

Capítulo 2

Métodos de resolución numérica o aproximada de E.D..

2.1 Introducción.

Los métodos numéricos de resolución aproximada de ecuaciones diferenciales se ocupan de resolver numéricamente, entre otros, el problema de valores iniciales (P.V.I.) siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

El problema (2.1) admite una única solución bajo condiciones adecuadas de la función $f(x, y)$; por ejemplo:

TEOREMA 2.1

Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas respecto de las variables x e y en un dominio del plano $D = [a, b] \times [c, d]$ que contiene al punto (x_0, y_0) , entonces existe una única solución del P.V.I. (2.1).

2.1.1 Métodos de discretización

Los métodos más usados son los llamados de discretización consistentes en obtener valores aproximados de la solución $y(x)$ en ciertos puntos, x_0, x_1, \dots, x_n (habitualmente equidistantes). Supondremos, en lo sucesivo, que $y(x)$ está definida en el intervalo $[a = x_0, b]$ y calcularemos aproximaciones de ésta en los nodos de la partición de paso h , $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ donde $x_i = a + ih$ y $h = \frac{b-a}{n}$. A tales aproximaciones las notamos por $y_k \cong y(x_k)$.

Entre los métodos de discretización cabe distinguir entre:

- Métodos de un paso: se utiliza, para calcular la aproximación y_{k+1} , sólo el valor anterior (y_k) .
- Métodos de m pasos o multipaso ($m > 1$): para calcular la aproximación y_{k+m} , se utilizan varios de los valores anteriores ($y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m-1}$)

También, se distingue entre métodos numéricos **explícitos** y métodos **implícitos** que aclararemos en su momento.

Pues bien, este capítulo está dedicado a describir los métodos más populares tanto de un paso (Euler, Taylor, Runge-Kutta) como de varios pasos (Milne-Simpson, Adams-Moulton, Adams-Bashforth).

2.1.2 Métodos de Euler. Interpretación geométrica.

El método de Euler clásico para el P.V.I.: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ obtiene aproximaciones en los nodos de la partición de $[a = x_0, b]$ con paso h , $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ donde $x_k = a + kh$ y $h = \frac{b-a}{n}$ como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(a) \\ y_{k+1} &= y_k + h f(x_k, y_k) \text{ para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

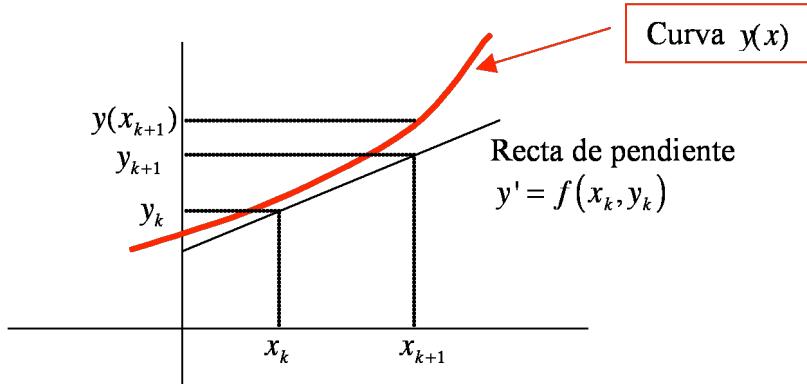


Figura 2.1: Método de Euler.

Ejemplo 2.1

Aplicamos el método de Euler para el problema:

$$\left. \begin{array}{l} y' = x^2 - \frac{y}{x} \\ C.I. \quad y(1) = 1 \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

en el intervalo $[1, 2]$ con pasos $h = 0.25$ y $h = 0.1$

Solución.

El método de Euler para (2.2) se escribe en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_{k+1} &= y_k + h \left(x_k^2 - \frac{y_k}{x_k} \right) \text{ para } k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Usando el esquema anterior se obtienen los cálculos siguientes:

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	Errores.
0	1	1.	1	0.
1	1.1	1.	1.01457	-0.0145682
2	1.2	1.03009	1.057	-0.0269091
3	1.3	1.08825	1.12617	-0.0379231
4	1.4	1.17354	1.22171	-0.0481758
5	1.5	1.28571	1.34375	-0.0580357
6	1.6	1.425	1.49275	-0.06775
7	1.7	1.59194	1.66943	-0.077489
8	1.8	1.78729	1.87467	-0.0873725
9	1.9	2.012	2.10949	-0.0974868
10	2.	2.26711	2.375	-0.107895

Tabla 2.1: Euler con pasos $h = 0.25$ y $h = 0.1$ respectivamente.

En las tablas anteriores aparecen, junto a las aproximaciones, los valores exactos de la solución pues esta puede obtenerse utilizando lo visto en el capítulo 1. La solución exacta del P.V.I. es:

$$y(x) = \frac{1}{4} (x^3 + \frac{3}{x})$$

Puede observarse en figura 2.2 la mejoría en las aproximaciones al usar un paso más pequeño.

