

ÁLGEBRA III

PRUEBA 2 2022/2023

① Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$.

a) Razónar que K es una extensión de Galois de \mathbb{Q} y calcular el cardinal de su grupo de Galois.

Puesto que $i \in \mathbb{C}$ es una raíz cuarta primitiva de la unidad, sabemos que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ es cuerpo de descomposición del polinomio irreducible $f = x^4 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$. Esto nos dice que la extensión $\mathbb{Q} \leq K$ es de Galois.

Como $\mathbb{Q} \leq K$ es una extensión de Galois, entonces $|\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)| = [K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})] [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}]$. Tenemos que:

$$\text{Irr}(i, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})) = x^2 + 1 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = 2$$

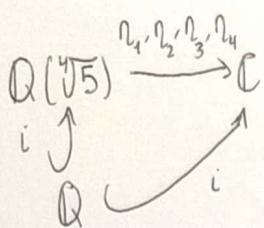
$i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$

$$\text{Irr}(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}) = x^4 - 5 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) : \mathbb{Q}] = 4$$

$$\Rightarrow |\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)| = 2 \cdot 4 = 8$$

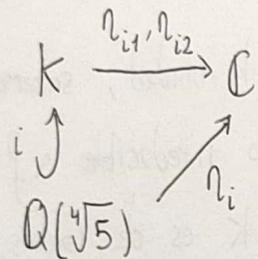
b) Describir los elementos del grupo $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Comenzamos calculando las \mathbb{Q} -extensiones complejas de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$. Como $\text{Irr}(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}) = x^4 - 5$, entonces habrá exactamente cuatro \mathbb{Q} -extensiones de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3$ y \mathbb{Q}_4 , caracterizadas por sus correspondientes imágenes:



	η_1	η_2	η_3	η_4
$\sqrt[4]{5} \mapsto$	$\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$	$i\sqrt[4]{5}$	$-i\sqrt[4]{5}$

Calculemos ahora las η_i -extensiones de $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$. Como $\text{Inr}(i, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})) = x^2 + 1$, habrá dos η_i -extensiones para cada $i = 1, 2, 3, 4$:



Raíces del polinomio
 $(x^2 + 1)^{\eta_i} = x^2 + 1 \quad : \pm i$

	η_{i1}	η_{i2}
$i \mapsto$	i	$-i$

, $i = 1, 2, 3, 4$.

En conclusión:

$$\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) = \left\{ \eta_{ij} \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 2 \end{array} \right\}, \text{ donde:}$$

	η_{11}	η_{12}	η_{21}	η_{22}	η_{31}	η_{32}	η_{41}	η_{42}
$\sqrt[4]{5} \mapsto$	$\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$	$-\sqrt[4]{5}$	$i\sqrt[4]{5}$	$i\sqrt[4]{5}$	$-i\sqrt[4]{5}$	$-i\sqrt[4]{5}$
$i \mapsto$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$	i	$-i$

c) Calcular todos los subcuerpos de K que tienen grado 4 sobre \mathbb{Q} .

Vamos a determinar el retículo de subgrupos de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$. Comenzamos calculando el orden de cada elemento de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$:

$$\circ) \eta_{11} = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}}(\eta_{11}) = 1$$

$$\circ) \begin{cases} \eta_{12}^2 (\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{12}^2 (i) = i \end{cases} \Rightarrow \eta_{12}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}}(\eta_{12}) = 2$$

$$\langle \eta_{12} \rangle = \{ \text{Id}, \eta_{12} \}$$

$$\circ) \begin{cases} \eta_{21}^2 (\sqrt[4]{5}) = -\eta_{21} (\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{21}^2 (i) = i \end{cases} \Rightarrow \eta_{21}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}}(\eta_{21}) = 2$$

$$\langle \eta_{21} \rangle = \{ \text{Id}, \eta_{21} \}$$

$$\circ) \begin{cases} \eta_{22}^2 (\sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{22}^2 (i) = i \end{cases} \Rightarrow \eta_{22}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}}(\eta_{22}) = 2$$

$$\langle \eta_{22} \rangle = \{ \text{Id}, \eta_{22} \}$$

$$\circ) \begin{cases} \eta_{31}^2 (-\sqrt[4]{5}) = \eta_{31} (i\sqrt[4]{5}) = \eta_{31}(i)\eta_{31}(\sqrt[4]{5}) = -\sqrt[4]{5} \\ \eta_{31}^2 (i) = i \end{cases} \Rightarrow \eta_{31}^2 = \eta_{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_{31}^4 = \eta_{21}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}}(\eta_{31}) = 4$$

$$\langle \eta_{31} \rangle = \{ \text{Id}, \eta_{31}, \eta_{31}^2, \eta_{31}^3 \}$$
$$\eta_{21} \quad \eta_{41}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \eta_{32}^2(\sqrt[4]{5}) = \eta_{32}(i) \eta_{32}(\sqrt[4]{5}) = -i \cdot i \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{32}^2(i) = i \end{array} \right\} \Rightarrow \eta_{32}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}(\eta_{32}) = 2}$$

