tal y es único, se le denomina *opuesto* de x y se le representa por $-x$. Observamos que, a su vez, x es el opuesto de $-x$, es decir, $-(-x) = x$. Podemos ahora *restar*, es decir, para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$ considerar la *diferencia* $u - v$, que es por definición la suma de u con el opuesto de v: $u - v = u + (-v)$. En dicha diferencia solemos decir que u es el *minuendo* y v es el *sustraendo*.

Por otra parte, para $x \in \mathbb{R}^*$, el simétrico de x respecto del producto también es único, se le llama *inverso* de x, se representa por x^{-1} y se caracteriza por verificar la igualdad $xx^{-1} = 1$. Es claro que también x es el inverso de x^{-1}, es decir, $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$. Si ahora $u \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^*$, podemos considerar el *cociente* o *división* u/v que es, por definición, el producto de u por el inverso de v: $u/v = uv^{-1}$. En dicho cociente solemos decir que u es el *numerador* y v es el *denominador*. Nótese que $1/v$ no es más que el inverso de v. Conviene advertir que 0 no tiene inverso, pues es fácil comprobar que $0 \cdot z = 0$ para todo $z \in \mathbb{R}$, luego ningún $z \in \mathbb{R}$ puede verificar que $0 \cdot z = 1$. Por tanto, un cociente con denominador 0 no tiene sentido.

Los cinco axiomas anteriores se resumen diciendo que $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto, es un *cuerpo conmutativo*, el *cuerpo de los números reales*. Así pues, en general, un cuerpo conmutativo es un conjunto en el que se dispone de dos operaciones, suma y producto, de forma que se verifican los cinco axiomas anteriores. De manera muy informal, podríamos decir que un cuerpo conmutativo es un conjunto cuyos elementos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, salvo que no es posible dividir por 0, y esas operaciones tienen todas las propiedades que nos resultan familiares.

No es difícil comprobar que en un conjunto con sólo dos elementos, podemos definir una suma y un producto de forma que obtengamos un cuerpo conmutativo. Por tanto, con lo que por ahora sabemos de $\mathbb{R}$, sólo podemos asegurar la existencia de dos números reales: 0 y 1.

1.2. Orden de los números reales

Además de las operaciones de suma y producto, en $\mathbb{R}$ disponemos de una tercera estructura, una relación de orden, que permitirá comparar números reales y trabajar con desigualdades. Para poder definir este orden, partimos de la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ denotado por $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que tiene las dos propiedades siguientes.

A6 [Tricotomía] *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una, y sólo una, de las tres afirmaciones siguientes: $x = 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, o bien, $-x \in \mathbb{R}^+$.*

Cuando se verifica que $-x \in \mathbb{R}^+$ decimos que x es un *número negativo* y denotamos por $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números negativos, equivalentemente: $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$. El axioma anterior nos da una partición del conjunto de los números reales: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$. Usaremos a menudo la siguiente notación: $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

A7 [Estabilidad] *La suma y el producto de números reales positivos son también números positivos: $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y,\ xy \in \mathbb{R}^+$.*

Deducimos inmediatamente que la suma de dos números negativos es un número negativo, el producto de dos números negativos es positivo y el producto de un número positivo por un negativo es negativo. Observemos que para $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene obligadamente $xx \in \mathbb{R}^+$, es decir, $x^2 \in \mathbb{R}^+$; en particular $1 = 1^2 \in \mathbb{R}^+$.

Veamos ya cómo comparar números reales. Para $x, y \in \mathbb{R}$, cuando $y - x \in \mathbb{R}^+$ decimos que x es *menor* que y o que y es *mayor* que x y escribimos $x < y$ o $y > x$. Obsérvese que un número real x es positivo precisamente cuando $x > 0$ y negativo cuando $x < 0$. Si se verifica que $y - x \in \mathbb{R}_0^+$, decimos que x es *menor o igual* que y o que y es *mayor o igual* que x, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$. Naturalmente esta nomenclatura se justifica porque $x \leqslant y$ equivale a que se tenga $x < y$ o $x = y$. Las expresiones del tipo $x \leqslant y$ o $x \geqslant y$ reciben el nombre de *desigualdades* y las del tipo $x < y$ o $x > y$ son *desigualdades estrictas*.

Comentemos ahora las reglas básicas para operar con desigualdades, que se deducen con facilidad de los axiomas anteriores. Trabajamos principalmente con la relación binaria $\leqslant$, que es una *relación de orden*, es decir, tiene las tres propiedades siguientes:

- *Reflexiva:* $x \leqslant x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- *Antisimétrica:* $x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y,\ y \leqslant x \ \Rightarrow \ x = y$
- *Transitiva:* $x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leqslant y,\ y \leqslant z \ \Rightarrow \ x \leqslant z$

Nótese que la relación $<$ es transitiva pero no reflexiva. Por otra parte, se dice que $\leqslant$ es una relación de orden *total*, lo cual significa que entre dos números reales cualesquiera siempre se verifica alguna desigualdad: para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x \leqslant y$, o bien, $y \leqslant x$. Las otras dos reglas importantes para trabajar con desigualdades son las siguientes:

- $x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \ \Rightarrow \ x + z \leqslant y + z$
- $x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leqslant y,\ 0 \leqslant z \ \Rightarrow \ xz \leqslant yz$

De la primera propiedad anterior se deduce la posibilidad de sumar miembro a miembro dos desigualdades y lo mismo ocurre con el producto, siempre que no aparezcan números negativos:

- $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$, $z \leqslant w \Rightarrow x+z \leqslant y+w$
- $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant y$, $0 \leqslant z \leqslant w \Rightarrow xz \leqslant yw$

Finalmente, es fácil adivinar lo que ocurre al sustituir los dos miembros de una desigualdad por sus opuestos o por sus inversos. Concretamente, para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

- $x \leqslant y \Rightarrow -x \geqslant -y$
- $0 < x \leqslant y \Rightarrow x^{-1} \geqslant y^{-1}$

Los siete axiomas enunciados hasta ahora se suelen resumir diciendo que $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo *ordenado*, es decir, un cuerpo conmutativo que contiene un subconjunto, formado por los elementos que llamamos positivos, que verifica los axiomas de tricotomía y estabilidad. Naturalmente, en cualquier cuerpo conmutativo ordenado se pueden definir las desigualdades y manejarlas exactamente con las mismas reglas que hemos explicado para $\mathbb{R}$.

Al hilo de comentarios anteriores, el hecho de que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo conmutativo ordenado tiene muchas consecuencias importantes, que de momento sólo vamos a sugerir. Por ejemplo, podemos observar que $\mathbb{R}$ tiene “muchos” elementos: $0 < 1 < 1+1 = 2 < 2+1 = 3 < \ldots$

Pasamos ahora a enunciar el último axioma, que es sin duda el más relevante:

A8 [Axioma del continuo o de Dedekind] *Si A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, tales que $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant x \leqslant b$, también para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.*

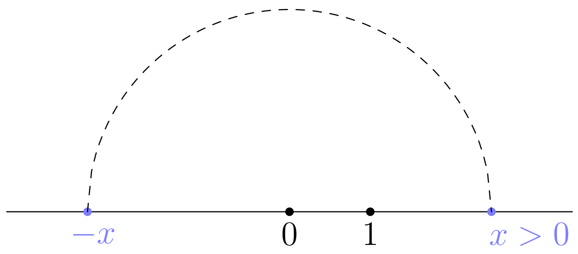
Enseguida veremos la interpretación geométrica de este axioma, que lo hace parecer una afirmación bastante ingenua. Sin embargo, su importancia no se debe minusvalorar; poco a poco iremos viendo que del axioma del continuo se deducen las propiedades más relevantes de los números reales y todos los resultados importantes que vamos a estudiar en lo sucesivo. De momento, podemos ya resumir la axiomática que define al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, diciendo simplemente que $\mathbb{R}$ es un *cuerpo conmutativo ordenado, que verifica el axioma del continuo*.

1.3. La recta real

Para entender mejor los números reales es casi imprescindible usar la intuición geométrica, interpretando $\mathbb{R}$ como el conjunto de los puntos de una recta, llamada lógicamente la *recta real*. Utilizamos la línea recta como una noción meramente intuitiva, válida solamente para tener una visión gráfica del problema que estemos considerando. Manejaremos, en el mismo sentido intuitivo, la idea de *segmento*: porción de recta comprendida entre dos puntos, los *extremos* del segmento.

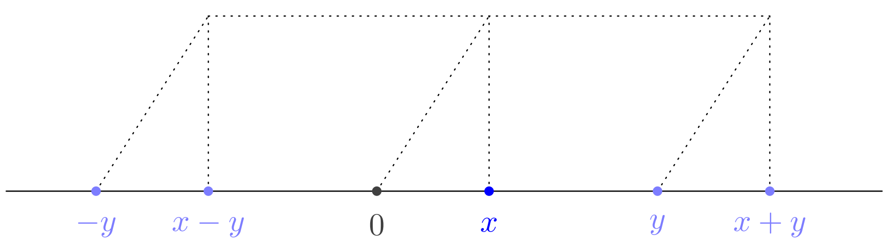
Con el fin de explicar esta interpretación de $\mathbb{R}$ como el conjunto de los puntos de la recta real, dibujamos una recta horizontal y empezamos identificando el número real 0 con un punto cualquiera de la misma, que será el *origen* de la recta real.

Identificamos entonces el número real 1 con otro punto cualquiera de la recta, situado a la derecha del origen. De hecho, los números positivos quedarán situados a la derecha del origen y los negativos a la izquierda. La idea es usar el segmento de extremos 0 y 1 como unidad para medir longitudes de segmentos, así que cada $x \in \mathbb{R}^+$ estará situado a la derecha del origen de tal forma que, dicho intuitivamente, el segmento de extremos 0 y x tendrá *longitud* x. Entonces, al número real $-x$ corresponderá el punto *opuesto* de x con respecto al origen. Equivalentemente, $-x$ está situado a la izquierda del origen, de forma que el segmento de extremos $-x$ y 0 tiene la misma longitud que el de extremos 0 y x.



Más adelante iremos explicando con detalle esta interpretación geométrica de $\mathbb{R}$ como el conjunto de los puntos de una recta, es decir, para cada número real x, iremos explicando cómo se encuentra el punto de la recta que le corresponde. No obstante conviene asumir ya esta interpretación e incluso usar un lenguaje que claramente nos la recuerde. Por ejemplo, dado $x \in \mathbb{R}$, es habitual decir que x es un *punto* de la recta real, que $\mathbb{R}$ es la recta real, o que los elementos de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ son los *puntos* de A.

La suma de números reales se interpreta geométricamente mediante *traslaciones*, hacia la derecha si sumamos un número positivo, hacia la izquierda si es negativo. Más concretamente, para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^+$, el punto $x+y$ está situado a la derecha de x, de forma que el segmento de extremos $x, x+y$ sea trasladado del de extremos $0, y$, mientras que $x-y$ está a la izquierda de x, pero también el segmento de extremos $x-y, x$ es trasladado del de extremos $0, y$.

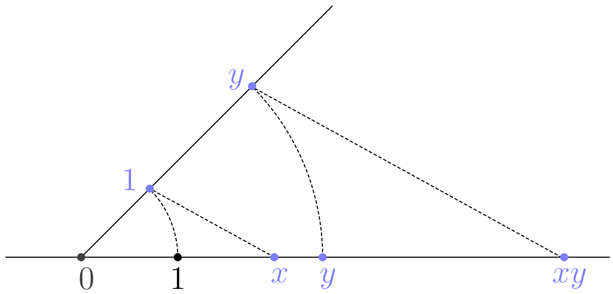


Por supuesto, al hacer esta interpretación nos estamos basando en dos ideas intuitivas: la longitud de un segmento no se altera al trasladarlo y al encadenar segmentos consecutivos se suman sus longitudes.

La interpretación geométrica del orden de los números reales es ya muy clara: para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, tendremos $x < y$ cuando el punto x esté situado en la recta a la izquierda de y.

Podemos ya explicar el significado geométrico del axioma del continuo. Consideremos dos conjuntos no vacíos $A,B \subset \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Para aclarar ideas, observemos primeramente que si $A \cap B \neq \emptyset$, lo que afirma el axioma del continuo es muy obvio: tomando $x \in A \cap B$ se tiene evidentemente que $a \leqslant x \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Nos concentramos pues en el caso $A \cap B = \emptyset$, con lo que tendremos de hecho $a < b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Geométricamente, podemos decir que el conjunto A está completamente a la izquierda del conjunto B. El axioma del continuo nos asegura que existe un punto x de la recta que deja el conjunto A a su izquierda y el conjunto B a su derecha. Intuitivamente, si tal punto x no existiera, la recta tendría un hueco, un trozo vacío más o menos ancho, entre los conjuntos A y B. Así pues, el axioma del continuo expresa la idea intuitiva de que la recta es una línea continua, no tiene huecos.

Comentemos finalmente la construcción geométrica del producto de dos números reales positivos, basada en el clásico Teorema de Tales sobre la semejanza de triángulos. Se explica en la siguiente figura:



1.4. Valor absoluto

La noción de valor absoluto, que ahora vamos a estudiar, es una herramienta muy útil para trabajar con números reales. El *valor absoluto* de un número real x es, por definición, el número real $|x|$ dado por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Comentamos a continuación las propiedades del valor absoluto, que se deducen fácilmente de su definición. En primer lugar es evidente que $|x| \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, de hecho, $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$. También es claro que

$$x \leqslant |x|, \quad |-x| = |x|, \quad |x|^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En relación con la última igualdad, es fácil comprobar que, para $a,b \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene $a^2 = b^2$ si, y sólo si, $a = b$. Entonces, dados $x,y \in \mathbb{R}$ podemos tomar $a = |x|$ y $b = |y|$ obteniendo que $x^2 = y^2$ si, y sólo si, $|x| = |y|$.

Pensemos ahora en el valor absoluto de un producto. Puesto que, para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$ tenemos claramente $|xy|^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2$, deducimos que

$$|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Para trabajar con el valor absoluto de una suma, conviene primeramente observar que, dados $x,z \in \mathbb{R}$, la desigualdad $|x| \leqslant z$ equivale a que se tenga $x \leqslant z$ junto con $-x \leqslant z$, es decir:

$$|x| \leqslant z \iff -z \leqslant x \leqslant z$$

Ahora, para $x,y \in \mathbb{R}$ podemos sumar miembro a miembro la desigualdad $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ con la análoga para y, obteniendo que $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$. Hemos probado así que

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Elevando al cuadrado observamos que la desigualdad anterior será una igualdad si, y sólo si, se tiene $xy = |x|\,|y|$, es decir, $xy \geqslant 0$.

Veamos otra útil desigualdad que se deduce de la anterior. Observamos que, para $x,y \in \mathbb{R}$ tenemos $|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y|+|y|$, es decir, $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. Intercambiando los papeles de x e y obtenemos también $|y|-|x| \leqslant |x-y|$ y las dos desigualdades conseguidas nos dan:

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Que aparezca aquí la diferencia $x-y$ en vez de la suma $x+y$ como antes, es irrelevante, bastará sustituir y por $-y$. Podemos por tanto expresar las dos desigualdades probadas escribiendo:

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

La interpretación geométrica del valor absoluto de un número real es muy sencilla. Para $x \in \mathbb{R}$, tanto si x es positivo como si es negativo, $|x|$ es la longitud del segmento de extremos 0 y x. Si ahora $x,y \in \mathbb{R}$ la longitud del segmento de extremos x e y será la misma, por traslación, que la del segmento de extremos 0 e $y-x$, es decir, $|y-x|$. Por tanto, la siguiente definición es muy intuitiva:

Para $x,y \in \mathbb{R}$, se define la *distancia* de x a y por:

$$d(x,y) = |y-x|$$

Las siguientes propiedades de la distancia se deducen fácilmente de las del valor absoluto:

(i) $d(x,y) \geqslant 0 \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}$
(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(iii) $d(x,y) = d(y,x) \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}$
(iv) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \ \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Para comprobar la última desigualdad, basta observar que

$$d(x,z) = |z-x| = |y-x+z-y| \leqslant |y-x|+|z-y| = d(x,y)+d(y,z)$$

Además, se da la igualdad cuando $(y-x)(z-y) \geqslant 0$, es decir, cuando $x \leqslant y \leqslant z$ o bien $z \leqslant y \leqslant x$, lo que significa que y es un punto del segmento cuyos extremos son x y z.

1.5. Ejercicios

1. Probar las siguientes *leyes de cancelación*:

   a) $x, y, z \in \mathbb{R}, \; x + z = y + z \;\; \Rightarrow \;\; x = y$

   b) $x, y \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{R}^*, \; xz = yz \;\; \Rightarrow \;\; x = y$

2. Probar que para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes afirmaciones:

   a) $-(x - y) = y - x\,; \; -(x + y) = -x - y$

   b) $xy = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 0 \;\text{ o }\; y = 0$

   c) $(-x)y = x(-y) = -(xy)\,; \; (-x)(-y) = xy$

3. Probar que para $x, y \in \mathbb{R}$ y $z, w \in \mathbb{R}^*$ se tiene que

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + zy}{zw} \qquad \text{y también que} \qquad \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$$

4. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $x, y \in \mathbb{R}^- \;\; \Rightarrow \;\; x + y \in \mathbb{R}^-, \; xy \in \mathbb{R}^+$

   b) $x \in \mathbb{R}^+, \; y \in \mathbb{R}^- \;\; \Rightarrow \;\; xy \in \mathbb{R}^-$

5. Probar que efectivamente $\leqslant$ es una relación de orden total en el conjunto $\mathbb{R}$.

6. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $x, y, z, w \in \mathbb{R}, \; x \leqslant y, \; z < w \;\; \Rightarrow \;\; x + z < y + w$

   b) $x, y, z, w \in \mathbb{R}, \; 0 < x \leqslant y, \; 0 < z < w \;\; \Rightarrow \;\; xz < yw$

   c) $x, y \in \mathbb{R}, \; x \leqslant y \;\; \Rightarrow \;\; -x \geqslant -y$

   d) $x, y, z \in \mathbb{R}, \; x \leqslant y, \; z \leqslant 0 \;\; \Rightarrow \;\; xz \geqslant yz$

   e) $x, y \in \mathbb{R}, \; 0 < x \leqslant y \;\; \Rightarrow \;\; x^{-1} \geqslant y^{-1}$

7. Probar que para $x, z \in \mathbb{R}$ se tiene $|x| < z$ si, y sólo si, $-z < x < z$.

8. Dar un ejemplo de una operación,

   a) que no sea conmutativa

   b) que no sea asociativa

   c) que no sea distributiva con respecto a otra.

Tema 2

Números naturales, enteros y racionales

Estudiamos en este tema los números reales que aparecen de forma más sencilla e intuitiva. Empezamos detectando dentro de $\mathbb{R}$ a los números naturales, a partir de los cuales definiremos fácilmente los números enteros y racionales. Iremos analizando el comportamiento de estos tres subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a la suma, el producto y el orden.

2.1. Números naturales. Inducción

Intuitivamente, los números naturales son los que se obtienen sumando 1 consigo mismo: $1,\ 1+1=2,\ 1+1+1=3$, etc. El proceso no se detiene y va produciendo números cada vez mayores: $1<2<3<\ldots$ Pues bien, para dar una definición rigurosa del conjunto de los números naturales nos fijamos en una propiedad que claramente dicho conjunto debería tener:

Se dice que un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ es *inductivo* cuando verifica las dos condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}(i) & 1\in A\\ (ii) & x\in A \Rightarrow x+1\in A\end{array}$$

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos, $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^*$ no lo son. Con nuestra idea intuitiva de los números naturales, está claro que todo conjunto inductivo debería contenerlos, luego parece lógico detectarlos de la siguiente forma:

El conjunto $\mathbb{N}$ de los *números naturales* es, por definición, la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Poco a poco iremos viendo que esta definición se corresponde perfectamente con nuestra idea intuitiva.

Empezamos observando que $\mathbb{N}$ *es un conjunto inductivo*. Por una parte, 1 pertenece a todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, luego $1\in\mathbb{N}$. Por otra, si $n\in\mathbb{N}$ y A es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, tenemos que $n\in\mathbb{N}\subset A$, luego también $n+1\in A$, por ser A inductivo. Vemos así que $n+1$ pertenece a todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, es decir, $n+1\in\mathbb{N}$, como se quería. Podríamos decir que $\mathbb{N}$ es el más pequeño de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, pues está contenido en todos ellos. Esta idea se resalta en el siguiente enunciado, que nos da la propiedad clave de los números naturales.

Principio de inducción. *Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$, y A es inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$.*

En efecto: por ser A inductivo tenemos $\mathbb{N} \subset A$, pero por hipótesis, $A \subset \mathbb{N}$, luego $A = \mathbb{N}$. ■

En el principio anterior se basa un tipo de razonamiento muy útil: el método de demostración por *inducción*. Cuando usamos este método, que enseguida explicaremos con detalle, se dice que razonamos por inducción, o simplemente que hacemos una inducción.

Supongamos que queremos demostrar que todos los números naturales tienen una cierta propiedad, o verifican una determinada afirmación. Más concretamente, sea P_n una afirmación que involucra un número natural genérico n o, si se quiere, una "variable" n cuyos posibles valores son los números naturales, de modo que en principio P_n podría verificarse para algunos valores de n pero no para otros. Nuestro objetivo puede ser demostrar P_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Pues bien, si probamos P_1 y probamos también que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces podemos asegurar que efectivamente P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Para convencernos de esto, basta pensar en el conjunto A formado por los números naturales n tales que P_n es cierta. Como hemos probado P_1, sabemos que $1 \in A$. Pero, dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, es decir, $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Por tanto, A es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$ y el principio de inducción nos asegura que $A = \mathbb{N}$, como queríamos.

Así pues, para probar por inducción que una afirmación P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, recorremos dos etapas. En la primera, llamada *etapa base*, debemos probar P_1, cosa que suele ser bien fácil. Viene entonces la *etapa de inducción* propiamente dicha, que consiste en probar que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, fijado $n \in \mathbb{N}$, deberemos suponer P_n para probar P_{n+1}, por lo que en esta segunda etapa suele decirse que P_n es la *hipótesis de inducción*.

Veamos un ejemplo muy sencillo de inducción: para $n \in \mathbb{N}$ sea P_n la afirmación $n \geqslant 1$, una desigualdad que en principio podría ser cierta o falsa, dependiendo de n. Es obvio que $1 \geqslant 1$, luego tenemos P_1. Fijado $n \in \mathbb{N}$, de $n \geqslant 1$, por ser $n+1 \geqslant n$, deducimos que $n+1 \geqslant 1$, así que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Hemos probado por inducción que $n \geqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Suma y producto de números naturales

Como ejemplo muy útil de inducción, se puede probar fácilmente que la suma y el producto de números naturales son números naturales:

$$m, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m+n, \, mn \in \mathbb{N}$$

Damos los detalles para la suma, con el producto se puede razonar de forma similar. Conviene comentar la forma en que haremos la demostración, ya que la propiedad buscada no involucra un sólo número natural, sino dos: queremos ver que $m+n \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y también para todo $m \in \mathbb{N}$.

Informalmente, en situaciones como esta podríamos decir que hemos de trabajar con más de una "variable". Para organizar la inducción, lo habitual es elegir una de esas variables y, para cada valor de la misma, considerar la afirmación consistente en que se verifique la propiedad buscada, para todos los valores de las restantes variables. Para resaltar esta forma de organizar la demostración podemos decir que razonamos por inducción *sobre* la variable elegida.

En nuestro caso haremos la inducción sobre n, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la afirmación P_n consistente en que se tenga $m+n \in \mathbb{N}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, algo que sólo depende de n. Es claro que si probamos P_n para todo $n \in \mathbb{N}$, habremos probado que $m+n \in \mathbb{N}$ para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$, como se pretende. Nótese la simetría de la situación: la propiedad que queremos probar no se altera al intercambiar m con n, luego hacer inducción sobre m sería exactamente lo mismo que hacerla sobre n. Cuando no se dispone de este tipo de simetría, elegir adecuadamente la variable sobre la que hacemos la inducción puede ser importante.

Pues bien, la etapa base de la inducción sobre n consistirá en comprobar que $m+1 \in \mathbb{N}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, cosa evidente, porque $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo. En la etapa de inducción, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y suponemos P_n para probar P_{n+1}. En efecto, dado $m \in \mathbb{N}$, P_n nos asegura que $m+n \in \mathbb{N}$, de donde $m+n+1 \in \mathbb{N}$ por ser $\mathbb{N}$ inductivo, y tenemos P_{n+1}, como queríamos. ■

En lo que sigue obtenemos algo más de información sobre la suma y el producto de números naturales. Para $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $n \geqslant 1$, luego $-n \leqslant -1 < 1$ y $-n \notin \mathbb{N}$; también observamos que $1/n \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, $n = 1$. Esto no impide que la diferencia o el cociente de dos números naturales puedan ser números naturales.

Con respecto a la diferencia, vamos a demostrar que para $m,n \in \mathbb{N}$ se tiene

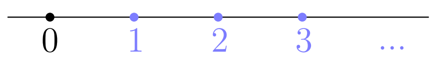
$$m - n \in \mathbb{N} \iff m > n \tag{1}$$

La implicación hacia la derecha es evidente: si $m-n \in \mathbb{N}$, tenemos $m-n \geqslant 1 > 0$, luego $m > n$. La otra implicación se probará por inducción sobre n, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la afirmación P_n siguiente: $m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow m-n \in \mathbb{N}$. Basta probar P_n para todo $n \in \mathbb{N}$ o, equivalentemente, que $A = \mathbb{N}$ donde $A = \{n \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow m-n \in \mathbb{N}\}$.

(i) Etapa base: $1 \in A$. Debemos ver que si $m \in \mathbb{N}$ y $m > 1$, entonces $m-1 \in \mathbb{N}$, lo que a su vez se hará por inducción (sobre m). A tal fin, empezamos comprobando que el conjunto $B = \{1\} \cup \{m \in \mathbb{N} : m-1 \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto inductivo de $\mathbb{N}$. En efecto, es obvio que $1 \in B$ y, si $m \in B$ tenemos claramente $(m+1)-1 = m \in \mathbb{N}$, luego $m+1 \in B$. Así pues, hemos probado por inducción que $B = \mathbb{N}$. Entonces, si $m \in \mathbb{N}$ y $m > 1$, al ser $m \in B$ y $m \neq 1$, la definición de B nos dice que $m-1 \in \mathbb{N}$, como queríamos.

(ii) Etapa de inducción: $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. Dado $m \in \mathbb{N}$ con $m > n+1$, deberemos comprobar que $m-(n+1) \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $m > 1$, la etapa base nos dice que $m-1 \in \mathbb{N}$, y también sabemos que $m-1 > n$, luego la hipótesis de inducción nos dice que $(m-1)-n \in \mathbb{N}$, es decir, $m-(n+1) \in \mathbb{N}$. ■

La afirmación (1) tiene una consecuencia relevante: si $m,n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, será $m-n \geqslant 1$, es decir, $m \geqslant n+1$, luego no puede ocurrir que $n < m < n+1$. Podríamos decir que el número natural $n+1$ es el "siguiente" de n. A partir de aquí, la situación de los números naturales en la recta real se intuye claramente:



Para cada $n \in \mathbb{N}$, el segmento de extremos n y $n+1$ es trasladado del de extremos 0 y 1. Así podemos encontrar sucesivamente todos los números naturales, pues acabamos de ver que no existe ningún número natural comprendido estrictamente entre n y $n+1$.

Con respecto al cociente de números naturales, es claro que si $m,n \in \mathbb{N}$ y $m/n \in \mathbb{N}$, se deberá tener $m \geqslant n$, pero esta vez el recíproco está lejos de ser cierto. Siguiendo en esta línea entraríamos en el estudio de la *divisibilidad*, cosa que no vamos a hacer. De dicha teoría sólo usaremos en lo sucesivo algunos hechos elementales.

2.3. Buena ordenación

El orden de los números naturales tiene una importante propiedad que enseguida vamos a estudiar. Necesitamos las siguientes nociones, muy intuitivas.

Decimos que un conjunto A de números reales *tiene máximo* cuando existe un elemento de A que es mayor o igual que cualquier otro: $\exists\, x \in A : x \geqslant a \quad \forall a \in A$. Es evidente que tal elemento x es único, se le llama *máximo* del conjunto A y se denota por $\max A$. Análogamente, se dice que A *tiene mínimo* cuando existe un elemento de A que es menor o igual que todos los demás: $\exists\, y \in A : y \leqslant a \quad \forall a \in A$. De nuevo y es único, se le llama *mínimo* del conjunto A y se denota por $\min A$.

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}$ no tiene máximo ni mínimo; $\mathbb{N}$ no tiene máximo pero sí tiene mínimo: $1 = \min \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x, -x\}$ tiene máximo y mínimo, concretamente: $|x| = \max\{x, -x\}$, mientras que $\min\{x, -x\} = -|x|$.

La siguiente propiedad del orden de los números naturales es muy útil:

Principio de buena ordenación de los números naturales. *Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$. Si $1 \in A$ será $1 = \min A$. En otro caso, consideramos el conjunto de los números naturales que son estrictamente menores que todos los de A, es decir el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : n < a \ \forall a \in A\}$. Nótese que $A \cap B = \emptyset$ y que $1 \in B$. Observamos también que B no puede ser inductivo, pues si lo fuera, se tendría $B = \mathbb{N}$ y $A = \emptyset$. Por tanto, deberá existir $m \in B$ tal que $m + 1 \notin B$. Por ser $m \in B$, para cualquier $a \in A$ se tiene $m < a$, luego $m + 1 \leqslant a$. Además, debe ser $m + 1 \in A$, pues de lo contrario se tendría $m + 1 < a$ para todo $a \in A$, y por tanto $m + 1 \in B$, lo cual es una contradicción. Así pues, hemos probado que $m + 1 = \min A$, lo que concluye la demostración. ■

Merece la pena explicar la denominación del principio recién demostrado. Evidentemente las definiciones de máximo y mínimo de un conjunto pueden hacerse en cualquier conjunto ordenado, es decir, cualquier conjunto en el que se disponga de una relación de orden. Pues bien, un conjunto *bien ordenado* es un conjunto ordenado con la propiedad de que todo subconjunto no vacío suyo tiene mínimo. Por tanto, el principio anterior se resume diciendo que $\mathbb{N}$ *está bien ordenado*.

2.4. Potencias de exponente natural

Dado un número real x, las sucesivas potencias de x nos deben resultar muy familiares. La definición rigurosa de x^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se hace por inducción, como vamos a ver.

Para $x \in \mathbb{R}$, se definen las *potencias de exponente natural* de x de la siguiente forma:

$$x^1 = x \qquad \text{y} \qquad x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, empezamos con $x^1 = x$, seguimos con $x^2 = x \cdot x$, entonces $x^3 = x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x$, etcétera. En la potencia x^n así definida, solemos decir que x es la *base* y n es el *exponente*.

Enunciamos a continuación varias propiedades importantes de las potencias de exponente natural, cuya demostración es un buen ejercicio. Para $x, y \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene:

- $x^{m+n} = x^m x^n$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $0 \leqslant x < y \;\Rightarrow\; x^n < y^n$
- $x > 1\,,\; m < n \;\Rightarrow\; x^m < x^n$

En vista de la primera de estas propiedades, es plausible definir $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Las potencias de exponente natural han sido el primer ejemplo de definición por inducción, un procedimiento constructivo que se usa muy a menudo, por lo que conviene explicarlo con más detalle. Dado $x \in \mathbb{R}$, con el fin de definir x^n para todo $n \in \mathbb{N}$, hemos definido primeramente x^1 y a continuación hemos explicado cómo se obtiene x^{n+1} a partir de x^n. En general, para un conjunto cualquiera A (habitualmente A será un subconjunto de $\mathbb{R}$), nos puede interesar asociar a cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento de A, es decir, definir una aplicación $f : \mathbb{N} \to A$. Para ello, igual que hemos hecho con las potencias, bastará definir $f(1)$ y explicar de manera inequívoca cómo se obtiene $f(n+1)$ a partir de $f(n)$. Existe un *Principio de definición por inducción* que asegura la legitimidad de este procedimiento, es decir, que al usarlo queda correctamente definida una aplicación $f : \mathbb{N} \to A$. Veamos otros ejemplos ilustrativos.

Sumas. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos un número real x_k. Informalmente, la suma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ tiene un significado muy claro. De manera más rigurosa, dicha suma se escribe en la forma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ y su definición se hace por inducción:

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A veces conviene añadir un primer sumando, denotado por x_0. Concretamente, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \qquad \text{o bien,} \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}$$

La última igualdad, así como otras propiedades muy sencillas de las sumas recién definidas, que tienen un significado intuitivo muy claro y que usaremos en lo sucesivo sin más comentario, se prueban fácilmente por inducción. Por ejemplo, usando la distributividad del producto de números reales con respecto a la suma, comprobamos enseguida que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha x_k$$

Productos. El producto $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, que de nuevo tiene un significado intuitivo muy claro, se denota de forma más rigurosa por $\prod_{k=1}^{n} x_k$ y se define también por inducción:

$$\prod_{k=1}^{1} x_k = x_1 \qquad \text{y} \qquad \prod_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, para $n \in \mathbb{N}$, el *factorial* de n viene dado por: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ y su definición por inducción será:

$$1! = 1, \quad \text{y} \quad (n+1)! = n!\,(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Intuitivamente escribiríamos $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Conviene también definir $0\,! = 1$.

Nótese que las potencias de exponente natural pueden verse como caso muy particular del producto recién definido: dado $x \in \mathbb{R}$, si tomamos $x_k = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos claramente $\prod_{k=1}^{n} x_k = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.5. Potencias de una suma y sumas de potencias

Una de las propiedades de las potencias de exponente natural enunciadas anteriormente puede expresarse diciendo que una potencia de un producto de números reales coincide con el producto de las respectivas potencias. Sin embargo, no tenemos información sobre lo que ocurre con las potencias de una suma. Para obtenerla, recordamos los *números combinatorios*. Concretamente, para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leqslant n$, se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obsérvese que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Para $k \geqslant 1$, es fácil ver que: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, lo que permite calcular rápidamente $\binom{n+1}{k}$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, a partir de los valores de $\binom{n}{k}$. Podemos ya probar por inducción una igualdad muy útil:

- **Fórmula del binomio de Newton:** *Para cualesquiera* $x,y \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, se tiene:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

En efecto, para $n = 1$ la fórmula es evidente y, suponiéndola cierta para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k\end{aligned}$$

que es la fórmula buscada para el número natural $n+1$. ■

La fórmula anterior generaliza algo bien conocido: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}$. En lo que sigue vamos a generalizar, en el mismo sentido, otra igualdad archiconocida:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Dado $z \in \mathbb{R}$, empezamos sumando potencias sucesivas de z. Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$(z-1) \sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=1}^{n+1} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^k = z^{n+1} - 1 \tag{3}$$

de donde deducimos que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

En la suma anterior, el primer sumando es 1 y cada uno de los siguientes es el producto del anterior por z, así que hemos calculado la suma de una *progresión geométrica de razón* z. Si queremos que el primer sumando sea un $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, basta pensar que

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha z^k = \frac{\alpha z^{n+1} - \alpha}{z - 1} \qquad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero veamos ya la generalización de (2) que íbamos buscando:

- *Se verifica que:*

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto es evidente cuando $x = 0$. En otro caso, escribimos (3) con $z = y/x$, obteniendo

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{x^k} = \frac{y^{n+1}}{x^{n+1}} - 1$$

y multiplicando ambos miembros por $-x^{n+1}$ llegamos claramente a la igualdad buscada. ■

2.6. Números enteros

Añadiendo a $\mathbb{N}$ el cero y los opuestos de los números naturales obtenemos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los *números enteros*. Así pues,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Nótese que los números naturales coinciden con los enteros positivos: $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$.

Observamos también que, para $m,n \in \mathbb{N}$, la diferencia $m - n$ es siempre un número entero: si $n < m$, sabemos que $m - n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; si $m = n$ tendremos $m - n = 0 \in \mathbb{Z}$ y, finalmente, si $n > m$ será $n - m \in \mathbb{N}$, de donde $m - n = -(n - m) \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, todo número entero puede expresarse como diferencia de dos números naturales, puesto que para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos $n = (n+1) - 1$, mientras que $-n = 1 - (n+1)$. Por tanto, podemos escribir:

$$\mathbb{Z} = \{m - n : m,n \in \mathbb{N}\}$$

Esta otra descripción de $\mathbb{Z}$ permite comprobar rápidamente que *la suma y el producto de números enteros son números enteros*:

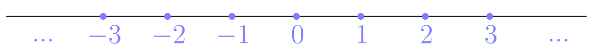
$$p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \implies p_1 + p_2\,,\ p_1 p_2 \in \mathbb{Z}$$

En efecto, si escribimos $p_1 = m_1 - n_1$ y $p_2 = m_2 - n_2$ con $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, usando que las sumas y productos de números naturales son números naturales, tenemos claramente que $p_1 + p_2 = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) \in \mathbb{Z}$ y también $p_1\, p_2 = (m_1 m_2 + n_1 n_2) - (m_1 n_2 + n_1 m_2) \in \mathbb{Z}$.

Puesto que $0 \in \mathbb{Z}$ y $-p \in \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$, observamos que $\mathbb{Z}$ con la operación suma tiene exactamente las mismas propiedades que $\mathbb{R}$. Un conjunto en el que se dispone de una operación asociativa y conmutativa, con elemento neutro, y tal que todo elemento del conjunto tiene un simétrico para dicha operación, es lo que se denomina un *grupo abeliano*. Así pues, tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Z}$ son grupos abelianos con la operación suma.

Con el producto la situación es diferente: para $p \in \mathbb{Z}$ con $p \neq 0$, es fácil ver que $p^{-1} \in \mathbb{Z}$ si, y sólo si, $p = 1$ o $p = -1$. Así pues, con las operaciones de suma y producto, $\mathbb{Z}$ no llega a ser un cuerpo, se dice que es un *anillo conmutativo con unidad*.

Con respecto al orden de los números enteros, se mantiene una propiedad que ya conocíamos para números naturales, concretamente: $p,q \in \mathbb{Z},\ p < q \implies p + 1 \leqslant q$. En efecto, se tiene $q - p \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{N}$, luego $q - p \geqslant 1$. Así pues, para $p \in \mathbb{Z}$ no existe ningún número entero comprendido estrictamente entre p y $p+1$. La situación de los números enteros en la recta real se adivina claramente:



Finalmente, es claro que $\mathbb{Z}$ no está bien ordenado, pues no tiene mínimo.

2.7. Números racionales

Del mismo modo que los números enteros se obtienen al hacer todas las diferencias de números naturales, consideramos ahora todos los posibles cocientes de números enteros, para obtener los *números racionales*. Es claro que todo cociente de números enteros puede escribirse de forma que el denominador sea positivo. Por tanto, la definición del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales puede hacerse como sigue:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{p}{m} : p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

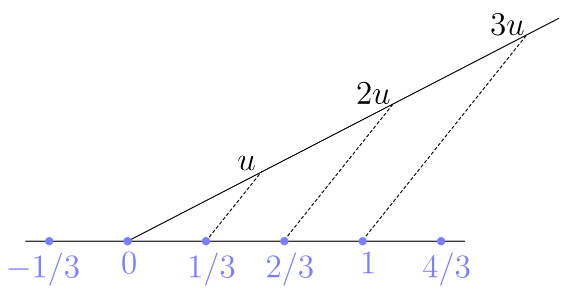
Es obvio que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Pensemos ahora en sumas y productos de números racionales. Si $r, s \in \mathbb{Q}$ y escribimos $r = p/m$, $s = q/n$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, usando que la suma y el producto de números enteros son números enteros, tenemos claramente

$$r + s = \frac{pn + qm}{mn} \in \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad rs = \frac{pq}{mn} \in \mathbb{Q}$$

Además, $0, 1 \in \mathbb{Q}$, $-r = -p/m \in \mathbb{Q}$ y, si $r \neq 0$ tenemos $p \neq 0$ y $r^{-1} = mp^{-1} \in \mathbb{Q}$. Así pues, en cuanto a las operaciones suma y producto, $\mathbb{Q}$ tiene exactamente las mismas propiedades que $\mathbb{R}$, es un cuerpo conmutativo.

