Tema 3: Métodos numéricos para resolver Problemas de Valores Iniciales

Métodos Numéricos II

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Granada

Curso 2021/22

Contenidos

Recordamos...

Problema de valores iniciales (PVI)

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{array}} \qquad \begin{array}{l} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (t_0, \mu) \in D \end{array} \tag{1}$$

siendo $x = x(t)$ una función desconocida de t.

Un método de discretización de un paso para el PVI viene expresado, según el caso, como

Método de un paso explícito
$x_0 = \mu,\ t_0 = a$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ $\quad t_{n+1} = t_n + h$ $\quad x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h)$

(10)

Método de un paso implícito
$x_0 = \mu,\ t_0 = a,$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ $\quad t_{n+1} = t_n + h$ $\quad$ resolver $x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_{n+1}, x_n; t_n, h)$

(11)

3.5. Análisis de errores y convergencia

Un aspecto sumamente importante al aplicar un método para PVI es el de disponer de una estimación del error global a través de una expresión que lo permita. El siguiente teorema la proporciona.

Teorema 6 (Acotación del error global)

Dado un método de discretización (10) para el PVI (1) con Φ lipschitziana respecto de x con constante de Lipschitz M, entonces

1. El método es convergente si y sólo si es consistente.
2. Si el método es de orden $p \geq 1$, entonces el error global es $O(h^p)$. Más concretamente

$$|x(t) - x_n| \leq C h^p \, \frac{e^{M(b-a)} - 1}{M}.$$

Nota: Recuérdese que el método es de orden $p \geq 1$ si $R_{n+1} = O(h^{p+1})$, es decir, existe una constante C tal que $|R_{n+1}| \leq C\, h^{p+1}$.

Para demostrar el Teorema 6 necesitamos el siguiente lema:

Lema

Si una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales no negativos verifica:

$$\alpha_{n+1} \leq (1+A)\alpha_n + B, \qquad A > 0, B \geq 0$$

donde A y B son constantes independientes de n, entonces:

$$\alpha_n \leq \alpha_0 e^{nA} + \frac{e^{nA}-1}{A}B.$$

Si $A = 0$, entonces $\alpha_n \leq \alpha_0 + nB$

Demostración del lema: El caso $A = 0$ es trivial.
Si $A > 0$ demostramos por inducción $\alpha_n \leq (1+A)^n\alpha_0 + \frac{(1+A)^n-1}{A}B$.
Para $n = 0$ es trivial, supongamos cierto para $n = k$ y veamos para $k+1$:

$$\alpha_{k+1} \leq (1+A)\alpha_k + B \leq (1+A)\left((1+A)^k\alpha_0 + \frac{(1+A)^k-1}{A}B\right) + B$$

$$= (1+A)^{k+1}\alpha_0 + \frac{(1+A)^{k+1}-1}{A}B$$

Usando que $(1+A)^n < e^{nA}$ se tiene el resultado.

Demostración del Teorema 6

1. Convergente $\Leftrightarrow$ Estable + consistente.

   Pero sabemos que si Φ es lipschitziana siempre es estable por lo que la convergencia equivale a la estabilidad.

2. Sabemos que $R_{n+1} = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(x(t_n); t_n, h)$ por lo que:

   $$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\Phi(x(t_n); t_n, h) + R_{n+1}$$

   Restando de esta igualdad la que define el método:

   $$x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h)$$

   se obtiene la relación

   $$x(t_{n+1}) - x_{n+1} = x(t_n) - x_n + h(\Phi(x(t_n); t_n, h) - \Phi(x_n; t_n, h)) + R_{n+1}$$

   Tomando valores absolutos y usando que ϕ es lipstchitziana

   $$|e_{n+1}| \leq |e_n| + hM|x(t_n) - x_n| + |R_{n+1}|$$

   donde M es la constante de Lipschitz de Φ.

Demostración del Teorema 6 (cont.)

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + hM|e_n| + |R_{n+1}|, \qquad h = 0, 1, \ldots, N-1$$

Si el método es de orden p,

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hM)|e_n| + Ch^{p+1}, \qquad h = 0, 1, \ldots, N-1$$

Usamos ahora el lema para $A = hM$ y $B = Ch^{p+1}$ y tenemos:

$$|e_n| \leq \frac{e^{nhM} - 1}{hM} Ch^{p+1}$$

Como $nh = n\frac{b-a}{N} = \frac{n}{N}(b-a) < b-a$, entonces:

$$|e_n| \leq \frac{e^{(b-a)M} - 1}{M} Ch^p$$

Análisis de errores y convergencia

La acotación del teorema anterior no tiene en cuenta las perturbaciones debidas a la presencia de errores de redondeo.

