Tema 14

Residuos

De la forma general del teorema de Cauchy vamos a deducir fácilmente un regla práctica para calcular integrales, conocida como *teorema de los residuos*. Tiene numerosas aplicaciones fuera del Análisis Complejo, e incluso fuera de la Matemática. En realidad el teorema de los residuos incluye como caso particular a la versión general del teorema de Cauchy, que como vimos, es equivalente a la versión general de la fórmula de Cauchy, así que podríamos hablar de tres versiones equivalentes de un mismo resultado. El teorema de los residuos es la versión más adecuada para aplicarla al cálculo de integrales, de ahí su gran popularidad.

14.1. Residuo de una función en un punto

Para dar la definición de residuo, nos ponemos en la misma situación que al estudiar las singularidades. Fijamos $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y una función $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$, es decir, tenemos una función holomorfa en un entorno reducido de un punto del plano. Consideramos de nuevo el desarrollo de Laurent de f en el anillo $A(a\,;\,0,R)$ dado por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall\, z \in D(a,R) \setminus \{a\} \tag{1}$$

y conviene recordar la expresión de los coeficientes que aparecen en este desarrollo:

$$c_n = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,,\ \ \forall\, \rho \in \,]\,0,R\,[$$

Esta expresión es especialmente sencilla en el caso $n = -1$, pues nos aparece solamente la integral de f sobre la circunferencia $C(a,\rho)$. Nuestra estrategia consistirá precisamente en utilizar la igualdad así obtenida para calcular, no ya la integral de f sobre una circunferencia, sino de hecho, su integral sobre ciclos mucho más generales. Ello motiva la siguiente definición.

El **residuo** de la función f en el punto a es el número complejo definido por

$$\operatorname{Res}\big(\,f(z)\,,\,a\,\big) = c_{-1} = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{C(a,\rho)} f(w)\, dw \qquad \forall\, \rho \in \,]\,0,R\,[\tag{2}$$

Obsérvese que cometemos un ligero abuso de notación, pues en la definición no interviene ningún $z \in \mathbb{C}$, no estamos definiendo ninguna función de la variable z, sino un número complejo que sólo depende de la función f y del punto a. Por tanto, sería formalmente más correcto escribir $\operatorname{Res}(f, a)$, pero esta notación nos obligaría a definir por separado la función f a la que nos estamos refiriendo.

Por el contrario, en la notación $\operatorname{Res}\big(f(z), a\big)$ indicamos explícitamente el valor de f en un punto genérico z, que nos hace pensar en la función $z \mapsto f(z)$, sin necesidad de dar más explicaciones. Además, no hay ambigüedad acerca del conjunto en el que consideremos definida la función f, ya que la definición del residuo sólo involucra los valores de f en una circunferencia de centro a y radio arbitrariamente pequeño, luego podemos considerar que la función f está definida en cualquier entorno reducido de a, el valor del residuo no depende del entorno que usemos. Eso sí, la expresión $f(z)$ deberá tener sentido en algún entorno reducido de a, y la función $z \mapsto f(z)$ deberá ser holomorfa en tal entorno. Por ejemplo, la expresión $\operatorname{Res}(1/z, 0)$ indica claramente el residuo en el origen de la función $z \mapsto 1/z$, que podemos considerar definida en $\mathbb{C}^*$, en $D(0,1) \setminus \{0\}$, o en cualquier otro entorno reducido del origen. Ocurre aquí exactamente lo mismo que con la notación que usamos para las integrales. En el primer miembro de (2) debemos considerar z como una variable "muda", exactamente igual que lo es la variable de integración w en el último miembro.

Veamos algunos ejemplos sencillos de residuos. La primera observación es evidente: si a es un punto regular de f, se tiene $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en particular, $c_{-1} = 0$:

- *Si a es un punto regular de f, entonces* $\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = 0$.

Este hecho explica, hasta cierto punto, por qué usamos el término *residuo*: sólo puede ser distinto de 0 cuando a es una singularidad de f, luego podemos entender el residuo como el "rastro" o la "huella" que puede dejar una singularidad, pues veremos que no siempre la deja.