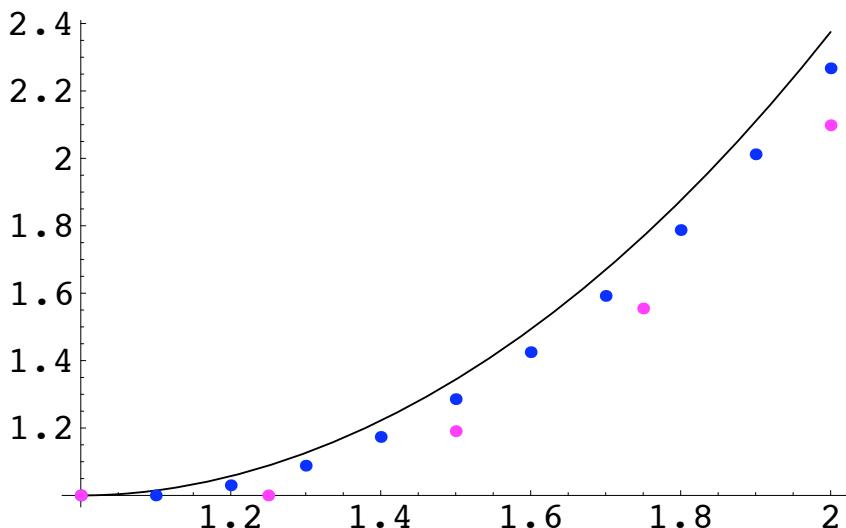


Figura 2.2: Comparativa de soluciones numéricas para $h = 0.25$ y 0.1 con la exacta.

Una modificación de este método (**Euler modificado**) mejora el error cometido en las aproximaciones calculadas. Este se escribe como sigue:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= y(a) \\ \text{para } k &= 0, 1, \dots, n-1 \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))] \end{aligned}} \quad (2.3)$$

Su interpretación geométrica se ilustra en la figura siguiente:

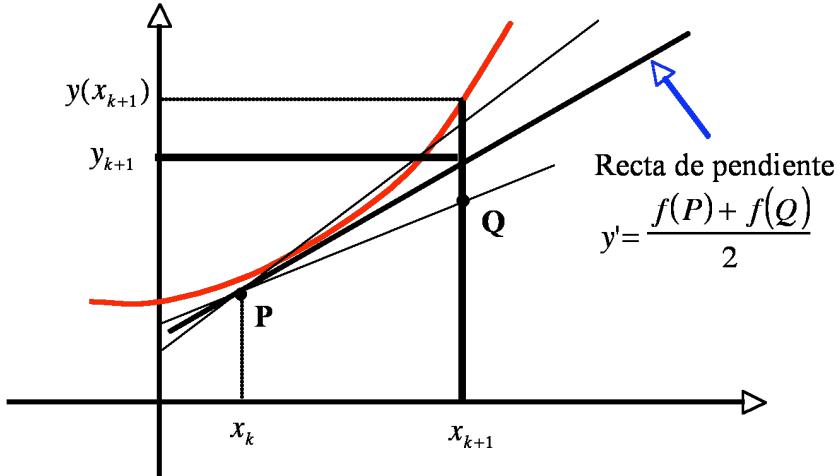


Figura 2.3: Método de Euler modificado

En esta figura puede apreciarse que la aproximación calculada mediante el método de Euler modificado utiliza la ordenada en x_k de la recta que pasa por $P = (x_k, y_k)$ cuya pendiente es un promedio de las pendientes en P y en $Q = (x_{k+1}, y_k + hf(P))$ desde la E.D. $y' = f(x, y)$.

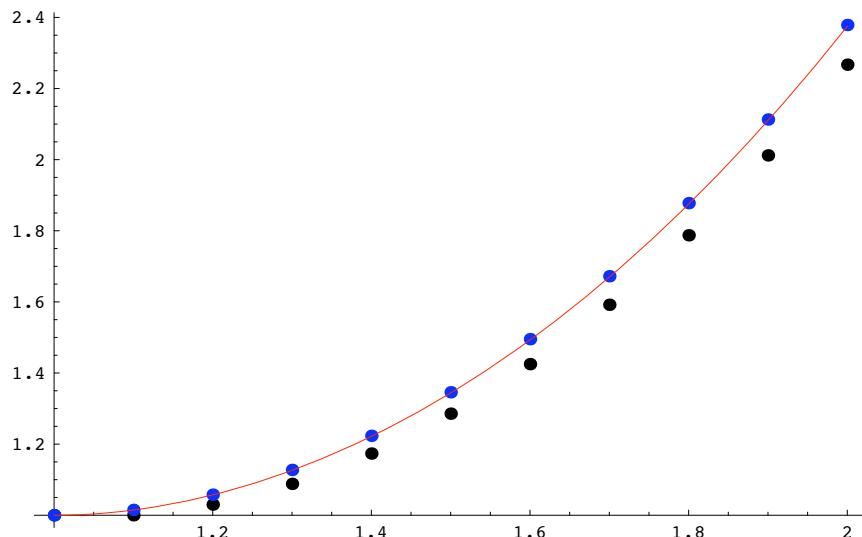


Figura 2.4: Comparativa de los métodos de Euler (puntos negros) y Euler modificado (azules)