En lugar de $\{x_n\}_{n=0}^N$, en realidad se obtiene una sucesión de valores perturbados $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^N$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \mu + \delta_0 \\ \tilde{x}_{n+1} &= \tilde{x}_n + h\Phi(\tilde{x}_n, t_n, h) + \delta_n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema 7 (Acotación del error global con error de redondeo)

En las condiciones descritas, si $|\delta_j| \leq \delta \ \forall j$ entonces

$$|x(t) - \tilde{x}_n| \leq \left(Ch^p + \frac{\delta}{h} \right) \frac{e^{M(b-a)} - 1}{M}.$$

Observación. Teóricamente $x_n \to x(t_n)$ cuando $h \to 0$, hay que tener precaución con h ya que el término $\frac{\delta}{h}$ puede hacerse grande.

Análisis de errores y convergencia

El siguiente teorema nos asegura la convergencia de los métodos clásicos vistos hasta ahora, lo que viene a confirmar su utilidad práctica.

Teorema 8 (Convergencia de métodos clásicos)

Sea $f \in \mathcal{F}_r(D)$ con r adecuado. Entonces

- Los métodos de Euler son convergentes.
- El método de Taylor de orden p es convergente.
- Los métodos de Runge-Kutta explícitos de orden p son convergentes.

3.6. Control del tamaño del paso

La siguiente argumentación permite obtener una estimación computable del error de truncatura local.

Supongamos que tenemos un método de orden $p \geq 1$ en el que el término principal del error de truncatura local es Ch^{p+1}, es decir,

$$R_{n+1} = Ch^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

Por un lado, el cálculo de x_{n+1} desde x_{n-1} en dos pasos de tamaño h acumula un error de truncatura local doble del error local de cada paso; por otro lado, si desde t_{n-1} se aplica el método con un solo paso de tamaño doble $2h$ se obtiene una solución aproximada $x_{n+1}^{(2h)}$ de tal modo que

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x_{n+1} &\approx 2R_{n+1} \approx 2Ch^{p+1} \\ x(t_{n+1}) - x_{n+1}^{(2h)} &\approx R_{n+1}^{(2h)} \approx C(2h)^{p+1} = 2^{p+1}Ch^{p+1} \end{aligned}$$

por lo que restando se tiene

$$x_{n+1} - x_{n+1}^{(2h)} \approx (2^p - 1)2Ch^{p+1} \approx (2^p - 1)2R_{n+1}$$

Control del tamaño del paso

Entonces, la fórmula anterior

$$x_{n+1} - x_{n+1}^{(2h)} \approx (2^p - 1)2Ch^{p+1} \approx (2^p - 1)2R_{n+1}$$

nos permite obtener una estimación del error de truncatura local respecto del paso h como

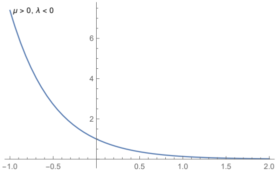
$$\boxed{R_{n+1} \approx \frac{x_{n+1} - x_{n+1}^{(2h)}}{2(2^p - 1)}}$$

Así, es posible estimar el error de truncatura local mediante los valores x_{n+1} y $x_{n+1}^{(2h)}$ para poder decidir si conviene aumentar o disminuir el paso a lo largo del proceso de aplicación práctica del método, permitiendo de este modo una implementación adaptativa.

3.7. A-estabilidad o estabilidad numérica

A la hora de elegir un método para resolver numéricamente un PVI no solo hemos de tener en cuenta sus propiedades de convergencia y orden, sino también su comportamiento frente a dos aspectos diferentes pero que conducen a un mismo criterio o concepto.