Fijado $k \in \mathbb{N}$, es claro que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^k}, a\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Vemos que el recíproco de nuestra primera observación anterior no es cierto: que se anule el residuo no garantiza que a sea un punto regular, o si se quiere, hay singularidades que no dejan huella. Por el momento son polos, pero enseguida vemos que el residuo en una singularidad esencial también puede ser cero. Concretamente, fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$e^{1/z^k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{kn}} \forall z \in \mathbb{C}^*$$

de donde deducimos claramente que

$$\operatorname{Res}\left(e^{1/z^k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

14.2. Teorema de los residuos

Ha quedado claro que el residuo no debe entenderse como un indicador de la existencia de una singularidad, conviene profundizar un poco más. Para ello basta mirar a la integral que lo define. Si f tiene una primitiva en un entorno reducido de a, es claro que dicha integral se anula. Pero vamos a ver enseguida que el recíproco también es cierto.

En efecto, si Γ es un ciclo en $D(a,R)\setminus\{a\}$, puesto que la serie de Laurent que aparece en (1) converge uniformemente en el conjunto compacto Γ^*, podemos escribir

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_\Gamma (z-a)^n\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_\Gamma (z-a)^k\,dz$$

Para $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ la función $z\mapsto(z-a)^k$ tiene en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ la primitiva $z\mapsto\dfrac{(z-a)^{k+1}}{k+1}$ luego su integral sobre Γ se anula y la igualdad anterior se reduce a

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = c_{-1}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a)\,\mathrm{Res}\big(f(z),a\big) \tag{3}$$

Si $\mathrm{Res}\big(f(z),a\big)=0$, deducimos que f admite una primitiva en el abierto $D(a,R)\setminus\{a\}$, pues su integral sobre cualquier ciclo en dicho abierto es nula. Por tanto, el residuo, nos dice si f tiene o no una primitiva en un entorno reducido de a.

Observemos ahora que la igualdad (3) generaliza a (2), pues si $\Gamma = C(a,\rho)$ tenemos $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=1$, luego el residuo permite calcular integrales más generales que la que sirvió para definirlo. Podemos pensar que el residuo produce una “aportación” a la integral que obviamente se ve afectada por el índice. La aportación es nula, cuando se anula el residuo o el índice.

Analicemos la situación que tenemos en (3) para motivar un planteamiento más general. El ciclo Γ es obviamente nul-homólogo con respecto al abierto $\Omega = D(a,R)$, pero puede no serlo con respecto a $\Omega\setminus\{a\}$, que es el abierto en el que sabemos que f es holomorfa. De hecho, está claro que Γ es nul-homólogo con respecto a $\Omega\setminus\{a\}$ si, y sólo si, $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=0$. No podemos aplicar el teorema de Cauchy en el abierto Ω, porque a puede ser una singularidad de f, pero tampoco podemos aplicarlo en $\Omega\setminus\{a\}$ porque Γ puede no ser nul-homólogo con respecto a $\Omega\setminus\{a\}$. Sin embargo, podemos calcular la integral que aparece en (3) con sólo conocer el índice y el residuo.

El planteamiento general consiste en admitir más singularidades, sustituyendo el punto a por un conjunto A de posibles singularidades. Así pues, dado un abierto Ω, la función f no llegará a ser holomorfa en Ω, debido a sus singularidades. Para que cada $a\in A$ pueda ser una singularidad, es necesario que f sea holomorfa en un entorno reducido a, es decir, debe existir un $\rho\in\mathbb{R}^+$ tal que $D(a,\rho)\subset\Omega$ y $D(a,\rho)\cap A=\{a\}$. Supondremos por tanto que A no tiene puntos de acumulación en Ω, es decir, $A'\cap\Omega=\emptyset$, condición que ya se usó al estudiar los ceros de funciones holomorfas. Esta hipótesis hace que A sea cerrado relativo a Ω, es decir, que $\Omega\setminus A$ sea abierto, con lo que tiene sentido suponer que $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus A)$. Tendremos finalmente un ciclo Γ en $\Omega\setminus A$ que es nul-homólogo con respecto a Ω, pero puede no serlo con respecto a $\Omega\setminus A$. En (3) teníamos un caso muy particular: $\Omega = D(a,R)$ y $A=\{a\}$.

A partir de la interpretación intuitiva de (3), conjeturamos que, en general, la integral de f sobre Γ sea la suma de las "aportaciones" de todas las singularidades. Aparentemente la suma podría ser infinita, pues A puede ser un conjunto infinito. Por ejemplo, la función tangente tiene infinitas singularidades, todas ellas con residuo no nulo. Sin embargo, veremos que el conjunto de los puntos de A con índice no nulo con respecto a Γ es finito, luego de hecho la suma es finita. La conjetura es correcta, como muestra el siguiente teorema, cuyas hipótesis y tesis han quedado ya motivadas.