De hecho, considerando el conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$, se cumplen evidentemente las propiedades de tricotomía y estabilidad: Por una parte, para $r \in \mathbb{Q}$ se verifica una sola de las afirmaciones $r \in \mathbb{Q}^+$, $r = 0$ o $-r \in \mathbb{Q}^+$; por otra, para $r, s \in \mathbb{Q}^+$ se tiene $r + s \in \mathbb{Q}^+$ y $rs \in \mathbb{Q}^+$. En resumen: $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo ordenado.

Para entender la situación de los números racionales sobre la recta real, basta recordar la construcción geométrica que permite subdividir un segmento en varios de igual longitud, que se sugiere en el siguiente dibujo:



En general, dado $m \in \mathbb{N}$, podemos usar una construcción similar a la dibujada en el caso $m = 3$, para encontrar el punto $1/m$. Mediante traslaciones encontraremos entonces cualquier punto de la forma p/m con $p \in \mathbb{Z}$. De esta forma podemos situar sobre la recta todos los números racionales.

A simple vista observamos que el orden de los números racionales es muy diferente del que tenían los enteros: dados dos números racionales distintos siempre existe un número racional comprendido estrictamente entre ellos, y por tanto muchos más.

En efecto, dados $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, tomando $t = (r+s)/2$ se tiene evidentemente que $t \in \mathbb{Q}$ y $r < t < s$. Desde luego, este proceso puede iterarse, para encontrar tantos números racionales comprendidos entre r y s como queramos.

Los razonamientos anteriores podrían llevarnos a pensar que todos los números reales son racionales, cosa que está muy lejos de ser cierta. Más adelante probaremos la existencia de números *irracionales*, esto es, de números reales que no son racionales. A poco que se piense, para esto será imprescindible usar el axioma del continuo que, según hemos visto, es el único que puede marcar la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. De hecho, puede decirse que la inmensa mayoría de los números reales son irracionales.

2.8. Ejercicios

1. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   c) $m, n \in \mathbb{N} \implies mn \in \mathbb{N}$

2. En cada uno de los siguientes casos, averiguar si el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene o no máximo y si tiene o no mínimo, justificando la respuesta:

   a) $A = \mathbb{R}^-$

   b) $A = \mathbb{R}_0^+$

   c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

   d) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 1\}$

3. Probar las propiedades de las potencias enunciadas en la sección **2.4**.

4. Para $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \in \mathbb{N}$, probar que: $x^n < y^n \implies x < y$

5. Para $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, probar que: $x^n < x^m \Rightarrow n < m$

6. Probar que todos los números combinatorios son números naturales.

7. Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

8. Probar que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene: $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$

9. Probar que, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Tema 3

Conjuntos finitos y conjuntos numerables

En este tema vamos a usar los números naturales para *contar* los elementos de un conjunto, o dicho con mayor precisión, para definir los conjuntos finitos y su número de elementos. También abordaremos el problema de clasificar los conjuntos infinitos atendiendo a su "tamaño".

En realidad, el estudio de este tipo de problemas no es parte del Análisis Matemático, sino más bien de la Teoría de Conjuntos. Por ello, omitiremos algunas demostraciones, exponiendo con detalle sólo las que son importantes en nuestro estudio de los números reales.

3.1. Conjuntos finitos

Para discutir el "tamaño" de un conjunto, nos guiaremos por dos ideas intuitivas muy claras. En primer lugar, dos conjuntos entre los cuales se pueda establecer una aplicación biyectiva deberían tener el mismo "tamaño". Además, si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ debería ser "finito" y tener exactamente n elementos. Empezamos formalizando esas dos ideas.

Decimos que un conjunto A es *equipotente* a un conjunto B cuando existe una aplicación biyectiva de A sobre B, en cuyo caso escribimos $A \sim B$. Es evidente que cualquier conjunto A verifica que $A \sim A$, puesto que la identidad en A es una aplicación biyectiva de A sobre sí mismo, luego la equipotencia entre conjuntos es un relación *reflexiva*. También es *simétrica*, es decir, $A \sim B$ implica $B \sim A$, pues si $f : A \to B$ es una aplicación biyectiva, su inversa $f^{-1} : B \to A$ también es biyectiva. Finalmente, también es una relación *transitiva*, es decir, de $A \sim B$ y $B \sim C$ se deduce que $A \sim C$, puesto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son aplicaciones biyectivas, la composición $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva.

Así pues, tenemos una relación de equivalencia que invitaría a clasificar conjuntos en clases de equivalencia, de forma que dos conjuntos pertenecerían a una misma clase cuando fuesen equipotentes. No vamos a llegar tan lejos, de hecho el asunto tiene sus problemas desde el punto de vista lógico. Nos limitaremos a trabajar con los conjuntos intuitivamente "más pequeños".

Basándonos en la segunda idea intuitiva que habíamos comentado, pasamos a definir los conjuntos finitos y su número de elementos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ y nos gustaría decir que un conjunto A tiene n elementos cuando $A \sim I_n$. Para que eso sea coherente, a poco que se piense, debemos asegurarnos previamente de lo siguiente:

$$m,n \in \mathbb{N},\ I_m \sim I_n \implies m = n \tag{1}$$

Esto se comprueba fácilmente por inducción y da sentido a las definiciones que siguen.

Decimos que un conjunto A es *finito* cuando, o bien $A = \emptyset$, o bien existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim I_n$. En el segundo caso, en vista de (1) podemos asegurar que n es único y decimos que A tiene n elementos, o que n es el *número de elementos* de A. También es costumbre enumerar los elementos del conjunto A, escribiendo por ejemplo $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. En realidad lo que estamos haciendo es usar cualquier aplicación biyectiva $f : I_n \to A$ y tomar $a_k = f(k)$ para todo $k \in I_n$. Es lógico convenir que *el conjunto vacío tiene* 0 *elementos*. Finalmente, decimos que un conjunto es *infinito* cuando no es finito.

Obviamente, si A es un conjunto finito con n elementos y $B \sim A$, entonces también B es finito y tiene n elementos. Para concluir solamente que B es finito, basta tener una inyección de B en A o una sobreyección de A en B:

- *Si A es un conjunto finito y $f : B \to A$ una aplicación inyectiva, entonces B es finito. Equivalentemente, todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

- *La imagen de un conjunto finito por cualquier aplicación es un conjunto finito, es decir: si A es un conjunto finito y $f : A \to C$ una aplicación, entonces $f(A)$ es finito.*

La primera de estas propiedades se comprueba por inducción sin mucha dificultad y de ella se deduce la segunda aún más fácilmente. Entrando ya en el terreno que más nos interesa, la siguiente propiedad de los conjuntos finitos de números reales se usa con mucha frecuencia:

- *Todo conjunto de números reales, no vacío y finito, tiene máximo y mínimo.*

Para demostrarlo razonamos por inducción sobre el número de elementos, es decir, probamos por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con n elementos tiene máximo y mínimo.

Para $n = 1$ esta afirmación es obvia. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con n elementos tiene máximo y mínimo, y queremos probar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con $n+1$ elementos tiene máximo y mínimo. Sea pues $A \subset \mathbb{R}$ tal que exista una aplicación biyectiva $f : I_{n+1} \to A$.

Tomando $a = f(n+1)$, vemos fácilmente que al restringir f a I_n obtenemos una aplicación biyectiva de I_n sobre el conjunto $A \setminus \{a\}$, luego dicho conjunto tiene n elementos y, por tanto, tiene máximo y mínimo. Poniendo $u = \max(A \setminus \{a\})$ y $v = \min(A \setminus \{a\})$, bastará comparar u y v con a para encontrar el máximo y el mínimo de A. En efecto, si $u > a$, tenemos claramente $u = \max A$; de lo contrario será $u < a$, con lo que $a = \max A$. Análogamente, puede ocurrir que $v < a$ y $v = \min A$, o bien que $v > a$ y $a = \min A$. En cualquier caso, A tiene máximo y mínimo, como se quería. ■

Del resultado anterior deducimos, por ejemplo, que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, puesto que no tiene máximo. Como consecuencia, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos. También podemos precisar mejor algo ya sabido: para $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, el conjunto $A = \{t \in \mathbb{Q} : r < t < s\}$ es infinito, porque no tiene máximo ni mínimo. Debe estar claro que el recíproco del resultado recién demostrado es falso: un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ puede tener máximo y mínimo; es lo que le ocurre, por ejemplo, al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

3.2. Conjuntos numerables

Hasta ahora hemos clasificado los conjuntos finitos atendiendo a su número de elementos. A continuación estudiamos una familia de conjuntos que engloba los finitos y los que pueden verse como los conjuntos infinitos más "pequeños".

Se dice que un conjunto A es *numerable* cuando $A = \emptyset$ o existe una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$. Equivalentemente, A es numerable cuando es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{N}$. En particular, está claro que todo conjunto finito es numerable, pero el recíproco es falso: $\mathbb{N}$ es numerable, pero es infinito.

Los conjuntos infinitos y numerables son precisamente los que ahora nos interesan. Como ejemplo, pensemos en el conjunto de los números *pares*: $P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. La aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to P$, definida por $\sigma(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es biyectiva, luego P es equipotente a $\mathbb{N}$. Informalmente podríamos decir que, contra lo que pudiera parecer, los conjuntos P y $\mathbb{N}$ tienen el mismo "tamaño". Pues bien, veremos enseguida que a todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ les ocurre lo mismo que a P. Más concretamente:

- *Si A es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe una aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to A$, que tiene la siguiente propiedad:*

$$n, m \in \mathbb{N},\ \ n < m \quad \Longrightarrow \quad \sigma(n) < \sigma(m) \tag{2}$$

Intuitivamente hablando, la aplicación σ, que definiremos por inducción, "enumera de forma creciente" los elementos de A. El principio de buena ordenación nos dice que A tiene mínimo, luego podemos definir $\sigma(1) = \min A$. Debemos ahora explicar, para cada $n \in \mathbb{N}$, la forma de obtener $\sigma(n+1)$ a partir de $\sigma(n)$. Como A es infinito, no puede estar contenido en el conjunto finito $\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant \sigma(n)\}$, luego $\{a \in A : \sigma(n) < a\} \neq \emptyset$ y el principio de buena ordenación nos permite definir: $\sigma(n+1) = \min\{a \in A : \sigma(n) < a\}$. Así pues, hemos definido por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to A$, y veremos que σ tiene todas las propiedades deseadas, empezando por comprobar (2).

Es claro que $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otra forma, la afirmación

$$\sigma(n) < \sigma(n+k) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{P_k}$$

es cierta para $k = 1$. Pero suponiendo que se cumple P_k para un $k \in \mathbb{N}$, tenemos obviamente $\sigma(n) < \sigma(n+k) < \sigma(n+k+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego se cumple P_{k+1}. Esto prueba por inducción que se verifica P_k para todo $k \in \mathbb{N}$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$, bastará tomar $k = m - n \in \mathbb{N}$ para obtener que $\sigma(n) < \sigma(m)$.

De (2) se deduce claramente que σ es inyectiva y sólo nos queda probar que también es sobreyectiva. Para ello, razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que $\sigma(\mathbb{N}) \neq A$ para llegar a una contradicción.

El principio de buena ordenación permite tomar $z = \text{mín}\,\big(A \setminus \sigma(\mathbb{N})\big)$. De $z \neq \sigma(1) = \text{mín}\,A$ deducimos que $\text{mín}\,A < z$, luego el conjunto $\{a \in A : a < z\}$ no es vacío. Además es finito, pues está contenido en el conjunto finito $\{n \in \mathbb{N} : n < z\}$, así que dicho conjunto tendrá máximo: sea $x = \text{máx}\{a \in A : a < z\}$. Es claro que $x < z$, luego $x \notin A \setminus \sigma(\mathbb{N})$ y por tanto $x \in \sigma(\mathbb{N})$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \sigma(n)$.

Concluimos probando que $z = \sigma(n+1)$, que es la contradicción buscada. En efecto, si $a \in A$ y $x < a$, deberá ser $a \geqslant z$, pues si fuese $a < z$, la definición de x nos diría que $x \geqslant a$. Puesto que $x < z$, vemos que $z = \text{mín}\{a \in A : x < a\} = \text{mín}\{a \in A : \sigma(n) < a\} = \sigma(n+1)$, como queríamos. ■

Como consecuencia de lo recién demostrado, tenemos para los conjuntos numerables la siguiente dicotomía:

- *Todo conjunto numerable es finito o equipotente a* $\mathbb{N}$.

En efecto, si A es un conjunto no vacío y numerable, hay una aplicación inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$, con lo que $A \sim f(A)$. Si $f(A)$ es finito, también lo será A. En caso contrario, el resultado anterior nos dice que $f(A) \sim \mathbb{N}$, luego también $A \sim \mathbb{N}$. ■

Intuitivamente podríamos decir que $\mathbb{N}$ es el "más pequeño" de todos los conjuntos infinitos.

3.3. Ejemplos de conjuntos numerables

Para completar nuestro estudio preliminar de los conjuntos numerables, vamos a ver que se conservan por determinadas operaciones. En primer lugar, la siguiente afirmación es evidente:

- *Si A es un conjunto numerable y $f : B \to A$ es una aplicación inyectiva, entonces B es numerable. Equivalentemente, todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Estudiemos la imagen de un conjunto numerable mediante cualquier aplicación. Para ello, dado un conjunto B, supongamos que existe una aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{N} \to B$. Entonces, para cada $b \in B$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : g(n) = b\}$ no es vacío, luego tiene mínimo. Ello nos permite definir una aplicación $h : B \to \mathbb{N}$, sin más que escribir

$$h(b) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : g(n) = b\} \quad \forall b \in B$$

Por ser $g\big(h(b)\big) = b$ para todo $b \in B$, vemos que h es inyectiva, luego B es numerable.

Sea ya A un conjunto numerable y $f : A \to C$ una aplicación cualquiera. Si A es finito, $f(A)$ también será finito, luego numerable. Si A es infinito, tendremos $A \sim \mathbb{N}$, es decir, existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Entonces $g = f \circ \varphi$ es una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en $f(A)$. Por lo demostrado anteriormente, $f(A)$ es numerable. Hemos probado lo siguiente:

- *Si A es un conjunto numerable y $f : A \to C$ una aplicación, entonces $f(A)$ es numerable.*

Pasemos ahora a considerar un producto cartesiano:

- *Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.*

Empezamos probando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Para ello basta observar que la aplicación $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\varphi(m,n) = 2^m \cdot 3^n \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$$

es inyectiva. Ello se debe a que, por ser 2 y 3 números primos, la igualdad $2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$, con $m,n,p,q \in \mathbb{N}$, implica que $m = p$ y $n = q$. Si ahora A y B son conjuntos numerables, tenemos sendas aplicaciones inyectivas $g : A \to \mathbb{N}$ y $h : B \to \mathbb{N}$. Definiendo $f(a,b) = \big(g(a), h(b)\big)$ para todo $(a,b) \in A \times B$, obtenemos una aplicación inyectiva $f : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, luego $A \times B$ es numerable, por serlo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

Discutiremos ahora lo que ocurre al unir conjuntos numerables. Veamos un primer caso:

- *Si J es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y, para cada $n \in J$ tenemos un conjunto numerable B_n, entonces el conjunto $B = \bigcup_{n \in J} B_n$ es numerable.*

Para cada $n \in J$ tal que $B_n \neq \emptyset$, existe una aplicación inyectiva $\varphi_n : B_n \to \mathbb{N}$. Construimos entonces una aplicación $\varphi : B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Dado $b \in B$, se tendrá que $b \in B_n$ para algún $n \in J$ y podemos tomar $k = \min\{n \in J : b \in B_n\}$. Como $B_k \neq \emptyset$, podemos definir

$$\varphi(b) = \big(k, \varphi_k(b)\big)$$

Es casi evidente que φ es inyectiva, pero sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, luego B también es numerable. ■

La hipótesis $J \subset \mathbb{N}$ del resultado anterior es una mera formalidad, lo único importante es que tengamos un conjunto numerable:

- *Si I es un conjunto numerable no vacío y, para cada $i \in I$ tenemos un conjunto numerable A_i, entonces el conjunto $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es numerable.*

En efecto, tenemos una aplicación inyectiva $\psi : I \to \mathbb{N}$, que podemos ver como una aplicación biyectiva de I sobre el conjunto $J = \psi(I)$. Tomando $B_n = A_{\psi^{-1}(n)}$ para todo $n \in J$, el resultado anterior nos dice que el conjunto

$$B = \bigcup_{n \in J} B_n = \bigcup_{i \in I} A_i = A$$

es numerable, como queríamos demostrar. ■

El resultado anterior suele enunciarse diciendo simplemente que *toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable*.

Podemos ya dar ejemplos de conjuntos numerables que nos pueden sorprender. En primer lugar, $\mathbb{Z}$ es numerable, pues se obtiene como unión de tres conjuntos numerables: $\mathbb{N}$, $\{0\}$ y $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$. Pero aún podemos decir algo mejor:

- $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

En efecto, una vez sabido que $\mathbb{Z}$ es numerable, podemos asegurar que $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ es numerable. Consideramos entonces la aplicación $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ dada por

$$f(p,m) = \frac{p}{m} \quad \forall p\in\mathbb{Z},\ \forall m\in\mathbb{N}$$

Es evidente que f es sobreyectiva, luego $\mathbb{Q}$ es la imagen de un conjunto numerable por una aplicación. ■

Aún no han aparecido ejemplos de conjuntos no numerables. Es fácil encontrarlos usando la siguiente observación:

- *Si* $\mathcal{P}(A)$ *denota el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto* A*, una aplicación* $f:A\to\mathcal{P}(A)$ *no puede ser sobreyectiva.*

Nótese que, dada una aplicación $f:A\to\mathcal{P}(A)$, para cada $a\in A$ tiene sentido preguntarse si a pertenece o no al conjunto $f(a)$. Podemos pues considerar el conjunto $B=\{a\in A : a\notin f(a)\}$, y bastará probar que B no pertenece a la imagen de f, es decir, que $f(a)\neq B$ para todo $a\in A$. En efecto, dado $a\in A$, pueden ocurrir dos casos: si $a\in B$, la definición de B nos dice que $a\notin f(a)$, luego $f(a)\neq B$; si, por el contrario, $a\notin B$, la definición de B nos dice que $a\in f(a)$ y concluimos igualmente que $f(a)\neq B$. ■

Deducimos claramente del resultado anterior que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable. Más adelante se verá también que $\mathbb{R}$ no es numerable. De hecho, se puede probar que $\mathbb{R}\sim\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3.4. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}\cup\{0\}$ sobre $\mathbb{N}$.

2. Fijado $m\in\mathbb{N}$, dar un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}\setminus I_m$.

3. Dar un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{N}$.

4. Probar que $\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^*\sim\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\sim\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

5. Probar que, para cualesquiera $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, se tiene:

$$\{t\in\mathbb{R} : 0\leqslant t\leqslant 1\}\sim\{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\leqslant b\}$$

6. Usando la aplicación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

comprobar que $\mathbb{R}\sim\{x\in\mathbb{R} : |x|<1\}$.

7. Probar que $\mathbb{R}^+\sim\{x\in\mathbb{R} : 0<x<1\}$, y deducir que $\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^+$.

Tema 4

Supremo e ínfimo. Números irracionales

Completamos en este tema la presentación de los números reales, estudiando las propiedades más importantes de $\mathbb{R}$, las que se deducen del axioma del continuo. Para aplicar cómodamente dicho axioma usaremos las nociones de *supremo* e *ínfimo*, imprescindibles en Análisis.

La existencia de números *irracionales*, es decir, de números reales que no son racionales, será nuestro primer objetivo. Encontraremos de forma explícita una amplia gama de números irracionales.

Después intentaremos entender la distribución de los números racionales e irracionales sobre la recta real. Probaremos que todo número real se puede *aproximar* por números racionales.

Finalmente haremos un breve estudio de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que más utilidad tendrán en lo que sigue, los *intervalos*, y concluiremos probando que $\mathbb{R}$ no es numerable, con lo que quedará claro que los números irracionales abundan mucho más que los racionales.

4.1. Las nociones de supremo e ínfimo

El axioma del continuo tiene un significado intuitivo muy claro, pero casi nunca se usa tal como lo hemos enunciado. Para aplicarlo con más comodidad sirven las nociones que ahora vamos a presentar.

Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, se dice que A está *mayorado* cuando existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geqslant a$ para todo $a \in A$. En tal caso decimos también que y es un *mayorante* de A, así que A está mayorado cuando admite un mayorante. Análogamente decimos que A está *minorado* cuando admite un *minorante*, esto es, un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant a$ para todo $a \in A$. Cuando A está mayorado y también minorado, decimos que A está *acotado*.

Resaltamos la relación entre las nociones de mayorante y máximo, o de minorante y mínimo. La diferencia esencial estriba en que un mayorante o minorante de un conjunto no tiene por qué pertenecer al conjunto. De hecho, si un conjunto A de números reales tiene máximo, entonces $\max A$ es el único elemento de A que es mayorante de A. Análogamente, el mínimo de un conjunto, si existe, es el único minorante de dicho conjunto que pertenece al mismo.

Veamos algunos ejemplos sencillos de las nociones recién introducidas. El conjunto $\mathbb{R}$ no está mayorado ni minorado. El conjunto $\mathbb{R}^-$ está mayorado pero no minorado, el conjunto de sus mayorantes es $\mathbb{R}_0^+$ y ninguno de ellos pertenece a $\mathbb{R}^-$, de ahí que $\mathbb{R}^-$ no tenga máximo. El conjunto $\mathbb{R}_0^+$ no está mayorado, el conjunto de sus minorantes es $\mathbb{R}_0^-$, $0 = \min \mathbb{R}_0^+$ y todos los elementos de $\mathbb{R}^-$ son minorantes de $\mathbb{R}_0^+$ que no le pertenecen. Finalmente, el conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a < 1\}$ está acotado, $\mathbb{R}_0^-$ es el conjunto de los minorantes de A y $0 = \min A$; el conjunto de los mayorantes de A es $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 1\}$ y A no tiene máximo.

Es obvio que si y es un mayorante de un conjunto A y tomamos $z \in \mathbb{R}$ con $z > y$, también z es mayorante de A, pero al sustituir y por z hemos perdido información. Podríamos decir que un mayorante es tanto más útil cuanto más pequeño sea, lo que nos lleva a preguntarnos si el conjunto de los mayorantes tiene mínimo. Análogamente, para un conjunto minorado, podemos preguntarnos si el conjunto de sus minorantes tiene máximo. El axioma del continuo nos permitirá contestar afirmativamente ambas preguntas:

Teorema (Existencia de supremo e ínfimo). *Si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, entonces el conjunto de los mayorantes de A tiene mínimo, que recibe el nombre de* ***supremo*** *del conjunto A y se representa por* $\sup A$.

Análogamente, si A es un conjunto de números reales no vacío y minorado, entonces el conjunto de los minorantes de A tiene máximo, que recibe el nombre de ***ínfimo*** *del conjunto A y se representa por* $\inf A$.

Demostración. En efecto, sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales, y sea B el conjunto de todos los mayorantes de A. Por definición de mayorante tenemos $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. El axioma del continuo nos proporciona un $x \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant x \leqslant b$, también para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Pero entonces está claro que x es mayorante de A y es menor o igual que cualquier otro mayorante de A, luego es el mínimo del conjunto de los mayorantes de A, como queríamos. Para la existencia del ínfimo se razona de manera análoga, usando un conjunto minorado y el conjunto de sus minorantes. ■

Naturalmente, si A es un conjunto de números reales no vacío y acotado, entonces A tiene supremo e ínfimo, siendo evidente que: $\inf A \leqslant \sup A$.

La siguiente observación ayuda a comprender rápidamente la utilidad de las nociones de supremo e ínfimo. Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, está claro que un $y \in \mathbb{R}$ es mayorante de A si, y sólo si, $y \geqslant \sup A$, luego el conjunto de los mayorantes de A es $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \sup A\}$. Por definición de mayorante, tenemos la siguiente equivalencia: $a \leqslant y \ \forall a \in A \iff \sup A \leqslant y$. Obsérvese que a la izquierda de esta equivalencia tenemos tantas desigualdades como elementos de A, pero mirando a la derecha, la noción de supremo nos ha permitido reducir todas esas desigualdades a una sola. Para el ínfimo tenemos por supuesto la equivalencia análoga: dados un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ y un $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x \leqslant a \ \forall a \in A \iff x \leqslant \inf A$.

Aprovechando esta observación, veremos que el teorema anterior es equivalente al axioma del continuo, pero permite comprenderlo mejor. Sean pues A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Claramente, todo elemento de B es mayorante de A y todo elemento de A es minorante de B. En particular, A está mayorado y B está minorado, luego el teorema anterior nos permite considerar el supremo de A y el ínfimo de B.

Más aún, dado $b \in B$, sabemos que b es mayorante de A, luego $\sup A \leqslant b$. Pero entonces vemos que $\sup A$ es minorante de B, luego $\sup A \leqslant \inf B$. Recíprocamente, si $\sup A \leqslant \inf B$, se tendrá $a \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. De entrada, el teorema anterior nos ha permitido resumir la hipótesis sobre A y B en una sola desigualdad: $\sup A \leqslant \inf B$.

La tesis del axioma del continuo, que ahora queremos obtener, nos diría simplemente que existe $x \in \mathbb{R}$ que es a la vez mayorante de A y minorante de B, pero sin darnos más información, sin permitirnos decidir por ejemplo si x es único. Sin embargo, que x sea mayorante de A equivale a que se tenga $\sup A \leqslant x$, y que sea minorante de B equivale a $x \leqslant \inf B$. Así pues la condición que debe cumplir x es, ni más ni menos, que $\sup A \leqslant x \leqslant \inf B$. Por supuesto, al ser $\sup A \leqslant \inf B$, podemos asegurar que tal x existe y hemos deducido el axioma del continuo del teorema anterior. Pero ahora tenemos una información más precisa: si $\sup A = \inf B$, está claro que x es único, pero si $\sup A < \inf B$, conocemos todas las posibles elecciones de x.

4.2. Relación con las nociones de máximo y mínimo

Vamos ahora a explicar con detalle la relación entre las nociones de supremo y máximo, o de ínfimo y mínimo.

Si un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ no está mayorado, no podrá tener máximo ni supremo, así que supongamos que A está mayorado, con lo que sabemos que tiene supremo y podrá tener máximo o no. Si A tiene máximo, entonces $\max A$ es un mayorante de A, pero como $\max A \in A$, todo mayorante de A será mayor o igual que $\max A$, así que $\sup A = \max A$ y en particular, $\sup A \in A$. Recíprocamente, si $\sup A \in A$, entonces $\sup A$ es un mayorante de A que pertenece al conjunto A, luego A tiene máximo, y de nuevo $\max A = \sup A$.

En resumen, para un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y mayorado, hemos comprobado que *A tiene máximo si, y sólo si, $\sup A \in A$, en cuyo caso* $\max A = \sup A$. Análogamente, un conjunto no vacío y minorado $A \subset \mathbb{R}$ *tiene mínimo si, y sólo si,* $\inf A \in A$*, en cuyo caso,* $\min A = \inf A$.

La relación recién comentada explica que usemos el supremo o el ínfimo de un conjunto como sucedáneo de un máximo o mínimo que no existe, o al menos no sabemos si existe. A este respecto puede ser útil un paralelismo que vamos a establecer entre la definición del máximo de un conjunto y una caracterización del supremo que se comprueba sin dificultad. Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\alpha = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \alpha \in A \end{cases} \qquad \alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

Mientras el máximo de un conjunto pertenece al conjunto, el supremo sólo ha de tener elementos del conjunto "tan cerca como se quiera". La comparación entre mínimo e ínfimo es análoga:

$$\alpha = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \alpha \in A \end{cases} \qquad \alpha = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists a \in A : a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Un ejemplo que ya hemos usado anteriormente sirve para ilustrar las nociones de supremo e ínfimo y su relación con las de máximo y mínimo. Para el conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a < 1\}$ se tiene que $\min A = \inf A = 0$, $\sup A = 1 \notin A$ y A no tiene máximo.

4.3. Raíz n-ésima

Como primera aplicación de la existencia de supremo, vamos a probar una importante propiedad de los números reales positivos:

Teorema (Existencia de raíz n-ésima). *Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$. Se dice que y es la **raíz n-ésima** de x, simbólicamente: $y = \sqrt[n]{x}$.*

Demostración. Empezamos con dos observaciones sencillas. La primera es la siguiente:

$$\delta \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \delta \leqslant 1 \implies (1+\delta)^k \leqslant 1 + 3^{k-1}\delta \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Esta desigualdad se comprueba fácilmente por inducción. Para $k = 1$ es evidente, de hecho tenemos la igualdad. Suponiendo que la desigualdad es cierta para un $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}(1+\delta)^{k+1} &= (1+\delta)^k(1+\delta) \leqslant (1+3^{k-1}\delta)(1+\delta)\\ &= 1+3^{k-1}\delta+\delta+3^{k-1}\delta^2 \leqslant 1+3^{k-1}\delta+3^{k-1}\delta+3^{k-1}\delta = 1+3^k\delta\end{aligned}$$

donde hemos usado que $3^{k-1} \geqslant 1$ y que $\delta^2 \leqslant \delta$, por ser $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Tenemos así la desigualdad buscada para el número natural $k+1$.

Fijado ya $n \in \mathbb{N}$, vamos con la segunda observación:

$$\rho \in \mathbb{R},\ \rho > 1 \implies \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : (1+\delta)^n \leqslant \rho \tag{2}$$

En efecto, si $\rho > 1+3^{n-1}$, basta tomar $\delta = 1$ y aplicar la desigualdad (1). Si $\rho \leqslant 1+3^{n-1}$ tomamos $\delta = (\rho-1)/3^{n-1}$, con lo que $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ y (1) nos dice que $(1+\delta)^n \leqslant 1+3^{n-1}\delta = \rho$.

Entramos en la demostración propiamente dicha. Dado $x \in \mathbb{R}^+$, supongamos de momento que $x \geqslant 1$, lo que hace que el conjunto $A = \{z \in \mathbb{R}^+ : z^n \leqslant x\}$ no sea vacío, pues $1 \in A$. Además, para $z \in \mathbb{R}$ con $z > x$, se tiene $z^n > x^n \geqslant x$ y $z \notin A$, luego x es mayorante de A. Podemos pues definir $y = \sup A \geqslant 1$, y veremos que $y^n = x$, comprobando que, tanto si $y^n < x$ como si $y^n > x$, se llega a contradicción.

Suponiendo $y^n < x$ podemos aplicar (2) con $\rho = x/y^n > 1$, obteniendo un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $(1+\delta)^n \leqslant x/y^n$, es decir, $\big((1+\delta)y\big)^n \leqslant x$. Pero entonces la definición del conjunto A nos dice que $(1+\delta)y \in A$, de donde $(1+\delta)y \leqslant \sup A = y$, lo cual es una contradicción, porque $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Suponiendo $y^n > x$ aplicamos también (2) pero con $\rho = y^n/x > 1$, obteniendo un $\delta \in \mathbb{R}^+$ que ahora verifica $(1+\delta)^n \leqslant y^n/x$. Escribiendo para abreviar $w = y/(1+\delta)$, tenemos $x \leqslant w^n$. Para $z \in A$ se tendrá $z^n \leqslant x \leqslant w^n$, luego $z \leqslant w$. Pero entonces w es un mayorante del conjunto A y por tanto $w \geqslant \sup A = y$, es decir, otra vez $y \geqslant (1+\delta)y$, la misma contradicción.

Queda pues comprobado que $y^n = x$, como queríamos.

Si $0 < x < 1$, tenemos $1/x > 1$ luego, por lo ya demostrado, existe $u \in \mathbb{R}^+$ tal que $u^n = 1/x$, y basta tomar $y = 1/u \in \mathbb{R}^+$ para tener $y^n = x$.

Finalmente, la unicidad de y está clara: para $z \in \mathbb{R}^+$ con $z \neq y$, o bien $z < y$, con lo que $z^n < y^n = x$, o bien $z > y$, con lo que $z^n > y^n = x$; en cualquier caso $z^n \neq x$. ■

Si $x \in \mathbb{R}^+$ y $n = 1$, la afirmación del teorema anterior es obvia: $\sqrt[1]{x} = x$. Para $n = 2$ tenemos la *raíz cuadrada* y escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de $\sqrt[2]{x}$. Para $n = 3$ tenemos la *raíz cúbica* $\sqrt[3]{x}$, para $n = 4$ la *raíz cuarta* $\sqrt[4]{x}$, etc. Aunque el teorema anterior sólo nos da estas raíces para $x \in \mathbb{R}^+$, podemos buscar ahora, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, las soluciones reales de la ecuación $y^n = x$. En ciertos casos, esto nos permitirá extender la definición de raíz n-ésima.

Para $x = 0$, dicha ecuación tiene solución única, $y = 0$, luego es coherente definir $\sqrt[n]{0} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}^*$ hemos de distinguir dos casos:

Si n es par, tenemos $(-y)^n = y^n \geqslant 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^-$, la ecuación $y^n = x$ no tiene soluciones reales, mientras que para $x \in \mathbb{R}^+$, tiene exactamente dos: $y = \pm\sqrt[n]{x}$.

Si n es impar, es claro que $y^n \in \mathbb{R}^-$ para todo $y \in \mathbb{R}^-$, así como que $(-y)^n = -y^n$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^+$, la ecuación $y^n = x$ no tiene soluciones negativas, luego $y = \sqrt[n]{x}$ es su única solución real. Para $x \in \mathbb{R}^-$, vemos que la ecuación $y^n = x$ equivale a $(-y)^n = -x$, cuya única solución real es, según hemos visto, $y = -\sqrt[n]{-x}$. Por tanto, es coherente definir $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$, de forma que $\sqrt[n]{x}$ siga siendo la única solución real de la ecuación $y^n = x$.

Resumiendo toda la discusión anterior, para $n \in \mathbb{N}$, la *raíz n-ésima* de un número real x, denotada siempre por $\sqrt[n]{x}$, ha quedado definida en los siguientes casos:

- Cuando n es impar. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ es el único $y \in \mathbb{R}$ que verifica $y^n = x$. Equivalentemente, para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $y^n = x$ si, y sólo si, $y = \sqrt[n]{x}$.

- Cuando n es par y $x \in \mathbb{R}_0^+$, en cuyo caso $\sqrt[n]{x}$ es el único $y \in \mathbb{R}_0^+$ que verifica $y^n = x$, así que la igualdad $y = \sqrt[n]{x}$ equivale a dos condiciones: $y \geqslant 0$ y $x = y^n$.

4.4. Números irracionales

Recordemos que los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*, así que el conjunto de los números irracionales es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para tener ejemplos, empezamos viendo que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. El siguiente razonamiento se atribuye a Hipaso de Metaponto, miembro de la escuela pitagórica (siglo V a.C.).

Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ para llegar a contradicción. Podemos entonces escribir $\sqrt{2} = p/q$ donde $p, q \in \mathbb{N}$ son primos entre sí, de forma que la fracción p/q sea irreducible. Puesto que $p^2 = 2q^2$, vemos que p^2 es par, luego p también es par. Escribiendo entonces $p = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$, tendremos $2q^2 = p^2 = 4h^2$ de donde $q^2 = 2h^2$. Entonces q^2 es par, luego q es par y hemos llegado a una contradicción: p y q son pares, luego no son primos entre sí.

Usando esencialmente el mismo razonamiento, podemos llegar más lejos:

- *Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{m}$ es un número natural o un número irracional.*

Bastará probar que si $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, entonces $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}$. Siguiendo la pista del razonamiento anterior, es natural expresar $\sqrt[n]{m}$ como una fracción irreducible, lo cual es bastante fácil, basta pensar que una fracción es irreducible cuando su denominador es el más pequeño posible.

Por hipótesis, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}\}$ no es vacío, lo que nos permite definir

$$q = \min\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}\}$$

Tomando entonces $p = q\sqrt[n]{m}$, tenemos que $p \in \mathbb{N}$ y obviamente $\sqrt[n]{m} = p/q$. La demostración se concluirá probando que $q = 1$, con lo que $\sqrt[n]{m} = p \in \mathbb{N}$.

Supongamos por el contrario que $q > 1$, en cuyo caso ha de existir un número primo $s > 1$ que divide a q (si el propio q fuese primo tomaríamos $s = q$). Puesto que $p^n = mq^n$ vemos que s divide a p^n, pero al ser s un número primo, esto implica que s divide a p. Escribiendo $p = sh$ y $q = sk$ con $h,k \in \mathbb{N}$ tenemos evidentemente $\sqrt[n]{m} = h/k$, luego $k\sqrt[n]{m} = h \in \mathbb{N}$, es decir, k pertenece al conjunto cuyo mínimo es q, una contradicción: $k \geqslant q = sk > k$. ■

Podemos ya poner en marcha toda una "fábrica" de números irracionales. Fijados $n,k \in \mathbb{N}$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ que verifique $k^n < m < (k+1)^n$ tendremos $k < \sqrt[n]{m} < k+1$ luego $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, así que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por ejemplo, tomando $n = 2$ y $k = 1$ obtenemos que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales, con $k = 2$ obtenemos que $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $m = 5,6,7,8$, y así sucesivamente. Pero también podemos usar raíces cúbicas: $\sqrt[3]{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ que verifique $1 < m < 8$, o bien $8 < m < 27$, etc.

Aún podemos incrementar nuestra colección de números irracionales si pensamos que, tomando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $r,s \in \mathbb{Q}$ con $s \neq 0$, se tiene que $r + s\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En efecto, si fuese $r + s\alpha = t \in \mathbb{Q}$ tendríamos $\alpha = (t-r)/s \in \mathbb{Q}$, una contradicción.

Tomando $s = 1$ en la afirmación anterior, vemos que la suma de un número racional con un irracional es irracional, mientras que tomando $r = 0$ obtenemos que el producto de un número irracional por un racional no nulo es irracional. Conviene aclarar que la suma de dos números irracionales puede ser racional o irracional. Por ejemplo, $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$ son irracionales, pero su suma es 2. Por otra parte, $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. También es claro que el producto de dos números irracionales puede ser racional o irracional.

4.5. Propiedad arquimediana

Es natural preguntarse cómo situar los números irracionales en la recta real, algo que ya hicimos con los racionales, mediante una fácil construcción geométrica. Obtendremos suficiente información como para seguir aceptando la interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta. Sin embargo, conviene comentar que el problema no es nada fácil: para la inmensa mayoría de los números irracionales no es posible construir geométricamente los correspondientes puntos de la recta. Por citar un ejemplo famoso, uno de los problemas clásicos de la geometría, que los matemáticos griegos dejaron sin resolver, el problema de la *duplicación del cubo*, consiste en construir geométricamente un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$ y hoy sabemos que eso no es posible.