- ¿Cómo se comporta el método frente a errores de redondeo? Es decir, para un tamaño fijo de paso h ¿cómo se acumulan los errores de redondeo conforme avanza n?
- ¿Qué ocurre si resolvemos numéricamente un PVI cuya solución tiene una parte que tiende a cero (transitoria) y otra que permanece (estacionaria) cuando $t \to \infty$? Un caso muy simple de ello es el PVI $x' = \lambda x$ con $x(0) = \mu$ y $\Re(\lambda) < 0$ cuya solución es $x(t) = \mu e^{\lambda t}$, donde $\Re(\lambda)$ denota la parte real de λ.



A-estabilidad o estabilidad numérica

Es precisamente este PVI el que se utiliza como patrón o test para definir la estabilidad numérica de un método.

Definicion 9 (A-estabilidad o estabilidad numérica)

El método (10) o (11) se dirá A-estable o numéricamente estable si al aplicarlo al PVI $x' = \lambda x$ con $x(0) = \mu$ y $\Re(\lambda) < 0$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \forall h > 0.$$

A-estabilidad o estabilidad numérica

Ejemplo

Si aplicamos el método de Euler al problema citado tendremos

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n = (1 + h\lambda)x_n = \cdots = (1 + h\lambda)^{n+1}x_0$$

luego la solución numérica tenderá a cero (como debería) si, siendo $w = \lambda h$, se cumple

$$|1 + w| < 1$$

Los valores de w que cumplen esta desigualdad están en el círculo de centro -1 y radio 1 en el plano complejo. Sin embargo, puede haber valores de $h > 0$ que hagan a w estar fuera del círculo. En consecuencia, **el método de Euler no es A-estable**.

A-estabilidad o estabilidad numérica

Ejemplo:

Si aplicamos el método de Euler implícito al mismo problema tendremos

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} x_n = \cdots = \left(\frac{1}{1-h\lambda} \right)^{n+1} x_0$$

luego la solución numérica tenderá a cero (como debería) si se cumple

$$\left| \frac{1}{1-w} \right| < 1$$

condición que es cierta para cualquier valor w con $\Re(w) < 0$ y por lo tanto para cualquier $h > 0$. En consecuencia, **el método de Euler implícito es A-estable**.

A-estabilidad o estabilidad numérica

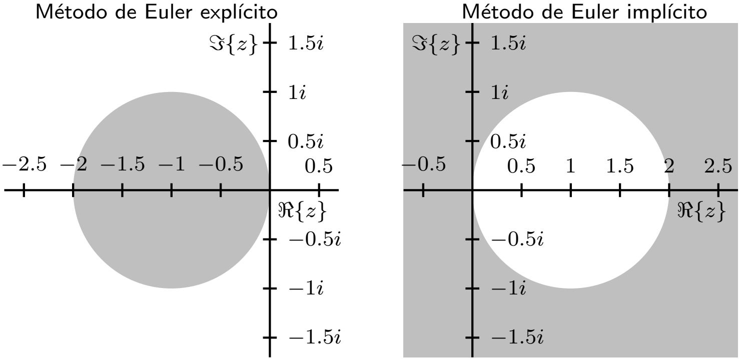


Figura: Regiones (sombreadas) de A-estabilidad de métodos de Euler

$$|1 + w| < 1 \qquad\qquad \left|\frac{1}{1 - w}\right| < 1$$

A-estabilidad o estabilidad numérica

En general, cuando apliquemos un método de un paso al PVI patrón, la solución numérica adoptará la forma

$$x_{n+1} = Q(w)x_n$$

siendo $Q(w)$ una función polinómica en los métodos explícitos y racional en los implícitos.

De esta forma, la comprobación de A-estabilidad pasará por analizar la desigualdad

$$|Q(w)| < 1 \text{ con } w \in \mathbb{C}.$$

Por desgracia, la condición de A-estabilidad es con frecuencia demasiado exigente.

A-estabilidad o estabilidad numérica

En la práctica se buscan más bien métodos que cumplan $|Q(w)| < 1$ en una región de $\mathbb{C}$ lo más amplia posible.
Así, se define la región de A-estabilidad de un método como el conjunto

$$R_A = \{w \in \mathbb{C} : |Q(w)| < 1\}$$

y se llama intervalo de A-estabilidad a $R_A \cap \mathbb{R}_-$.

Con esto, la A-estabilidad se puede redefinir así:

Definicion 10 (A-estabilidad o estabilidad numérica (alternativa))

Un método es estable numéricamente si su región de A-estabilidad contiene al semiplano izquierdo de $\mathbb{C}$.