Teorema de los residuos. *Sea Ω un abierto del plano, A un subconjunto de Ω tal que $A' \cap \Omega = \emptyset$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$. Sea Γ un ciclo en $\Omega \setminus A$, nul-homólogo con respecto a Ω. Entonces, el conjunto $\{\, a \in A \,:\, \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0 \,\}$ es finito y se verifica que*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \,=\, 2\,\pi\, i \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\Gamma(a)\,\operatorname{Res}\big(\, f(z), a\,\big) \tag{4}$$

Demostración. Considerando el conjunto $K \,=\, \Gamma^* \cup \{\, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \,:\, \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0 \,\}$, tenemos claramente que $\{\, a \in A \,:\, \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0 \,\} \,=\, A \cap K$, luego debemos empezar probando que $A \cap K$ es finito.

Observamos que $\mathbb{C} \setminus K \,=\, \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \,:\, \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \,\}$ es la unión de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ en las que el índice se anula, luego es abierto, por ser unión de abiertos. Por tanto, K es cerrado y enseguida comprobamos que está acotado.

En efecto, si $R \,=\, \text{máx}\{|\,z\,| \,:\, z \in \Gamma^*\}$, como $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ es un subconjunto conexo y no acotado de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, estará contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, en la que el índice se anula, luego no contiene ningún punto de K, o lo que es lo mismo, $K \subset \overline{D}(0,R)$.

Como por hipótesis Γ es nul-homólogo con respecto a Ω, para $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene $w \notin K$, luego $K \subset \Omega$. En resumen, K es un subconjunto compacto de Ω.

Si $A \cap K$ fuese infinito, por ser K compacto, $A \cap K$ tendría un punto de acumulación en K, que por una parte sería punto de acumulación de A, y por otra estaría en Ω, contradiciendo la hipótesis $A' \cap \Omega = \emptyset$. Así pues $A \cap K$ es finito como queríamos.

Nótese que, si $A \cap K = \emptyset$, no hay nada que demostrar, pues entonces Γ es nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$, la forma general del teorema de Cauchy nos dice que el primer miembro de (4) se anula, e igual ocurre con todos los sumandos del segundo miembro.

Para probar (4), numeramos los puntos de $A \cap K$, los únicos de A que debemos considerar. Sea pues $A \cap K \,=\, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, y abreviando notación, $I_n \,=\, \{1, 2, \ldots, n\}$. Naturalmente evitamos repeticiones, es decir, para $k, j \in I_n$ con $k \neq j$ se tiene $a_k \neq a_j$. Si para cada $k \in I_n$ escribimos $p_k \,=\, \operatorname{Ind}_\Gamma(a_k)$, la igualdad (4), excluidos los sumandos que sabemos que son nulos, toma la forma

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \,=\, 2\,\pi\, i \sum_{k=1}^{n} p_k \operatorname{Res}\big(\, f(z), a_k\,\big) \tag{5}$$

La idea para probarla es modificar Γ de forma que el nuevo ciclo sea nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$, para poder aplicar la forma general del teorema de Cauchy.

Los puntos de $A \cap K$ son precisamente los que hacen que Γ no sea nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$ luego por así decirlo, debemos "descontar" las vueltas que da Γ alrededor de cada uno de ellos, pero eso se consigue fácilmente usando pequeñas circunferencias centradas en cada punto, que den las mismas vueltas que Γ pero en sentido contrario.

Para definir con comodidad el nuevo ciclo, si $C = C(a, \rho)$ es una circunferencia y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $n\,C$ a la suma de C consigo misma n veces y lógicamente $-n\,C$ será la suma de $-C$ consigo misma n veces. Obviamente, para todo $p \in \mathbb{Z}$, se tiene $(p\,C)^* = C^*$ y al pasar de C a $p\,C$ la integral de cualquier función continua en C^* se multiplica por p y, en particular, lo mismo le ocurre al índice de cualquier punto $z \in \mathbb{C} \setminus C^*$.