Empezamos probando la *propiedad arquimediana* de $\mathbb{R}$: el conjunto $\mathbb{N}$ no está mayorado, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. Su interpretación geométrica es fácil de admitir: al subdividir un segmento en partes iguales, conseguimos segmentos tan pequeños como queramos. El sabio griego Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) obtuvo gran provecho de esta propiedad.

Para $r \in \mathbb{Q}$ es fácil encontrar un número natural mayor que r: o bien $r \leqslant 0 < 1$, o bien $r = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $r < p+1$. Para los irracionales esto no parece tan evidente, pero probaremos fácilmente algo más general:

Teorema. *Sea A un conjunto no vacío de números enteros.*

(i) *Si A está mayorado, entonces A tiene máximo. En particular,* $\mathbb{N}$ *no está mayorado.*
(ii) *Si A está minorado, entonces A tiene mínimo.*
(iii) *Si A está acotado, entonces A es finito.*

Demostración. Para probar (i) usamos la existencia de supremo: sea $z = \sup A$. Como $z-1$ no es mayorante de A, existe $k \in A$ tal que $z-1 < k$. Para $a \in A$, se tiene entonces $a \leqslant z < k+1$ de donde, por ser a y k números enteros, deducimos que $a \leqslant k$. Hemos visto así que $k = \text{máx}\, A$. Está claro ahora que $\mathbb{N}$ no puede estar mayorado, puesto que no tiene máximo. La demostración de (ii) es análoga, usando la existencia de ínfimo. Alternativamente, basta aplicar (i) al conjunto mayorado $B = \{-a : a \in A\}$, y observar que $\text{mín}\, A = -\text{máx}\, B$.

Finalmente, si A está acotado, podemos tomar $p = \text{mín}\, A$ y definir $f(a) = a - p + 1$ para todo $a \in A$, obteniendo una aplicación $f : A \to \mathbb{N}$ que claramente es inyectiva, así que A es equipotente a $f(A)$ y bastará ver que $f(A)$ es finito. Ahora bien, tomando $q = \text{máx}\, A$ tenemos claramente $f(a) \leqslant q - p + 1$ para todo $a \in A$, luego $f(A)$ es finito por estar contenido en el conjunto finito $\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant q - p + 1\}$. ■

Veamos una consecuencia fácil del teorema anterior que será muy útil. Fijado $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$ no es vacío, pues tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $-x < n$, es claro que $-n$ pertenece a dicho conjunto. Tenemos así un conjunto de números enteros no vacío y mayorado, luego tiene máximo, que recibe el nombre de *parte entera* de x, y se denota por $E(x)$. Así pues:

$$E(x) = \text{máx}\,\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tenemos claramente que $E(x) \in \mathbb{Z}$ y $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$. De hecho, es fácil ver que $E(x)$ se caracteriza por esas dos condiciones: es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leqslant x < k+1$.

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ya sabemos algo sobre la situación de x en la recta real: debe ser un punto del segmento de extremos $E(x)$ y $E(x) + 1$. Enseguida afinaremos mucho mejor esta información.

4.6. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Como principal consecuencia de la propiedad arquimediana, vamos a probar que entre cada dos números reales distintos, siempre existe un número racional. Es costumbre referirse a esta propiedad diciendo que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Más concretamente, dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, se dice que D es *denso* en $\mathbb{R}$ cuando, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $d \in D$ tal que $x < d < y$. Pues bien, vamos a probar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y, con poco esfuerzo adicional, veremos que también $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x < y$*, existen* $r \in \mathbb{Q}$ *y* $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *verificando que* $x < r < \beta < y$.

Demostración. Para encontrar r, sea $n = E\big(1/(y-x)\big) + 1$, que claramente verifica $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1/(y-x)$, luego $1/n < y-x$. Tomando ahora $p = E(nx) + 1 \in \mathbb{Z}$, comprobaremos enseguida que $x < p/n < y$, luego para $r = p/n$ tendremos $r \in \mathbb{Q}$ y $x < r < y$. En efecto:

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{p}{n} \leqslant \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y$$

Para encontrar β, aplicamos otra vez lo ya demostrado, para obtener $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s < y$. Fijado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $0 < \alpha < 1$ (por ejemplo $\alpha = \sqrt{2} - 1$), basta tomar $\beta = r + (s-r)\alpha$, para tener claramente $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $r < \beta < s < y$. ■

La interpretación geométrica de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es bien clara: en cualquier segmento cuyos extremos no coincidan, podemos encontrar puntos que se corresponden con números racionales. La siguiente consecuencia inmediata del teorema anterior es importante, pues pone de manifiesto cómo podemos obtener todos los números reales a partir de los racionales:

- *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene:* $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = x = \inf\{s \in \mathbb{Q} : s > x\}$.

Veamos una igualdad, la otra se prueba de forma análoga. El conjunto $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$ no es vacío y x es mayorante de A. Poniendo $z = \sup A$, tenemos $z \leqslant x$, pero si fuese $z < x$, la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ nos daría un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $z < r < x$, pero entonces $r \in A$ y z no sería mayorante de A, una contradicción. Luego $z = x$ como queríamos. ■

Volvamos a la interpretación geométrica de los números reales. Situados sobre la recta los números racionales, queremos convencernos de que cada número real se corresponde con un único punto de la recta, y viceversa. Para que se entienda la explicación que sigue, conviene recordar que el axioma del continuo se interpreta con una propiedad muy intuitiva de la recta, que debemos admitir: la recta no tiene "huecos". Lógicamente, debemos admitir también la interpretación geométrica de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, ya comentada.

Pues bien, dado $x \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A_x = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$ y $B_x = \{s \in \mathbb{Q} : s > x\}$ están situados sobre la recta, de forma que A_x está enteramente a la izquierda de B_x. Como la recta no tiene huecos, entre A_x y B_x ha de haber un punto P de la recta. Pero si Q fuese otro punto en la misma situación, en el segmento de extremos P y Q no habríamos situado números racionales, contra lo que habíamos admitido. Por tanto P es único y es claramente el punto de la recta donde debemos situar el número real x. Es ahora fácil convencerse de que, de esta forma tenemos una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de la recta.

Admitido que todos los puntos de una recta se corresponden con números reales, vemos que la longitud de cualquier segmento puede expresarse como un número real (positivo). De manera más general, en vez de la longitud, podemos considerar otras magnitudes físicas: tiempo, masa, energía, temperatura, carga eléctrica, etc. Los números reales permiten *medir* cualquier cantidad de una magnitud física, es decir, cuantificar la relación entre dicha cantidad y una fija que se toma como unidad. Tenemos así una interpretación *física* de los números reales. Obsérvese que para magnitudes con signo, como la carga eléctrica, necesitamos usar también los números reales negativos.

4.7. Intervalos

Vamos a presentar una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, que usaremos con frecuencia. Reciben el nombre genérico de *intervalos* y tienen una interpretación geométrica bien clara. Además de $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío, que ambos son intervalos, tenemos:

- Los segmentos, o *intervalos acotados*, cuyos *extremos* pueden ser dos puntos cualesquiera $a,b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$. Pueden ser de cuatro tipos:
    - *Cerrado:* $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
    - *Abierto:* $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
    - *Semiabierto por la izquierda:* $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
    - *Semiabierto por la derecha:* $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Las *semirrectas*, cuyo *origen* es un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}$. También hay cuatro tipos:
    - *Hacia la derecha, cerrada:* $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
    - *Hacia la derecha, abierta:* $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
    - *Hacia la izquierda, cerrada:* $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
    - *Hacia la izquierda, abierta:* $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Como es la primera vez que aparecen, debe quedar claro que los símbolos, $-\infty$ y $+\infty$ son exactamente eso, símbolos, sin más significado que el que les demos en cada momento.

Obsérvese que, para $a \in \mathbb{R}$, se tiene $[a,a] = \{a\}$ mientras que $]a,a[= [a,a[=]a,a] = \emptyset$. Se entiende por intervalo *no trivial* un intervalo que no es vacío ni se reduce a un punto. Así pues, los intervalos no triviales son: la recta, todas las semirrectas y todos los segmentos cuyos extremos sean distintos.

Vamos a obtener ahora una útil caracterización de los intervalos, es decir, un criterio que nos permite decidir si un subconjunto de $\mathbb{R}$ es o no un intervalo, independientemente del tipo de intervalo de que se trate. Dicho de forma intuitiva, un subconjunto de $\mathbb{R}$ es un intervalo cuando, siempre que contenga dos puntos distintos, ha de contener todos los intermedios:

- *Dado un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
    (i) *I es un intervalo*
    (ii) *Para cualesquiera $x,y \in I$ con $x < y$, si $z \in \mathbb{R}$ verifica $x < z < y$, entonces $z \in I$.*

La afirmación $(i) \Rightarrow (ii)$ es casi evidente. Si $I = \emptyset$ o $I = \mathbb{R}$, es obvio que I verifica (ii). En otro caso I viene definido por una o dos desigualdades (según se trate de una semirrecta o de un segmento) que pueden ser estrictas o no. Ahora bien, para $x,y \in I$ con $x < y$, si $z \in \mathbb{R}$ verifica $x < z < y$, puesto que tanto x como y cumplen las desigualdades que definen a I, es claro que también z ha de verificarlas, luego $z \in I$. Por ejemplo, en el caso $I = [a,b[$ con $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tendríamos $a \leqslant x < z < y < b$, luego $z \in I$. Los demás casos son análogos.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ verifica la condición (ii) para ver que I es un intervalo, cosa que obviamente ocurre cuando $I = \emptyset$. Para $I \neq \emptyset$ pueden darse cuatro casos, según I esté o no mayorado y minorado:

(a) I no está mayorado ni minorado. Dado $z \in \mathbb{R}$, puesto que z no puede ser minorante ni mayorante de I, existirá un $x \in I$ tal que $x < z$, así como un $y \in I$ tal que $z < y$. Deducimos de (ii) que $z \in I$, pero $z \in \mathbb{R}$ era arbitrario, luego $I = \mathbb{R}$ es un intervalo.

(b) I está minorado pero no mayorado. Tomamos $a = \text{ínf}\, I$ siendo claro que $I \subset [a, +\infty[$. Por otra parte, para $z \in]a, +\infty[$ se tiene que z no puede ser minorante de I, luego existe $x \in I$ tal que $x < z$. Pero z tampoco puede ser mayorante de I luego existe $y \in I$ tal que $z < y$. La condición (ii) nos dice que $z \in I$, con lo que tenemos $]a, +\infty[\subset I \subset [a, +\infty[$. Ahora sólo pueden darse dos casos: o bien $a \in I$, con lo que $I = [a, +\infty[$, o bien $a \notin I$, en cuyo caso $I =]a, +\infty[$. Por tanto, I es una semirrecta hacia la derecha.

(c) I está mayorado pero no minorado. Un razonamiento análogo al caso anterior, tomando $a = \sup I$ prueba que I es una semirrecta hacia la izquierda: $I =]-\infty, a[$ o $I =]-\infty, a]$.

(d) I está acotado. Tomamos $a = \text{ínf}\, I$, $b = \sup I$, para probar que I es un intervalo acotado con extremos a y b. Si $z \in]a, b[$, z no podrá ser mayorante ni minorante de I, luego existirán $x, y \in I$ tales que $x < z < y$; pero entonces $z \in I$, luego $]a, b[\subset I \subset [a, b]$. Esto deja sólo cuatro posibilidades: $I =]a, b[$, $I = [a, b[$, $I =]a, b]$ o $I = [a, b]$. ■

Como ejemplo que ilustra bien la utilidad de la caracterización recién obtenida, podemos probar fácilmente lo siguiente:

- *La intersección de cualquier familia de intervalos es un intervalo. Más concretamente, si Λ es un conjunto no vacío y, para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos un intervalo $I_\lambda \subset \mathbb{R}$, entonces el conjunto $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ es un intervalo.*

En efecto, dados $x, y \in I$, $z \in \mathbb{R}$, con $x < z < y$, debemos ver que $z \in I$. Pero esto es evidente: para todo $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $x, y \in I_\lambda$, luego $z \in I_\lambda$ por ser I_λ un intervalo. ■

4.8. Intervalos encajados

El insigne matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) descubrió una útil propiedad de la recta real que enseguida vamos a demostrar, y la usó para probar que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Principio de los intervalos encajados. *Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos un intervalo cerrado y acotado $J_n = [a_n, b_n]$, con $a_n \leqslant b_n$, y cada uno de estos intervalos contiene al siguiente: $J_{n+1} \subset J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ no es vacía, es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Empezamos observando mediante una obvia inducción, que para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, se tiene $J_{n+k} \subset J_n$ es decir:

$$a_n \leqslant a_{n+k} \leqslant b_{n+k} \leqslant b_n \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Deducimos claramente que $a_i \leqslant b_j$ también para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$. En efecto, si $i < j$, tomamos $n = i$ y $k = j - i$, obteniendo $a_i = a_n \leqslant b_{n+k} = b_j$. Si fuese $i > j$ tomaríamos $n = j$ y $k = i - j$ para obtener $a_i = a_{n+k} \leqslant b_n = b_j$. En el caso $i = j$ tenemos por hipótesis $a_i \leqslant b_i$.

Equivalentemente, si consideramos los conjuntos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. El axioma del continuo nos asegura que existe un $x \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant x \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, es decir, $x \in J_n$. ∎

Veamos ahora cómo usó Cantor el principio anterior para probar que $\mathbb{R}$ no es numerable:

Teorema. *Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable.*

Demostración. Se basará en construir por inducción intervalos encajados, iterando un proceso sencillo: dados un intervalo $I = [a,b]$ con $a < b$ y un $z \in \mathbb{R}$, existe otro intervalo $J = [c,d] \subset I$ con $c < d$, tal que $z \notin J$. Esto es evidente: si $z \notin I$ se puede tomar $J = I$, si $z = a$ se toma $a < c < b$ y $d = b$, mientras que si $a < z \leqslant b$ basta tomar $c = a$ y $a < d < z$. En cualquier caso es $c < d$ y tomando $J = [c,d]$, se tiene $z \notin J \subset I$.

Pues bien, fijados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, para probar que $[a,b]$ no es numerable, veremos que una aplicación $f : \mathbb{N} \to [a,b]$ nunca puede ser sobreyectiva, es decir, $f(\mathbb{N}) \neq [a,b]$.

Empezamos usando el proceso descrito para obtener un intervalo J_1 como sigue:

$$J_1 = [a_1, b_1] \subset [a,b], \;\; a_1 < b_1, \;\; f(1) \notin J_1$$

Suponiendo que, para un $n \in \mathbb{N}$, disponemos ya de un intervalo $J_n = [a_n, b_n]$, con $a_n < b_n$, tal que $f(n) \notin J_n$, construimos el intervalo J_{n+1} de la siguiente forma:

$$J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset J_n, \;\; a_{n+1} < b_{n+1}, \;\; f(n+1) \notin J_{n+1}$$

Por inducción, hemos definido una familia $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos cerrados y acotados, verificando que $J_{n+1} \subset J_n$ y que $f(n) \notin J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El principio de los intervalos encajados nos proporciona un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in J_1 \subset [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x \neq f(n)$, ya que $x \in J_n$ mientras $f(n) \notin J_n$. Así pues, $x \in [a,b] \setminus f(\mathbb{N})$ y f no es sobreyectiva.

Finalmente, si H es un intervalo no trivial, existen $a, b \in H$ tales que $a < b$. Puesto que $[a,b] \subset H$ y sabemos ya que $[a,b]$ no es numerable, H tampoco puede serlo. ∎

4.9. Números algebraicos y trascendentes

Resaltamos que el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los números irracionales no es numerable, pues si lo fuese, también lo sería $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. De hecho, es fácil ver que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es equipotente a $\mathbb{R}$. Intuitivamente, podríamos decir que la inmensa mayoría de los números reales son irracionales.

Conviene resaltar que en realidad, para probar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable, no hemos usado que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Tenemos así una demostración alternativa, no sólo de la existencia, sino de la abundancia de números irracionales.

Aunque parezca sorprendente, a veces podemos probar que un conjunto no es numerable, luego intuitivamente muy grande, sin saber "a priori" que dicho conjunto no es vacío. En lo que sigue, vamos a ilustrar este procedimiento viendo que la inmensa mayoría de los números irracionales no se parecen en nada a los que ya conocemos.

Se dice que un número real es algebraico cuando se puede obtener como solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. Expliquemos con más detalle lo que esto significa:

Por *polinomio con coeficientes enteros* entenderemos una función $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Cuando $a_n \neq 0$ decimos que el polinomio P tiene *grado* n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{P}_n$ al conjunto de los polinomios con coeficientes enteros de grado n y $\mathcal{P}$ será el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros que no sean constantes, es decir, $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Pues bien, se dice que $x \in \mathbb{R}$ es un *número algebraico*, cuando existe un polinomio $P \in \mathcal{P}$ tal que $P(x) = 0$. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de los números algebraicos. Por ejemplo, es evidente que todo número racional es algebraico: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, también es claro que $x = \sqrt[n]{m}$ es un número algebraico, pues se verifica evidentemente que $m - x^n = 0$. A partir de aquí, no es difícil adivinar que todos los números irracionales que hasta ahora conocemos son algebraicos. Se dice que un número real es *trascendente* cuando no es algebraico.

Aunque por el momento no podamos asegurar que existan números trascendentes, vamos a probar que la inmensa mayoría de los números reales son trascendentes:

- *El conjunto de los números algebraicos es numerable. Por tanto, el conjunto de los números trascendentes no es numerable.*

Empezamos viendo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{P}_n$ es numerable. Para mayor comodidad, conviene considerar el conjunto $\mathcal{Q}_n$ de los polinomios de la forma (3), sin exigir que sea $a_n \neq 0$. Así pues $\mathcal{Q}_n$ está formado por todos los polinomios con coeficientes enteros de grado menor o igual que n, incluyendo los polinomios constantes. Puesto que evidentemente $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{Q}_n$, bastará ver que $\mathcal{Q}_n$ es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$, cosa que haremos por inducción.

Para $n = 1$ basta pensar que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable y que, si a cada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ asociamos el polinomio definido por $P(z) = a + bz$ para todo $z \in \mathbb{R}$, obtenemos una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathcal{Q}_1$. Suponiendo que $\mathcal{Q}_n$ es numerable, se tendrá también que $\mathcal{Q}_n \times \mathbb{Z}$ es numerable. Entonces, si a cada $(Q, c) \in \mathcal{Q}_n \times \mathbb{Z}$ asociamos el polinomio definido por $P(z) = Q(z) + c z^{n+1}$ para todo $z \in \mathbb{R}$, obtenemos evidentemente una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{Q}_n \times \mathbb{Z}$ en $\mathcal{Q}_{n+1}$, luego $\mathcal{Q}_{n+1}$ es numerable.

Sabiendo que $\mathcal{P}_n$ es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\mathcal{P}$ es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos numerables. Finalmente, basta tener en cuenta un hecho bien conocido: para cada $P \in \mathcal{P}$, el conjunto $C(P) = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$ es finito. Por tanto, escribiendo $\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} C(P)$, observamos que $\mathbb{A}$ es una unión numerable de conjuntos finitos, luego es numerable. ■

La segunda parte del resultado anterior está muy clara: si el conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}$ de los números trascendentes fuese numerable, entonces $\mathbb{R}=\mathbb{A}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{A})$ también lo sería. Así pues, hemos probado que abundan los números trascendentes, sin dar un sólo ejemplo. De hecho, dar un ejemplo concreto de un número trascendente no es del todo fácil.

4.10. Ejercicios

1. Sea A un conjunto no vacío de números reales. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado puede coincidir con el conjunto de todos los mayorantes de A:

$$a)\ \mathbb{R} \qquad b)\ \emptyset \qquad c)\ \mathbb{R}^+ \qquad d)\ \{x\in\mathbb{R} : 0\leqslant x<1\} \qquad e)\ \{x\in\mathbb{R} : 2\leqslant x\}$$

2. Sean A y B conjuntos de números reales tales que $A\cap B\neq\emptyset$.

   (i) Mostrar con un ejemplo que $A\cap B$ puede estar acotado, aunque A y B no estén mayorados ni minorados.

   (ii) Suponiendo que A y B están mayorados, probar que
   $$\sup(A\cap B)\leqslant \text{mín}\{\sup A\,,\ \sup B\}$$

   (iii) Probar que, si A y B están minorados, entonces
   $$\text{ínf}(A\cap B)\geqslant \text{máx}\{\text{ínf}\,A\,,\ \text{ínf}\,B\}$$

   (iv) Probar que, estando A y B acotados, las dos desigualdades obtenidas en (ii) y (iii) pueden ser estrictas.

3. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales y consideremos el conjunto
$$C=\{a-b : a\in A\,,\, b\in B\}$$
Probar que C está mayorado si, y sólo si, A está mayorado y B está minorado, en cuyo caso se tiene: $\sup(C)=\sup A-\text{ínf}\,B$.

4. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos, y consideremos el conjunto:
$$C=\{ab : a\in A\,,\, b\in B\}$$

   (i) Probar que C está mayorado si, y sólo si, A y B están mayorados, en cuyo caso:
   $$\sup(C)=\sup A\cdot\sup B$$

   (ii) Probar también que $\text{ínf}(C)=\text{ínf}\,A\cdot\text{ínf}\,B$

5. Probar que el conjunto $A=\{x\in\mathbb{R} : |x^2-2x-1|<2|x-2|\}$ está acotado y calcular su supremo y su ínfimo.

6. Probar que:
$$\sqrt{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant 2\sqrt{n}\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

7. Probar por inducción que para $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ se tiene
$$\prod_{k=1}^{n} y_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} y_k \geqslant n$$
dándose la igualdad si, y sólo si, $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$. Deducir la llamada "desigualdad de las medias": para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, se tiene
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
¿Cuándo se da la igualdad?

8. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, se tiene:
$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) < n^n \quad \text{y} \quad n\,! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

9. Probar que $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ es un número irracional.

10. Probar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

11. En cada uno de los siguientes casos, comprobar que el conjunto que se indica está acotado, calcular su supremo e ínfimo, y dilucidar si tiene máximo y mínimo:
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}; \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 3\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$$

12. Comprobar las siguientes igualdades:
$$\sup \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1; \qquad \text{ínf} \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

13. Probar que si I, J son intervalos verificando que $I \cap J \neq \emptyset$, entonces $I \cup J$ es un intervalo.

14. Sean A, B intervalos no vacíos y acotados, tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Probar que
$$\text{ínf}\,(A \cap B) = \text{máx}\,\{\text{ínf}\,A\,,\, \text{ínf}\,B\} \quad \text{y} \quad \sup\,(A \cap B) = \text{mín}\,\{\sup A\,,\, \sup B\}$$
Comparar este resultado con el ejercicio 2.

15. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran los intervalos $I_n =]0, 1/n]$ y $J_n = [n, +\infty[$. Obsérvese que $I_{n+1} \subset I_n$ y $J_{n+1} \subset J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que, sin embargo,
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \emptyset$$
¿Qué relación guardan estos ejemplos con el principio de los intervalos encajados?

Tema 5

Sucesiones convergentes

Aparece por primera vez en este tema una de las nociones fundamentales del Análisis Matemático, la noción de *convergencia*. Estudiamos la convergencia de sucesiones de números reales, que nos permitirá mejorar nuestro conocimiento de la recta real y será posteriormente una herramienta clave para estudiar las funciones reales de variable real.

5.1. Concepto de sucesión

Si A es un conjunto no vacío, llamamos *sucesión* de elementos de A a toda aplicación de $\mathbb{N}$ en A. En particular, una *sucesión de números reales* es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. En lo que sigue trabajaremos siempre con sucesiones de números reales. Cuando hablemos de una sucesión, sin más explicaciones, se entenderá que se trata de una sucesión de números reales.

Es habitual usar para las sucesiones una notación más acorde con su interpretación intuitiva, "números que se suceden", aunque esta idea debe usarse con precaución. Concretamente, si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un número real $x_n = \varphi(n)$ y denotamos entonces por $\{x_n\}$ a la sucesión φ. Una ventaja de esta notación es su brevedad: por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ es la sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(n) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero con sólo escribir $\{1/n\}$ entendemos perfectamente la sucesión a la que nos referimos.

Intuitivamente, vemos una sucesión $\{x_n\}$ como lista infinita de números: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ y se suele decir que estos números son los *términos* de la sucesión: x_1 será el primer término, x_2 el segundo y, en general, x_n será el n-ésimo término de la sucesión. Debe quedar claro que esto es sólo una idea intuitiva, una forma de hablar. No es necesario definir matemáticamente lo que entendemos como "término" de una sucesión.

Conviene resaltar la diferencia entre una sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, y el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \varphi(\mathbb{N})$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$, la imagen de la aplicación φ. Por ejemplo, este conjunto puede muy bien ser finito aunque tengamos una aplicación definida en todo el conjunto $\mathbb{N}$. No hay nada de extraño en que la imagen de una aplicación definida en un conjunto infinito sea un conjunto finito.

Veamos algunos ejemplos en los que, junto a una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, damos la notación con la que se representa y la idea intuitiva que nos sugiere:

- Una sucesión puede ser *constante*. Más concretamente, fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos tomar $\varphi(n) = \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos una sucesión muy aburrida: $\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \ldots$
- La *sucesión de los números naturales* viene definida por $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se denota simplemente por $\{n\}$. Intuitivamente pensamos en: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$
- Ya ha aparecido anteriormente la *sucesión de los inversos de los números naturales*, es decir, la sucesión $\{1/n\}$ definida por $\varphi(n) = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Visualizamos esta sucesión en la forma: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$
- Las *potencias* de -1 permiten considerar la sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(n) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que se denota simplemente por $\{(-1)^n\}$. Intuitivamente pensamos en: $-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$

5.2. Sucesiones convergentes

La definición que sigue es una de las más útiles e importantes en Matemáticas. Preferimos exponerla formalmente y luego comentarla detenidamente para su mejor comprensión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Decimos que $\{x_n\}$ *converge* a x, y escribimos $\{x_n\} \to x$, cuando, para cada número real y positivo ε, puede encontrarse un número natural m, de forma que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ que verifique $n \geqslant m$, se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$. Así pues, simbólicamente:

$$\{x_n\} \to x \iff \left[\, \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \;\Rightarrow\; |x_n - x| < \varepsilon \,\right] \qquad (*)$$

Nótese que escribimos $\varepsilon > 0$ en lugar de $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se sobreentiende que ε es un número real y se enfatiza que es positivo. Igualmente se sobreentiende que $n \in \mathbb{N}$ y se enfatiza que $n \geqslant m$.

Ante todo conviene resaltar que el número natural m que aparece en $(*)$ dependerá casi siempre del número positivo ε mencionado previamente. Para probar que $\{x_n\} \to x$ debemos precisamente encontrar alguna regla que a cada número positivo ε asocie un número natural m con la propiedad requerida: que se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$.

La desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ es tanto más exigente cuanto más pequeño sea ε y equivale a que se tenga $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Por tanto, en $(*)$ se afirma que, por muy pequeño que sea $\varepsilon > 0$, el intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contiene a todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante o, si se quiere, a todos los términos suficientemente avanzados.

Dicho de otra forma, como $|x_n - x|$ es la distancia entre los puntos x_n y x de la recta real, tenemos que $\{x_n\} \to x$ cuando podemos conseguir que x_n esté tan cerca de x como queramos (a distancia menor que cualquier $\varepsilon > 0$ que hayamos fijado previamente), sin más que tomar n suficientemente grande ($n \geqslant m$ para un cierto $m \in \mathbb{N}$ que usualmente dependerá de ε). Así pues, los términos de la sucesión "se aproximan" al número real x, de una forma muy concreta.

Podemos también reformular la definición de convergencia, pensando en los términos que no verifican la desigualdad que en ella aparece. Más concretamente, para cada $\varepsilon > 0$ podemos pensar en el conjunto $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}$. Entonces:

Decir que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$ equivale a decir que $A_\varepsilon \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$. Que exista un $m \in \mathbb{N}$ verificando la inclusión anterior es tanto como decir que el conjunto A_ε es finito. En resumen, tenemos que $\{x_n\} \to x$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto A_ε es finito. Esta forma de expresar la convergencia es útil cuando queremos negarla: decir que $\{x_n\}$ no converge a x equivale a decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que A_ε es infinito.

Lógicamente, diremos que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es *convergente* cuando exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_n\} \to x$. Veamos que entonces x es único:

- *Dados $x, z \in \mathbb{R}$, si una sucesión $\{x_n\}$ converge a x y también a z, entonces $x = z$.*

Para probarlo, dado $\varepsilon > 0$, usamos la definición de convergencia para encontrar $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m_1$ y $|x_n - z| < \varepsilon$ para $n \geqslant m_2$. Tomando $n = \max\{m_1, m_2\}$, tenemos claramente

$$|x - z| = |x - x_n + x_n - z| \leqslant |x - x_n| + |x_n - z| < 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, deducimos claramente que $|x - z| \leqslant 0$, es decir, $x = z$. ■

Podemos ya usar la siguiente nomenclatura: si una sucesión $\{x_n\}$ converge a un $x \in \mathbb{R}$, se dice que x es el *límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y se escribe $x = \lim\{x_n\}$, o bien, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Veamos algunos ejemplos de sucesiones convergentes y de sucesiones no convergentes:

- Toda sucesión constante es convergente. Si, para $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos $x_n = \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, la desigualdad $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Nótese que en este caso podemos tomar siempre $m = 1$, sea cual sea ε. En cualquier otro caso, la situación no será tan favorable.

- Veamos que $\{1/n\} \to 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1/\varepsilon$ y, para $n \geqslant m$, tendremos $|1/n - 0| = 1/n \leqslant 1/m < \varepsilon$. Resaltamos la regla que permite asociar a cada número positivo ε el número natural m requerido: basta que sea $m > 1/\varepsilon$; por ejemplo, podemos tomar $m = E(1/\varepsilon) + 1$. Obsérvese que, recíprocamente, de $\{1/n\} \to 0$, se deduce la propiedad arquimediana.

- La sucesión $\{n\}$ no es convergente. En efecto, si para algún $x \in \mathbb{R}$ se tuviese $\{n\} \to x$, tomando $\varepsilon = 1$ encontraríamos $m \in \mathbb{N}$ verificando que $|n - x| < 1$, y por tanto $n < x + 1$, para $n \geqslant m$; pero esto es imposible, porque entonces $x + 1$ sería un mayorante de $\mathbb{N}$, contradiciendo la propiedad arquimediana.

- La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente. Razonando de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que $\{(-1)^n\} \to x \in \mathbb{R}$ y tomemos otra vez $\varepsilon = 1$ para obtener $m \in \mathbb{N}$ tal que $|(-1)^n - x| < 1$ para $n \geqslant m$. Usando $n = 2m$ tenemos $|1 - x| < 1$, de donde $x > 0$. Pero también podemos tomar $n = 2m + 1$ para obtener $|(-1) - x| = |x + 1| < 1$, de donde $x < 0$ y hemos llegado a una contradicción.

5.3. Sucesiones parciales

Acabamos de ver que la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente, pero es intuitivamente claro que con los términos que ocupan un lugar impar podemos formar una sucesión convergente, e igual ocurre con los términos que ocupan un lugar par. Pues bien, vamos a formalizar la idea intuitiva consistente en seleccionar términos de una sucesión dada, para obtener una nueva sucesión, de la que diremos que es una "sucesión parcial" de la de partida.

Veamos pues en qué consiste la idea de seleccionar términos de una sucesión. Si llamamos $\sigma(n)$ al lugar que ocupa en la sucesión de partida el n-ésimo término de la sucesión parcial, está claro que nuestra selección queda determinada por una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Siguiendo con nuestra idea intuitiva, el $(n+1)$-ésimo término de la sucesión parcial debe ocupar en la sucesión de partida un lugar posterior al n-ésimo, es decir, debe ser $\sigma(n) < \sigma(n+1)$, de forma que los términos que vayamos seleccionando no aparezcan en la sucesión parcial permutados ni repetidos. Finalmente es claro que si $\{x_n\}$ era la sucesión de partida, la selección descrita mediante la aplicación σ produce la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$. Quedan así explicadas las definiciones que hacemos a continuación.

Se dice que una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es *estrictamente creciente*, cuando verifica que

$$\sigma(n) < \sigma(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones, se dice que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ cuando existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$y_n = x_{\sigma(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dicho de forma equivalente, las sucesiones parciales de una sucesión $\{x_n\}$ son todas las de la forma $\{x_{\sigma(n)}\}$, donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente. Obsérvese que la definición anterior tiene perfecto sentido para sucesiones de elementos de un conjunto arbitrario, aunque aquí sólo nos interesen las de números reales.

Para presentar ejemplos de sucesiones parciales basta mostrar aplicaciones estrictamente crecientes de $\mathbb{N}$ en sí mismo, cosa bien fácil. En los ejemplos que siguen, $\{x_n\}$ puede ser cualquier sucesión de números reales y explicamos la selección de sus términos determinada por la aplicación σ considerada, que siempre es estrictamente creciente.

- Tomando $\sigma(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\}$ es una sucesión parcial de sí misma. Obviamente, una forma de seleccionar términos de una sucesión consiste en seleccionarlos todos, aunque este ejemplo de sucesión parcial sea poco interesante.

- Fijado $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $\sigma(n) = k+n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Aparece así la sucesión $\{x_{k+n}\}$, que es la sucesión parcial de $\{x_n\}$ obtenida al suprimir los k primeros términos y conservar los restantes. Intuitivamente: $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+n}, \ldots$

- Tomando $\sigma(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la sucesión parcial $\{x_{2n}\}$, en la que aparecen los términos de $\{x_n\}$ que ocupan los lugares pares: $x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$

- Para elegir los términos en lugares impares, tomamos $\sigma(n) = 2n-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que obtenemos la sucesión parcial $\{x_{2n-1}\}$. Intuitivamente: $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}, \ldots$

Vamos a ver enseguida que la convergencia de una sucesión obliga a todas sus sucesiones parciales a converger al mismo límite. Conviene hacer previamente la siguiente observación, sencilla pero importante:

- *Si* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es estrictamente creciente, entonces* $\sigma(n) \geqslant n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

La prueba por inducción es clara: $\sigma(1) \in \mathbb{N}$, luego $\sigma(1) \geqslant 1$ y, suponiendo $\sigma(n) \geqslant n$, tenemos $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geqslant n$, luego $\sigma(n+1) \geqslant n+1$. Podemos ya probar fácilmente lo siguiente:

- *Si* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *es una sucesión parcial de una sucesión convergente* $\{x_n\}$*, entonces* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *también es convergente, con* $\operatorname{lím}\{x_{\sigma(n)}\} = \operatorname{lím}\{x_n\}$.

Si $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Pero entonces, la observación previa nos dice que para $n \geqslant m$ tenemos también $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, luego $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$. Hemos demostrado que $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$, como se quería. Nótese que, para conseguir la convergencia de cualquier sucesión parcial, podemos asociar a cada $\varepsilon > 0$ el mismo $m \in \mathbb{N}$ que nos proporciona la convergencia de la sucesión de partida. ■

Como clara consecuencia, si $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial que no es convergente, o admite dos sucesiones parciales que convergen a límites diferentes, entonces $\{x_n\}$ no puede ser convergente. Por ejemplo, el hecho ya conocido de que la sucesión $\{(-1)^n\}$ no converge se puede explicar rápidamente, observando lo que les ocurre a dos sucesiones parciales suyas: $\{(-1)^{2n}\} \to 1$ y $\{(-1)^{2n-1}\} \to -1$.

En ocasiones, se puede deducir la convergencia de una sucesión usando la convergencia de una o varias sucesiones parciales. En lugar de hacer un enunciado general, que no será difícil adivinar, consideramos un par de ejemplos ilustrativos. El primero nos dice que la convergencia de una sucesión no depende para nada de sus primeros k términos, por muy grande que sea k:

- *Fijado* $k \in \mathbb{N}$*, para toda sucesión* $\{x_n\}$ *y todo* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene:*

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_{k+n}\} \to x$$

Basta obviamente probar la implicación hacia la izquierda. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{k+n} - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Para $n \geqslant k+m$ será $n-k \geqslant m$ luego $|x_n - x| = |x_{k+n-k} - x| < \varepsilon$. ■

En un segundo ejemplo, usaremos dos sucesiones parciales, las formadas por los términos pares y por los impares:

- *Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *y todo* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene:*

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_{2n}\} \to x \quad \text{y} \quad \{x_{2n-1}\} \to x$$

De nuevo basta probar la implicación hacia la izquierda. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{2k} - x| < \varepsilon$ para $k \geqslant m_1$ y $|x_{2k-1} - x| < \varepsilon$ para $k \geqslant m_2$. Tomando $m = \operatorname{máx}\{2m_1, 2m_2 - 1\}$, para $n \geqslant m$ podrán darse dos casos. Si n es par, tendremos $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant m_1$, luego $|x_n - x| = |x_{2k} - x| < \varepsilon$. Si n es impar, será $n = 2k-1$ con $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant m_2$, con lo que obtenemos también $|x_n - x| = |x_{2k-1} - x| < \varepsilon$. ■

5.4. Sucesiones acotadas

Ya se ha comentado la distinción que debemos tener presente entre una sucesión $\{x_n\}$ y el conjunto de sus términos $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ello no impide, como vamos a hacer ahora, considerar propiedades de una sucesión que sólo dependen del conjunto de sus términos:

Decimos que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ está *mayorada o minorada* cuando lo esté el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Simbólicamente:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \text{ minorada} &\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant x_n \;\; \forall n \in \mathbb{N} \\ \{x_n\} \text{ mayorada} &\iff \exists\, \beta \in \mathbb{R} : x_n \leqslant \beta \;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Naturalmente decimos que la sucesión $\{x_n\}$ está *acotada* cuando está mayorada y minorada. Es fácil ver que esto equivale a que la sucesión $\{|x_n|\}$ esté mayorada:

$$\{x_n\} \text{ acotada} \iff \exists\, K \in \mathbb{R} : |x_n| \leqslant K \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Rápidamente relacionamos convergencia y acotación:

- *Toda sucesión convergente está acotada.*

La demostración no es difícil. Si $\{x_n\} \to x$, la definición de convergencia nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \geqslant m$. Tenemos por tanto:

$$n \geqslant m \implies |x_n| = |x_n - x + x| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Por otra parte, el conjunto $\{|x_n| : n \leqslant m\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y finito, luego tendrá un máximo, digamos α. Tenemos claramente $|x_n| \leqslant \text{máx}\{1 + |x|, \alpha\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la sucesión $\{x_n\}$ está acotada, como queríamos demostrar. ■

La implicación recíproca es falsa: la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada pero no es convergente.

Conviene resaltar una idea que ha aparecido claramente en la demostración anterior y que se usa muy a menudo. Dada una sucesión $\{x_n\}$, si para cierto $m \in \mathbb{N}$ probamos que el conjunto $\{x_n : n \geqslant m\}$ está acotado, entonces podemos asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada.

5.5. Operaciones con sucesiones convergentes

Vamos a presentar ahora algunas reglas prácticas para el cálculo de límites. Empezamos con una observación inmediata: la convergencia de una sucesión siempre equivale a que otra sucesión, de números no negativos, converja a cero.

- *Dada una sucesión $\{x_n\}$, para $x \in \mathbb{R}$, se tiene:* $\{x_n\} \to x \iff \{|x_n - x|\} \to 0$.