Pues bien, fijado $k \in I_n$, usamos que a_k es un punto aislado de A para encontrar un radio $r_k > 0$ tal que $D(a_k, r_k) \subset \Omega$ y $D(a_k, r_k) \cap A = \{a_k\}$. Consideramos entonces la circunferencia $C_k = C(a_k, \rho_k)$ con $0 < \rho_k < r_k$, que evidentemente verifica $C_k^* \subset \Omega \setminus A$. Finalmente, el ciclo buscado es

$$\Sigma = \Gamma - \sum_{k=1}^{n} p_k\, C_k$$

Es claro que $\Sigma^* \subset \Omega \setminus A$ y vamos a comprobar que Σ es nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$. Fijado $w \in \mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus A) = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup A$, se pueden dar tres casos.

(i). Si $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, como Γ es nul-homólogo con respecto a Ω, tenemos $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0$. Pero además, para todo $k \in I_n$, tenemos $w \notin D(a, \rho_k)$, luego $\operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$. Deducimos claramente que

$$\operatorname{Ind}_\Sigma(w) = \operatorname{Ind}_\Gamma(w) - \sum_{k=1}^{n} p_k \operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$$

(ii). Si $w \in A$ con $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0$, para todo $k \in I_n$ tenemos $w \neq a_k$, luego $w \notin D(a, \rho_k)$, de donde $\operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$. Concluimos como en el caso anterior que $\operatorname{Ind}_\Sigma(w) = 0$.

(iii). Si $w \in A$ con $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) \neq 0$, existe un único $j \in I_n$ tal que $w = a_j$. Entonces, es claro que $\operatorname{Ind}_{C_j}(w) = 1$ mientras que, para todo $k \in I_n \setminus \{j\}$ se tiene $w \notin D(a_k, \rho_k)$, luego $\operatorname{Ind}_{C_k}(w) = 0$. Concluimos que

$$\operatorname{Ind}_\Sigma(w) = \operatorname{Ind}_\Gamma(w) - \sum_{k=1}^{n} p_k \operatorname{Ind}_{C_k}(w) = p_j - p_j = 0$$

Puesto que $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ y Σ nul-homólogo con respecto a $\Omega \setminus A$, la forma general del teorema de Cauchy nos dice que la integral de f sobre Σ es cero, es decir

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{p_k C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} p_k \int_{C_k} f(z)\,dz$$

Esta es la igualdad buscada, pues para $k \in I_n$, f es holomorfa en $D(a_k, r_k) \setminus \{a_k\} \subset \Omega \setminus A$ y hemos tomado $\rho_k < r_k$, luego por definición de residuo se tiene

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\big(f(z), a_k\big) \qquad \forall\, k \in I_n$$

■

Como se ha podido comprobar, salvo cuestiones topológicas y la construcción del ciclo Σ, la demostración anterior es una aplicación directa del teorema de Cauchy. Pero por otra parte, es claro que el teorema anterior generaliza al de Cauchy: si tomamos $A = \emptyset$, obtenemos que la integral de cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sobre cualquier ciclo en Ω que sea nul-homólogo con respecto a Ω es cero. Por tanto, podemos ver el teorema de Cauchy y el de los residuos como dos versiones equivalentes de un mismo resultado. Digamos que el teorema de los residuos es el teorema de Cauchy, preparado para calcular integrales.

14.3. Cálculo de residuos.

El teorema de los residuos reduce el cálculo de integrales muy generales al de residuos e índices. En la práctica los índices de adivinan a simple vista, pues el ciclo Γ suele ser un camino cerrado, al que le ocurre lo mismo que a una circunferencia: $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ tiene dos componentes conexas, la no acotada, en la que el índice se anula, y la acotada, en la que vale 1, porque Γ suele estar orientado positivamente. Sólo queda, por tanto, calcular los residuos.

La definición del residuo como una integral nos lleva en cierto modo a un círculo vicioso, la alternativa es ver el residuo como coeficiente del desarrollo de Laurent. Pero calcular todo el desarrollo parece demasiado trabajo cuando sólo nos interesa uno de los coeficientes. En el caso de un polo, se puede evitar ese trabajo como vamos a ver.