En efecto, basta usar la definición de convergencia para ver que ambas afirmaciones se expresan exactamente de la misma forma. En el caso particular $x = 0$ tenemos:

- *Dada una sucesión* $\{x_n\}$*, se tiene:* $\{x_n\} \to 0 \iff \{|x_n|\} \to 0$.

Conviene observar que la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ siempre implica la de $\{|x_n|\}$:

- *Dada una sucesión* $\{x_n\}$*, para* $x \in \mathbb{R}$*, se tiene:* $\{x_n\} \to x \implies \{|x_n|\} \to |x|$.

En efecto, basta tener en cuenta que $\big||x_n| - |x|\big| \leqslant |x_n - x|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En general, el recíproco no es cierto: tomando $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es evidente que $\{|x_n|\} \to 1$, pero la sucesión $\{x_n\}$ no es convergente.

Pasamos a discutir la relación entre la convergencia de sucesiones y la estructura de $\mathbb{R}$: suma, producto y orden. Para la suma, la situación es diáfana:

- *Si* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *son sucesiones convergentes, entonces* $\{x_n + y_n\}$ *también es convergente y se verifica que* $\lim\{x_n + y_n\} = \lim\{x_n\} + \lim\{y_n\}$.

En efecto, suponiendo que $\{x_n\} \to x$ y que $\{y_n\} \to y$, debemos probar que $\{x_n + y_n\} \to x + y$. Dado $\varepsilon > 0$ existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x| < \varepsilon/2$ para $n \geqslant m_1$, y $|y_n - y| < \varepsilon/2$ para $n \geqslant m_2$. Entonces, tomando $m = \max\{m_1, m_2\}$, para $n \geqslant m$ tenemos

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Para el producto tendremos un resultado análogo, pero conviene probar antes lo siguiente:

- *Si una sucesión* $\{y_n\}$ *está acotada y* $\{z_n\} \to 0$*, entonces* $\{y_n z_n\} \to 0$.

En efecto, existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $|y_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que $|z_n| < \varepsilon/K$ para $n \geqslant m$, luego para $n \geqslant m$ tenemos

$$|y_n z_n| = |y_n|\,|z_n| \leqslant K\,|z_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Por ejemplo, si $\{z_n\} \to 0$, tendremos también $\{(-1)^n z_n\} \to 0$, pues la sucesión $\{(-1)^n\}$ está acotada. Lo que ocurre con un producto de sucesiones convergentes es ya fácil de ver:

- *Si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *son sucesiones convergentes, entonces la sucesión* $\{x_n y_n\}$ *es convergente y se verifica que* $\lim\{x_n y_n\} = \lim\{x_n\} \cdot \lim\{y_n\}$.

Suponiendo que $\{x_n\} \to x$ y que $\{y_n\} \to y$, debemos probar que $\{x_n y_n\} \to xy$. Empezamos observando que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x y_n + x y_n - xy = (x_n - x) y_n + x(y_n - y)$$

Puesto que $\{x_n - x\} \to 0$, e $\{y_n\}$ está acotada (por ser convergente), será $\{(x_n - x)y_n\} \to 0$, pero también es claro que $\{x(y_n - y)\} \to 0$. El resultado anterior sobre sumas de sucesiones convergentes nos dice que $\{(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\} \to 0$, es decir $\{x_n y_n - xy\} \to 0$, de donde $\{x_n y_n\} \to xy$, como queríamos. $\blacksquare$

Para estudiar un cociente de dos sucesiones convergentes, bastará ver lo que ocurre al invertir los términos de una sucesión convergente:

- *Si* $x_n \in \mathbb{R}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^*$*, entonces* $\{1/x_n\} \to 1/x$.

Puesto que $(1/x_n) - (1/x) = (x - x_n)/(x_n x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, bastará ver que la sucesión $\{1/x_n\}$ está acotada. Tomando $\varepsilon = |x|/2 > 0$ encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_n - x| < |x|/2$ para $n \geqslant m$. Entonces, también para $n \geqslant m$, tenemos

$$|x_n| = |x - (x - x_n)| \geqslant |x| - |x - x_n| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}, \quad \text{luego} \quad \left|\frac{1}{x_n}\right| \leqslant \frac{2}{|x|}$$

Deducimos que $\{1/x_n\}$ está acotada, como se quería. ■

La hipótesis $x \in \mathbb{R}^*$ del resultado anterior es esencial. Si $x = 0$, entonces la sucesión $\{1/x_n\}$ no está acotada, pues si lo estuviera, tendríamos $\{x_n (1/x_n)\} \to 0$, lo cual es absurdo. Lo que se puede afirmar sobre un cociente de sucesiones convergentes es ya inmediato:

- *Sea* $\{y_n\}$ *una sucesión convergente y* $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales no nulos que converja a un número real no nulo. Entonces la sucesión* $\{y_n/x_n\}$ *es convergente y se verifica que:* $\text{lím}\{y_n/x_n\} = \text{lím}\{y_n\}/\text{lím}\{x_n\}$

Pasamos ahora a discutir brevemente la relación entre la convergencia de sucesiones y el orden de los números reales. Dicho de forma más intuitiva, queremos saber si las desigualdades entre los límites de dos sucesiones convergentes dan lugar a desigualdades entre los términos y viceversa. La respuesta es bien sencilla:

- *Sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucesiones convergentes. Si* $\text{lím}\{y_n\} < \text{lím}\{x_n\}$*, entonces existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n < x_n$ *para* $n \geqslant m$.

Para comprobarlo, sea $y = \text{lím}\{y_n\} < \text{lím}\{x_n\} = x$. Tomamos $\varepsilon = (x - y)/2$ y encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ y también $|y_n - y| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. Entonces, para $n \geqslant m$ tenemos claramente

$$y_n < y + \varepsilon = y + \frac{x - y}{2} = \frac{x + y}{2} = x - \frac{x - y}{2} = x - \varepsilon < x_n$$ ■

Si queremos que las desigualdades entre los términos de las dos sucesiones se reflejen en sus límites, basta enunciar equivalentemente el último resultado:

- *Sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucesiones convergentes. Si el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ *es infinito, entonces:* $\text{lím}\{x_n\} \leqslant \text{lím}\{y_n\}$.

En efecto, si fuese $\text{lím}\{y_n\} < \text{lím}\{x_n\}$, el resultado anterior nos daría un $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para $n \geqslant m$, luego el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ sería finito. ■

Obviamente, si $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tendrá también $\text{lím}\{x_n\} \leqslant \text{lím}\{y_n\}$. Conviene sin embargo resaltar que de la desigualdad estricta $x_n < y_n$, aunque sea válida para todo $n \in \mathbb{N}$, no podemos deducir $\text{lím}\{x_n\} < \text{lím}\{y_n\}$. Basta observar, por ejemplo, lo que ocurre cuando $x_n = 0$, $y_n = 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Destacamos el caso particular del resultado anterior que se utiliza con más frecuencia.

- *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión convergente y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  (i) *Si el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant \beta\}$ *es infinito, entonces* $\lim\{x_n\} \leqslant \beta$.
  (ii) *Si el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : \alpha \leqslant x_n\}$ *es infinito, entonces* $\alpha \leqslant \lim\{x_n\}$.
  (iii) *En particular, se tiene:* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \lim\{x_n\} \leqslant \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En los resultados anteriores se supone que las sucesiones involucradas son convergentes. En la situación que ahora vamos a considerar se consigue la convergencia de una sucesión que, por así decirlo, está "emparedada" entre dos sucesiones convergentes al mismo límite.

- *Sean* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ *sucesiones tales que* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $\{x_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *convergen a un mismo límite, entonces* $\{y_n\}$ *también converge a dicho límite.*

En efecto, sea $x = \lim\{x_n\} = \lim\{z_n\}$ y vamos a probar que $\{y_n\} \to x$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $|x_n - x| < \varepsilon$ y también $|z_n - x| < \varepsilon$. Entonces, para $n \geqslant m$ será $x - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < x + \varepsilon$, luego $|y_n - x| < \varepsilon$, como queríamos. ■

Obsérvese que el resultado anterior sigue siendo cierto si se supone solamente que la doble desigualdad $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ se verifica para todo n suficientemente grande. Sin embargo, para asegurar la convergencia de $\{y_n\}$, no basta que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n \leqslant z_n\}$ sea infinito.

Concluimos este tema mostrando que algunas propiedades de $\mathbb{R}$ pueden interpretarse de forma muy clara e intuitiva, mediante la convergencia de sucesiones. Un primer ejemplo ya se ha comentado: la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ equivale a decir que $\{1/n\} \to 0$. La siguiente observación clarifica las nociones de supremo e ínfimo:

- *Si* A *es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, existe una sucesión* $\{x_n\}$ *de elementos de* A *tal que* $\{x_n\} \to \sup A$. *Análogamente, si* A *es no vacío y minorado, existe una sucesión* $\{y_n\}$ *de elementos de* A *tal que* $\{y_n\} \to \inf A$.

En efecto, si A está mayorado, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in A$ verificando que

$$\sup A - (1/n) < x_n \leqslant \sup A$$

Formamos así una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que evidentemente converge a $\sup A$. Para el ínfimo de un conjunto minorado se razona de forma análoga. ■

La relación entre supremo y máximo, o entre ínfimo y mínimo, puede entenderse ahora con más claridad. El supremo de un conjunto no vacío y mayorado, puede no pertenecer al conjunto, pero siempre es el límite de una sucesión de puntos del conjunto y, de hecho, es el único mayorante del conjunto que tiene esa propiedad. Análogamente, el ínfimo de un conjunto no vacío y minorado es el único minorante del conjunto que puede obtenerse como límite de una sucesión de puntos del conjunto. Por ejemplo, es ahora evidente que $0 = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Podemos también interpretar la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Recordando que

$$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = x = \inf\{s \in \mathbb{Q} : s > x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

deducimos claramente lo siguiente:

- *Para todo $x \in \mathbb{R}$, existen sucesiones $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ de números racionales, tales que:*

$$r_n < x < s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x = \text{lím}\{r_n\} = \text{lím}\{s_n\}$$

La misma idea puede usarse con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ obteniendo, para cada $x \in \mathbb{R}$, sendas sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ de números irracionales que convergen a x y verifican que $\alpha_n < x < \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se puede hacer el mismo razonamiento con cualquier conjunto denso en $\mathbb{R}$.

5.6. Ejercicios

1. Probar que un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, existe una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A tal que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En particular, $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ para conveniente sucesión $\{r_n\}$. ¿Puede $\{r_n\}$ ser convergente?

2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$, definir una sucesión $\{x_n\}$ de puntos del conjunto $\{\alpha, \beta\}$ tal que los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : x_n = \alpha\}$ y $\{n \in \mathbb{N} : x_n = \beta\}$ sean infinitos.

3. Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, pongamos $\{y_n\} \preceq \{x_n\}$ cuando $\{y_n\}$ sea sucesión parcial de $\{x_n\}$. Probar que la relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva. ¿Es antisimétrica?

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación inyectiva. Probar que $\{x_{\phi(n)}\}$ converge al mismo límite que $\{x_n\}$. ¿Es $\{x_{\phi(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$?

5. Probar que las sucesiones $\{1/n^2\}$, $\{1/2^n\}$ y $\{1/n!\}$ convergen a cero.

6. En cada uno de los siguientes casos, probar que la sucesión dada es convergente y calcular su límite:

$$\text{(a)} \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right\} \qquad \text{(b)} \left\{ \frac{2n+5(-1)^n}{n+1} \right\} \qquad \text{(c)} \left\{ \frac{(-1)^n n^2 - 3n + 4}{n^3+1} \right\}$$

7. Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, probar que D es denso en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{d_n\}$ verificando que $d_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{d_n\} \to x$.

Tema 6

Sucesiones monótonas

Vamos a discutir ahora una importante propiedad de ciertas sucesiones de números reales: la monotonía. Como primer resultado básico, probaremos que toda sucesión monótona y acotada es convergente, obteniendo un método útil para probar la convergencia de ciertas sucesiones. Deduciremos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, que es sin duda el resultado más importante sobre convergencia de sucesiones. De él se deduce el teorema de "complitud" de $\mathbb{R}$, que nos da una auténtica caracterización de las sucesiones convergentes. Finalmente, las nociones de límite superior e inferior, además de tener utilidad en sí mismas, nos permitirán precisar mejor el contenido del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

6.1. Monotonía

La siguiente definición es muy intuitiva. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

- *Creciente,* cuando: $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- *Decreciente,* cuando: $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- *Monótona,* cuando es creciente o decreciente.

Por ejemplo, una sucesión constante es a la vez creciente y decreciente. Las sucesiones $\{n\}$ y $\{-1/n\}$ son crecientes, mientras que $\{-n\}$ y $\{1/n\}$ son decrecientes. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es monótona.

Observamos también que una sucesión $\{x_n\}$ es decreciente si, y sólo si $\{-x_n\}$ es creciente, así que trabajaremos principalmente con sucesiones crecientes. Intuitivamente es claro que, para una sucesión creciente, cada término es menor o igual que cualquier otro posterior:

- *Si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente, para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leqslant n$, se tiene $x_m \leqslant x_n$.*

La prueba por inducción es evidente. En particular, toda sucesión creciente $\{x_n\}$ verifica que $x_1 \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego está minorada.

Claramente, si $\{x_n\}$ es decreciente, para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leqslant n$, tendremos $x_m \geqslant x_n$ y, en particular, $x_1 \geqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}$ está mayorada. Vemos también ahora que, si una sucesión es a la vez creciente y decreciente, ha de ser constante.

Usando la existencia de supremo e ínfimo, probamos enseguida el resultado clave de este tema, que muestra la utilidad de la monotonía para estudiar la convergencia de una sucesión.

Teorema. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. De hecho:*

(i) *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión creciente y mayorada, se tiene* $\lim\{x_n\} = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$
(ii) *Si* $\{x_n\}$ *es decreciente y minorada, entonces* $\lim\{x_n\} = \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$

Demostración. Si $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, pongamos $\beta = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, para probar que $\{x_n\} \to \beta$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Pero entonces, para $n \geqslant m$ se tendrá $\beta - \varepsilon < x_m \leqslant x_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$, de donde $|x_n - \beta| < \varepsilon$, como queríamos.

Para una sucesión $\{x_n\}$ decreciente y minorada, se puede razonar de manera análoga, o bien aplicar lo ya demostrado a la sucesión $\{-x_n\}$ que es creciente y mayorada. ■

Ilustramos el teorema anterior con un ejemplo importante:

- *Para* $x \in \mathbb{R}$*, con* $|x| < 1$*, se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

Puesto que $|x^n| = |x|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $y = |x|$, bastará comprobar que $\{y^n\} \to 0$. Al ser $0 \leqslant y < 1$, tenemos $0 \leqslant y^{n+1} \leqslant y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión $\{y^n\}$ es decreciente y minorada, luego convergente. Pongamos de momento $L = \lim\{y^n\}$, para probar que $L = 0$. Como $\{y^{n+1}\}$ es una sucesión parcial de $\{y^n\}$, será también $\{y^{n+1}\} \to L$ pero, por otra parte tenemos que $\{y^{n+1}\} = \{y^n y\} \to Ly$, luego $L = Ly$. Siendo $y \neq 1$, no queda más salida que $L = 0$, como queríamos. ■

Veamos los casos no cubiertos por el resultado anterior. Si $|x| > 1$, puesto que $|1/x| < 1$, sabemos ya que $\{1/x^n\} = \{(1/x)^n\} \to 0$, luego la sucesión $\{x^n\}$ no está siquiera acotada. Si $|x| = 1$, sabemos de sobra lo que le ocurre a la sucesión $\{x^n\}$.

6.2. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Las sucesiones monótonas abundan más de lo que en principio pudiera parecer, como pone de manifiesto el siguiente resultado, paso previo para obtener el principal teorema acerca de la convergencia de sucesiones de números reales.

Lema. *Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y consideremos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant x_{n+k} \;\; \forall k \in \mathbb{N}\}$$

que intuitivamente detecta los términos que son mayores o iguales que todos los que les siguen. Distinguiremos dos casos según que el conjunto A sea infinito o no.

(1) Supongamos que A es *infinito*. Intuitivamente, seleccionando los términos x_n con $n \in A$ debemos obtener una sucesión parcial decreciente. Para comprobar esto, usaremos el principal resultado obtenido al estudiar los conjuntos numerables. Por ser A un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, sabemos que existe una aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to A$, verificando además que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $\sigma(n) < \sigma(m)$. Podemos ver σ como una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en sí mismo, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\sigma(n) \in A$, luego $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n)+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y tomando $k = \sigma(n+1) - \sigma(n)$ obtenemos que $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n+1)}$. Por tanto, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.

(2) Supongamos que A es un conjunto *finito*, incluyendo la posibilidad $A = \emptyset$. En todo caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \{n \in \mathbb{N} : n < m\}$. Intuitivamente, podemos seleccionar términos a partir del m-ésimo para conseguir una sucesión parcial creciente, y eso es precisamente lo que vamos a hacer. Para definir por inducción una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant m\}$, empezamos tomando $\sigma(1) = m$. Supuesto definido $\sigma(n) \geqslant m$, sabemos que $\sigma(n) \notin A$, así que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n)+k}\}$ no es vacío. Definimos entonces $\sigma(n+1) = \sigma(n) + p$, donde p es el mínimo de dicho conjunto. Es claro que $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geqslant m$, y también $x_{\sigma(n)} < x_{\sigma(n+1)}$, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial creciente de $\{x_n\}$. ■

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de números reales y apliquemos el lema anterior para conseguir una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Por ser $\{x_n\}$ acotada, tenemos $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero entonces es obvio que también $|x_{\sigma(n)}| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es monótona y acotada, luego convergente. ■

Merece la pena detenerse a comparar los diferentes tipos de sucesiones que han aparecido hasta ahora. Dada una sucesión $\{x_n\}$, podemos considerar las siguientes afirmaciones:

(i) $\{x_n\}$ es monótona y acotada
(ii) $\{x_n\}$ es convergente
(iii) $\{x_n\}$ está acotada
(iv) $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente

Sabemos que cada una de estas afirmaciones implica las que le siguen: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Pues bien, vamos a comprobar que ninguna de las implicaciones es reversible. Para ver que $(iv) \not\Rightarrow (iii)$ basta tomar

$$x_n = \frac{n}{2}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Claramente tenemos $x_{2n-1} = 0$ y $x_{2n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente y otra no acotada, así que $\{x_n\}$ tampoco está acotada. Ya se comentó que existen sucesiones acotadas no convergentes, es decir, que $(iii) \not\Rightarrow (ii)$. Finalmente, es fácil ver que la sucesión $\{(-1)^n/n\}$ converge a cero, pero no es monótona, luego $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

6.3. Sucesiones de Cauchy

Comprobar que una sucesión es convergente, usando la definición de convergencia, exige conocer "a priori" el posible límite de la sucesión. Interesa tener un criterio de convergencia comprobable usando solamente los términos de la sucesión. Hasta ahora tenemos una propiedad de este tipo (la acotación) que es necesaria para que haya convergencia, pero no es suficiente. También hay una condición suficiente (monotonía + acotación) que no es necesaria. Nuestro objetivo ahora es encontrar una condición que sea a la vez necesaria y suficiente, es decir, un criterio que nos permita decidir si una sucesión es convergente o no, sin ninguna pista sobre el posible límite.

Partimos de una idea muy ingenua: los términos de una sucesión convergente, que estén cerca del límite, estarán cerca unos de otros. Formalmente, si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente de números reales, digamos $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon/2$ para $n \geqslant m$. Entonces, para $p, q \in \mathbb{N}$ con $p, q \geqslant m$, tenemos claramente

$$|x_p - x_q| = |x_p - x + x - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \varepsilon$$

Obsérvese que hemos obtenido una propiedad de la sucesión convergente $\{x_n\}$ en la que no interviene su límite. A continuación damos nombre a las sucesiones con esta propiedad.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* cuando, para cada número real positivo ε, puede encontrarse un número natural m, tal que $|x_p - x_q| < \varepsilon$, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ que verifiquen $p, q \geqslant m$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ p, q \geqslant m \implies |x_p - x_q| < \varepsilon$$

En los comentarios anteriores hemos probado lo siguiente:

- *Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Pero lo importante es que el recíproco también es cierto, como descubrió el gran matemático francés A. Cauchy (1789-1857).

Teorema (Complitud de $\mathbb{R}$). *Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy, y vamos a probar que converge, sin pista alguna sobre su límite. Empezamos viendo que $\{x_n\}$ está acotada, con un razonamiento similar al usado cuando teníamos convergencia.

La definición de sucesión de Cauchy nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < 1$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ con $p, q \geqslant m$. Tomando $q = m$ y $p = n \geqslant m$ tenemos claramente

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m|$$

luego el conjunto $\{x_n : n \geqslant m\}$ está acotado, de donde se deduce, como ya hemos hecho otras veces, que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada.

El siguiente paso es aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass, para obtener una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un $x \in \mathbb{R}$. Obsérvese que x es el único posible límite de la sucesión $\{x_n\}$, así que la demostración se concluirá probando que efectivamente $\{x_n\} \to x$.

Dado $\varepsilon > 0$, aplicamos de nuevo que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy:

$$\exists m_1 \in \mathbb{N} \ : \ p,q \geqslant m_1 \implies |x_p - x_q| < \varepsilon/2 \tag{1}$$

Por otra parte, usamos la convergencia de $\{x_{\sigma(n)}\}$:

$$\exists m_2 \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant m_2 \implies |x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

Finalmente, tomamos $m = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ y concluiremos probando que $|x_n - x| < \varepsilon$ para $n \geqslant m$. En efecto, si $n \geqslant m$, tenemos por una parte $n \geqslant m_2$ lo que nos permite aplicar (2), pero también tenemos $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m_1$ luego podemos aplicar (1) con $p = n$ y $q = \sigma(n)$, obteniendo

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

6.4. Límites superior e inferior

El hecho de que toda sucesión monótona y acotada es convergente nos va a permitir ahora clarificar aún más la relación entre sucesiones acotadas y sucesiones convergentes, consiguiendo una nueva demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos entonces definir:

$$\alpha_n = \text{ínf}\{x_k : k \geqslant n\} \qquad \text{y} \qquad \beta_n = \sup\{x_k : k \geqslant n\}$$

De esta forma, a la sucesión $\{x_n\}$ hemos asociado dos sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$, siendo evidente que $\alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

También para todo $n \in \mathbb{N}$, es evidente que:

$$\{x_k : k \geqslant n+1\} \subset \{x_k : k \geqslant n\} \subset \{x_k : k \geqslant 1\}$$

de donde deducimos que $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n \geqslant \alpha_1$ y $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$. En resumen, enlazando varias desigualdades anteriores, tenemos:

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \beta_{n+1} \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Está ahora muy claro que $\{\alpha_n\}$ es creciente y mayorada, mientras que $\{\beta_n\}$ es decreciente y minorada, luego ambas sucesiones son convergentes.

Pues bien, al límite de $\{\alpha_n\}$ se le llama *límite inferior* de la sucesión $\{x_n\}$ y se le denota por $\text{lím inf}\{x_n\}$. Análogamente, al límite de $\{\beta_n\}$ se le llama *límite superior* de $\{x_n\}$ y se le denota por $\text{lím sup}\{x_n\}$. Así pues:

$$\text{lím inf}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \big(\text{ínf}\{x_k : k \geqslant n\}\big) \qquad \text{y} \qquad \text{lím sup}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{x_k : k \geqslant n\}\big)$$

Recordando que $\alpha_n \leqslant \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que siempre se tiene:

$$\liminf\{x_n\} \leqslant \limsup\{x_n\}$$

Esta desigualdad puede ser estricta, como le ocurre por ejemplo a la sucesión $\{(-1)^n\}$: es claro que $\liminf\{(-1)^n\} = -1 < 1 = \limsup\{(-1)^n\}$. Pues bien, vamos a demostrar enseguida que la coincidencia del límite superior con el inferior caracteriza a las sucesiones convergentes:

- *Para una sucesión acotada $\{x_n\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) $\liminf\{x_n\} = \limsup\{x_n\}$

  (ii) $\{x_n\}$ *es convergente*

  Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene: $\lim\{x_n\} = \liminf\{x_n\} = \limsup\{x_n\}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Puesto que $\alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de ser $\lim\{\alpha_n\} = \lim\{\beta_n\}$ deducimos que $\{x_n\}$ es convergente. De hecho, hemos probado ya la última afirmación del enunciado.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Suponiendo que $\{x_n\} \to x$ debemos ver que los límites superior e inferior de $\{x_n\}$ coinciden con x, es decir, que $\{\alpha_n\} \to x$ y $\{\beta\} \to x$.

Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon/2 < x_k < x + \varepsilon/2$ para $k \geqslant m$. Fijado $n \geqslant m$, las anteriores desigualdades son válidas para cualquier $k \geqslant n$, luego $x - (\varepsilon/2)$ es un minorante del conjunto $\{x_k : k \geqslant n\}$ y $x + (\varepsilon/2)$ es un mayorante del mismo conjunto. Por definición de supremo e ínfimo, tenemos

$$x - (\varepsilon/2) \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant x + (\varepsilon/2)$$

Vemos así que, para $n \geqslant m$, se tiene $|\alpha_n - x| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ y también $|\beta_n - x| < \varepsilon$. ■

Así pues, los límites superior e inferior de una sucesión acotada nos proporcionan un criterio útil para decidir si la sucesión es convergente o no. Pero volviendo al caso general, veamos la relación entre los límites superior e inferior de una sucesión acotada y los de cualquier sucesión parcial suya.

Sea pues $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de una sucesión acotada $\{x_n\}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, para $k \geqslant n$ tenemos claramente que $\sigma(k) \geqslant k \geqslant n$, de donde deducimos que

$$\inf\{x_h : h \geqslant n\} \leqslant \inf\{x_{\sigma(k)} : k \geqslant n\} \leqslant \sup\{x_{\sigma(k)} : k \geqslant n\} \leqslant \sup\{x_h : h \geqslant n\}$$

Cada uno de los miembros de la desigualdad anterior es el n-ésimo término de una sucesión convergente, pero la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde obtenemos que

$$\liminf\{x_n\} \leqslant \liminf\{x_{\sigma(n)}\} \leqslant \limsup\{x_{\sigma(n)}\} \leqslant \limsup\{x_n\}$$

Tenemos así la relación que buscábamos entre los límites superiores e inferiores de $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_n\}$. Destacamos la siguiente consecuencia:

- *Si $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial convergente de una sucesión acotada $\{x_n\}$, entonces:*

$$\liminf\{x_n\} \leqslant \lim\{x_{\sigma(n)}\} \leqslant \limsup\{x_n\}$$

Vamos a demostrar ahora que, si elegimos convenientemente la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$, podemos hacer que cualquiera de las desigualdades anteriores sea una igualdad. De hecho, ello nos da una nueva demostración del principal teorema estudiado en este tema.

Teorema de Bolzano-Weierstrass (revisitado). *Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ admite dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{\tau(n)}\}$, tales que*

$$\{x_{\sigma(n)}\} \to \liminf\{x_n\} \qquad y \qquad \{x_{\tau(n)}\} \to \limsup\{x_n\}$$

Demostración. Sea $\lambda = \liminf\{x_n\} = \lim\{\alpha_n\}$, con $\alpha_n = \inf\{x_k : k \geqslant n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vamos a ver cómo se consigue una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converja a λ. La sucesión $\{x_{\tau(n)}\}$ se construye de manera similar. Definiremos por inducción la aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que necesitamos, empezando con $\sigma(1) = 1$ y suponiendo conocido $\sigma(n)$ para definir $\sigma(n+1)$. Para simplificar la notación, escribimos $p = \sigma(n)+1$ y la definición de α_p nos dice que existe $k \geqslant p$, tal que $x_k < \alpha_p + (1/p)$. Definimos entonces

$$\sigma(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} : k \geqslant p,\ x_k < \alpha_p + (1/p)\}$$

Es evidente que σ es estrictamente creciente, luego $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la definición de $\sigma(n+1)$ nos dice también que

$$\alpha_{\sigma(n)+1} \leqslant x_{\sigma(n+1)} \leqslant \alpha_{\sigma(n)+1} + \big(1/(\sigma(n)+1)\big) \tag{3}$$

Puesto que $\{\alpha_{\sigma(n)+1}\}$ es una sucesión parcial de $\{\alpha_n\}$, tenemos que $\{\alpha_{\sigma(n)+1}\} \to \lambda$. Por otra parte, $\{1/(\sigma(n)+1)\} \to 0$, pues se trata de una sucesión parcial de $\{1/n\}$, luego también $\{\alpha_{\sigma(n)+1} + \big(1/(\sigma(n)+1)\}\to\lambda$. De la desigualdad (3), válida para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\{x_{\sigma(n+1)}\} \to \lambda$ o, lo que es lo mismo, $\{x_{\sigma(n)}\} \to \lambda$, como queríamos. ■

Esta segunda versión del Teorema de Bolzano-Weierstrass nos da una información que no aparecía explícitamente en la primera: si una sucesión acotada no es convergente, admite dos sucesiones parciales que convergen a límites diferentes.

Concluimos este tema con un ejemplo que puede resultar sorprendente: los límites de las sucesiones parciales convergentes de una misma sucesión, pueden ser una auténtica multitud.

Consideremos el conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, que es infinito y numerable, luego existe una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Tomando $r_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos una sucesión $\{r_n\}$ de números racionales tal que $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = A$. Pues bien, vamos a ver que, *para cada $x \in [0,1]$, la sucesión $\{r_n\}$ admite una sucesión parcial $\{r_{\sigma(n)}\}$ que converge a x.*

En efecto, empezamos viendo que, para cada $\delta > 0$, el conjunto $A_\delta = \{r \in A : |r - x| < \delta\}$ es infinito y, puesto que φ es biyectiva, el conjunto $\varphi^{-1}(A_\delta) = \{n \in \mathbb{N} : |r_n - x| < \delta\}$ también será infinito. La construcción de σ se adivina ya fácilmente:

Tomando $\delta = 1$, elegimos $\sigma(1)$ de forma que $|r_{\sigma(1)} - x| < 1$; suponiendo definido $\sigma(n)$ de forma que $|r_{\sigma(n)} - x| < 1/n$, podemos usar $\delta = 1/(n+1)$ para encontrar $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ de forma que $|r_{\sigma(n+1)} - x| < 1/(n+1)$. Por inducción, tenemos una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, verificando que $|r_{\sigma(n)} - x| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{r_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{r_n\}$ que claramente verifica $\{r_{\sigma(n)}\} \to x$.

6.5. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una sucesión de números reales positivos, convergente a cero, que no sea decreciente.

2. Sea A un conjunto de números reales, no vacío y mayorado. Demostrar que existe una sucesión creciente de elementos de A que converge a $\sup A$.

3. Demostrar que toda sucesión monótona, que admita una sucesión parcial convergente, es convergente.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión verificando que $x_1 > 0$ y que $x_{n+1}(1+x_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}$ es convergente y calcular su límite.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}$ de números reales positivos tal que $\{y_n\} \to 0$ y $|x_{n+k} - x_n| \leqslant y_n$ para cualesquiera $n,k \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}$ es convergente.

6. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas verificando que $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\liminf\{x_n\} \leqslant \liminf\{y_n\}$ y que $\limsup\{x_n\} \leqslant \limsup\{y_n\}$.

7. Probar que, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, se tiene

$$\begin{aligned} \liminf\{x_n+y_n\} &\geqslant \liminf\{x_n\} + \liminf\{y_n\} \\ \limsup\{x_n+y_n\} &\leqslant \limsup\{x_n\} + \limsup\{y_n\} \end{aligned}$$

   Mostrar con un ejemplo que ambas desigualdades pueden ser estrictas.

8. Probar que, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, se tiene también

$$\begin{aligned} \liminf\{x_n+y_n\} &\leqslant \liminf\{x_n\} + \limsup\{y_n\} \\ \limsup\{x_n+y_n\} &\geqslant \limsup\{x_n\} + \liminf\{y_n\} \end{aligned}$$

   Deducir que, si la sucesión $\{y_n\}$ es convergente, se tiene

$$\begin{aligned} \liminf\{x_n+y_n\} &= \liminf\{x_n\} + \lim\{y_n\} \\ \limsup\{x_n+y_n\} &= \limsup\{x_n\} + \lim\{y_n\} \end{aligned}$$

Tema 7

Divergencia de sucesiones

Nuestro próximo objetivo es prestar atención a ciertas sucesiones no acotadas de números reales, que llamaremos "sucesiones divergentes". Estudiaremos su relación con los otros tipos de sucesiones que han aparecido hasta ahora: convergentes, acotadas y monótonas. También adaptaremos las reglas sobre cálculo de límites, para poder manejar sucesiones divergentes.

7.1. Sucesiones divergentes

Hasta ahora, el estudio de las sucesiones de números reales se ha reducido prácticamente a considerar sucesiones acotadas, que ciertamente son las más útiles. Sin embargo, hay preguntas sobre sucesiones acotadas, o incluso sobre sucesiones convergentes, que no tienen aún respuesta satisfactoria, precisamente porque no hemos prestado más atención a las sucesiones no acotadas. Para ver una pregunta sencilla de este tipo, recordemos que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos tal que $\{x_n\} \to 0$, entonces la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$ no está acotada. Sin embargo, el recíproco no es cierto, tomemos por ejemplo

$$x_n = \frac{1}{n+(-1)^n n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{con lo que} \qquad y_n = n+(-1)^n n+1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Claramente la sucesión $\{y_n\}$ no está acotada, ya que $\{y_{2n}\} = \{4n+1\}$, pero $\{x_n\}$ no converge a cero, ya que $x_{2n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es razonable por tanto preguntarse qué condición (necesaria y suficiente) debe cumplir $\{y_n\}$ para poder asegurar que $\{x_n\} \to 0$. Encontraremos una respuesta satisfactoria con el estudio de las sucesiones divergentes que ahora iniciamos.

Tomemos como guía la sucesión $\{n\}$ de los números naturales, la sucesión $\{-n\}$ de sus opuestos y la sucesión alternante $\{(-1)^n n\}$. Las tres son sucesiones no acotadas, pero muestran comportamientos especiales que ahora vamos a catalogar.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ *diverge positivamente* cuando, para cada número real K, se puede encontrar un número natural m tal que, para $n \geqslant m$, se tenga $x_n > K$. En tal caso, se dice también que $\{x_n\}$ *tiende a* $+\infty$ y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$. Simbólicamente:

$$\{x_n\} \to +\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow x_n > K \,\big]$$

Para decirlo de otra forma equivalente, es claro que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, para todo $K \in \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant K\}$ es finito.

Análogamente, decimos que $\{x_n\}$ *diverge negativamente*, o bien que $\{x_n\}$ *tiende a* $-\infty$, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, cuando para cada número real K existe $m \in \mathbb{N}$ verificando que $x_n < K$ para $n \geqslant m$:

$$\{x_n\} \to -\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \Rightarrow x_n < K \,\big]$$

Equivalentemente, $\{x_n\} \to -\infty$ cuando el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant K\}$ es finito, para todo $K \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, es evidente que $\{n\} \to +\infty$ mientras que $\{-n\} \to -\infty$. De hecho, dada una sucesión $\{x_n\}$, es claro que $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to +\infty$.

Decimos simplemente que una sucesión $\{x_n\}$ *diverge*, o es una sucesión *divergente*, cuando la sucesión $\{|x_n|\}$ diverge positivamente. En tal caso, se dice también que $\{x_n\}$ *tiende* a ∞ y escribimos $\{x_n\} \to \infty$. Por tanto:

$$\{x_n\} \to \infty \iff \{|x_n|\} \to +\infty \iff \big[\, \forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\Rightarrow\; |x_n| > K \,\big]$$

Es claro que, si $\{x_n\} \to +\infty$ o $\{x_n\} \to -\infty$, entonces $\{x_n\}$ es divergente, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo la sucesión $\{x_n\} = \{(-1)^n n\}$ es divergente, puesto que $\{|x_n|\} = \{n\}$, pero $\{x_n\}$ no diverge positivamente, porque el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant 0\}$ es infinito, y tampoco diverge negativamente, porque $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant 0\}$ también es infinito.

Merece la pena hacer un par de observaciones sobre las nociones recién introducidas, para aclarar su significado y evitar malentendidos.

En primer lugar, conviene insistir en que ∞, $+\infty$ y $-\infty$ sólo son símbolos que usamos para indicar que una sucesión diverge y, en su caso, que lo hace positiva o negativamente. Al escribir, por ejemplo, $\{x_n\} \to +\infty$, no estamos diciendo que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente (nada más lejos de la realidad) ni que $\{x_n\}$ tenga límite $+\infty$. Aunque ahora trabajemos con sucesiones divergentes, la noción de sucesión convergente y de límite de una tal sucesión no han cambiado, ni deben cambiar. Por tanto, expresiones que a veces se usan, como decir que $\{x_n\}$ converge a $+\infty$, o notaciones que a veces también se usan, como $\text{lím}\{x_n\} = +\infty$, pueden crear confusión y deben evitarse, pues no aportan ninguna utilidad o comodidad.

Por otra parte, debe quedar claro desde el principio que, para una sucesión de números reales, ser divergente no es lo contrario de ser convergente. Cierto que una sucesión divergente no puede ser convergente, puesto que ni siquiera está acotada, pero hay sucesiones que no son convergentes ni divergentes, como $\{(-1)^n\}$, sin ir más lejos.

7.2. Relación con otros tipos de sucesiones

Conviene empezar esta discusión observando lo que ocurre con las sucesiones parciales de sucesiones divergentes:

- *Toda sucesión parcial de una sucesión divergente es divergente. De hecho, si $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de una sucesión $\{x_n\}$, entonces:*

$$\{x_n\} \to +\infty \;\Rightarrow\; \{x_{\sigma(n)}\} \to +\infty \qquad y \qquad \{x_n\} \to -\infty \;\Rightarrow\; \{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$$

La comprobación de estos hechos es bastante inmediata. Si $\{x_n\} \to +\infty$, para todo $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $x_n > K$. Entonces, también para $n \geqslant m$, por ser $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$, tenemos $x_{\sigma(n)} > K$. En el caso $\{x_n\} \to -\infty$, como $\{-x_n\} \to +\infty$, tendremos $\{-x_{\sigma(n)}\} \to +\infty$, es decir, $\{x_{\sigma(n)}\} \to -\infty$. Finalmente, si $\{x_n\}$ es divergente, de $\{|x_n|\} \to +\infty$ deducimos que $\{|x_{\sigma(n)}|\} \to +\infty$, es decir, $\{x_{\sigma(n)}\}$ también diverge. ■

Como consecuencia de lo anterior, usando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una caracterización de las sucesiones divergentes que explica por qué las llamamos así:

- *Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, son equivalentes:*

  (i) $\{x_n\}$ *no es divergente*
  (ii) $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial acotada*
  (iii) $\{x_n\}$ *admite una sucesión parcial convergente*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $\{x_n\}$ no es divergente, sabemos que $\{|x_n|\}$ no tiende a $+\infty$, luego existe $K \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant K\}$ es infinito. Por tanto existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to A$, con lo que $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que está acotada, ya que $|y_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Si $\{y_n\} = \{x_{\sigma(n)}\}$ está acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{y_n\}$ admite a su vez una sucesión parcial $\{z_n\} = \{y_{\tau(n)}\}$ que es convergente. Pero $\{z_n\}$ también es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. En efecto, es claro que $\{z_n\} = \{x_{\varphi(n)}\}$, donde $\varphi(n) = \sigma\big(\tau(n)\big)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se comprueba fácilmente que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Hemos visto anteriormente que una sucesión parcial de una sucesión divergente también es divergente. ■

Así pues, una sucesión de números reales es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente. Coloquialmente diríamos que, para una sucesión, ser divergente es una “manera extrema” de no ser convergente.

Completemos ahora la relación entre divergencia y acotación. Es claro que una sucesión que diverge positivamente está minorada pero no mayorada. El recíproco no es cierto, como muestra la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_n = \frac{n}{4}\left[1 + (-1)^n\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Está minorada, pues $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y no está mayorada, porque $x_{2n} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero no es divergente, ya que $x_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, si una sucesión diverge negativamente, está mayorada pero no minorada y tampoco es cierto el recíproco, basta pensar en la sucesión $\{-x_n\}$ donde $\{x_n\}$ se define como antes.

Es claro que una sucesión divergente nunca está acotada, puede estar minorada, como le ocurre a $\{n\}$, mayorada como le ocurre a $\{-n\}$, y puede no estar mayorada ni minorada, como le ocurre a la sucesión $\{(-1)^n n\}$. Completamos la discusión con un ejemplo de una sucesión que no está mayorada, tampoco está minorada, pero no es divergente. Basta considerar la sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_{3k-2} = k$, $y_{3k-1} = -k$, $y_{3k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, se trata de la sucesión: $1, -1, 0, 2, -2, 0, 3, -3, 0\ldots$

En resumen, observamos que la divergencia de una sucesión siempre nos permite saber si la sucesión está mayorada o minorada pero, recíprocamente, sabiendo que una sucesión no está mayorada, o no está minorada, o ambas cosas, no podemos asegurar la divergencia. Nótese el paralelismo con el hecho de que toda sucesión convergente está acotada, no siendo cierto el recíproco. La situación se clarifica enormemente si consideramos sucesiones monótonas:

- *Toda sucesión creciente y no mayorada diverge positivamente. Toda sucesión decreciente y no minorada diverge negativamente. Por tanto, toda sucesión monótona es convergente o divergente.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es creciente y no mayorada, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m > K$, pero entonces, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n \geqslant x_m > K$, luego $\{x_n\} \to +\infty$. Si $\{x_n\}$ es decreciente y no minorada, entonces $\{-x_n\}$ es creciente y no mayorada, luego $\{-x_n\} \to +\infty$ y $\{x_n\} \to -\infty$. ■

Veamos nuevos ejemplos de sucesiones divergentes. Para $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, la sucesión $\{x^n\}$ es creciente y no está mayorada, luego $\{x^n\} \to +\infty$. Como consecuencia, si $x < -1$ tenemos que $\{|x^n|\} = \{|x|^n\} \to +\infty$, luego $\{x^n\} \to \infty$, pero está claro que ahora $\{x^n\}$ no diverge positivamente y tampoco negativamente.

7.3. Sumas con sucesiones divergentes

Vamos a revisar las reglas de cálculo de límites ya conocidas, involucrando ahora sucesiones divergentes. Para evitar repeticiones, en todo lo que sigue fijamos dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. En primer lugar, anotemos un criterio de comparación bastante obvio:

- *Supongamos que $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\{x_n\} \to +\infty \implies \{y_n\} \to +\infty \quad ; \quad \{y_n\} \to -\infty \implies \{x_n\} \to -\infty$$

Pensemos ya en la sucesión suma $\{x_n + y_n\}$. Sabemos que $\{x_n + y_n\}$ es convergente siempre que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ lo sean. Nos preguntamos qué ocurre cuando una de ellas, digamos $\{x_n\}$, es divergente, y la otra es convergente o divergente. La respuesta se deducirá de la siguiente observación básica:

- *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ está minorada, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$*

La comprobación es inmediata. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geqslant \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, dado $K \in \mathbb{R}$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > K - \alpha$, luego $x_n + y_n > K$. ■

Veamos ya lo que ocurre al sumar una sucesión divergente con otra convergente:

(*i*) *Si $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\}$ converge, entonces $\{x_n + y_n\} \to +\infty$,* ya que $\{y_n\}$ está minorada.

(*ii*) *Si $\{x_n\} \to -\infty$ e $\{y_n\}$ converge, entonces $\{x_n + y_n\} \to -\infty$,* pues basta pensar que $\{-x_n\} \to +\infty$ mientras que $\{-y_n\}$ está minorada, luego $\{-(x_n + y_n)\} \to +\infty$.

(*iii*) *Si $\{x_n\}$ diverge e $\{y_n\}$ converge, entonces $\{x_n + y_n\}$ diverge.* En efecto, basta tener en cuenta que $|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{|x_n|\} \to +\infty$ y $\{-|y_n|\}$ es convergente, tenemos $\{|x_n| - |y_n|\} \to +\infty$ y, por comparación, $\{|x_n + y_n|\} \to +\infty$.

Con respecto a la suma de dos sucesiones divergentes podemos afirmar:

(i) *Si* $\{x_n\} \to +\infty$ *e* $\{y_n\} \to +\infty$*, entonces* $\{x_n + y_n\} \to +\infty$, pues $\{y_n\}$ está minorada.

(ii) *Si* $\{x_n\} \to -\infty$ *e* $\{y_n\} \to -\infty$*, entonces* $\{x_n + y_n\} \to -\infty$*,* pues basta aplicar lo anterior a las sucesiones $\{-x_n\}$ y $\{-y_n\}$.

Quedan posibilidades no contempladas en la discusión anterior. Por ejemplo, nada hemos dicho sobre lo que ocurre con $\{x_n + y_n\}$ cuando $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. De forma más general, la pregunta sería si podemos afirmar algo sobre la suma de dos sucesiones de las que sólo sabemos que son divergentes. Vamos a ver que, en el primer caso, y por tanto en el segundo, nada se puede afirmar.

De hecho, *toda* sucesión $\{z_n\}$ puede expresarse en la forma $\{x_n + y_n\}$ con $\{x_n\} \to +\infty$ e $\{y_n\} \to -\infty$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, basta tomar $x_n = z_n + |z_n| + n$ y, lógicamente, $y_n = z_n - x_n$, con lo que tenemos $x_n \geqslant n$, $y_n = -|z_n| - n \leqslant -n$. Deducimos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, como se quería. En particular, queda claro que toda sucesión se expresa como suma de dos sucesiones divergentes.

En situaciones como esta, se dice que tenemos una *indeterminación*. En el caso que nos ocupa, decimos que la indeterminación es del *tipo* $[\infty - \infty]$. Esto no es más que una forma de hablar: al decir que tenemos una indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$ sólo estamos recordando que no existe (no puede existir) ningún resultado general que nos dé información sobre la suma de una sucesión que diverge positivamente con otra que diverge negativamente, menos aún sobre la suma de dos sucesiones de las que sólo sabemos que son divergentes. Por supuesto, ello no quiere decir que en cada caso concreto no podamos describir con toda precisión el comportamiento de tales sumas. De hecho, más adelante veremos métodos específicos para resolver, en ciertos casos, indeterminaciones de varios tipos.

7.4. Productos y cocientes

De nuevo fijamos dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, para estudiar qué le ocurre al producto $\{x_n y_n\}$, suponiendo que $\{x_n\}$ diverge, mientras que $\{y_n\}$ puede ser convergente o divergente. La observación básica es la siguiente:

- *Supongamos que* $\{x_n\} \to +\infty$ *y que existen* $\alpha > 0$ *y* $p \in \mathbb{N}$ *tales que, para* $n \geqslant p$*, se tiene* $y_n > \alpha$*. Entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$

En efecto, dado $K \in \mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant q$, se tiene $x_n > K/\alpha$, luego tomando $m = \max\{p, q\}$, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n y_n > K$, lo que prueba que $\{x_n y_n\} \to +\infty$. ■

Las hipótesis del resultado anterior parecen muy restrictivas, pero permite responder con facilidad la pregunta planteada. Empezamos con el producto de dos sucesiones divergentes:

- *Si* $\{x_n\} \to \infty$ *e* $\{y_n\} \to \infty$*, entonces* $\{x_n y_n\} \to \infty$. En efecto, basta usar que $\{|x_n|\} \to +\infty$ y que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > 1$ para $n \geqslant p$, luego $\{|x_n y_n|\} \to +\infty$. De hecho, vemos claramente que *si* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *divergen ambas positivamente, o ambas negativamente, entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$*, mientras que si una diverge positivamente y otra negativamente, entonces* $\{x_n y_n\} \to -\infty$.

Veamos ahora el producto de una sucesión divergente por una convergente:

- *Si* $\{x_n\} \to \infty$ *e* $\{y_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^*$, *entonces* $\{x_n y_n\} \to \infty$. En efecto, basta observar que tomando $0 < \alpha < |\lambda|$, existirá $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant p$ se tenga $|y_n| > \alpha$. De hecho, es fácil ver que *si* $\{x_n\} \to +\infty$ *y* $\lambda > 0$, *o* $\{x_n\} \to -\infty$ *y* $\lambda < 0$, *entonces* $\{x_n y_n\} \to +\infty$, *mientras que si* $\{x_n\} \to +\infty$ *y* $\lambda < 0$, *o* $\{x_n\} \to -\infty$ *y* $\lambda > 0$, *entonces* $\{x_n y_n\} \to -\infty$.

Nada hemos dicho aún sobre el producto de una sucesión divergente por una sucesión que converja a cero. Nada se puede afirmar, tenemos aquí la *indeterminación del tipo* $[0 \cdot \infty]$.

De nuevo comprobamos que toda sucesión $\{z_n\}$ puede escribirse en la forma $\{x_n y_n\}$, con $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, basta tomar $x_n = n(|z_n|+1)$ y, lógicamente, $y_n = z_n/x_n$, con lo que se tiene claramente $x_n \geqslant n$, $|y_n| \leqslant 1/n$. Luego $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$, como queríamos.

Para estudiar el cociente de dos sucesiones convergentes o divergentes, una vez estudiado el producto, sólo queda pensar lo que le ocurre a la sucesión $\{1/x_n\}$, sabiendo que $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales no nulos, convergente o divergente. La observación clave es la siguiente, que contesta una pregunta planteada como motivación al principio de este tema.

- *Sea* $x_n \in \mathbb{R}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\{x_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{1/x_n\}$ *es divergente.*

La demostración de ambas implicaciones es inmediata. Si $\{x_n\} \to 0$, dado $K \in \mathbb{R}^+$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tenga $|x_n| < 1/K$ y, por tanto, $|1/x_n| > K$, luego $\{|1/x_n|\} \to +\infty$. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, la divergencia de $\{1/x_n\}$ nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $|1/x_n| > 1/\varepsilon$, luego $|x_n| < \varepsilon$. ■

Naturalmente, dadas dos sucesiones convergentes o divergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, con $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para obtener información sobre la sucesión cociente $\{x_n/y_n\}$ podemos verla como producto de $\{x_n\}$ por $\{1/y_n\}$. Entonces podemos encontrarnos con la indeterminación $[0 \cdot \infty]$. Más concretamente, ello ocurre cuando $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen a cero, y también cuando ambas son divergentes. Por ello se habla a veces de indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$. No se trata en realidad de nuevos tipos de indeterminación, sólo son diferentes aspectos que puede tomar la indeterminación del tipo $[0 \cdot \infty]$.

7.5. Raíces

Suponiendo que una sucesión $\{x_n\}$ de números no negativos sea convergente o divergente, es natural preguntarse qué le ocurre a la sucesión de raíces cuadradas $\{\sqrt{x_n}\}$, o más en general, a la sucesión de raíces q-ésimas $\{\sqrt[q]{x_n}\}$, con $q \in \mathbb{N}$ fijo. La respuesta no es difícil de adivinar:

- *Sea* $x_n \in \mathbb{R}_0^+$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y fijemos* $q \in \mathbb{N}$. *Entonces:*

  (i) $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}_0^+ \implies \{\sqrt[q]{x_n}\} \to \sqrt[q]{x}$
  (ii) $\{x_n\} \to +\infty \implies \{\sqrt[q]{x_n}\} \to +\infty$

(i). Supongamos primero que $x > 0$ y recordemos la siguiente igualdad, comprobada al estudiar las potencias:

$$y^q - z^q = (y-z)\sum_{k=1}^{q} y^{q-k}z^{k-1} \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, usamos la igualdad anterior para $y = \sqrt[q]{x_n} \geqslant 0$ y $z = \sqrt[q]{x} \geqslant 0$, con lo que, al tomar valores absolutos en ambos miembros, obtenemos

$$|x_n - x| = \left|\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{x}\right| \sum_{k=1}^{q} \left(\sqrt[q]{x_n}\right)^{q-k} \left(\sqrt[q]{x}\right)^{k-1} \geqslant \left|\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{x}\right| \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}$$

La última desigualdad se debe simplemente a que la suma de q números no negativos será siempre mayor o igual que el último sumando. Puesto que $x > 0$, tenemos

$$0 \leqslant \left|\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{x}\right| \leqslant \frac{|x_n - x|}{\left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce claramente la conclusión deseada: $\left\{\sqrt[q]{x_n}\right\} \to \sqrt[q]{x}$.

El caso $x = 0$ es más sencillo: dado $\varepsilon > 0$, usando que $\{x_n\} \to 0$, encontramos $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n < \varepsilon^q$ y, por tanto, $\sqrt[q]{x_n} < \varepsilon$.

(ii). También es fácil: dado $K \in \mathbb{R}$, usando que $\{x_n\} \to +\infty$, encontramos $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tiene $x_n > |K|^q$ y, por tanto, $\sqrt[q]{x_n} > |K| \geqslant K$. ■

7.6. Primeros ejemplos de cálculo de límites

Para ilustrar las reglas sobre operaciones con sucesiones convergentes o divergentes que hemos obtenido, estudiemos una sucesión del tipo $\{P(n)/Q(n)\}$ donde P y Q son polinomios con coeficientes reales, de grados respectivos $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponemos lógicamente que $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y descartamos el caso trivial de que P sea idénticamente nulo. Para resolver las indeterminaciones que a primera vista podrían presentarse, usaremos un método que puede ser útil en otras muchas ocasiones: tanto en el numerador como en el denominador, detectamos el sumando que "domina" a todos los demás.

Más concretamente, destacamos los coeficientes principales de P y Q, escribiendo

$$P(x) = a\,x^p + R(x), \qquad Q(x) = b\,x^q + S(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $a,b \in \mathbb{R}^*$ y R,S son polinomios de grados menores que p y q respectivamente, que pueden ser idénticamente nulos. La observación clave, en la que se manifiesta la "dominación" antes aludida, es la siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^q} = 0 \tag{1}$$

Comprobaremos la afirmación sobre R, pues la referente a S es análoga. Podemos suponer que $p > 0$, pues en otro caso R es idénticamente nulo y no hay nada que comprobar.

Para convenientes coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\frac{R(n)}{n^p} = \frac{1}{n^p} \sum_{k=0}^{p-1} a_k n^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{n^{p-k}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y basta ahora usar que $\{1/n^m\} \to 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, cosa que se comprueba inmediatamente por inducción sobre m. Tenemos $\{1/n^{p-k}\} \to 0$, para $k = 0, 1, \ldots, p-1$, luego $\{R(n)/n^p\}$ es una suma de p sucesiones convergentes a cero.

Finalmente podemos escribir

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{a + (R(n)/n^p)}{b + (S(n)/n^q)} = \frac{n^p}{n^q} H(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se define por esta misma igualdad. En vista de (1) tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} H(n) = a/b$. En cuanto a la sucesión cociente $\{n^p/n^q\}$, está claro que converge a cero si $p < q$ mientras que diverge positivamente cuando $p > q$.

Hemos evitado así cualquier indeterminación que pudiera haberse presentado. Concluimos que la sucesión $\{P(n)/Q(n)\}$ se comporta como sigue:

- *Si* $p < q$, *se tiene* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = 0$
- *Si* $p = q$, *tenemos* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a}{b}$
- *Si* $p > q$, *entonces* $\{P(n)/Q(n)\}$ *es divergente. De hecho diverge positivamente cuando* $a/b > 0$ *y negativamente cuando* $a/b < 0$.

7.7. Ejercicios

1. Dar un ejemplo de una sucesión que diverja positivamente y no sea creciente.
2. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A no está mayorado si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de A que diverge positivamente.¿Se puede conseguir que dicha sucesión sea creciente?
3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Probar que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{x_{k+n}\} \to +\infty$.
4. Probar que una sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente si, y sólo si, las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ divergen positivamente. ¿Qué ocurre con los otros tipos de divergencia?
5. Probar que toda sucesión divergente, o bien diverge positivamente, o bien admite una sucesión parcial que diverge negativamente.
6. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

   (a) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}$ (b) $\left\{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-1}\right\}$ (c) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right\}$

Tema 8

Cálculo de límites

El presente tema tiene un interés eminentemente práctico, pues vamos a estudiar algunos métodos concretos para resolver indeterminaciones. Entre ellos destaca el criterio de Stolz, del que se deduce, como caso particular más importante, el criterio de la media aritmética. También estudiaremos el llamado criterio de la raíz, que permite estudiar la convergencia de sucesiones de un tipo muy concreto, y es equivalente al criterio de la media geométrica.

8.1. Criterio de Stolz

Para indeterminaciones del tipo $[\infty/\infty]$ es útil un método ideado por el matemático austriaco O. Stolz (1842-1905), basándose en trabajos previos del italiano E. Cesàro (1859-1906):

Criterio de Stolz. *Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números positivos, estrictamente creciente y no mayorada, es decir: $0<\rho_n<\rho_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\{\rho_n\}\to+\infty$. Entonces, para toda sucesión $\{x_n\}$ y todo $L\in\mathbb{R}$, se tiene:*

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right\}\to L \quad\Longrightarrow\quad \left\{\frac{x_n}{\rho_n}\right\}\to L$$

La misma implicación es cierta, sustituyendo en ambos miembros L por $+\infty$ o por $-\infty$.

Demostración. Partimos de una igualdad de fácil comprobación. Para $p,n\in\mathbb{N}$ con $p<n$, tenemos claramente que $x_n=x_p+(x_n-x_p)=x_p+\sum_{k=p}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$, de donde:

$$\frac{x_n}{\rho_n}=\frac{x_p}{\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}\left[(\rho_{k+1}-\rho_k)\,\frac{x_{k+1}-x_k}{\rho_{k+1}-\rho_k}\right] \tag{1}$$

Fijado $L\in\mathbb{R}$, se aplica la misma idea para obtener:

$$L=\frac{\rho_p L}{\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}(\rho_n-\rho_p)L=\frac{\rho_p L}{\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1}-\rho_k)L$$

Restando ambas igualdades y tomando valores absolutos, tenemos

$$\left|\frac{x_n}{\rho_n} - L\right| \leqslant \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{1}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1} - \rho_k)\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - L\right| \tag{2}$$

donde hemos usado que $\{\rho_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de números positivos. Tenemos pues que la desigualdad (2) es válida para cualesquiera $p, n \in \mathbb{N}$ con $p < n$, y para demostrar ya la implicación buscada, fijamos $\varepsilon > 0$.

Por hipótesis, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geqslant p$ se tiene $\left|\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} - L\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces, aplicando (2) obtenemos

$$\begin{aligned} n > p \implies \left|\frac{x_n}{\rho_n} - L\right| &< \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{\varepsilon}{2\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1} - \rho_k) \\ &= \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{\varepsilon(\rho_n - \rho_p)}{2\rho_n} < \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Fijado p, como por hipótesis $\{\rho_n\} \to +\infty$, tenemos $\{|x_p - \rho_p L|/\rho_n\} \to 0$, luego podemos encontrar $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant q \implies \frac{1}{\rho_n}|x_p - \rho_p L| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Tomando $m = \text{máx}\{p+1, q\}$, para $n \geqslant m$ podemos usar tanto (3) como (4), y obtenemos $|(x_n/\rho_n) - L| < \varepsilon$. Esto prueba que $\{x_n/\rho_n\} \to L$, como se quería.

Veamos ahora lo que ocurre al sustituir L por $+\infty$, pues del razonamiento anterior, sólo se mantiene la igualdad (1). Dado $C \in \mathbb{R}^+$, usando la hipótesis que ahora tenemos, encontramos $p \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geqslant p \implies \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_{k+1} - \rho_k} > 2C$$

Podemos entonces usar la igualdad (1) y, en lugar de (3) obtenemos

$$n > p \implies \frac{x_n}{\rho_n} > \frac{x_p}{\rho_n} + \frac{2C}{\rho_n}\sum_{k=p}^{n-1}(\rho_{k+1} - \rho_k) = \frac{x_p - 2C\rho_p}{\rho_n} + 2C \tag{3'}$$

Fijado p, como $\{\rho_n\} \to +\infty$, tenemos que $\{(x_p - 2C\rho_p)/\rho_n\} \to 0$, luego existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant q \implies \frac{x_p - 2C\rho_p}{\rho_n} > -C \tag{4'}$$

Tomando $m = \text{máx}\{m+1, q\}$, para $n \geqslant m$ podemos usar $(3')$ y $(4')$, obteniendo $x_n/\rho_n > C$. Esto prueba que $\{x_n/\rho_n\} \to +\infty$, como se quería.

Finalmente, para ver lo que ocurre al sustituir L por $-\infty$ basta aplicar lo recién demostrado sustituyendo la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$:

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right\} \to -\infty \Rightarrow \left\{\frac{(-x_{n+1}) - (-x_n)}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{-x_n}{\rho_n}\right\} \to +\infty \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{\rho_n}\right\} \to -\infty \quad \blacksquare$$

Como fácil aplicación, consideremos la sucesión $\{n/2^n\}$. Tomando $x_n = n$ y $\rho_n = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene obviamente $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\rho_n\} \to +\infty$. Puesto que $\{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\} = \{1/2^n\} \to 0$, el criterio de Stolz nos dice que $\{n/2^n\} \to 0$.

De manera mucho más general, vamos a probar lo siguiente:

- *Para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$ y $p \in \mathbb{N}$ se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0 \tag{5}$$

Como $|n^p/x^n| = n^p/|x|^n$ para cualesquiera $p, n \in \mathbb{N}$, basta considerar el caso $x > 1$. Entonces, la sucesión $\{\rho_n\} = \{x^n\}$ verifica las hipótesis del criterio de Stolz.

Razonando por inducción sobre p, en el caso $p = 1$ tomamos $\{x_n\} = \{n\}$ y tenemos

$$\left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{x^n(x-1)} \right\} \to 0$$

El criterio de Stolz no dice que $\{n/x^n\} \to 0$. Es justo lo que hicimos antes para $x = 2$.

Como paso previo a la etapa de inducción, observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir $(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + (p+1)n^p + R(n)$ donde R es un polinomio de grado menor que p. Deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p} = p+1 \tag{6}$$

Suponiendo ya que se verifica (5) para un $p \in \mathbb{N}$ deberemos demostrar lo mismo con $p+1$ en lugar de p. Para ello tomamos $\{x_n\} = \{n^{p+1}\}$ y tenemos

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{(x-1)\,x^n} = \frac{1}{x-1}\,\frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{n^p}\,\frac{n^p}{x^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La hipótesis de inducción nos dice que $\{n^p/x^n\} \to 0$ y, en vista de (6), deducimos claramente que $\{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\} \to 0$. Aplicando de nuevo el criterio de Stolz, concluimos que $\{n^{p+1}/x^n\} \to 0$, como queríamos. ■

Como otro ejemplo interesante, que motivará el próximo criterio, fijado $p \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$ y $\rho_n = n^{p+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De nuevo $\{\rho_n\}$ cumple las hipótesis del criterio de Stolz. Además, podemos escribir

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{n^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En vista de (6) tenemos claramente que $\left\{ \dfrac{x_{n+1} - x_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} \right\} \to \dfrac{1}{p+1}$, y el criterio de Stolz nos dice que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}$.

8.2. Criterio de la media aritmética

Como se ha visto en el último ejemplo, el criterio de Stolz se aplica con mucha comodidad cuando alguna de las sucesiones que en él aparecen se obtiene sumando consecutivamente los términos de otra. El caso particular más sencillo se presenta cuando $\{x_n\}$ tiene esa forma y tomamos $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos entonces el siguiente resultado:

Criterio de la media aritmética. *Dada una sucesión $\{y_n\}$, consideremos la sucesión $\{\sigma_n\}$ de sus medias aritméticas, definida por*

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\{y_n\} \to L \in \mathbb{R}$, entonces $\{\sigma_n\} \to L$, y esta misma implicación sigue siendo cierta cuando se sustituye L por $+\infty$ o por $-\infty$.

Demostración. Basta aplicar el criterio de Stolz, con $x_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ y $\rho_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que se tiene $\{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\} = \{y_{n+1}\}$ y $\{x_n/\rho_n\} = \{\sigma_n\}$. ■

Por ejemplo, tomando $\{y_n\} = \{1/n\} \to 0$, tenemos: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = 0$.

Conviene observar que el criterio de la media aritmética equivale al criterio de Stolz en el caso particular $\{\rho_n\} = \{n\}$. Ello se debe a que toda sucesión $\{x_n\}$ puede escribirse en la forma $\{x_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k\right\}$ para conveniente sucesión $\{y_n\}$, con lo que $\{x_n/n\} = \{\sigma_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de $\{y_n\}$, luego las afirmaciones del criterio de Stolz acerca de la sucesión $\{x_n/n\}$ son las del criterio de la media aritmética. En efecto, basta tomar $\{y_n\} = \{x_n - x_{n-1}\}$, con la salvedad $x_0 = 0$, para tener $\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La implicación que aparece en el criterio de la media aritmética no es reversible, en ninguno de los casos. Para comprobarlo, usamos la sucesión $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$, que no es convergente, a pesar de que la sucesión $\{\sigma_n\}$ de sus medias aritméticas sí converge, $\{\sigma_n\} \to 0$, ya que

$$\sigma_{2n} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_{2n-1} = -1/(2n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para el caso de divergencia, tomamos $\{y_n\} = \{\big(1 + (-1)^n\big)n^2\}$, que no es divergente, pues $y_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, observamos que ahora $\{\sigma_n\} \to +\infty$, ya que

$$\sigma_{2n} \geqslant \frac{y_{2n}}{2n} = 4n \quad \text{y} \quad \sigma_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\sigma_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por supuesto, considerando la sucesión $\{-y_n\}$, está claro que la correspondiente sucesión de medias aritméticas diverge negativamente, mientras que $\{-y_n\}$ sigue sin ser divergente. En resumen, la convergencia o divergencia de la sucesión de medias aritméticas $\{\sigma_n\}$ no nos da información sobre la sucesión de partida $\{y_n\}$.

Por otra parte, conviene también resaltar que, cuando la sucesión $\{y_n\}$ es divergente, pero no diverge positiva ni negativamente, no podemos asegurar que $\{\sigma_n\}$ sea divergente. En efecto, la sucesión $\{y_n\} = \{(-1)^n (2n-1)\}$ es divergente y, usando que $y_n = (-1)^n n - (-1)^{n-1}(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $\{\sigma_n\} = \{(-1)^n\}$, luego $\{\sigma_n\}$ no es divergente.

Como el criterio de la media aritmética es caso particular del de Stolz, las dos observaciones anteriores se aplican también a este último, ya que lo que no es cierto en un caso particular, mucho menos puede serlo en general.

Más concretamente, siendo $0 < \rho_n < \rho_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\rho_n\} \to +\infty$, supongamos que queremos usar el criterio de Stolz para estudiar el comportamiento de una sucesión de la forma $\{x_n/\rho_n\}$, considerando por tanto la sucesión $\{z_n\} = \{(x_{n+1} - x_n)/(\rho_{n+1} - \rho_n)\}$. Pues bien, en primer lugar, ninguna de las tres implicaciones que nos da el criterio Stolz es reversible, es decir, la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n/\rho_n\}$ no implica que $\{z_n\}$ halla de comportarse de la misma forma. Por otra parte, si $\{z_n\}$ diverge, pero no lo hace positiva ni negativamente, entonces tampoco podemos asegurar que $\{x_n/\rho_n\}$ sea divergente. En la práctica esto significa que, si al intentar aplicar el criterio de Stolz, nos encontramos con que la sucesión $\{z_n\}$ no converge ni diverge, o bien vemos que diverge, pero no lo hace positiva ni negativamente, el criterio no nos da información sobre la sucesión $\{x_n/\rho_n\}$.

8.3. Criterio de la raíz para sucesiones

Dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales positivos, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$. Empezamos considerando el caso en que $\{x_n\}$ es constante:

- *Para todo $a \in \mathbb{R}^+$ se tiene:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Supongamos en primer lugar que $a \geqslant 1$, con lo que también tenemos que $\sqrt[n]{a} \geqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vamos a comprobar que entonces la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ es decreciente. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos claramente $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1} = a\sqrt[n]{a} \geqslant a$, de donde deducimos que $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n+1]{a}$. Tenemos pues una sucesión decreciente y minorada, luego convergente.

Poniendo $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, sabemos de momento que $L \geqslant 1$. Consideremos ahora la sucesión $\left\{\sqrt[2n]{a}\right\}$, que es una sucesión parcial de $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$, luego $\left\{\sqrt[2n]{a}\right\} \to L$. Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $a = \left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = \left[\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2\right]^n$, luego $\left\{\sqrt[n]{a}\right\} = \left\{\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2\right\} \to L^2$. Deducimos que $L^2 = L$, lo que siendo $L \neq 0$ no deja más salida que $L = 1$, como queríamos.

En el caso $a < 1$, basta pensar que $\left\{\sqrt[n]{a}\right\} = \left\{1/\sqrt[n]{1/a}\right\}$ y, por lo ya demostrado, tenemos $\left\{\sqrt[n]{1/a}\right\} \to 1$, luego también $\left\{\sqrt[n]{a}\right\} \to 1$. ■

En general, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de números reales positivos, vamos a obtener ahora dos importantes desigualdades, que sugieren una estrategia: para estudiar la sucesión de raíces $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ conviene prestar atención a la sucesión de cocientes $\{x_{n+1}/x_n\}$.

Lema. *Si $x_n \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ está acotada, entonces la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ también está acotada y se verifica que:*

$$\liminf\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \leqslant \liminf\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \limsup\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \limsup\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \tag{7}$$

Demostración. Empezamos fijando $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\limsup\{x_{n+1}/x_n\} < \lambda$. Por definición de límite superior, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$, se tiene $\sup\{x_{k+1}/x_k : k \geqslant n\} \leqslant \lambda$ y, por tanto, $x_{n+1}/x_n \leqslant \lambda$, es decir, $x_{n+1} \leqslant \lambda x_n$.

Encadenemos las desigualdades que se obtienen al aplicar lo anterior para sucesivos valores de n: partimos de $x_{m+1} \leqslant \lambda x_m$; para $n = m+1$ deducimos que $x_{m+2} \leqslant \lambda x_{m+1} \leqslant \lambda^2 x_m$, y una obvia inducción nos dice que $x_{m+p} \leqslant \lambda^p x_m$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para $n \geqslant m$ tenemos $x_n \leqslant \lambda^{n-m} x_m$. En resumen, escribiendo $b = x_m/\lambda^m$, hemos encontrado $m \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$n \geqslant m \implies \sqrt[n]{x_n} \leqslant \lambda \sqrt[n]{b}$$

La sucesión $\left\{\lambda\sqrt[n]{b}\right\}$ converge a λ y, en particular, está acotada, luego la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ también está acotada, que es la primera afirmación del enunciado. Pero además, siempre para $n \geqslant m$, tenemos $\sup\left\{\sqrt[k]{x_k} : k \geqslant n\right\} \leqslant \sup\left\{\lambda\sqrt[k]{b} : k \geqslant n\right\}$, y usando la definición de límite superior llegamos finalmente a:

$$\limsup\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \limsup\left\{\lambda\sqrt[n]{b}\right\} = \lambda \tag{8}$$

La última desigualdad de (7) se deduce de la libertad que tuvimos al elegir λ: si dicha desigualdad no fuese cierta, habríamos tomado $\limsup\{x_{n+1}/x_n\} < \lambda < \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\}$ y, al llegar a (8) habríamos obtenido una flagrante contradicción.

Queda probar la primera desigualdad de (7), para lo cual hacemos un razonamiento muy similar al anterior. Suponiendo que dicha desigualdad no es cierta, tomamos $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leqslant \liminf\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} < \rho < \liminf\{x_{n+1}/x_n : n \geqslant m\}$$

La definición de límite inferior nos permite encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $\inf\{x_{k+1}/x_k : k \geqslant n\} \geqslant \rho$ y, por tanto, $x_{n+1} \geqslant \rho x_n$.

Encadenamos ahora desigualdades, del mismo modo que antes: partimos de $x_{m+1} \geqslant \rho x_m$; tomando $n = m+1$ deducimos que $x_{m+2} \geqslant \rho x_{m+1} \geqslant \rho^2 x_m$ y por inducción comprobamos que $x_{m+p} \geqslant \rho^p x_m$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para $n \geqslant m$ tenemos que $x_n \geqslant \rho^{n-m} x_m$. Así pues, escribiendo $a = x_m/\rho^m$, hemos encontrado $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$n \geqslant m \implies \sqrt[n]{x_n} \geqslant \rho\sqrt[n]{a}$$

Finalmente, siempre para $n \geqslant m$, deducimos que $\inf\left\{\sqrt[k]{x_k} : k \geqslant n\right\} \geqslant \inf\left\{\rho\sqrt[k]{a} : k \geqslant n\right\}$, y la definición de límite inferior nos permite concluir que

$$\liminf\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \geqslant \liminf\left\{\rho\sqrt[n]{a}\right\} = \rho$$

lo cual es una contradicción. ■

Del lema anterior deducimos fácilmente lo siguiente:

Criterio de la raíz para sucesiones. *Si $x_n \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ es convergente, entonces $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ también es convergente y se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Si $\{x_{n+1}/x_n\} \to +\infty$, entonces también $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to +\infty$.

Demostración. La primera afirmación se deduce directamente del lema anterior:

$$\liminf \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} = \limsup \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Si $\{x_{n+1}/x_n\} \to +\infty$, aplicamos lo ya demostrado a la sucesión $\{y_n\} = \{1/x_n\}$, que claramente verifica $\{y_{n+1}/y_n\} = \{x_n/x_{n+1}\} \to 0$. Obtenemos que $\left\{\sqrt[n]{y_n}\right\} \to 0$, es decir, $\left\{1/\sqrt[n]{x_n}\right\} \to 0$, de donde $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to +\infty$. ■

Veamos varios ejemplos que ponen de manifiesto la utilidad del criterio de la raíz. En primer lugar, puesto que $\{(n+1)/n\} \to 1$, el criterio nos dice que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Como segundo ejemplo, consideremos la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+x^n}\right\}$, con $x \in \mathbb{R}^+$. El criterio de la raíz nos lleva a pensar en la sucesión $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\}$.

Para $x < 1$ tenemos $\{x^n\} \to 0$ luego $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\} \to 1$, cosa que también es obvia para $x = 1$. Para $x > 1$, comprobamos sin dificultad que $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\} \to x$. Así pues, en general tenemos que $\left\{(1+x^{n+1})/(1+x^n)\right\} \to \text{máx}\{1,x\}$. El criterio de la raíz nos dice que también $\left\{\sqrt[n]{1+x^n}\right\} \to \text{máx}\{1,x\}$.

Dados ahora $y,z \in \mathbb{R}^+$, podemos tomar $x = z/y$ para obtener:

$$\left\{\sqrt[n]{y^n+z^n}\right\} = \left\{y\sqrt[n]{1+(z/y)^n}\right\} \to y\,\text{máx}\{1,z/y\} = \text{máx}\{y,z\}$$

Puesto que $\{(n+1)!/n!\} = \{n+1\} \to +\infty$, el criterio de la raíz nos dice también que $\{\sqrt[n]{n!}\} \to +\infty$. Inspirándonos en este último ejemplo, pero de manera más general, tenemos:

Criterio de la media geométrica. *Sea $\{y_n\}$ una sucesión de números reales positivos y consideremos la sucesión de medias geométricas definida por*

$$\mu_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k} = \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $\{y_n\} \to L \in \mathbb{R}$, se tiene $\{\mu_n\} \to L$, y si $\{y_n\} \to +\infty$, entonces también $\{\mu_n\} \to +\infty$.

Demostración. Tomando $x_n = \prod_{k=1}^{n} y_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\{x_{n+1}/x_n\} = \{y_{n+1}\}$ y $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} = \{\mu_n\}$, con lo que basta aplicar el criterio de la raíz. ■

Los dos criterios anteriores son equivalentes. Para deducir el primero del segundo, dada una sucesión $\{x_n\}$ de números positivos, tomamos $y_n = x_n/x_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $x_0 = 1$. Tenemos entonces $\{x_{n+1}/x_n\} = \{y_{n+1}\}$ y al calcular la sucesión de las medias geométricas de $\{y_n\}$ obtenemos $\{\mu_n\} = \left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$, luego al aplicar el criterio de la media geométrica a la sucesión $\{y_n\}$ obtenemos el criterio de la raíz para la sucesión $\{x_n\}$.

Finalmente, en relación con el criterio de la raíz, conviene observar que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$ puede ser convergente sin que $\{x_{n+1}/x_n\}$ lo sea. Para ello basta tomar $\{x_n\} = \{2+(-1)^n\}$. Puesto que $\left\{\sqrt[2n]{x_{2n}}\right\} = \left\{\sqrt[2n]{3}\right\} \to 1$ y $x_{2n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \to 1$, pero la sucesión $\{x_{n+1}/x_n\}$ no es convergente, pues para n impar se tiene $x_{n+1}/x_n = 3$, mientras que para n par es $x_{n+1}/x_n = 1/3$.

8.4. Ejercicios

1. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones y, cuando exista, calcular su límite:

$$\text{(a)} \ \left\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right\} \qquad \text{(b)} \ \left\{\frac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$$

$$\text{(c)} \ \left\{\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!\right\} \qquad \text{(d)} \ \left\{\frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n}k^k\right\}$$

2. Sea $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^*$. Para $p \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^p}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x_k\right\}$.

3. Probar las siguientes igualdades:

$$\text{(a)} \ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^5}{3^n-\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{(b)} \ \lim_{n\to\infty}\frac{n\,3^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{3^n\sqrt{n+1}+2^n} = \frac{1}{2}$$

4. Sean P y Q polinomios con coeficientes reales, con $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}^*$, estudiar la convergencia de la sucesión $\{x^n P(n)/Q(n)\}$.

5. Probar que las siguientes sucesiones son convergentes y calcular sus límites:

$$\text{(a)} \ \left\{\sqrt[n]{\frac{3n^3-2}{n^2+1}}\right\} \qquad \text{(b)} \ \left\{\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}\right\}$$

Tema 9

Series de números reales

En este tema abordamos el estudio de otra noción fundamental en Análisis Matemático, la convergencia de series de números reales. De hecho, el concepto no es nuevo, pues veremos que una serie no es más que una sucesión definida de forma muy concreta a partir de otra, pero ocurre también que cualquier sucesión puede verse como una serie. Por tanto, al estudiar la convergencia de series no hacemos otra cosa que estudiar la convergencia de sucesiones, sólo que desde un punto de vista diferente. El interés del nuevo punto de vista consiste en que intentamos dar sentido a la idea intuitiva de "sumar todos los términos" de una sucesión. Parte de nuestro trabajo consistirá precisamente en comprender hasta qué punto la teoría que vamos a desarrollar responde a esa idea intuitiva.