Supongamos pues que a es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de una función f, holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\}$ con $R > 0$. La caracterización de los polos permite escribir f en la forma:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \qquad \forall\, z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

donde $\psi \in \mathcal{H}\big(D(a, R)\big)$ y $\psi(a) \neq 0$. Del desarrollo de Taylor de ψ centrado en a deducimos el de Laurent para f, pues para $z \in D(a, R) \setminus \{a\}$ tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-k}$$

y aunque no esté escrito en la forma habitual, éste el desarrollo de Laurent de f en el anillo $A(a\,;\,0, R)$. El coeficiente c_{-1}, que acompaña a la potencia $(z-a)^{-1}$ en este desarrollo, aparece para $n = k-1$, luego tenemos $c_{-1} = \psi^{(k-1)}(a)\,/\,(k-1)!$. Esta igualdad parece de momento poco útil, piénsese que en la práctica ni siquiera conocemos $\psi(a)$. Sin embargo, como $\psi^{(k-1)}$ es continua en el punto a, podemos escribir

$$c_{-1} = \frac{\psi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = \lim_{z \to a} \frac{\psi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$$

Esta sencilla observación resuelve nuestro problema, pues para obtener el límite anterior, sólo trabajamos en $D(a, R) \setminus \{a\}$, donde sabemos que $\psi(z) = (z-a)^k f(z)$. Para enunciar el resultado obtenido, evitamos la función ψ, usando para sus derivadas una notación muy clásica.

- *Sea* $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\setminus\{a\}\big)$ *con* $a \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{R}^+$. *Si* f *tiene un polo de orden* $k \in \mathbb{N}$ *en el punto* a, *se tiene:*

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) \;=\; \frac{1}{(k-1)!}\,\lim_{z\to a}\,\frac{d^{k-1}}{d\,z^{k-1}}\big((z-a)^k f(z)\big) \tag{6}$$

Tenemos pues una regla práctica para calcular el residuo en un polo, luego el teorema de los residuos resulta muy útil cuando todas las singularidades que aparecen son polos. Resaltamos que, al aplicar esta regla debemos previamente asegurarnos de que a es un polo de orden k. La regla es especialmente sencilla en el caso de un polo simple, incluso sin suponer a priori que estamos en ese caso:

- *Sea* $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\setminus\{a\}\big)$ *con* $a \in \mathbb{C}$ *y* $R \in \mathbb{R}^+$. *Entonces:*

$$\lim_{z\to a}(z-a)\,f(z) \;=\; \alpha \in \mathbb{C} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{Res}\big(f(z), a\big) \;=\; \alpha \tag{7}$$

Si $\alpha = 0$ el teorema de extensión de Riemann nos dice que a es un punto regular de f, luego el residuo es cero. En otro caso, la caracterización de los polos nos dice que a es un polo simple de f y basta aplicar el resultado anterior en el caso $k = 1$, obteniendo

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) \;=\; \lim_{z\to a}\,(z-a)\,f(z) \;=\; \alpha \qquad \blacksquare$$

A la hora de aplicar (6) o (7) debemos calcular límites que con mucha frecuencia presentan una indeterminación del tipo $0/0$, pues la definición de f no siempre lleva un denominador de la forma $(z-a)^k$ que podamos cancelar, tal denominador está de alguna manera "oculto" y eso produce la indeterminación. En tales casos, es útil la siguiente versión de la regla de L'Hôpital para funciones holomorfas, mucho más clara que la que conocemos para funciones reales de variable real.

- *Sean* $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ *y* $f, g \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$. *Supongamos que* $f(a) = g(a) = 0$ *y que* g *no es idénticamente nula. Entonces existe un* $\delta \in]\,0, R\,[$, *tal que* $g(z) \neq 0$ *y* $g'(z) \neq 0$ *para todo* $z \in D(a, \delta \setminus \{a\}$. *Además, se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:*

$$(i) \quad \lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} \;=\; \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} \;=\; \alpha \in \mathbb{C} \qquad\qquad \textit{o bien,}$$

$$(ii) \quad \frac{f(z)}{g(z)} \to \infty \;\; (z \to a) \quad \text{y} \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} \to \infty \;\; (z \to a)$$

Comprobamos la existencia de δ, que permite definir las funciones cociente f/g y f'/g' en un entorno reducido de a. Como g no es idénticamente nula en el dominio $D(a,r)$, el cero de g en el punto a es aislado, luego existe $\delta \in]\,0, R\,[$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(0,\delta_1)\setminus\{a\}$. Probando lo mismo para g', es obvio que podemos conseguir un mismo δ para ambas funciones. Observamos que g' no es idénticamente nula, porque g no es constante. Si $g'(a) \neq 0$, usamos la continuidad de g' en a, y si $g'(a) = 0$, razonamos igual que con g.