9.1. Series convergentes

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales e intentemos, como se ha dicho, dar sentido a la idea de "sumar todos los términos" de dicha sucesión, una "suma infinita". Para ello podemos hacer sumas finitas, incrementando progresivamente el número de sumandos, lo que nos lleva a considerar *otra* sucesión:

$$x_1\ ,\ (x_1+x_2)\ ,\ (x_1+x_2+x_3)\ ,\ \ldots\ ,\ (x_1+x_2+\ldots+x_n)\ ,\ \ldots$$

Si esta nueva sucesión converge, parece plausible entender que su límite sea la "suma infinita" que íbamos buscando. Independientemente de que ésta sea o no una buena idea, que de eso hablaremos más adelante, de entrada es una idea muy sugerente que merece ser explorada.

Así pues, a cada sucesión de números reales $\{x_n\}$, asociamos la sucesión $\{S_n\}$ definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\{S_n\}$ es la *serie de término general* $\{x_n\}$, que se denota por $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Así pues, simbólicamente:

$$\sum_{n\geqslant 1} x_n \;=\; \{S_n\} \;=\; \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}$$

Queda claro que una serie de números reales no es más que la sucesión de números reales que obtenemos de una forma muy concreta a partir de otra, llamada término general de la serie. Cualquier propiedad de las sucesiones se aplica automáticamente a las series, con lo que tiene sentido decir, por ejemplo, que una serie converge, diverge, es monótona, está acotada, etc.

Para destacar la propiedad que más nos interesa, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ será *convergente* cuando converja como sucesión que es. En tal caso, a su límite le llamamos *suma* de la serie y se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, para sugerir la idea intuitiva de que estamos "sumando todos los términos" de la sucesión $\{x_n\}$. Así pues, cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, tenemos, por definición:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Nótese que al estudiar una serie trabajamos con dos sucesiones, el término general $\{x_n\}$ y la propia serie $\{S_n\}$. Conviene por tanto usar una terminología que indique claramente a cual de ellas nos referimos en cada momento. Es pues coherente que al límite de la sucesión $\{S_n\}$, cuando existe, le hayamos llamado suma de la serie, para no confundirlo con el posible límite de la sucesión $\{x_n\}$, que pronto discutiremos.

Habitualmente, la palabra "término" se reserva también para la sucesión $\{x_n\}$, e incluso se habla de los *términos de la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ para referirse a los términos de la sucesión $\{x_n\}$. Por ejemplo, es frecuente decir que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una *serie de términos no negativos,* para indicar que $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso también se tiene que $S_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero lo que realmente importa es que la serie es creciente, es decir, la sucesión $\{S_n\}$ es creciente, puesto que $S_n \leqslant S_n + x_{n+1} = S_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Necesitamos por tanto una denominación para referirnos a los términos de la sucesión $\{S_n\}$, sin que haya riesgo de confusión. Pues bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, se dice que $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ es la n-ésima *suma parcial* de la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. De esta forma, los términos de la serie son los de la sucesión $\{x_n\}$, mientras que los términos de la sucesión $\{S_n\}$ son las sumas parciales de la serie. Incluso se dice a veces que $\{S_n\}$ es la *sucesión de sumas parciales* de la serie. Por ejemplo, si decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ tiene *sumas parciales acotadas,* queremos indicar que la serie está acotada, es decir, que la sucesión $\{S_n\}$ está acotada. Debe quedar claro que las expresiones comentadas son sólo formas de hablar: matemáticamente, una serie y la sucesión de sus sumas parciales son exactamente la misma cosa.

Conviene aclarar que una serie no es un tipo particular de sucesión, más concretamente, *toda sucesión de números reales puede verse como una serie.* En realidad, esta es una idea que ya conocemos: dada una sucesión $\{y_n\}$, basta tomar $x_n = y_n - y_{n-1}$, con el convenio $y_0 = 0$, para tener evidentemente $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{y_n\} = \sum_{n\geqslant 1} x_n = \sum_{n\geqslant 1} (y_n - y_{n-1})$.

En resumen, toda serie es, por definición, una sucesión, y recíprocamente, toda sucesión puede verse como una serie. Por tanto, la convergencia de sucesiones y la de series, son nociones equivalentes, la única diferencia entre ellas es un cambio de lenguaje. El nuevo lenguaje de las series merece la pena principalmente por dos razones. Por una parte, las sucesiones más interesantes suelen aparecer en forma de serie y es frecuente que el término general de una serie sea una sucesión bastante sencilla, pero la serie sea una sucesión más complicada. Por otra, el lenguaje de las series permite plantear y contestar preguntas que en lenguaje de sucesiones no surgirían con tanta naturalidad.

De lo dicho se desprende que, al estudiar una serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, lo que más nos debe interesar es la información sobre ella que podamos deducir directamente de la sucesión $\{x_n\}$, pues casi nunca dispondremos de una expresión cómoda para trabajar con las sumas parciales.

Veamos un resultado básico del tipo indicado: si la sucesión $\{x_n\}$ no converge a cero, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ no puede ser convergente, equivalentemente:

- *El término general de una serie convergente es una sucesión convergente a cero.*

Suponiendo que la serie $\{S_n\} = \sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge, digamos $\{S_n\} \to S \in \mathbb{R}$, tenemos también $\{S_{n+1}\} \to S$, luego $\{x_{n+1}\} = \{S_{n+1} - S_n\} \to 0$, es decir, $\{x_n\} \to 0$. ■

Traducido al lenguaje de sucesiones, lo que acabamos de ver es igual de obvio: si $\{y_n\}$ es una sucesión convergente, entonces $\{y_n - y_{n-1}\} \to 0$, equivalentemente, $\{y_{n+1} - y_n\} \to 0$.

Es natural preguntarse por el recíproco del resultado anterior, es decir, si la convergencia a cero del término general de una serie implica o no que la serie converja. En lenguaje de sucesiones, la pregunta sería si, dada una sucesión $\{y_n\}$, de ser $\{y_{n+1} - y_n\} \to 0$ podemos o no deducir que $\{y_n\}$ sea convergente. He aquí una pregunta sobre sucesiones, que hasta ahora no nos habíamos planteado, pero que surge de forma muy natural al estudiar las series. Vamos a ver enseguida, con un ejemplo importante, que la respuesta es negativa.

9.2. Primeros ejemplos de series

La serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ recibe el nombre de *serie armónica* y se denota también por $\{H_n\}$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Obsérvese que la serie armónica es una sucesión algo complicada, calcular explícitamente la n-ésima suma parcial H_n, para valores grandes de n, es laborioso, y no disponemos de una expresión cómoda que nos permita decidir fácilmente si la serie converge o no. Sin embargo, el término general de la serie armónica es $\{1/n\}$, una sucesión bien sencilla que sabemos converge a cero. Pues bien, la serie armónica es un buen ejemplo de una serie no convergente, cuyo término general converge a cero:

- *La serie armónica diverge positivamente.*

La demostración se basa en la siguiente desigualdad, que comprobaremos por inducción:

$$H_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

En efecto, para $n = 1$ la desigualdad buscada es evidente y, supuesto que se verifica para un $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

donde, para $2^n + 1 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}$, hemos usado que $1/k \geqslant 1/2^{n+1}$. De (1) se deduce claramente que la sucesión $\{H_{2^n}\}$ no está mayorada, luego $\{H_n\}$ tampoco lo está. Como $\{H_n\}$ es una sucesión creciente y no mayorada, tenemos $\{H_n\} \to +\infty$, como queríamos. ■

Como primer ejemplo de serie convergente, aunque sea bastante trivial, merece la pena ver que toda suma finita puede verse como suma de una serie. Dados $p \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, consideremos la serie $\{S_n\} = \sum_{n \geqslant 1} x_n$, donde $x_n = 0$ para $n > p$. Entonces, para $n \geqslant p$ se tiene obviamente $S_n = S_p$, luego $\{S_n\} \to S_p$. Por tanto, la serie considerada es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Intuitivamente, esto es una absoluta ingenuidad: cualquier suma finita puede verse como la suma de una serie cuyos términos son todos nulos a partir de uno en adelante.

Enseguida vamos a presentar una amplia colección de series convergentes no triviales, es decir, con infinitos términos no nulos. Conviene aclarar previamente una notación que se usa a menudo para trabajar con ciertas series. Se trata solamente de considerar series cuyos términos se numeran de una forma diferente a la usada hasta ahora.

Dada una sucesión $\{x_n\}$ tenemos la serie de término general $\{x_n\}$:

$$\sum_{n \geqslant 1} x_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_n \right\} = \{S_n\} \tag{1}$$

Pero fijado $x_0 \in \mathbb{R}$, nos puede interesar que las sumas parciales arranquen con x_0 como primer sumando, en lugar de x_1. Para ello, denotamos por $\sum_{n \geqslant 0} x_n$ a la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_{n-1}$, explícitamente:

$$\sum_{n \geqslant 0} x_n = \sum_{n \geqslant 1} x_{n-1} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right\} = \{\widetilde{S}_n\} \tag{2}$$

Caso de que esta serie sea convergente, su suma se denotará por $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1}$.

Obviamente las series que aparecen en (1) y (2) son distintas, pero conviene resaltar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima suma parcial de ambas series involucra n sumandos. Además, tenemos claramente $\widetilde{S}_{n+1} = x_0 + S_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la convergencia de la sucesión $\{S_n\}$ equivale a la de $\{\widetilde{S}_{n+1}\}$, que a su vez equivale a la de $\{\widetilde{S}_n\}$, en cuyo caso está clara la relación entre las sumas de ambas series:

- *Sea $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces la serie $\sum_{n \geqslant 0} x_n$ converge si, y sólo si, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ converge, en cuyo caso se tiene: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Pues bien, dado $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} x^n = \sum_{n \geqslant 1} x^{n-1}$ recibe el nombre de *serie geométrica* de razón x. Su término general es la sucesión $\{x^{n-1}\}$ que sabemos converge a cero si, y sólo si, $|x| < 1$. Deducimos que, si la serie geométrica de razón x es convergente, se ha de tener $|x| < 1$. En este caso, el recíproco también es cierto:

- *Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$, la serie geométrica de razón x es convergente, con*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Para comprobarlo, fijado $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$, sumamos una progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando ahora que $\{x^n\} \to 0$, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{1-x} \qquad \blacksquare$$

Es útil considerar series cuyos términos se numeran de otras formas que aún no hemos manejado. Dada una sucesión $\{x_n\}$ que como siempre da lugar a la serie definida en (1), en lugar de añadir un primer sumando x_0 como hicimos en (2), nos puede interesar, fijado $p \in \mathbb{N}$, omitir los sumandos x_k con $k \leqslant p$, de forma que las sumas parciales arranquen con x_{p+1} como primer sumando. Para ello, denotamos por $\sum_{n \geqslant p+1} x_n$ a la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_{p+n}$, más explícitamente:

$$\sum_{n \geqslant p+1} x_n = \sum_{n \geqslant 1} x_{p+n} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_{p+k} \right\} = \left\{ \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k \right\} = \{\widehat{S}_n\} \tag{3}$$

Caso de que esta serie sea convergente, su suma se denotará por $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{p+n}$.

Nótese que, de nuevo, para cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima suma parcial $\widehat{S}_n$ de la serie definida en (3) involucra n sumandos. Además, tenemos claramente

$$S_{p+n} = \sum_{k=1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^{p} x_k + \widehat{S}_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos claramente lo siguiente:

- *Para toda sucesión* $\{x_n\}$, *y todo* $p \in \mathbb{N}$, *se tiene que la serie* $\sum_{n \geqslant p+1} x_n$ *converge si y sólo si, la serie* $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ *converge, en cuyo caso se tiene:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^{p} x_k + \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n \tag{4}$$

Dicho intuitivamente, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$, al suprimir los primeros p sumandos de una serie, obtenemos otra, cuya convergencia equivale a la de la serie de partida, y cuando ambas series convergen, sus sumas guardan la relación que cabía esperar, pues la igualdad (4) puede entenderse como una especie de propiedad "asociativa" de la suma de una serie.

Para entender la utilidad que puede tener usar series cuyos términos aparecen numerados de muy diversas formas, conviene insistir en lo recién comprobado. Sea pues $\sum_{n \geqslant 1} x_n = \{S_n\}$ una serie convergente y denotemos por S a su suma. Hemos visto que entonces, la serie $\sum_{n \geqslant p+1} x_n$ es convergente *para todo* $p \in \mathbb{N}$ y (4) nos dice que

$$S - S_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} x_n \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

El primer miembro de esta igualdad puede interpretarse como el error que se comete al tomar la p-ésima suma parcial de una serie como valor aproximado de la suma de la serie, y vemos que dicho error se expresa a su vez como la suma de otra serie. Por definición de la suma de una serie, sabemos que $S = \lim_{p \to \infty} S_p$, luego podemos conseguir que dicho error sea tan pequeño como queramos, sin más que tomar p suficientemente grande. Esto no es nada nuevo, pero tener la diferencia $S - S_p$ expresada como la suma de una serie, permite con frecuencia resolver un problema práctico importante: saber cómo de grande debemos tomar p para asegurarnos que el error se mantenga dentro de un margen prefijado.

En otro orden de ideas, conviene comentar que, aunque la igualdad (4) requiere obviamente que x_n esté bien definido para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant p+1} x_n$ no involucra los valores de x_n para $n \leqslant p$, así que podemos estudiar su convergencia y, cuando sea posible, considerar su suma, sin concretar esos valores. A veces, damos una definición genérica de x_n que no tiene sentido para $n \leqslant p$, sin que ello cause ningún problema.

Por ejemplo, podemos considerar la serie

$$\sum_{n\geqslant 3} x_n = \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n-2)(n-1)}$$

a pesar de que x_n no tiene sentido para $n = 1,2$. Como en este caso $p = 2$, tenemos

$$\sum_{n\geqslant 3} x_n = \sum_{n\geqslant 1} x_{n+2} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

serie que no ofrece ninguna dificultad. Ya que ha aparecido, vamos a ver que esta serie es convergente y calculamos su suma. Para ello, observamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego la serie considerada es convergente y podemos escribir

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-1)}$$

La gama de series convergentes que hasta ahora conocemos puede ampliarse un poco con una sencilla observación:

- *Sean* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ *series convergentes y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$ *es convergente con*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

La comprobación de este hecho es inmediata. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \;\; Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k\,, \;\; Z_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha X_n + \beta Y_n$$

Por hipótesis las sucesiones $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ son convergentes, luego $\{Z_n\}$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to\infty} Z_n = \alpha \lim_{n\to\infty} X_n + \beta \lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad \blacksquare$$

En particular, si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente y $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha x_n$ es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

igualdad que se interpreta como una propiedad distributiva del producto de números reales con respecto a la suma de una serie.

Tomando $\alpha = \beta = 1$, la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

nos da otra especie de "asociatividad" y "conmutatividad" de la suma de una serie.

Consideremos por ejemplo la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n}$. Usando el último resultado, esta serie es convergente y su suma viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{29}{6}$$

9.3. Ejercicios

1. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales verificando que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$ se tiene $x_n = y_n$. Probar que la convergencia de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} y_n$. En caso de que haya convergencia, explicar la relación entre las sumas de ambas series.

2. Probar que la sucesión $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2+3n+2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} \right\}$ es convergente y calcular su límite.

3. Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1}(x_n + y_n)$ es convergente. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de las series $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} y_n$?

4. Probar que las siguientes series convergen y calcular sus sumas:

   (a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3n+4}{n^3+3n^2+2n}$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

   (c) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{4n+2}{n^3-n}$ (d) $\sum_{n\geqslant 3} \frac{3n^2+3n+1}{n(n+1)^3\sqrt{n}+n^3(n+1)\sqrt{n+1}}$

5. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^*$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha x^{2n}+\beta}{x^n}$ y, cuando sea convergente, calcular su suma.

Tema 10

Series de términos no negativos

Vamos a presentar aquí algunos criterios útiles para estudiar la convergencia de series de términos no negativos. Empezamos con un método básico que consiste en comparar la serie que pretendemos estudiar con una serie conocida. Por comparación con las series geométricas obtendremos el criterio de la raíz o de Cauchy, del que se deduce fácilmente el criterio del cociente o de D'Alembert. Finalmente veremos el llamado criterio de condensación, también debido a Cauchy. Concluimos el tema definiendo el número e y probando que es irracional.

10.1. Criterios de comparación

En lo que sigue sólo vamos a trabajar con series de términos no negativos, es decir, series de la forma $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ con $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El estudio de la convergencia de estas series resulta más sencillo, porque son sucesiones crecientes: $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para una tal serie, tenemos una clara disyuntiva: converge o diverge positivamente. De hecho, *una serie de términos no negativos es convergente si, y sólo si, está mayorada.* Esto hace que, frecuentemente, de la convergencia de una serie podamos deducir la de muchas otras:

Criterio de comparación (Primera versión). *Si* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *también es convergente y se verifica que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

La demostración es casi evidente. Escribimos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $\{B_n\}$ es convergente, luego está mayorada, así que $\{A_n\}$ también está mayorada, luego es convergente. Además, tenemos claramente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n \leqslant \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Intuitivamente, podríamos decir que la desigualdad (1) se obtiene al sumar miembro a miembro infinitas desigualdades: $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que en (1) tendremos desigualdad estricta tan pronto como exista un $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m < b_m$. En efecto, si en (1) se da la igualdad, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = 0$, de donde claramente, $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para asegurar que se cumple (1), es importante que tengamos $a_n \leqslant b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, a efectos de conseguir solamente la convergencia de una serie, es frecuente aplicar el criterio de comparación con una hipótesis menos restrictiva:

Criterio de comparación (Segunda versión). *Sean* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *y* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *dos series de números reales. Supongamos que existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $k > p$ *se tiene* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$, *y que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *es convergente. Entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *también es convergente.*

En efecto, la hipótesis nos permite asegurar que la serie $\sum_{n\geqslant p+1} b_n = \sum_{n\geqslant 1} b_{p+n}$ es convergente, y tenemos $0 \leqslant a_{p+n} \leqslant b_{p+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La primera versión de este criterio nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{p+n} = \sum_{n\geqslant p+1} a_n$ es convergente, luego $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ también lo es. ■

Esta segunda versión del criterio de comparación se aprovecha enseguida para obtener una tercera, la que en la práctica se usa con más comodidad:

Comparación por paso al límite. *Sean* $a_n \geqslant 0$ *y* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y supongamos que la sucesión* $\{a_n/b_n\}$ *converge a un límite* $L \in \mathbb{R}$, *que obviamente verifica* $L \geqslant 0$.

(i) *Si* $L > 0$, *la convergencia de la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *equivale a la de la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

(ii) *Si* $L = 0$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *también es convergente.*

La demostración no ofrece dificultad. En el primer caso, la definición de sucesión convergente nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene que $|(a_n/b_n) - L| < L/2$. Deducimos claramente que

$$n \geqslant m \implies b_n < \frac{2}{L}a_n \quad \text{y} \quad a_n < \frac{3L}{2}b_n$$

Al multiplicar el término general de una serie convergente por una constante, la convergencia se mantiene, luego aplicando dos veces la segunda versión del criterio de comparación, obtenemos directamente el resultado deseado.

En el caso $L = 0$ tenemos claramente un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $a_n < b_n$, y aplicamos el mismo criterio. ■

Como primer ejemplo sencillo, consideremos la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^2 + 3n + 4}$. Tomando $b_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente que $\{a_n/b_n\} \to 1$. Así pues, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no converge, ya que la serie armónica $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

El siguiente ejemplo es mucho más relevante. Fijado $p \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ se conoce como *serie armónica con exponente* p. Para $p = 1$ tenemos la serie armónica (por antonomasia) que sabemos diverge positivamente. En lo demás casos tenemos convergencia:

- *Para* $p \in \mathbb{N}$ *con* $p > 1$, *la serie armónica con exponente* p *es convergente.*

Como $0 < 1/n^p \leqslant 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la primera versión del criterio de comparación, basta considerar el caso $p = 2$. Recordemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} b_n = \sum_{n \geqslant 1} 1/\big(n(n+1)\big)$ converge. Tomando $a_n = 1/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos evidentemente $\{a_n/b_n\} \to 1$, y el criterio de comparación por paso al límite nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 1} 1/n^2$ también converge. ■

10.2. Criterios de la raíz y del cociente

Los criterios de comparación típicamente se usan, como hemos hecho hasta ahora, para decidir si una serie converge o no, comparándola con otra conocida. Lógicamente tales criterios serán tanto más efectivos cuanto más amplia sea la gama de series conocidas. Usando la gama de las series geométricas vamos a obtener otro criterio de convergencia muy útil.

Criterio de la raíz para series o criterio de Cauchy. *Sea* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Si la sucesión* $\big\{\sqrt[n]{a_n}\big\}$ *no está acotada, o bien está acotada con* $\limsup \big\{\sqrt[n]{a_n}\big\} > 1$, *entonces* $\{a_n\}$ *no converge a cero, luego la serie* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *diverge.*

(ii) *Si* $\big\{\sqrt[n]{a_n}\big\}$ *está acotada con* $\limsup \big\{\sqrt[n]{a_n}\big\} < 1$, *entonces la serie* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *converge.*

Demostración. (i). Suponiendo que $\{a_n\} \to 0$, bastará ver que $\big\{\sqrt[n]{a_n}\big\}$ está acotada con $\limsup \big\{\sqrt[n]{a_n}\big\} \leqslant 1$. En efecto, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $a_n < 1$, luego $\sqrt[n]{a_n} < 1$. Esto ya prueba que $\big\{\sqrt[n]{a_n}\big\}$ está acotada. Pero además, también para $n \geqslant m$, tenemos que 1 es mayorante del conjunto $\big\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\big\}$, luego $\sup\big\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\big\} \leqslant 1$. Basta entonces usar la definición de límite superior:

$$\limsup \big\{\sqrt[n]{a_n}\big\} = \lim_{n \to \infty} \Big(\sup \big\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\big\}\Big) \leqslant 1$$

(ii) Tomamos $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $\limsup \big\{\sqrt[n]{a_n}\big\} < \lambda < 1$. Usando de nuevo la definición de límite superior, encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant m$ se tiene $\sup \big\{\sqrt[k]{a_k} : k \geqslant n\big\} < \lambda$ y, por tanto, $\sqrt[n]{a_n} < \lambda$. Así pues, tenemos

$$n \geqslant m \implies a_n < \lambda^n < \lambda^{n-1}$$

Por ser $\lambda < 1$, la serie geométrica de razón λ es convergente, y basta aplicar la segunda versión del criterio de comparación. ■

Resaltamos el caso que no queda cubierto por el criterio de la raíz: si la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada y verifica que $\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$, el criterio no nos da información. Suele decirse que este es el "caso dudoso" del criterio de la raíz, pues veremos enseguida que entonces la serie considerada puede converger, pero también puede ser divergente.

Frecuentemente, al aplicar el criterio de la raíz, nos encontramos con que la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ es convergente, y entonces las cosas son más fáciles:

- *Sea* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que la sucesión* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *es convergente.*
  - (i) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$*, entonces* $\{a_n\}$ *no converge a cero, luego la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*
  - (ii) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$*, entonces la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

Por supuesto, cuando $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to 1$, tenemos $\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$ y estamos en el caso dudoso. Por ejemplo, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n$ diverge, mientras que $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/n^2$ es convergente. Queda así claro que, en el caso dudoso, el criterio de la raíz no puede dar información sobre la convergencia de la serie considerada.

Recordemos que, si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la convergencia de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ podía estudiarse mediante el criterio de la raíz para sucesiones. Más concretamente, la prueba de dicho criterio se basó en un lema que afirma lo siguiente: si la sucesión de cocientes $\{a_{n+1}/a_n\}$ está acotada, entonces $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ también está acotada y se verifican las siguientes desigualdades:

$$\liminf \{a_{n+1}/a_n\} \leqslant \liminf \{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \limsup \{a_{n+1}/a_n\} \tag{2}$$

Uniendo este lema con el criterio de la raíz para series, deducimos lo siguiente:

Criterio del cociente o de D'Alembert. *Sea* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que la sucesión* $\{a_{n+1}/a_n\}$ *está acotada.*

(i) *Si* $\liminf \{a_{n+1}/a_n\} > 1$*, la sucesión* $\{a_n\}$ *no converge a cero y la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*

(ii) *Si* $\limsup \{a_{n+1}/a_n\} < 1$*, la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

La demostración ya se ha sugerido. Sabemos que $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada y podemos usar (2).

(i). En este caso tenemos $1 < \liminf \{a_{n+1}/a_n\} \leqslant \limsup \{\sqrt[n]{a_n}\}$ y el criterio de la raíz nos dice que $\{a_n\}$ no converge a cero.

(ii). Ahora tenemos $\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \limsup \{a_{n+1}/a_n\} < 1$ y el criterio de la raíz nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. ■

Al igual que en el criterio de la raíz, cuando la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ es convergente, las cosas se facilitan:

- *Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ es convergente.*

  (i) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero, luego* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *diverge.*

  (ii) *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, entonces la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente.*

Usemos el criterio del cociente en un ejemplo sencillo. Fijados $q \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $x > 1$, sea $a_n = n^q/x^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q}{n^q x} = \frac{1}{x} < 1$$

y el criterio del cociente nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^q}{x^n}$ converge. Deducimos que $\{n^q/x^n\} \to 0$, cosa que se comprobó en su momento por inducción sobre q, usando el criterio de Stolz.

Merece la pena detenerse a comparar la efectividad de los criterios de la raíz y del cociente. En primer lugar, el criterio del cociente requiere que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga $a_n > 0$, de forma que podamos usar la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$, mientras en el criterio de la raíz basta que sea $a_n \geqslant 0$. Ciertamente, esta mayor generalidad del criterio de la raíz es poco relevante. Es fácil adivinar que la presencia de términos nulos no puede afectar a la convergencia de la serie.

La segunda diferencia entre ambos criterios es más importante. Cuando la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ no está acotada, el criterio de la raíz nos asegura que $\{a_n\}$ no converge a cero. En cambio, cuando la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ no está acotada, el criterio del cociente no es aplicable. De hecho, siendo $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, puede ocurrir que $\{a_n\} \to 0$, e incluso que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converja, sin que $\{a_{n+1}/a_n\}$ esté acotada. Consideremos, por ejemplo, la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\big(3+(-1)^n\big)^n}$$

Tenemos claramente que $\sqrt[n]{a_n} = 1/2$ cuando n es impar, mientras que $\sqrt[n]{a_n} = 1/4$ para n par. Por tanto, la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada con $\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} = 1/2 < 1$, luego el criterio de la raíz nos dice que la serie considerada es convergente. Sin embargo, para n par, comprobamos fácilmente que $a_{n+1}/a_n = 2^{n-1}$, luego la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ no está mayorada. Tenemos pues un ejemplo en el que el criterio de la raíz resuelve nuestro problema, mientras el del cociente no es aplicable.

Pero supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ está acotada, con lo que ambos criterios son aplicables. Según hemos visto, cuando el criterio del cociente nos permite decidir si la serie converge o diverge es porque el criterio de la raíz también lo permite, algo que quedó muy claro en las desigualdades (2). Dicho equivalentemente, si al intentar aplicar el criterio de la raíz se presenta el caso dudoso, lo mismo ocurrirá con el del cociente. La discusión se completa con un ejemplo en el que el criterio de la raíz resuelve nuestro problema, pero en el del cociente se presenta el caso dudoso. Consideremos la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2} = \begin{cases} \sqrt[n]{2}/2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sqrt[n]{4}/2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Deducimos que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to 1/2$ y el criterio de la raíz nos dice que nuestra serie es convergente. Por otra parte, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2\big(3+(-1)^n\big)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1/4 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

luego $1/4 = \liminf \{a_{n+1}/a_n\} < \limsup \{a_{n+1}/a_n\} = 1$, y el criterio del cociente no nos da información.

En resumen, el criterio de la raíz se aplica en situaciones más generales y es siempre más efectivo que el del cociente. La utilidad del criterio del cociente estriba en que la sucesión de cocientes $\{a_{n+1}/a_n\}$ suele manejarse con más comodidad que la sucesión de raíces $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

10.3. Condensación

Veamos ya un último criterio de convergencia para series de términos no negativos.

Criterio de condensación de Cauchy. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos, la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ equivale a la de $\sum_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$.*

Demostración. Consideremos las sumas parciales de ambas series:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{y} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Debemos probar que la sucesión $\{A_n\}$ está mayorada si, y sólo si, lo está $\{B_n\}$. Ello se deducirá fácilmente de dos desigualdades que probaremos por inducción:

$$A_{2^n-1} \leqslant B_n \leqslant 2A_{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Para $n = 1$ debemos ver que $a_1 \leqslant a_1 \leqslant 2a_1$, lo cual es obvio. Antes de entrar en la etapa de inducción, observamos que, por ser la sucesión $\{a_n\}$ decreciente, para $k \geqslant 2^n \geqslant j$ tenemos $a_k \leqslant a_{2^n} \leqslant a_j$, de donde

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant 2^n a_{2^n} = 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leqslant 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j \tag{4}$$

ya que la suma del primer miembro consta de 2^n sumandos, mientras la del último miembro tiene 2^{n-1}. Suponiendo ya que se verifica (3) para un $n \in \mathbb{N}$, y usando (4), tenemos

$$A_{2^{n+1}-1} = A_{2^n-1} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \leqslant B_n + 2^n a_{2^n} = B_{n+1}$$

$$= B_n + 2^n a_{2^n} \leqslant 2A_{2^{n-1}} + 2 \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} a_j = 2A_{2^n}$$

Puesto que $A_n \leqslant A_{2^n-1}$, de (3) deducimos que $A_n \leqslant B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{A_n\}$ estará mayorada siempre que lo esté $\{B_n\}$. Recíprocamente, si $\{A_n\}$ está mayorada, también lo estará su sucesión parcial $\{A_{2^{n-1}}\}$, y usando (3) deducimos que $\{B_n\}$ está mayorada. ■

Observando las desigualdades (4) que han sido el paso clave en la demostración anterior, se puede entender en qué consiste el proceso de "condensación" que hemos aplicado. Para la primera desigualdad, la suma que aparece en el primer miembro de (4) se "condensa" al sustituir todos los sumandos por el mayor de ellos, mientras que para la última desigualdad, la expresión $2^{n-1}a_{2^n}$ se "descondensa" al sustituirla por una suma de 2^{n-1} sumandos, siendo a_{2^n} el menor de ellos. En ambos casos se aprovecha la hipótesis clave: la sucesión $\{a_n\}$ decrece. El proceso se visualiza aún mejor si hacemos la demostración directa de (3) para un valor concreto de n, por ejemplo para $n=4$, que sería la siguiente:

$$\begin{aligned} A_{15} &= a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + (a_8+a_9+\ldots+a_{15}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 = B_4 \leqslant 2\big(a_1+a_2+2a_4+4a_8\big) \\ &\leqslant 2\big(a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)\big) = 2A_8 \end{aligned}$$

Obsérvese por ejemplo, que la suma $a_4+a_5+a_6+a_7$ se "condensa" al mayorarla por $4a_4$, y en la última desigualdad, se "descondensa" $4a_8$ al mayorarlo por $a_5+a_6+a_7+a_8$. Veamos ahora algunos ejemplos que ilustran la utilidad del criterio de condensación.

La convergencia de las series armónicas se podría haber discutido como sigue: fijado $p \in \mathbb{N}$, tomamos $\{a_n\} = \{1/n^p\}$, que es una sucesión decreciente de números positivos, y tenemos $2^n a_{2^n} = (1/2^{p-1})^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ es la serie geométrica de razón $1/2^{p-1}$, que diverge cuando $p=1$ y converge para $p>1$. Por el criterio de condensación, lo mismo le ocurre a la serie armónica con exponente p, como ya sabíamos. La clave ahora ha sido que, al "condensar" una serie armónica, se obtiene una serie geométrica.

Para tener más ejemplos, consideremos la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt[q]{n}}$, de nuevo con $q \in \mathbb{N}$ fijo. De nuevo $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos con $2^n a_{2^n} = \big(1/\sqrt[q]{2}\big)^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como la serie geométrica de razón $1/\sqrt[q]{2} < 1$ es convergente, el criterio de condensación nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ también converge.

Existen muchos más de criterios de convergencia para series de términos no negativos, pero los aquí estudiados son ya suficientes para dilucidar la convergencia de multitud de series.

10.4. El número e

Vamos a estudiar un número real cuya importancia se pondrá de manifiesto más adelante. Consideremos la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1/n!$, cuya convergencia se va a deducir fácilmente del criterio del cociente. En efecto, tomando $a_n = 1/n!$ tenemos claramente $a_{n+1}/a_n = 1/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{a_{n+1}/a_n\} \to 0 < 1$ y el criterio del cociente nos dice que la serie considerada converge.

Pues bien, la suma de dicha serie es, por definición, *el número e*, que debe su nombre al genio matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Así pues, tenemos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \qquad \text{donde} \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Obsérvese que, por comodidad en la notación, estamos llamando σ_n, no a la n-ésima, sino a la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie usada para definir e.

Es obvio que $e > \sigma_p$ para todo $p \in \mathbb{N}$; tomando $p = 1$ obtenemos $e > 2$, con $p = 2$ tenemos $e > 5/2$, $p = 3$ nos da $e > 8/3$, etc. Pero conviene estimar el error que se comete al tomar σ_p como aproximación del número e. Una buena estimación es la siguiente:

- *Para todo $p \in \mathbb{N}$, se verifica que:* $e - \sigma_p = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} < \frac{1}{p!\,p}$ (5)

Para probarlo, fijado $p \in \mathbb{N}$, expresamos la diferencia $e - \sigma_p$ como la suma de una serie, usando una idea que se comentó en su momento:

$$e - \sigma_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)!}$$

Pretendemos ahora sustituir la serie que nos ha aparecido, por otra cuya suma podamos calcular. Concretamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $(p+n)! \geqslant p!\,(p+1)^n$, es decir,

$$\frac{1}{(p+n)!} \leqslant \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{n} = \frac{1}{(p+1)!} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{n-1}$$

y la desigualdad es estricta para $n > 1$. Salvo un factor constante, nos ha aparecido la serie geométrica de razón $1/(p+1) < 1$ cuya suma conocemos:

$$\frac{1}{(p+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{n-1} = \frac{1}{(p+1)!} \, \frac{1}{1 - \big(1/(p+1)\big)} = \frac{1}{p!\,p}$$

Así pues, la primera versión del criterio de comparación nos permite escribir:

$$e - \sigma_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+1)!} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{n-1} = \frac{1}{p!\,p} \qquad \blacksquare$$

La desigualdad (5) asegura que la sucesión $\{\sigma_n\}$ converge rápidamente al número e. Por ejemplo, para $p = 7$ se tiene ya $p!\,p > 10^4$ obteniéndose que $2{,}7182 < e < 2{,}7183$. Ponemos aún más de manifiesto la utilidad de (5) probando lo siguiente:

- *El número e es irracional.*

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $e = m/p$ donde $m, p \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $p!\, e = (p-1)!\, m \in \mathbb{N}$. Por otra parte, es claro que $p!\, \sigma_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!} \in \mathbb{N}$, ya que $p!/k! \in \mathbb{N}$ para $k = 0, 1, \ldots, p$. Obtenemos por tanto que $p!(e - \sigma_p) \in \mathbb{N}$. Pero aplicando (5) tenemos que $p!(e - \sigma_p) < 1/p \leqslant 1$, y hemos llegado a una contradicción. ■

Completamos este estudio preliminar del número e viéndolo como límite de una sucesión sencilla, que a veces se usa para dar una definición alternativa.

- *Se verifica que* $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, poniendo $u_n = (1 + 1/n)^n$, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!\, n^k} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \tag{6}$$

Resulta ahora fácil comprobar que la sucesión $\{u_n\}$ es creciente. En efecto, fijados $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$, es claro que

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$$

y usando dos veces (6) deducimos claramente que

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)\right] = u_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para ver que $\{u_n\}$ está mayorada, observamos que en el último miembro de (6) todos los productos que aparecen son menores o iguales que 1, luego

$$u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sigma_n < e \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues, $\{u_n\}$ es convergente y, llamando L a su límite, sabemos ya que $L \leqslant e$. En busca de la otra desigualdad, fijamos $p \in \mathbb{N}$ y volvemos a usar (6) para obtener:

$$u_{p+n} = 1 + \sum_{k=1}^{p+n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{p+n}\right) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{p+n}\right) = v_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

donde la sucesión $\{v_n\}$ se define mediante la última igualdad. Vemos que $\{v_n\}$ es convergente, ya que se obtiene mediante una suma de productos de sucesiones convergentes. De hecho:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1 + \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{j}{p+n}\right)\right] = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} = \sigma_p$$

No nos debe extrañar que este límite dependa del número natural p que hemos fijado, puesto que la propia sucesión $\{v_n\}$ dependía de p.

Puesto que $\{u_{p+n}\} \to L$, de la desigualdad (7) deducimos que $L \geqslant \sigma_p$, pero esto ocurre para todo $p \in \mathbb{N}$, así que $L \geqslant \lim\limits_{p\to\infty} \sigma_p = e$. ■

10.5. Ejercicios

1. Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente de términos no negativos. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ también es convergente.

2. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales no negativos. Supongamos que las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n^2$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n^2$ son convergentes. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ también es convergente.

3. Sea $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty} n^q a_n = 1$, donde $q \in \mathbb{N}$ y $q > 1$. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

4. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

5. Dado $a \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n$

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (b) $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2^n(n^2+1)}{n^n}$

7. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+3n+1}{n!}$ es convergente y calcular su suma.

8. Estudiar la convergencia de las series $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{2^n\,n!}$ y $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{3^n\,n!}$

Tema 11

Convergencia absoluta y series alternadas

Una vez que disponemos de diversos criterios de convergencia para series de términos no negativos, abordamos el estudio de la convergencia de series de números reales cualesquiera. Introducimos para ello la noción de convergencia absoluta y, usando el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, probamos que toda serie absolutamente convergente es convergente. El recíproco no es cierto y para probarlo estudiamos las series alternadas, así llamadas porque el signo de sus términos va alternando. Presentamos un criterio de convergencia muy útil para el estudio de este tipo de series, el criterio de Leibniz, que permite mostrar abundantes ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes. Finalmente abordamos la pregunta de si la convergencia de una serie se conserva al permutar sus términos, lo que nos lleva a la noción de convergencia incondicional, que resulta ser equivalente a la convergencia absoluta.

11.1. Convergencia absoluta

Nos planteamos ya el problema general de estudiar la convergencia de cualquier serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ de números reales. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ es finito, existirá un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geqslant 0$ para $n \geqslant m$. Considerando entonces la serie $\sum_{n\geqslant m} x_n$, cuya convergencia equivale como sabemos a la de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, podemos usar los criterios de convergencia para series de términos no negativos. Por otra parte, si es finito el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$, la observación anterior se aplica a la serie $\sum_{n\geqslant 1} (-x_n)$ cuya convergencia equivale como sabemos a la de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Por tanto, nos interesa ahora el caso en que ambos conjuntos mencionados son infinitos, dicho de manera intuitiva, queremos estudiar las series “con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos”.

La estrategia consiste en usar la serie de valores absolutos $\sum_{n\geqslant 1} |x_n|$. Se dice que una serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es *absolutamente convergente* cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} |x_n|$ es convergente.

Por ejemplo, puesto que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\sum_{n \geqslant 0} |x^n| = \sum_{n \geqslant 0} |x|^n$, la serie geométrica de razón x converge absolutamente si, y sólo si, $|x| < 1$. Así pues, para las series geométricas, convergencia y convergencia absoluta son nociones equivalentes.

En general, como la nomenclatura sugiere, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia. Este hecho es una consecuencia directa del teorema de complitud de $\mathbb{R}$:

Teorema. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más concretamente, dada una sucesión* $\{x_n\}$ *de números reales, si la serie* $\sum_{n \geqslant 1} |x_n|$ *es convergente, entonces* $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ *también es convergente y se verifica que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \tag{1}$$

Demostración. Consideremos las sumas parciales de ambas series:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ y supongamos de momento que $q < p$. Tenemos claramente

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=q+1}^{p} x_k \right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |x_k| = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|$$

La desigualdad así obtenida es obvia cuando $p = q$ y no se altera al intercambiar p y q, luego es válida para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis, $\{\sigma_n\}$ es convergente, luego es una sucesión de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geqslant m$, se tiene $|\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$. La desigualdad recién probada nos dice que para $p, q \geqslant m$ tendremos $|S_p - S_q| < \varepsilon$, luego $\{S_n\}$ también es una sucesión de Cauchy. El teorema de complitud de $\mathbb{R}$ nos asegura que $\{S_n\}$ es convergente, como queríamos.

Para obtener la desigualdad (1), pongamos $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} S_n$. Sabemos entonces que $\{|S_n|\} \to |S|$, pero es claro que $|S_n| \leqslant \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| = |S| = \lim_{n \to \infty} |S_n| \leqslant \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que, una vez más, la suma de una serie se comporta como si se tratase de una suma finita. Según (1), el valor absoluto de la suma de una serie absolutamente convergente es menor o igual que la suma de la serie de los valores absolutos de sus términos.

El recíproco del teorema anterior no es cierto, enseguida veremos abundantes ejemplos de series convergentes que no convergen absolutamente.

11.2. Series alternadas

Volviendo en cierto modo a los comentarios hechos al principio, si queremos que una serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converja sin hacerlo absolutamente, los conjuntos $\{n\in\mathbb{N} : x_n<0\}$ y $\{n\in\mathbb{N} : x_n>0\}$ habrán de ser infinitos, pues en otro caso, o bien existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|=x_n$ para $n\geqslant m$, o bien existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|=-x_n$ para $n\geqslant m$. En ambos casos, la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} |x_n|$ equivale a la de $\sum_{n\geqslant 1} x_n$. Es lógico, por tanto, pensar en series cuyos términos en lugares pares sean positivos y los de lugar impar negativos, o viceversa.

Una *serie alternada* es una serie de la forma $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$, o bien $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1} a_n$, donde $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ recibe el nombre de *serie armónica alternada* y está claro que esta serie no converge absolutamente. Sin embargo, es convergente, como se deduce del siguiente criterio de convergencia para series alternadas.

Criterio de Leibniz. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y $\{a_n\}\to 0$, entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración. Debemos probar que la sucesión $\{S_n\}=\big\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\big\}$ converge. Usando que $\{a_n\}$ es decreciente y que $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, conseguimos la siguiente cadena de desigualdades, válidas para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &\leqslant S_{2n-1}+a_{2n}-a_{2n+1}=S_{2n+1} \\ &\leqslant S_{2n+1}+a_{2n+2}=S_{2n+2}=S_{2n}-a_{2n+1}+a_{2n+2}\leqslant S_{2n} \end{aligned}$$

Destacando lo que nos interesa, hemos visto que

$$S_{2n-1}\leqslant S_{2n+1}\leqslant S_{2n+2}\leqslant S_{2n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Por tanto, la sucesión $\{S_{2n-1}\}$ es creciente y $\{S_{2n}\}$ es decreciente. Pero, como consecuencia también tenemos

$$S_1\leqslant S_{2n-1}\leqslant S_{2n}\leqslant S_2\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

de modo que las sucesiones $\{S_{2n-1}\}$ y $\{S_{2n}\}$ están acotadas y, por tanto, ambas convergen. Puesto que $\{S_{2n}\}=\{S_{2n-1}+a_{2n}\}$ y $\{a_{2n}\}\to 0$, deducimos que $\lim\{S_{2n}\}=\lim\{S_{2n-1}\}$, luego $\{S_n\}$ es convergente, como se quería. ■

Así pues, la serie armónica alternada es convergente, pero no absolutamente convergente. Igual le ocurre, por ejemplo, a la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[q]{n}}$, para cualquier $q\in\mathbb{N}$.

11.3. Convergencia incondicional

Completamos este tema discutiendo una pregunta que tenemos planteada desde el principio del estudio de las series: hasta qué punto es prudente dejarnos llevar por la intuición e interpretar la suma de una serie convergente como la suma de "todos" los términos de una sucesión, cual si de una suma finita se tratara.

Hemos visto en algún caso que la suma de una serie tiene propiedades análogas a las de una suma finita. Por ejemplo, hemos visto ciertas formas de distributividad y de asociatividad. Vamos a preguntarnos ahora por la posible conmutatividad, en un sentido muy general, de la suma de una serie. Si tal propiedad fuese cierta, al permutar de cualquier forma los sumandos, la convergencia de la serie debería mantenerse y la suma de la serie debería seguir siendo la misma. Vamos a comentar algunos resultados acerca de esta cuestión, aunque sin entrar en las demostraciones. Empezamos planteando el problema con precisión.

En general una *permutación* de los elementos de un conjunto es una aplicación biyectiva del conjunto en sí mismo. Así pues, una *permutación de los números naturales* será una aplicación biyectiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dada una sucesión $\{x_n\}$, usando una permutación π de los números naturales, podemos formar la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$ que intuitivamente se obtiene permutando los términos de $\{x_n\}$.

Pues bien, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente y la suma de series tuviese la conmutatividad que pretendemos discutir, la serie *reordenada* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ debería ser convergente y tener la misma suma que la serie de partida. En principio esto no está nada claro, ya que la relación entre las sumas parciales de ambas series no es sencilla.

Se dice que una serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es *incondicionalmente convergente* cuando, para cualquier permutación π de los números naturales, la serie reordenada $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ converge. Según la motivación anterior, deberíamos haber exigido también que la serie reordenada tenga la misma suma que la de partida, pero acabaremos viendo que esto ocurre automáticamente: si una serie converge incondicionalmente, la suma de la serie no depende de la reordenación que podamos considerar.

Es claro que toda serie incondicionalmente convergente es convergente, pues basta tomar $\pi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema. *Una serie de números reales es incondicionalmente convergente si, y sólo si, es absolutamente convergente.*

Como ya se ha dicho, no vamos a exponer con detalle la demostración de esta equivalencia, pero sí vamos a enunciar y comentar por separado ambas implicaciones, para resaltar alguna información adicional. Para comprobar que la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia incondicional, es natural empezar considerando series de términos no negativos, para las que la convergencia equivale a la acotación de las sumas parciales. No es difícil obtener el siguiente resultado, que sería el primer paso en la demostración del teorema anterior:

- *Toda serie convergente de términos no negativos es incondicionalmente convergente. Más concretamente, si* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es convergente, entonces, para cualquier permutación* π *de los números naturales, se tiene que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ *es convergente, verificándose además que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

El siguiente paso es ya casi inmediato, conseguimos una de las implicaciones del teorema anterior, con una información adicional: la suma de una serie absolutamente convergente no se altera al reordenarla:

- *Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Además, si la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *es absolutamente convergente, entonces, para toda permutación* π *de los números naturales, se tiene que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Para completar la discusión del teorema antes enunciado, comentamos la otra implicación, sobre la que también habrá información adicional. Para probarla, deberíamos ver que si una serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ no converge absolutamente, tampoco puede converger incondicionalmente, es decir, ha de existir una permutación π de los números naturales, tal que la serie reordenada $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ no sea convergente. Si la propia serie de partida $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ no es convergente, esto es evidente, luego el problema se concentra en las series convergentes que no son absolutamente convergentes. Efectivamente, tales series se pueden reordenar para que dejen de ser convergentes, pero peor aún, incluso para las reordenaciones que dan lugar a series convergentes, la suma que se obtiene depende de la permutación de los números naturales que usemos. Este resultado se debe al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) y puede enunciarse como sigue.

Teorema de Riemann. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *una serie convergente, que no converja absolutamente, y fijemos* $s \in \mathbb{R}$. *Entonces existen permutaciones* π_+, π_- *y* π_s *de los números naturales, tales que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi_+(n)}$ *diverge positivamente, la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi_-(n)}$ *diverge negativamente y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi_s(n)}$ *converge, con* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_s(n)} = s$.

Dicho de forma más intuitiva, toda serie convergente que no converja absolutamente, puede reordenarse para que diverja positivamente, para que diverja negativamente, y también para que converja a cualquier número real prefijado.

Podría hacerse un estudio de la asociatividad para la suma de una serie convergente, análogo al que hemos hecho para la conmutatividad, llegando a una conclusión similar: cuando una serie converge absolutamente, se puede decir que la suma de la serie verifica tal asociatividad en un sentido muy general, pero cuando la convergencia no es absoluta, las cosas se complican.

Como conclusión genérica, podemos decir que si la serie de término general $\{x_n\}$ converge absolutamente, está justificado pensar que la suma de la serie responde a la idea intuitiva de sumar todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, de hecho se dice en este caso que la sucesión $\{x_n\}$ es *sumable*. Ello se aplica en particular a las series convergentes de términos no negativos. Sin embargo, cuando la serie de término general $\{x_n\}$ es convergente, pero no absolutamente convergente, esa idea intuitiva, aunque siga siendo útil, debe manejarse con gran precaución.

11.4. Ejercicios

1. Sea $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ una serie absolutamente convergente y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ es convergente. Suponiendo sólo que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, ¿se puede asegurar que $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ también converge?

2. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{x^n + n^2}$

3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Tema 12

Continuidad

El Análisis Real es la parte del Análisis Matemático que se ocupa de las funciones de una o varias variables reales. Iniciamos aquí el estudio del caso más sencillo: funciones reales de una variable real, es decir, aplicaciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$.

Nos interesa una propiedad importante que dichas funciones pueden tener: la *continuidad*. Tras definir las funciones continuas, obtendremos algunas propiedades básicas. Concretamente veremos que la continuidad se conserva mediante varias operaciones: suma, producto, cociente y composición. Aparecerán de esta forma abundantes ejemplos de funciones continuas. También estudiaremos el carácter local de la continuidad, explicando con detalle en qué consiste.

12.1. Funciones reales de variable real

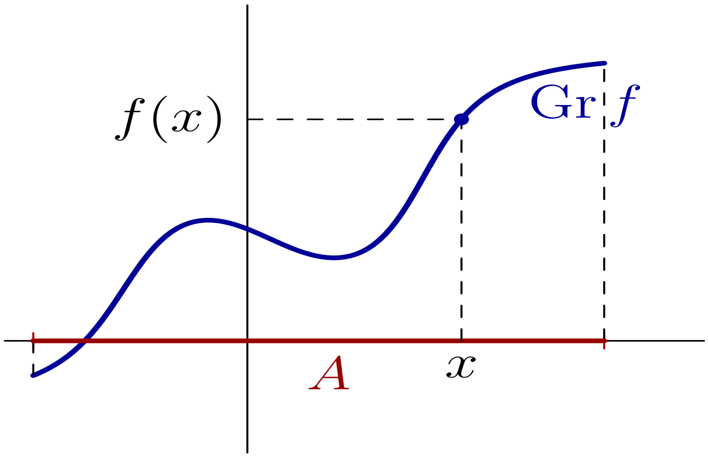
Llamamos *función real de variable real* a cualquier aplicación $f : A \to \mathbb{R}$, donde A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Puesto que sólo vamos a trabajar con este tipo de funciones, cuando usemos la palabra *función*, nos referimos siempre a una función real de variable real.

Para definir correctamente una función f, concretamos primero su *conjunto de definición*, digamos A, que puede ser cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, y entonces explicamos, para cada $x \in A$, cómo se obtiene el número real $f(x)$, que ha de estar determinado de manera única. Suele decirse que $f(x)$ es el *valor* que toma la función f en el punto x, o simplemente el valor de f en x. Está claro que dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ sólo son iguales cuando $A = B$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Toda función $f : A \to \mathbb{R}$, se interpreta geométricamente mediante un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que recibe el nombre de *gráfica* de la función f y viene definido por

$$\operatorname{Gr} f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \, : \, x \in A \big\}$$

Viendo cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ como el punto de un plano que, en coordenadas cartesianas, tiene abscisa x y ordenada y, la gráfica de la función f consta de los puntos (x,y) que verifican dos condiciones: $x \in A$ e $y = f(x)$.



Intuitivamente, para cada $x \in A$, la recta vertical formada por todos los puntos de abscisa x contiene un único punto de la gráfica, el que tiene ordenada $f(x)$, mientras que si $x \notin A$, dicha recta tiene intersección vacía con la gráfica de f.

Obsérvese que la gráfica de una función determina perfectamente a dicha función, definir una función f es exactamente lo mismo que definir el conjunto $\operatorname{Gr} f$. Geométricamente, al proyectar el conjunto $\operatorname{Gr} f$ sobre el eje de abscisas, obtenemos el conjunto A en el que f está definida y, para cada $x \in A$, $f(x)$ es el único $y \in \mathbb{R}$ que verifica la condición $(x,y) \in \operatorname{Gr} f$.

Por tanto es natural preguntarse qué condición (necesaria y suficiente) debe cumplir un conjunto no vacío $E \subset \mathbb{R}^2$ para ser la gráfica de una función real de variable real. La respuesta es fácil de adivinar: para cada $x \in \mathbb{R}$ la intersección de E con la recta vertical de abscisa x debe contener a lo sumo un punto, es decir, debe ser vacía o reducirse a un punto. Hemos visto antes la necesidad de esta condición, puesto que la gráfica de una función siempre la verifica, pero la suficiencia también está muy clara.

Junto con la interpretación geométrica ya comentada, en el estudio de las funciones reales de variable real, conviene tener presente la que suele llamarse interpretación *física*, pues es la que da lugar a las aplicaciones de estas funciones en Física, o en cualquier otra ciencia.

Para explicarla, recordemos la interpretación física de los números reales: permiten *medir* ciertas magnitudes físicas, es decir, expresar la relación que guarda cualquier cantidad de una tal magnitud, con una fija que se toma como unidad. Son las magnitudes que se suelen llamar *escalares*, como longitud, masa, tiempo, temperatura, carga eléctrica, etc. Fijada la unidad de medida, el conjunto de los valores que una magnitud escalar puede tomar en un problema físico concreto, es un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$.

Pues bien, sea $A \subset \mathbb{R}$ el conjunto de posibles valores de una magnitud P, involucrada en un proceso físico. Si a cada valor $x \in A$, corresponde un único valor $y \in \mathbb{R}$ de otra magnitud Q, podemos definir $f(x) = y$, para todo $x \in A$, obteniendo una función $f : A \to \mathbb{R}$, que nos permite obtener el valor de Q siempre que conozcamos el valor de P. Es por ello que suele decirse que Q *es función* de P. Así pues, una función real de variable real es el modelo matemático que permite describir la relación entre dos magnitudes escalares, siempre que el valor de una de ellas esté determinado en forma única por el valor de la otra.

Por ejemplo, en un movimiento rectilíneo, es claro que la posición del móvil es función del tiempo. Fijado un origen de tiempo y una unidad para medirlo, el periodo de observación del movimiento se describe mediante un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, así que cada $t \in A$ representa un instante. Típicamente, elegimos como origen el instante inicial de la observación y el conjunto A suele ser un intervalo $[0,T]$ con $T \in \mathbb{R}^+$. Si en la recta donde se produce el movimiento hemos fijado también un origen y una unidad de longitud, es claro que en cada instante $t \in A$ el móvil ocupará una posición bien determinada sobre la recta, que se corresponde con un número real s. Puesto que s está determinado por t en forma única, podemos definir $f(t) = s$ para todo $t \in A$, y tenemos una función $f : A \to \mathbb{R}$ que describe perfectamente el movimiento, puesto que nos dice, en cada instante $t \in A$, la posición del móvil $s = f(t)$. Por ello suele decirse que $s = f(t)$ es la *ecuación del movimiento*.

12.2. Suma y producto de funciones

Las operaciones con números reales dan lugar fácilmente a operaciones con funciones, que ahora vamos a comentar. Para mayor comodidad, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{R}$.

Pues bien, para dos funciones $f,g \in \mathcal{F}(A)$, definimos su *suma* $f+g \in \mathcal{F}(A)$ escribiendo

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in A$$

Nótese que usamos el mismo nombre y el mismo signo para denotar dos operaciones distintas, que no debemos confundir: a la derecha tenemos la suma en $\mathbb{R}$ (suma de números reales), mientras en el primer miembro tenemos la suma en el conjunto $\mathcal{F}(A)$ (suma de funciones).

Las propiedades de la suma de números reales se trasladan automáticamente a la suma de funciones. En concreto, la suma de funciones es asociativa y conmutativa, y admite como elemento neutro a la función $f_0 \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_0(x) = 0$ para todo $x \in A$, la función *constantemente igual a cero* en A. Es usual denotar por 0 a esta función, por lo que conviene aclarar que, para $f \in \mathcal{F}(A)$, la igualdad $f = 0$ significa que $f(x) = 0$ para *todo* $x \in A$, mientras que $f \neq 0$ significa que *existe* un $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

Además, todo elemento $f \in \mathcal{F}(A)$ admite un elemento simétrico respecto de la suma, la función $-f \in \mathcal{F}(A)$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in A$. Naturalmente, decimos que $-f$ es la *función opuesta* de f. Para $g \in \mathcal{F}(A)$, podemos por tanto considerar la *diferencia* $g-f = g+(-f) \in \mathcal{F}(A)$, y es claro que $\big(g-f\big)(x) = g(x) - f(x)$ para todo $x \in A$.

En resumen, al igual que le ocurría a $\mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{F}(A)$, con la suma recién definida, es un grupo abeliano.

Para dos funciones $f,g \in \mathcal{F}(A)$, definimos ahora su *producto* $fg \in \mathcal{F}(A)$, escribiendo

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in A$$

Este producto es asociativo, conmutativo y distributivo con respecto a la suma. Además, admite como elemento neutro a la función $f_1 \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_1(x) = 1$ para todo $x \in A$, la función *constantemente igual a uno* en A. Así pues el conjunto $\mathcal{F}(A)$, con las operaciones de suma y producto recién definidas, es un anillo conmutativo con unidad.

Es claro que una función $f \in \mathcal{F}(A)$ admite un elemento simétrico respecto del producto si, y sólo si, verifica que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, en cuyo caso dicho elemento simétrico es la función $1/f \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in A$$

No es conveniente usar la notación f^{-1} para la función $1/f$ recién definida, ya que dicha notación se reserva para la función inversa de f en un sentido completamente diferente. Ni que decir tiene, si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, podemos considerar la función *cociente* $g/f \in \mathcal{F}(A)$, dada por

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \qquad \forall x \in A$$

Ha aparecido aquí la primera diferencia importante entre el producto de números reales y el producto de funciones. Recordemos si $f \in \mathcal{F}(A)$ y $f \neq 0$, sólo sabemos que existe $x \in A$ tal que $f(x) \neq 0$. Salvo en el caso trivial de que el conjunto A se reduzca a un punto, esto no implica que se tenga $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, que es lo que f ha de cumplir para admitir un elemento simétrico con respecto al producto. Así pues, salvo que el conjunto A se reduzca a un punto, $\mathcal{F}(A)$ no es un cuerpo.

Para el conjunto $\mathcal{F}(A)$ cabe considerar una tercera operación, el producto de un número real α por una función $f \in \mathcal{F}(A)$, para obtener la función $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in A$$

Se comprueba rutinariamente que, con la suma ya conocida y el *producto por escalares* así definido, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Ahora bien, dicho producto por escalares puede verse como caso particular del producto de funciones. Para ello, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, basta usar la función *constantemente igual a* α en A, es decir, la función $f_\alpha \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_\alpha(x) = \alpha$ para todo $x \in A$. Para cualquier función $f \in \mathcal{F}(A)$, es evidente que el producto de funciones $f_\alpha f$ coincide con la función αf. Así pues, la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$ queda de alguna forma englobada en su estructura de anillo. Ello no es óbice para que en ciertos casos, sea útil considerar en $\mathcal{F}(A)$ nociones típicas de los espacios vectoriales (combinaciones lineales, subespacios, etcétera).

12.3. Composición, función inversa, restricción

Veremos ahora otras operaciones importantes con funciones reales de variable real, que involucran funciones definidas en conjuntos que pueden ser diferentes. Conviene previamente resaltar que la *imagen* de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, es decir, el conjunto de los valores que toma la función f.

La interpretación geométrica está bien clara: del mismo modo que al proyectar la gráfica de f sobre el eje de abscisas obteníamos el conjunto A en el que f está definida, al proyectarla sobre el eje de ordenadas obtenemos el conjunto $f(A)$, la imagen de f.

Frecuentemente será útil considerar a f como una aplicación *sobreyectiva* de A en $f(A)$. Sin embargo, conviene comentar que, en general, calcular explícitamente la imagen de una función, puede ser difícil. Baste pensar que, dado $y \in \mathbb{R}$, saber si $y \in f(A)$ es tanto como saber si la ecuación $f(x) = y$ tiene al menos una solución $x \in A$, pero dicha ecuación puede ser bastante complicada.

Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones verificando que $f(A) \subset B$, podemos definir la *composición de* f *con* g, que es la función $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) \quad \forall x \in A$$

Para tener un ejemplo concreto, podemos usar la *función valor absoluto*, es decir, la función $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para cualquier función $f : A \to \mathbb{R}$, la inclusión $f(A) \subset \mathbb{R}$ es obvia, luego tiene sentido considerar la función $V \circ f : A \to \mathbb{R}$, definida por $\big(V \circ f\big)(x) = V\big(f(x)\big) = |f(x)|$ para todo $x \in A$, que suele denotarse por $|f|$. Así pues, $|f| : A \to \mathbb{R}$ viene definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in A$.

Recordemos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *inyectiva* cuando nunca toma el mismo valor en dos puntos distintos del conjunto A, es decir, cuando

$$x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$$

Geométricamente, esto significa que la gráfica de f no puede contener dos puntos distintos que tengan la misma ordenada, es decir, que la intersección de la gráfica de f con cualquier recta horizontal contiene, a lo sumo, un punto.

Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva, siempre podemos verla como aplicación *biyectiva* de A sobre $f(A)$, y considerar la *función inversa*, que es la función $f^{-1} : f(A) \to A$ definida como sigue: para cada $y \in f(A)$, $f^{-1}(y)$ es el único $x \in A$ que verifica $f(x) = y$. Obsérvese que tiene sentido considerar la composición $f^{-1} \circ f$ y también $f \circ f^{-1}$, verificándose que

$$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = x \quad \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad \big(f \circ f^{-1}\big)(y) = y \quad \forall y \in f(A)$$

Decimos que $f^{-1} \circ f$ es la función *identidad* en el conjunto A y $f \circ f^{-1}$ es la identidad en $f(A)$. Obsérvese que f^{-1} también es inyectiva y su inversa es f, es decir, $\big(f^{-1}\big)^{-1} = f$.

Ya se ha comentado que dos funciones definidas en conjuntos diferentes son distintas. En ocasiones resulta útil modificar precisamente el conjunto de definición de una función, para obtener *otra* función, definida en un subconjunto del de partida. Esto es lo que se entiende por restringir una función.

Concretamente, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$, la *restricción* de f a B es la función $f|_B : B \to \mathbb{R}$ definida por

$$f|_B(x) = f(x) \quad \forall x \in B$$

Si ponemos $g = f|_B$, podemos decir que g es una restricción de f y también es frecuente decir que f es una *extensión* de g.

12.4. Funciones continuas

De manera informal, una función f será continua en un punto x, cuando al acercarnos al punto x, los valores de la función se acerquen a $f(x)$. Esta idea intuitiva se puede concretar de diversas formas, que veremos son equivalentes. Como definición de función continua usamos una condición que nos resultará muy manejable, porque conocemos bien la convergencia de sucesiones. Se basa en que una forma natural de acercarnos a un punto x consiste en usar una sucesión convergente a x.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x \in A$. Se dice que f es *continua en el punto* x cuando, para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que converja a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$. Simbólicamente:

$$x_n \in A \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \{x_n\} \to x \;\; \Longrightarrow \;\; \{f(x_n)\} \to f(x)$$

Obsérvese que no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en puntos que no pertenezcan a su conjunto de definición.

Para un subconjunto no vacío $B \subset A$, diremos que f es *continua en* B cuando sea continua en todos los puntos de B. En particular puede ser $B = A$, así que f será continua en A cuando sea continua en cada punto de A. En tal caso es frecuente decir simplemente que f es *continua*, aunque con ello no se abrevia demasiado. Así pues, cuando decimos sin más que una función es continua, queremos decir que es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.

Para mayor generalidad y para evitar repeticiones, en varios resultados sobre la continuidad de una función $f : A \to \mathbb{R}$, trabajaremos preferentemente con la continuidad en un conjunto $B \subset A$, aunque nos interesan principalmente los casos extremos: el caso en que B se reduce a un punto y el caso $B = A$.

Como primeros ejemplos de funciones continuas, tenemos las constantes. Decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *constante* cuando existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$ para todo $x \in A$. Es obvio que tales funciones son continuas. Claramente, la función *identidad* en un conjunto A, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in A$, también es continua. Las reglas de cálculo de límites nos permitirán operar con funciones continuas para obtener nuevos ejemplos.

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en un conjunto no vacío $B \subset A$. Entonces, la suma $f + g$ y el producto fg también son funciones continuas en B.*

La comprobación de este hecho es inmediata: si $x \in B$ y $\{x_n\} \to x$, con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por ser f y g continuas en el punto x, sabemos que $\{f(x_n)\} \to f(x)$ y $\{g(x_n)\} \to g(x)$, luego

$$\big\{ \big(f+g\big)(x_n) \big\} = \{f(x_n) + g(x_n)\} \to f(x) + g(x) = \big(f+g\big)(x) \qquad \text{y}$$
$$\big\{ \big(fg\big)(x_n) \big\} = \{f(x_n)\, g(x_n)\} \to f(x)\, g(x) = \big(fg\big)(x)$$

Por tanto, $f + g$ y fg son continuas en el punto x, lo cual ocurre para todo $x \in B$. ■

Así pues, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, y recordando el anillo $\mathcal{F}(A)$ de todas las funciones definidas en A, vemos que las funciones continuas forman un subanillo, y también un subespacio vectorial, de $\mathcal{F}(A)$.

A partir de las funciones constantes y la función identidad, mediante sumas y productos obtenemos funciones definidas por polinomios. Mas concretamente, se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función *polinómica* cuando existen $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \quad \forall x \in A$$

Como hemos comentado, *toda función polinómica es continua*, pero estudiando el cociente de funciones continuas conseguiremos algo mejor.

- *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones, con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, y sea B un subconjunto no vacío de A. Si f y g son continuas en B, entonces la función cociente f/g también es continua en B.*

En efecto, si $x \in B$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$, se tiene:

$$\left\{ \frac{f}{g}(x_n) \right\} = \left\{ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right\} \to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x) \qquad \blacksquare$$

Los cocientes de funciones polinómicas son las funciones racionales. Más concretamente, se dice que $h : A \to \mathbb{R}$ es una función *racional*, cuando existen funciones polinómicas $f, g : A \to \mathbb{R}$, tales que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ y $h = \dfrac{f}{g}$. Como ya sabemos que las funciones polinómicas son continuas, tenemos:

- *Toda función racional es continua.*

Un nuevo ejemplo es la función valor absoluto. Si una sucesión $\{x_n\}$ converge, digamos $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$, entonces $\{|x_n|\} \to |x|$. Así que *la función valor absoluto es continua*. Es fácil comprobar que no es una función racional, aunque sus restricciones a $\mathbb{R}_0^+$ y a $\mathbb{R}_0^-$ son funciones polinómicas bien sencillas.

Veamos ahora que la composición de funciones conserva la continuidad:

- *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : C \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset C$. Si f es continua en un conjunto $B \subset A$ y g es continua en $f(B)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en B. En particular, si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.*

Sea $x \in B$ y $\{x_n\} \to x$ con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser f continua en x, tenemos que $\{f(x_n)\} \to f(x)$, luego $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de puntos de C que converge a $f(x)$. Como g continua en el punto $f(x)$, concluimos que $\big\{g\big(f(x_n)\big)\big\} \to g\big(f(x)\big)$. $\blacksquare$

Componiendo con la función valor absoluto, obtenemos nuevas funciones continuas:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y B un subconjunto no vacío de A. Si f es continua en B, entonces la función $|f|$ también es continua en B.*

El recíproco del resultado anterior no es cierto, como se verá con nuestro primer ejemplo de una función que está muy lejos de ser continua. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ y consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \beta & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dado un $x \in \mathbb{R}$, la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ nos asegura que existen una sucesión $\{y_n\}$ de números racionales y una sucesión $\{z_n\}$ de números irracionales, ambas convergentes a x. Puesto que, evidentemente, $\{f(y_n)\} \to \alpha$ y $\{f(z_n)\} \to \beta$, si f fuese continua en el punto x, se tendría $\alpha = f(x) = \beta$, lo cual es una contradicción. Por tanto f no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$. En el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, la función f recién definida se conoce como *función de Dirichlet*. Tomando $\beta = -\alpha \neq 0$, es claro que la función $|f|$ es constante, luego continua en $\mathbb{R}$, mientras que, como hemos visto, f no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Relacionada con la composición de aplicaciones, está la inversa de una función inyectiva. Veremos más adelante que la inversa de una función continua e inyectiva puede no ser continua. Encontraremos también hipótesis adicionales que nos permitan obtener la continuidad de la función inversa.

12.5. Carácter local de la continuidad

Vamos a discutir brevemente la relación entre la continuidad de una función y la de sus restricciones. En primer lugar es claro que, al restringir una función, se conserva la continuidad:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $B \subset A$ y $x \in B$. Si f es continua en el punto x, entonces $f|_B$ también es continua en x.*

En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a x, evidentemente $\{x_n\}$ es también una sucesión de puntos de A. Por ser f continua en x, tenemos que $\{f(x_n)\} \to f(x)$, es decir, $\{f|_B(x_n)\} \to f|_B(x)$, como queríamos. ■

El recíproco del resultado anterior es claramente falso, basta pensar lo que ocurre cuando B se reduce a un punto: $B = \{x\}$. Trivialmente, cualquier función definida en B es continua (es constante). Por tanto, si A es cualquier conjunto que contenga al punto x y $f : A \to \mathbb{R}$ es cualquier función, $f|_B$ siempre será continua en el punto x y eso no puede implicar que f sea continua en x. Simplemente ocurre que el conjunto B es demasiado pequeño.

Considerando la función de Dirichlet, nos orientaremos mejor sobre lo que puede ocurrir, aunque el conjunto B no sea tan reducido. Si f es la función de Dirichlet, es claro que $f|_{\mathbb{Q}}$ es constante, luego continua, pero f no es continua en ningún punto de $\mathbb{Q}$. Considerando la restricción de f a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tenemos la misma situación. Esta vez no podemos argumentar que el conjunto $\mathbb{Q}$, no digamos $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sea pequeño. Lo que ocurre es que para la continuidad de $f|_{\mathbb{Q}}$ sólo consideramos sucesiones de números racionales, mientras que para la continuidad de f debemos usar sucesiones de números reales cualesquiera.

En general, si de la continuidad de la restricción $f|_B$ en un punto $x \in B$ queremos deducir que f es continua en x, el conjunto B no debe reducir significativamente las posibilidades de aproximarnos al punto x. Ello se consigue con una hipótesis muy natural:

- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $x \in B \subset A$. Supongamos que existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$]x-\delta, x+\delta[\cap A \ \subset \ B$$

  Si $f|_B$ es continua en el punto x, entonces f también es continua en x.

La demostración de este hecho es bien sencilla. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$. Por definición de sucesión convergente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > m$ se tiene $|x_n - x| < \delta$ y, por tanto, $x_n \in]x-\delta, x+\delta[\cap A \subset B$. Entonces $\{x_{m+n}\}$ es una sucesión de puntos de B que converge a x y la continuidad de $f|_B$ en x nos dice que $\{f|_B(x_{m+n})\} \to f|_B(x)$, es decir, $\{f(x_{m+n})\} \to f(x)$. Deducimos que $\{f(x_n)\} \to f(x)$, luego f es continua en x. ■

Es frecuente aludir al resultado recién obtenido diciendo que la continuidad es una propiedad que tiene carácter *local*. Conviene resaltar con más detalle lo que esto significa.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, para cualquier $x \in A$, siempre podemos tomar en el resultado anterior $B =]x-\delta, x+\delta[\cap A$, donde $\delta > 0$ se puede elegir con total libertad. Obtenemos que f es continua en x si, y sólo si, $f|_B$ es continua en x. Al pasar de f a $f|_B$, lo que hacemos es olvidar los valores de f en los puntos de $A \setminus B$, es decir, considerar solamente los valores de f en puntos suficientemente próximos a x, a distancia menor que un $\delta > 0$ arbitrariamente fijado. Por tanto, vemos que la continuidad de una función en cada punto x sólo depende de los valores de la función en puntos suficientemente próximos a x. A esto nos referimos al hablar del carácter local de la continuidad. Veamos un ejemplo en que este carácter local nos ayuda a estudiar la continuidad de una función interesante.

Consideremos la *función parte entera*, es decir, la función $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

y recordemos que, para $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene $E(x) = k$ si, y sólo si, $k \leqslant x < k+1$.

Fijado $x \in \mathbb{Z}$, tomemos $x_n = x - (1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que claramente $\{x_n\} \to x$. Puesto que $x - 1 \leqslant x_n < x$, tenemos $E(x_n) = x - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{E(x_n)\} \to x - 1$. Como $E(x) = x \neq x - 1$, vemos que E no es continua en el punto x. Así pues, la función parte entera no es continua en ningún punto de $\mathbb{Z}$.

Usando el carácter local de la continuidad, veremos fácilmente que E es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Fijado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, por ser $E(x) < x < E(x) + 1$ podemos tomar $\delta > 0$ de forma que se tenga $E(x) < x - \delta < x + \delta < E(x) + 1$. Considerando el conjunto $B =]x-\delta, x+\delta[$, es claro que, para todo $y \in B$, se tiene $E(x) < y < E(x) + 1$, luego $E(y) = E(x)$. Así pues, la función $E|_B$ es contante, luego es continua en el punto x, y el carácter local de la continuidad nos asegura que E también lo es.

12.6. Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en 0 pero no sea continua en ningún otro punto de $\mathbb{R}$.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y supongamos que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Probar que $f = g$.

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \text{ínf}\{|x - a| : a \in A\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Probar que $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y deducir que f es continua.

5. Estudiar la continuidad de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = E\left(x^2\right) \ \forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = x\, E\left(\frac{1}{x}\right) \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \ g(0) = 1$$

6. Dadas dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, consideremos las funciones $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in A$$

   Probar que si f y g son continuas en un conjunto no vacío $B \subset A$, entonces φ y ψ también son continuas en B.

Tema 13

Propiedades de las funciones continuas

Estudiamos en este tema los dos resultados fundamentales sobre la continuidad de funciones reales de variable real, que se refieren a funciones continuas en intervalos. Primero veremos que si una función continua en un intervalo toma dos valores, ha de tomar en dicho intervalo todos los valores intermedios. Equivalentemente, las funciones continuas transforman intervalos en intervalos. En general, el intervalo de partida y su imagen pueden ser muy diferentes, pero hay un caso particular importante, que nos lleva al segundo resultado fundamental: cuando el intervalo de partida es cerrado y acotado, lo mismo le ocurre al intervalo imagen, con lo que la función toma un valor máximo y un valor mínimo.

13.1. Caracterización de la continuidad

Antes de probar los resultados anunciados, conviene obtener una importante caracterización de la continuidad, que podríamos haber usado, y frecuentemente se usa, como definición de función continua. De paso observaremos que para estudiar la continuidad de una función, basta trabajar con sucesiones monótonas, siempre más manejables.

Caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y fijemos $x \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *La función f es continua en el punto x.*

(ii) *Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, que sea monótona y converja a x, se tiene que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.*

(iii) *Para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $y \in A$ verifica que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Simbólicamente:*

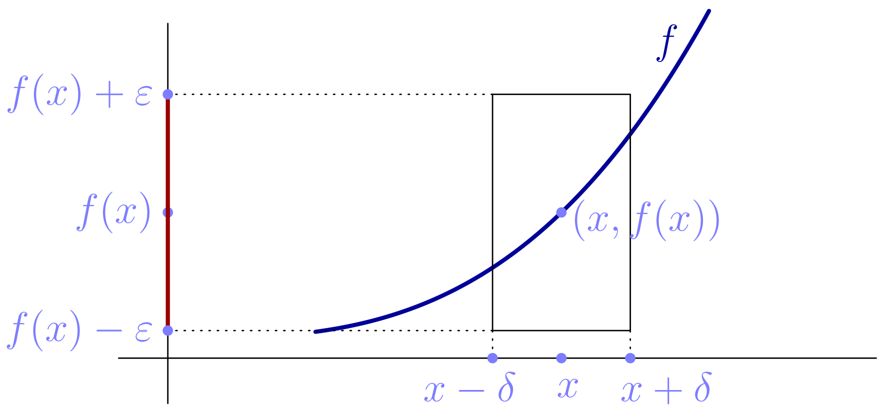
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in A, \ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Demostración. Que $(i) \Rightarrow (ii)$ es evidente: lo que por (i) sabemos que se cumple para todas las sucesiones de puntos de A que converjan a x, se cumplirá en particular para todas las sucesiones monótonas de puntos de A que converjan a x.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Probaremos que si no se verifica (iii) tampoco se puede cumplir (ii). Si la afirmación (iii) no es cierta, existirá un $\varepsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$ puede encontrarse $y \in A$ (evidentemente y dependerá de δ) tal que $|y - x| < \delta$ y, sin embargo, $|f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, podemos entonces tomar $\delta = 1/n$, para obtener un $y_n \in A$ verificando que $|y_n - x| < 1/n$, mientras que $|f(y_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Como toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona, existe una sucesión monótona $\{x_n\}$ que es una sucesión parcial de $\{y_n\}$. Es evidente que $\{y_n\} \to x$, luego $\{x_n\} \to x$, pero de ser $|f(y_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que también $|f(x_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En resumen, $\{x_n\}$ es una sucesión monótona de puntos de A que converge a x, pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$, luego no se cumple (ii), como queríamos.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A que converge a x, deberemos probar que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Para $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la afirmación (iii), y usemos que $\{x_n\} \to x$ para encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$, se tenga $|x_n - x| < \delta$. Entonces, también para $n \geqslant m$, tenemos $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$, como queríamos. ■

La caracterización de la continuidad que más nos interesa es la dada por la condición (iii), cuya interpretación geométrica merece un comentario. Fijada la función $f : A \to \mathbb{R}$ y el punto $x \in A$, para cada $\varepsilon > 0$, podemos considerar las rectas horizontales de ordenadas $f(x) - \varepsilon$ y $f(x) + \varepsilon$ que delimitan una banda horizontal formada por los puntos $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $f(x) - \varepsilon < v < f(x) + \varepsilon$. Pues bien, f es continua en el punto x cuando, para todo $\varepsilon > 0$ (es decir, por muy "estrecha" que sea la banda recién descrita), siempre podemos encontrar $\delta > 0$ de forma que el conjunto $\big\{\big(y, f(y)\big) : y \in A,\ |y - x| < \delta\big\}$, un subconjunto de la gráfica de f, esté contenido en dicha banda.