Descartamos que f sea idénticamente nula, pues entonces se cumple (i) con $\alpha = 0$. Sean m y n los órdenes de los ceros en el punto a de f y g, respectivamente. Existen funciones $\varphi, \psi \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$, con $\varphi(a) \neq 0$ y $\psi(a) \neq 0$, tales que, para todo $z \in D(a,R)$ se tiene

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z) \qquad \text{y} \qquad g(z) = (z-a)^n \psi(z)$$

También para todo $z \in D(a,R)$ se tiene entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z-a)^{m-1}\big(m\,\varphi(z) + (z-a)\,\varphi'(z)\big) \qquad \text{y} \\ g'(z) &= (z-a)^{n-1}\big(n\,\psi(z) + (z-a)\,\psi'(z)\big) \end{aligned}$$

Para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$, usando que $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ deducimos que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^{m-n}\,\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \quad \text{y} \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-a)^{m-n}\,\frac{m\,\varphi(z) + (z-a)\,\varphi'(z)}{n\,\psi(z) + (z-a)\,\psi'(z)} \tag{8}$$

Para probar que se verifica (i) o (ii), bastará entonces observar que

$$\lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to a} \frac{m\,\varphi(z) + (z-a)\,\varphi'(z)}{\psi(z) + (z-a)\,\psi'(z)} = \frac{m\,\varphi(a)}{n\,\psi(a)} \neq 0 \tag{9}$$

Usando (8) y (9) resolvemos los tres casos que pueden presentarse. Si $m > n$, está claro que se cumple (i) con $\alpha = 0$. Si $m < n$ es igualmente claro que se cumple (ii). Finalmente, en el caso $m = n$, tenemos (i) con $\alpha = \varphi(a)\,/\,\psi(a)$. ■

Comentamos finalmente que, en el caso de una singularidad esencial, no hay ninguna regla práctica para calcular el residuo. Sólo queda la opción de calcular el desarrollo de Laurent de nuestra función en un entorno reducido de la singularidad esencial.

14.4. Ejercicios

1. Probar que, para $a \in \,]0,1[$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)\ dt}{1 + a^2 - 2a\cos(2t)} = \pi\,\frac{a^2 - a + 1}{1 - a}$$

2. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\big(1 + 2\cos t\big)^n \cos(n\,t)}{3 + 2\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\big(3 - \sqrt{5}\big)^n$$

3. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos\big(n\,t - \operatorname{sen} t\big)\,dt = \frac{2\pi}{n!}$$

4. Probar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)\left(x^2 + b^2\right)^2} = \frac{\pi\,(a + 2b)}{2\,a\,b^3\,(a + b)^2}$$

5. Probar que, para $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6\;dx}{\left(x^4 + a^4\right)^2} = \frac{3\,\pi\sqrt{2}}{8\,a}$$

6. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector $D(0, R) \cap \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, 0 < \arg z < 2\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}$$

7. Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t\,x)\;dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \frac{\pi}{2\,a^3}\,(1 + a\,t)\,e^{-a\,t}$$

8. Probar que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\;\operatorname{sen}(\pi\,x)}{x^2 - 5\,x + 6}\,dx = -5\,\pi$

9. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{1 - e^{2\,i\,z}}{z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del anillo $A(0\,;\,\varepsilon, R)$, probar que:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

10. Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \mapsto \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$ sobre la poligonal $\big[-\pi\,,\,\pi\,,\,\pi + i\,n\,,\,-\pi + i\,n\,,\,-\pi\big]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\;\operatorname{sen} x\;dx}{1 + a^2 - 2\,a\,\cos x} = \frac{2\,\pi}{a}\,\log\left(\frac{1 + a}{a}\right)$$

11. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0\,;\,\varepsilon, R)$, probar que, para $\alpha \in\,]-1, 3\,[$, se tiene:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\,dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4}\,(1 - \alpha)\,\sec\frac{\pi\,\alpha}{2}$$

12. Probar que, para $\alpha \in\,]\,0, 2\,[$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha\,x}\;dx}{1 + e^x + e^{2x}} = \int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}\;dt}{1 + t + t^2} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\operatorname{sen}\big(\pi\,(1-\alpha)/3\big)}{\operatorname{sen}(\pi\,\alpha)}$$

13. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1 + x^2}\, dx$$

14. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, \ R, \ R{+}\pi i, \ -R{+}\pi i, \ -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \ dx}{e^x + e^{-x}}$$

15. Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R, \ 0 < \arg z < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{1 + x^4}\, dx$$

16. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $\left[-R, \ R, R{+}2\pi i, -R{+}2\pi i, -R\right]$ con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1}\, dx$$