Con respecto a las aplicaciones en otras ciencias, esta caracterización de la continuidad también tiene un significado interesante. Podemos pensar que nuestra función f describe la forma en que una magnitud física P depende de otra T. Entonces A es el conjunto de valores posibles de la magnitud T y, a cada uno de esos valores, es decir, a cada $x \in A$, corresponde un único valor de la magnitud P, dado por $f(x)$. Típicamente T es una magnitud "independiente" que medimos de forma experimental, y de dicha medición deducimos el valor de P mediante la función f. Por ejemplo P puede representar la presión ejercida por un gas encerrado en un recipiente de volumen fijo, que depende de la temperatura T.

En realidad, nunca podemos medir T con total exactitud, en lugar de su valor exacto x medimos un valor aproximado y, cometiendo un error $|y-x|$. Como consecuencia, cuando calculamos el valor de la magnitud "dependiente" P, no obtenemos su valor exacto $f(x)$, sino el valor $f(y)$, cometiendo un error $|f(y)-f(x)|$. La continuidad de la función f en el punto x nos garantiza que podemos controlar el error en la magnitud P siempre que podamos medir T con suficiente exactitud. Más concretamente, podemos asegurar que el error en la magnitud P sea tan pequeño como queramos, $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$, siempre que el error al medir la magnitud T sea suficientemente pequeño, $|y-x|<\delta$. Se comprenderá que, en caso contrario, describir la dependencia entre las magnitudes P y T mediante la función f tendría muy poca utilidad.

Vamos ahora a ilustrar con un ejemplo la utilidad de la condición (ii) que aparece en la caracterización de la continuidad, es decir, la ventaja de usar sucesiones monótonas a la hora de comprobar la continuidad de una función.

Consideremos dos funciones continuas $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tales que $g(0)=h(0)$, y definamos una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ escribiendo

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\leqslant 0 \\ h(x) & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

Nótese que la condición $g(0)=h(0)$ hace que f esté bien definida. Vemos que $f|_{\mathbb{R}_0^+}=h|_{\mathbb{R}_0^+}$ y $f|_{\mathbb{R}_0^-}=g|_{\mathbb{R}_0^-}$ son funciones continuas. Para cada $x\in\mathbb{R}^+$ existe $\delta>0$ tal que $]x-\delta,x+\delta[\subset\mathbb{R}_0^+$, basta tomar $\delta=x$. El carácter local de la continuidad nos dice entonces que f es continua en $\mathbb{R}^+$ y, análogamente, f es continua en $\mathbb{R}^-$. Para $x=0$ esta forma de razonar no es válida: cualquiera que sea $\delta>0$, el intervalo $]-\delta,\delta[$ no está contenido en $\mathbb{R}_0^+$ y tampoco en $\mathbb{R}_0^-$.

Sin embargo, veamos que f también es continua en 0. Tomamos una sucesión $\{x_n\}\to 0$ para probar que $\{f(x_n)\}\to f(0)$, pero, gracias a la caracterización de la continuidad antes probada, podemos suponer que $\{x_n\}$ es monótona. Si $\{x_n\}$ es creciente, tenemos $x_n\leqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, con lo que la continuidad de g nos dice que $\{f(x_n)\}=\{g(x_n)\}\to g(0)=f(0)$. En otro caso, $\{x_n\}$ es decreciente, $x_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y la continuidad de h nos dice que $\{f(x_n)\}=\{h(x_n)\}\to h(0)=f(0)$. Sin suponer que $\{x_n\}$ es monótona, habríamos podido llegar a la misma conclusión, pero con un razonamiento más engorroso.

13.2. Teorema del valor intermedio

Vamos ya con la primera propiedad clave de las funciones continuas: transforman intervalos en intervalos. Preparamos el terreno con una sencilla observación:

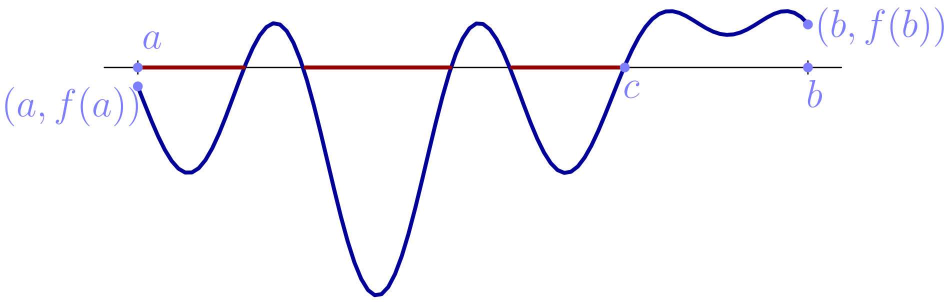
Conservación del signo. *Sea $f:A\to\mathbb{R}$ una función continua en un punto $x\in A$. Si $f(x)>0$, entonces existe $\delta>0$ tal que, para todo $y\in A$ que verifique $|y-x|<\delta$, se tiene $f(y)>0$. Análogamente, si $f(x)<0$, existe $\delta>0$ tal que: $y\in A$, $|y-x|<\delta\ \Rightarrow\ f(y)<0$.*

En efecto, si $f(x)>0$, tomando $\varepsilon=f(x)$, la caracterización $(\varepsilon-\delta)$ de la continuidad nos proporciona un $\delta>0$ tal que, para $y\in A$ con $|y-x|<\delta$ se tiene $|f(y)-f(x)|<f(x)$, de donde $-f(x)<f(y)-f(x)$, es decir, $f(y)>0$. En el caso $f(x)<0$ aplicamos lo ya demostrado a la función $-f$, que también es continua en el punto x y verifica $(-f)(x)>0$. ■

Podemos ya demostrar fácilmente un resultado que se aproxima a nuestro objetivo, aunque de momento en una situación muy concreta:

Teorema de los ceros de Bolzano. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, verificando que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Un sencillo dibujo nos sugiere una forma de encontrar el punto c y nos hace ver que la existencia de supremo debe ser un ingrediente clave en la demostración.



Consideramos el conjunto $C = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$, que no es vacío, porque $a \in C$, y está acotado, por estar incluido en el intervalo $[a,b]$. Tomando $c = \sup C$, tenemos claramente que $c \in [a,b]$ y la demostración se concluirá probando que $f(c) = 0$, pues ello también implicará que $c \neq a$ y $c \neq b$. Veremos que, tanto si $f(c) < 0$ como si $f(c) > 0$, se llega a contradicción.

Supongamos primeramente que $f(c) < 0$. Como por hipótesis f es continua en el punto c, la propiedad de conservación del signo antes demostrada nos proporciona un $\delta > 0$ verificando que, para $x \in [a,b]$ con $|x - c| < \delta$ se tiene $f(x) < 0$. Es claro que $b \geqslant c + \delta$, pues en otro caso sería $|b - c| = b - c < \delta$ y $f(b) < 0$ en contra de la hipótesis. Tomando entonces $x \in]c, c + \delta[$ tenemos $x \in [a,b]$ y $|x - c| = x - c < \delta$ luego $f(x) < 0$ y $x \in C$. Esto es una contradicción, ya que $x > c = \sup C$.

Supongamos entonces que $f(c) > 0$. Aplicando la conservación del signo obtenemos $\delta > 0$, tal que $f(x) > 0$ siempre que $x \in [a,b]$ verifique $|x - c| < \delta$. Entonces, para $x \in C$ se deberá tener $\delta \leqslant |x - c| = c - x$, de donde $x \leqslant c - \delta$. Obtenemos así que $c - \delta$ es mayorante de C, lo cual es una contradicción, pues $c - \delta < c = \sup C$. ■

Pasamos ahora a obtener la forma general del teorema anterior, sustituyendo el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ por un intervalo arbitrario y dejando que el papel del cero lo pueda hacer cualquier otro número real.

Teorema del Valor Intermedio. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si I es un intervalo contenido en A, entonces $f(I)$ también es un intervalo.*

Demostración. Usando la caracterización de los intervalos, deberemos comprobar que si $\alpha, \beta \in f(I)$, y $\alpha < \lambda < \beta$, entonces $\lambda \in f(I)$. Queda así claramente de manifiesto la propiedad de f que estamos demostrando: si toma en I dos valores distintos, ha de tomar, también en I, todos los valores intermedios. Si $x, y \in I$ son tales que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$, distinguiremos dos casos, según la relación entre x e y.

Si $x < y$, consideramos el intervalo cerrado y acotado $[x,y]$, observando que, por ser I un intervalo, se tiene $[x,y] \subset I \subset A$. Podemos entonces definir una función $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = f(t) - \lambda \quad \forall t \in [x,y]$$

Claramente g es continua, con $g(x) = \alpha - \lambda < 0$ y $g(y) = \beta - \lambda > 0$. Por el teorema anterior, existe $c \in]x,y[\subset I$ tal que $g(c) = 0$, con lo que $\lambda = f(c) \in f(I)$.

En el caso $y < x$ usamos el intervalo $[y,x] \subset I \subset A$ y la función $g : [y,x] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \lambda - f(t) \quad \forall t \in [y,x]$$

que es continua, con $g(y) = \lambda - \beta < 0$ y $g(x) = \lambda - \alpha > 0$, obteniendo de nuevo un punto $c \in]y,x[\subset I$ tal que $g(c) = 0$, con lo que $\lambda = f(c) \in f(I)$. ■

Nótese que los dos teoremas recién obtenidos son equivalentes, el del valor intermedio se ha deducido fácilmente del de Bolzano, pero éste a su vez es clara consecuencia de aquél.

Antes de comentar con más detalle el teorema del valor intermedio, conviene observar que no se pierde generalidad suponiendo que $A = I$, pues en otro caso usaríamos la restricción $f|_I$, que también es continua, obteniendo que $f|_I(I)$ es un intervalo, pero es claro que $f|_I(I) = f(I)$. Así pues, el teorema se enuncia equivalentemente como sigue:

- *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

También es claro que este resultado sólo tiene interés cuando el intervalo I no es trivial, pues en otro caso I se reduce a un punto y obviamente lo mismo le ocurre a $f(I)$. Finalmente, no conviene olvidar que, para cualquier otro intervalo $J \subset I$, también se tiene que $f(J)$ es un intervalo, puesto que $f|_J$ también es continua. Esto motiva la siguiente definición:

Si I es un intervalo no trivial, se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene la *propiedad del valor intermedio* cuando, para todo intervalo $J \subset I$, se verifica que $f(J)$ es un intervalo.

Al hilo de los comentarios anteriores, merece la pena resaltar que, para que f tenga la propiedad del valor intermedio, no es suficiente que $f(I)$ sea un intervalo. En efecto, tomando por ejemplo $I = [0,1]$, la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 - x \quad \forall x \in]0,1[\,, \quad f(0) = 0$$

verifica claramente que $f(I) = [0,1[$ es un intervalo. Sin embargo, f no tiene la propiedad del valor intermedio, pues tomando $J = [0,1/2]$ tenemos un intervalo $J \subset I$, para el cual, $f(J) = \{0\} \cup [1/2,1[$ no es un intervalo.

Quedó claro anteriormente que el teorema del valor intermedio se puede reformular como sigue:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f tiene la propiedad del valor intermedio.*

Surge inmediatamente la pregunta de si es cierto el recíproco. La respuesta es negativa, pero en este momento sería bastante laborioso dar un ejemplo de una función definida en un intervalo, que tenga la propiedad del valor intermedio, pero no sea continua. Queda pues prometido este ejemplo para más adelante.

Para poder discutir la otra hipótesis del teorema del valor intermedio, el hecho de que el conjunto I sea un intervalo, leemos el teorema de la siguiente forma: *si I es un intervalo, entonces $f(I)$ es un intervalo para toda función continua $f: I \to \mathbb{R}$*. Viendo así el teorema, la hipótesis de que I sea un intervalo, no sólo es suficiente para obtener la tesis, sino que también es necesaria. Esto es evidente: si un conjunto A no es un intervalo, basta tomar como f la función identidad en A para tener una función continua en A tal que $f(A) = A$ no es un intervalo. Veamos otro ejemplo en el que se consigue algo más llamativo:

- *Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo, existe una función continua $f: A \to \mathbb{R}$ tal que $f(A)$ tiene exactamente dos elementos.*

Para probarlo, usamos de nuevo la caracterización de los intervalos: si A no es un intervalo, deberán existir $x, y \in A$ y $z \in \mathbb{R} \setminus A$ tales que $x < z < y$. Definimos entonces una función $f: A \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{t - z}{|t - z|} \quad \forall t \in A$$

El denominador no se anula, puesto que $z \notin A$, y f es continua, como cociente de dos funciones continuas. Pero también es claro que $|f(t)| = 1$, es decir, $f(t) \in \{-1, 1\}$, para todo $t \in A$. Como quiera que $f(y) = 1$ y $f(x) = -1$, vemos que $f(A) = \{-1, 1\}$. ■

13.3. Teorema de Weierstrass

Como motivación para la segunda propiedad fundamental de las funciones continuas, nos planteamos si, en el teorema del valor intermedio, será posible averiguar de qué tipo es el intervalo $f(I)$, según de qué tipo sea el intervalo I. Empezamos observando que, en general, no hay relación entre la acotación de I y la de $f(I)$.

Obviamente, f puede ser constante, con lo que $f(I)$ está acotado sin necesidad de que I lo esté. Un ejemplo menos trivial es la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Claramente f es continua, como cociente de dos funciones continuas. También es claro que $|f(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así que el intervalo $f(\mathbb{R})$ está acotado, a pesar de que $\mathbb{R}$ no está mayorado ni minorado. De hecho es fácil comprobar que f es inyectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ y su inversa es la función $f^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(y) = 1/(1 - |y|)$, para todo $y \in]-1, 1[$. De nuevo f^{-1} es continua, como cociente de dos funciones continuas, y tenemos una función continua que transforma el intervalo acotado $]-1, 1[$ en el intervalo $\mathbb{R}$, que no está mayorado ni minorado.

El hecho de que un intervalo sea abierto o cerrado tampoco se conserva al transformarlo mediante una función continua. Observemos de nuevo que una función constante transforma cualquier intervalo en un intervalo cerrado. Otro ejemplo: la función valor absoluto transforma el intervalo abierto $]-1,1[$ en el intervalo semiabierto $[0,1[$. Tomando $I=[1,+\infty[$ tenemos una semirrecta cerrada y definiendo $f(x)=1/x$ para todo $x\in I$, tenemos una función continua en I cuya imagen $f(I)=]0,1]$ no es un intervalo cerrado.

A la vista de los ejemplos anteriores, se podría pensar que para una función continua en un intervalo I, el tipo del intervalo I no nos permite deducir nada sobre el tipo del intervalo $f(I)$. Sin embargo, hay un tipo de intervalo que sí se conserva: cuando I es cerrado y acotado, podemos asegurar que lo mismo le ocurre a $f(I)$.

Teorema de Weierstrass. *Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ y sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces, el intervalo $f\big([a,b]\big)$ es cerrado y acotado.*

Demostración. Empezamos probando que $f\big([a,b]\big)$ es un conjunto acotado, es decir, que el conjunto $\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$ está mayorado. En otro caso, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n\in[a,b]$ tal que $|f(x_n)|>n$. Como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos proporciona una sucesión parcial convergente: $\{x_{\sigma(n)}\}\to x\in\mathbb{R}$. Es claro que $x\in[a,b]$, lo que nos permite usar que f es continua en x, para concluir que $\big\{f\big(x_{\sigma(n)}\big)\big\}\to f(x)$. Pero esto es una contradicción, ya que $|f(x_{\sigma(n)})|>\sigma(n)\geqslant n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, luego $\big\{f\big(x_{\sigma(n)}\big)\big\}$ diverge.

Sabido que el intervalo $J=f\big([a,b]\big)$ está acotado, tomamos $\alpha=\inf J$, $\beta=\sup J$ y tenemos $]\alpha,\beta[\subset J\subset[\alpha,\beta]$, luego bastará probar que $\alpha,\beta\in J$ para concluir que $J=[\alpha,\beta]$, un intervalo cerrado y acotado.

Para cada $n\in\mathbb{N}$, puesto que $\alpha+1/n$ no es minorante del conjunto $f\big([a,b]\big)$, existirá un $y_n\in[a,b]$ verificando que $f(y_n)<\alpha+1/n$. Obtenemos así una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $[a,b]$ tal que $\{f(y_n)\}\to\alpha$. Aplicando igual que antes el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos una sucesión parcial $\{y_{\tau(n)}\}$ convergente a un $y\in[a,b]$. Puesto que f es continua en el punto y, deducimos que $\big\{f\big(y_{\tau(n)}\big)\big\}\to f(y)$. Ahora bien, $\big\{f\big(y_{\tau(n)}\big)\big\}$ es una sucesión parcial de $\{f(y_n)\}$, luego $\big\{f\big(y_{\tau(n)}\big)\big\}\to\alpha$ y concluimos que $\alpha=f(y)\in f\big([a,b]\big)$, como queríamos. Para comprobar que también $\beta\in f\big([a,b]\big)$ se razona de manera completamente análoga. ■

Conviene introducir una terminología que pondrá más claramente de manifiesto el interés del resultado anterior. Como ya hicimos al definir las sucesiones acotadas, podemos estudiar nociones de acotación para cualquier función $f:A\to\mathbb{R}$ usando su imagen, $f(A)$. Para mayor generalidad, podemos considerar solamente los valores de f en un subconjunto de A. Así pues, dada una función $f:A\to\mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $B\subset A$, decimos que f está

- *minorada en B*, cuando el conjunto $f(B)$ está minorado: $\exists\alpha\in\mathbb{R}:\alpha\leqslant f(x)\ \ \forall x\in B$
- *mayorada en B*, cuando el conjunto $f(B)$ está mayorado: $\exists\beta\in\mathbb{R}:f(x)\leqslant\beta\ \ \forall x\in B$
- *acotada en B*, cuando está mayorada y minorada en B, equivalentemente, cuando la función $|f|$ está mayorada en B: $\exists K\in\mathbb{R}:|f(x)|\leqslant K\ \ \forall x\in B$

En el caso $B=A$ decimos simplemente que f está *mayorada, minorada* o *acotada*.

Nos puede interesar también que un conjunto de valores de f tenga máximo o mínimo:

- Decimos que f *alcanza su mínimo en* B, cuando el conjunto $f(B)$ tiene mínimo, es decir: $\exists y \in B : f(y) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in B$
- Análogamente, se dice que f *alcanza su máximo* en B cuando el conjunto $f(B)$ tiene máximo: $\exists z \in B : f(x) \leqslant f(z) \ \ \forall x \in B$

Nótese que, aunque aquí sólo trabajemos con funciones reales de variable real, las nociones anteriores tendrían perfecto sentido para funciones definidas en un conjunto arbitrario A, con valores en $\mathbb{R}$. El problema de averiguar si una tal función alcanza o no su máximo o su mínimo, en A o en cierto subconjunto, es lo que se conoce como un *problema de optimización*. Existe toda una rama de la Matemática, la Teoría de Optimización, dedicada al estudio de este tipo de problemas, que por razones fáciles de adivinar, tiene importantes aplicaciones en otras ciencias, particularmente la Economía.

Pues bien, el Teorema de Weierstrass puede considerarse como el primer resultado, el más básico y elemental, en la Teoría de Optimización, pues puede enunciarse de la siguiente forma: *Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado, está acotada y alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo*.

13.4. Ejercicios

1. Sea A un conjunto de números reales y $x \in A$. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $]x-\delta, x+\delta[\cap A = \{x\}$. Cuando esto ocurre se dice que x es un punto *aislado* de A. Probar que toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto x.
2. Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y finito, toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua. Probar también que toda función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ es continua.
3. Sean $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $A = B \cup \{0\}$. Probar que toda función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en B. Probar también que $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en 0 si, y sólo si, $\{f(1/n)\} \to f(0)$.
4. Sea I un intervalo no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Probar que f es constante.
5. Probar que si P es un polinomio de grado impar, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = 0$.
6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Probar que f deja un punto *fijo*, es decir, que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.
7. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, probar que en cada instante, existen dos puntos antípodas en el Ecuador que se encuentran a la misma temperatura.
8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ un función continua y supongamos que, para cada $x \in [0,1]$ existe $y \in [0,1]$ tal que $|f(y)| \leqslant |f(x)|/2$. Probar que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$.

Tema 14

Continuidad y monotonía

Generalizando lo que se hizo en su momento para sucesiones, definiremos la monotonía de una función, en forma bien fácil de adivinar. Probaremos entonces dos resultados importantes que relacionan la continuidad de una función con su monotonía. Como consecuencia veremos que, si una función definida en un intervalo es continua e inyectiva, su inversa es continua.

14.1. Funciones monótonas

Las definiciones que siguen son tan intuitivas que no precisan ninguna motivación. Diremos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es

- *creciente* cuando: $x, y \in A\,,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$
- *decreciente* cuando: $x, y \in A\,,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y)$, es decir, cuando $-f$ es creciente
- *monótona* cuando es creciente o decreciente.

Puesto que las sucesiones de números reales son funciones reales de variable real, conviene observar que las definiciones anteriores generalizan claramente a las que dimos en su momento para sucesiones.

Volviendo al caso general, obsérvese que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es a la vez creciente y decreciente si, y sólo si, es constante. También es claro que, suponiendo que A tiene al menos tres puntos, existen funciones $f : A \to \mathbb{R}$ que no son monótonas. Pero la propiedad que más nos interesa es la monotonía estricta, que se define como sigue. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es

- *estrictamente creciente* cuando: $x, y \in A\,,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)$
- *estrictamente decreciente* cuando: $x, y \in A\,,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$, es decir, cuando $-f$ es estrictamente creciente
- *estrictamente monótona* cuando es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Nótese que una función es estrictamente creciente si, y sólo si, es creciente e inyectiva. Análogamente, el decrecimiento estricto equivale a decrecimiento más inyectividad, luego una función es estrictamente monótona si, y sólo si, es monótona e inyectiva.

Sin duda, las propiedades recién definidas son bastante exigentes. Lo más frecuente es que el conjunto de definición de una función pueda expresarse como unión finita de subconjuntos, de forma que la restricción de la función a cada uno de ellos sí verifique alguna de esas propiedades. Para tratar esta situación con comodidad, dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$, decimos que f es *creciente en* B, cuando la restricción $f|_B$ es una función creciente, es decir, cuando para cualesquiera $x, y \in B$ con $x \leqslant y$, se tiene que $f(x) \leqslant f(y)$. Análogo criterio se sigue para las otras cinco propiedades antes definidas.

Como ejemplo, veamos las *funciones potencia de exponente natural*. Más concretamente, fijado $q \in \mathbb{N}$, la *función potencia de exponente* q viene dada por

$$f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \ f_q(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando propiedades bien conocidas de las potencias, comprobamos fácilmente lo siguiente:

- *Si q es impar, f_q es estrictamente creciente.*
- *Si por el contrario q es par, la función f_q no es monótona, pero es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$ y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_0^-$.*

Otro ejemplo destacable es la función valor absoluto: es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_0^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$, luego no es monótona en $\mathbb{R}$.

Nuestro objetivo es relacionar la continuidad de una función con su monotonía. Conviene resaltar que, al definir ambas propiedades para un subconjunto del conjunto de definición, no hemos seguido exactamente el mismo criterio: decir que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un conjunto $B \subset A$ no es lo mismo que decir que $f|_B$ es continua.

14.2. De la continuidad a la monotonía

Sabemos que toda función estrictamente monótona es inyectiva y, en ciertas condiciones, vamos a probar el recíproco. Es el resultado clave sobre funciones continuas e inyectivas:

Teorema. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.*

Demostración. Basta probar que f es monótona, pues de la inyectividad se deduce que la monotonía es estricta. Empezamos con el caso en que I es un intervalo cerrado y acotado no trivial. En un primer paso probamos lo siguiente:

$(*)$ *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva, tal que $f(a) < f(b)$, entonces $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ para todo $x \in [a, b]$.*

En efecto, usando el teorema del valor intermedio veremos que no puede ser $f(x) < f(a)$ y tampoco $f(x) > f(b)$. Concretamente, si $f(x) < f(a)$, aplicamos dicho teorema a la restricción de f al intervalo $[x,b]$ que es continua y toma los valores $f(x)$ y $f(b)$, luego debe tomar también el valor intermedio $f(a)$. Por tanto, existe $z \in [x,b]$ tal que $f(z) = f(a)$, pero esto contradice la inyectividad de f, ya que $a < z$. Análogamente, si fuese $f(x) > f(b)$ aplicaríamos el teorema del valor intermedio a la restricción de f al intervalo $[a,x]$, obteniendo $z \in [a,x]$ tal que $f(z) = f(b)$, lo que contradice otra vez la inyectividad de f.

Deducimos fácilmente que la función f que aparece en $(*)$ ha de ser creciente. Dados $x,y \in [a,b]$ con $x < y$, aplicando $(*)$ tenemos $f(x) \leqslant f(b)$, de hecho $f(x) < f(b)$, ya que $x < b$ y f es inyectiva. Pero ahora podemos aplicar $(*)$ a la restricción de f al intervalo $[x,b]$, que es continua e inyectiva, con $f(x) < f(b)$, obteniendo $f(x) \leqslant f(y)$, como queríamos.

Si en $(*)$, en lugar de $f(a) < f(b)$, suponemos $f(a) > f(b)$, el razonamiento anterior se aplica a la función $-f$, continua e inyectiva con $-f(a) < -f(b)$. Obtenemos que $-f$ es creciente, luego f es decreciente. Queda así demostrado el teorema para el caso de un intervalo cerrado y acotado no trivial.

Vamos al caso general: I es un intervalo arbitrario y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva. Razonando por reducción al absurdo, si f no es monótona, existen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in I$ tales que:

$$x_1 < y_1\,, \;\; x_2 < y_2\,, \;\; f(x_1) > f(y_1)\,, \;\; f(x_2) < f(y_2)$$

Escribiendo $a = \min\{x_1, x_2\} < \max\{y_1, y_2\} = b$, por ser I un intervalo, tenemos $[a,b] \subset I$, lo que permite considerar la restricción de f al intervalo $[a,b]$, que es continua e inyectiva. Como $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [a,b]$, dicha restricción no puede ser monótona, lo cual es una flagrante contradicción con lo demostrado en el caso de un intervalo cerrado y acotado no trivial. ■

El teorema anterior, combinado con el del valor intermedio, permite a menudo determinar la imagen de una función. Dados $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, supongamos que, para una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, queremos determinar su imagen: $J = f\big([a,b]\big)$. Sean $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ y supongamos de momento que $\alpha < \beta$. Por el teorema del valor intermedio, sabemos que J es un intervalo, y es obvio que $\alpha, \beta \in J$, luego $[\alpha, \beta] \subset J$, pero obviamente esta inclusión no tiene por qué ser una igualdad. Sin embargo, si f es inyectiva, el teorema anterior nos dice que f es creciente, luego $\alpha = f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = \beta$ para todo $x \in [a,b]$ y concluimos que $J = [\alpha, \beta]$. Por supuesto, de haber sido $\alpha > \beta$, f habría sido decreciente y habríamos obtenido $J = [\beta, \alpha]$. En general, para una función monótona definida en un intervalo, no es difícil adivinar su imagen. La principal ventaja del teorema anterior estriba en que la inyectividad de una función suele ser más fácil de comprobar que su monotonía.

Como ejemplo concreto, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que es continua, por ser una función racional. Para $x,y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$f(x) = f(y) \;\;\Leftrightarrow\;\; 2x(1+y^2) = 2y(1+x^2) \;\;\Leftrightarrow\;\; (1-xy)(x-y) = 0$$

luego $f(x) = f(y)$ si, y sólo si, $x = y$ o $xy = 1$.

Así pues, f no es inyectiva, ya que $f(x) = f(1/x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Sin embargo, si tomamos $x, y \in [-1,1]$, es claro que la condición $xy = 1$ implica entonces que $x = y$. Lo mismo ocurre para $x, y \in]-\infty,-1]$ o $x, y \in [1,+\infty[$. Por tanto, la restricción de f a cualquiera de los tres intervalos mencionados es inyectiva, luego estrictamente monótona.

Como $f(-1) = -1$ y $f(1) = 1$, f es creciente en $[-1,1]$ con $f\big([-1,1]\big) = [-1,1]$. Como $f(2) = 4/5 < 1 = f(1)$, sabemos que f es estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$, pero del intervalo $J = f\big([1,+\infty[\big)$ esto sólo nos dice que $\max J = f(1) = 1$ y que J no tiene mínimo. Sin embargo, por una parte es claro que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego J está minorado con $\inf J \geqslant 0$. Por otra, tenemos $\inf J \leqslant f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{f(n)\}$ converge a cero, luego $\inf J \leqslant 0$. Concluimos claramente que $J =]0,1]$. Para la semirrecta $]-\infty,-1]$ podemos razonar de manera similar, o bien observar que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde deducimos que $f\big(]-\infty,-1]\big) = \{-y : y \in J\} = [-1,0[$. De todo lo dicho se deduce claramente que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

14.3. De la monotonía a la continuidad

Aplicando la caracterización de la continuidad mediante sucesiones monótonas, conseguimos enseguida una útil condición suficiente para la continuidad de una función monótona:

Teorema. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función monótona, y $f(A)$ es un intervalo, entonces f es continua.*

Demostración. Podemos evidentemente suponer que f es creciente, pues en otro caso bastaría usar la función $-f$, cuya imagen también es un intervalo. Fijado $x \in A$, para probar que f es continua en el punto x, tomamos una sucesión monótona $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$ y bastará ver que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

Suponiendo primero que $\{x_n\}$ es creciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x$, luego $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1}) \leqslant f(x)$, ya que f es creciente. Por tanto, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es creciente y mayorada, luego convergente. Poniendo $L = \lim\{f(x_n)\}$ tenemos $L \leqslant f(x)$ y, suponiendo que $L < f(x)$, llegaremos a contradicción.

Tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $L < y < f(x)$, tenemos claramente $f(x_1) < y < f(x)$ y, usando que $f(A)$ es un intervalo, deberá existir $a \in A$ tal que $f(a) = y$. Si fuese $x \leqslant a$ el crecimiento de f nos daría $f(x) \leqslant f(a) = y$ cosa que no es cierta. Pero si fuese $a < x$, puesto que $\{x_n\} \to x$, podríamos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_m$, con lo que $y = f(a) \leqslant f(x_m) \leqslant L$, cosa que tampoco es cierta. Hemos demostrado que $L = f(x)$, es decir, $\{f(x_n)\} \to f(x)$ como queríamos.

Si la sucesión $\{x_n\}$ hubiese sido decreciente, un razonamiento enteramente análogo nos hubiera llevado a la misma conclusión. ■

Conviene resaltar que, en el teorema anterior, el conjunto A no tiene por qué ser un intervalo. Toda función monótona, cuya imagen sea un intervalo, es continua.

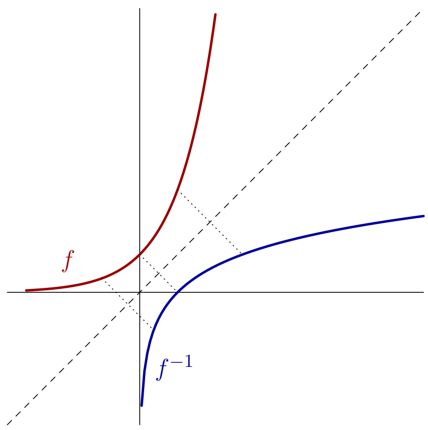
14.4. Continuidad de la inversa

Para una función continua e inyectiva, es natural preguntarse si la función inversa también es continua. Para tener una visión intuitiva del problema, observemos la relación entre la gráfica de una función inyectiva $f : A \to \mathbb{R}$ y la de su inversa, la función $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ que se caracteriza por verificar que $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ para todo $x \in A$. Tenemos claramente

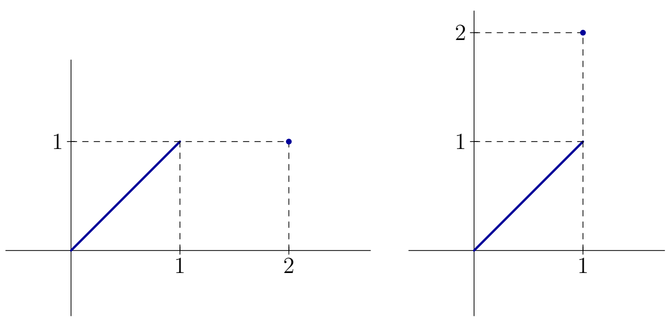
$$\operatorname{Gr} f^{-1} = \Big\{ \big(y, f^{-1}(y)\big) \,:\, y \in f(A) \Big\} = \Big\{ \big(f(x), x\big) \,:\, x \in A \Big\}$$

Observamos que las gráficas de f y f^{-1} se obtienen cada una a partir de la otra mediante la simetría que tiene como eje la recta de ecuación $y = x$, puesto que dicha simetría es la transformación $(x,y) \mapsto (y,x)$, de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.

Un sencillo dibujo ayuda a entender esta relación entre las gráficas de f y f^{-1}:



Con la interpretación geométrica comentada, se comprende muy bien el siguiente ejemplo de una función continua e inyectiva cuya inversa no es continua. Consideremos el conjunto $A = [0,1[\cup \{2\}$ y la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1[$ y $f(2) = 1$. El carácter local de la continuidad nos permite comprobar fácilmente que f es continua. Por otra parte, es claro que f es inyectiva con $f(A) = [0,1]$ y que $f^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ viene dada por $f^{-1}(x) = x$ para todo $x \in [0,1[$ y $f^{-1}(1) = 2$. Como $\big\{ f^{-1}\big(1 - (1/n)\big) \big\} \to 1 \neq f^{-1}(1)$, vemos f^{-1} no es continua en 1. Las gráficas de f y f^{-1} permiten visualizar claramente que f es continua mientras que f^{-1} no lo es:



Sin embargo, conviene observar que esta situación ha sido posible porque el conjunto A no es un intervalo. Para una función continua e inyectiva en un intervalo, la relación entre las gráficas de la función y de su inversa permite intuir que dicha inversa debe ser continua, y eso es lo que vamos a probar. Para ello usaremos los dos teoremas obtenidos anteriormente, junto con una sencilla observación:

- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ también es estrictamente creciente. Si f es estrictamente decreciente, f^{-1} también lo es.*

La comprobación de este hecho es inmediata. Supongamos que f es estrictamente creciente, sean $u, v \in f(A)$ con $u < v$ y sean $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$. Si fuese $y \leqslant x$, aplicando que f es creciente tendríamos $v = f(y) \leqslant f(x) = u$, que es una contradicción, luego deberá ser $x < y$, es decir, $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$. Esto prueba que f^{-1} es estrictamente creciente, como queríamos. En el caso de que f sea estrictamente decreciente, se razona de forma enteramente análoga. ■

Damos ya una respuesta al problema de continuidad de la función inversa:

- *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona, entonces f^{-1} es continua.*

En efecto, acabamos de ver que $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ también es estrictamente monótona, pero su imagen es un intervalo, ya que $f^{-1}\big(f(I)\big) = I$, luego f^{-1} es continua. ■

Como consecuencia inmediata obtenemos:

- *Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces f^{-1} es continua.*

En efecto: sabemos que f es estrictamente monótona y basta aplicar el resultado anterior. ■

Como ejemplo muy ilustrativo de todos los resultados anteriores, vamos a trabajar con las funciones potencia de exponente natural. Obtendremos abundante información sobre raíces de números reales, que es esencialmente conocida, pero ahora la conseguimos de forma mucho más clara y elegante que la usada anteriormente. Fijado $q \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_q(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

que sabemos es continua, luego su imagen es un intervalo.

Cuando q es impar, tenemos que $\{n^q\} \to +\infty$ y $\{(-n)^q\} \to -\infty$, luego $f_q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Además, como f_q es inyectiva, de hecho sabemos que es estrictamente creciente, concluimos que f_q es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre sí mismo. Así pues, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^q = y$. Esto prueba la existencia y unicidad de la raíz q-ésima de todo número real. Compárese este razonamiento con el método (artesanal) usado en su momento para conseguir el mismo resultado. Pero consideremos la función inversa de f_q, a la que obviamente debemos llamar *función raíz q-ésima* (con q impar):

$$f_q^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_q^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Esta nueva función es también biyectiva y estrictamente creciente pero, como su imagen es un intervalo, es continua. Esto significa que si $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}$ entonces $\{\sqrt[q]{x_n}\} \to \sqrt[q]{x}$, cosa que también sabíamos, pero con una demostración más laboriosa.

Cuando q es par, razonamos de forma análoga, pero restringiendo la función potencia a $\mathbb{R}_0^+$, donde es inyectiva, de hecho estrictamente creciente. Así pues consideramos la función:

$$g_q : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,, \qquad g_q(x) = x^q \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Ahora 0 es el mínimo del intervalo $g_q(\mathbb{R}_0^+)$, que no está mayorado, luego g_q es una biyección de $\mathbb{R}_0^+$ sobre sí mismo. De nuevo hemos probado, de forma muy expeditiva, que todo número real no negativo tiene una única raíz q-ésima no negativa, y podemos considerar la *función raíz q-ésima* (con q par):

$$g_q^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \,, \qquad g_q^{-1}(y) = \sqrt[q]{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+$$

Es también una biyección, continua y estrictamente creciente, de $\mathbb{R}_0^+$ sobre sí mismo.

A modo de repaso, concluimos este tema destacando en un solo enunciado la información obtenida sobre una función continua en un intervalo. Por razones fáciles de adivinar, es el caso más interesante desde el punto de vista de su aplicación en diversas ciencias.

- *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:*
  - (i) *$f(I)$ es un intervalo.*
  - (ii) *Si I es cerrado y acotado, lo mismo le ocurre a $f(I)$.*
  - (iii) *Si f es inyectiva, entonces f es estrictamente monótona y f^{-1} es continua.*

14.5. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}}$ es monótona, entonces f es monótona.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente y supongamos que f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$. Probar que
$$\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(y) : y > a\}$$

3. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función inyectiva. Analizar la relación existente entre las siguientes afirmaciones:
   - (i) f es continua
   - (ii) $f(I)$ es un intervalo
   - (iii) f es estrictamente monótona
   - (iv) f^{-1} es continua

4. Calcular la imagen de la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

5. Sea $f :]-2,2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \forall x \in]-2,2[$$

Calcular $f\big(]-2,2[\big)$, $f\big([0,2[\big)$, $f\big(]-1,1[\big)$ y $f\big([-1,1]\big)$.

6. Sea $f : [-1,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \forall x \in [-1,1[$$

Calcular $f\big([-1,1[\big)$ y $f\big([-1/2,1/2]\big)$.

7. Sea $f : [-2,2[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt[4]{2-x}} \quad \forall x \in [-2,2[$$

Calcular $f\big([-2,2[\big)$ y $f\big([-2,0]\big)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Calcular $f\big(\mathbb{R}\big)$ y $f\big([-1,2]\big)$.

9. Sea $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x-1)} \quad \forall x \in]0,1[$$

Calcular $f\big(]0,1[\big)$ y $f\big([1/3,1/2]\big)$.

10. Probar que, para cada $y \in \mathbb{R}_0^+$, la ecuación $x^5+x^4+x=y$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}_0^+$, y que denotando por $g(y)$ a dicha solución, se obtiene una función continua $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$. Deducir que si $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n^5+x_n^4+x_n\} \to 3$, entonces $\{x_n\} \to 1$.