$$\langle \eta_{32} \rangle = \{\text{Id}, \eta_{32}\}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \eta_{41}^2(\sqrt[4]{5}) = -\eta_{41}(i) \eta_{41}(\sqrt[4]{5}) = -i \cdot (-i \sqrt[4]{5}) = -\sqrt[4]{5} \\ \eta_{41}^2(i) = i \end{array} \right\} \Rightarrow \eta_{41}^2 = \eta_{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_{41}^4 = \eta_{21}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}(\eta_{41}) = 4}$$

$$\langle \eta_{41} \rangle = \{\text{Id}, \eta_{41}, \eta_{41}^2, \eta_{41}^3\} = \langle \eta_{31} \rangle$$

$$\eta_{21} \quad \eta_{31}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \eta_{42}^2(\sqrt[4]{5}) = -\eta_{41}(i) \eta_{41}(\sqrt[4]{5}) = i \cdot (-i \sqrt[4]{5}) = \sqrt[4]{5} \\ \eta_{42}^2(i) = i \end{array} \right\} \Rightarrow \eta_{42}^2 = \text{Id} \Rightarrow \underline{\text{ord}(\eta_{42}) = 2}$$

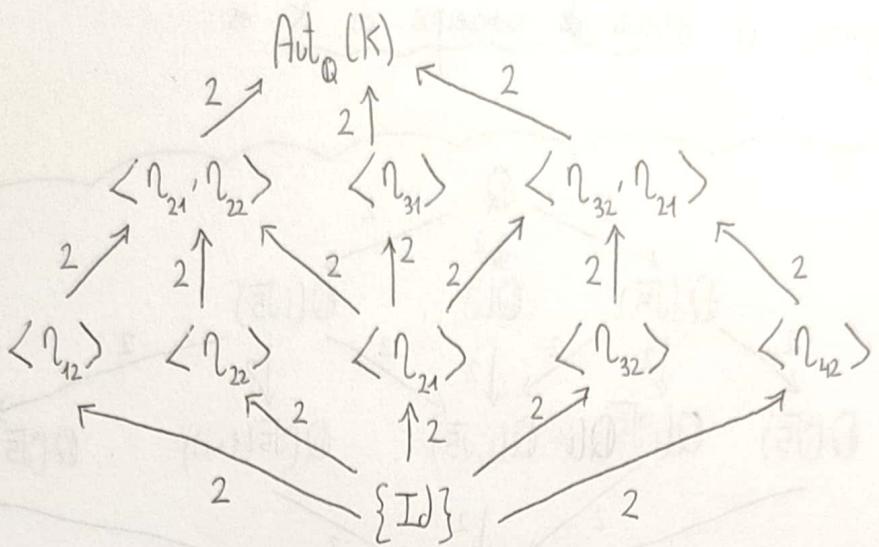
$$\langle \eta_{42} \rangle = \{\text{Id}, \eta_{42}\}$$

De esta forma, vemos que $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ contiene un subgrupo propio de orden 4 y cinco subgrupos propios de orden 2, luego, $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \cong D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2, sr = r^3s \rangle$.

Por tanto, nos faltan dos subgrupos propios de orden 4 que no son cíclicos. Estos son $\langle \eta_{31}^2, \eta_{22} \rangle = \langle \eta_{21}, \eta_{22} \rangle = \{\text{Id}, \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{21}\eta_{22}\} = \{\text{Id}, \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{12}\}$

y $\langle \eta_{22}\eta_{31}, \eta_{31}^2 \rangle = \langle \eta_{32}, \eta_{21} \rangle = \{\text{Id}, \eta_{32}, \eta_{21}, \eta_{32}\eta_{21}\} = \{\text{Id}, \eta_{32}, \eta_{21}, \eta_{42}\}$.

De esta forma, nos queda el siguiente reticuló de subgrupos de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$:



De acuerdo con la conexión de Galois, los subcuerpos de K de grado 4 sobre \mathbb{Q} están en correspondencia biyectiva con los subgrupos de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ de índice 4 o, lo que es lo mismo, con los elementos de orden 2 de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$. De esta forma, los subcuerpos de K de grado 4 sobre \mathbb{Q} son:

$$\begin{aligned} \bullet) K^{<\tau_{12}>} &= \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}) \\ \bullet) K^{<\tau_{22}>} &= \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{5}) \\ \bullet) K^{<\tau_{21}>} &= \mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) \\ \bullet) K^{<\tau_{32}>} &= \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}(1+i)) \\ \bullet) K^{<\tau_{42}>} &= \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}(1-i)) \end{aligned}$$

d) Calcular todos los subcuerpos de K .

Sob nos faltan los subcuerpos de K de grado 2 sobre \mathbb{Q} . De nuevo, de acuerdo a la conexión de Galois, dichos subcuerpos están en correspondencia biyectiva con los subgrupos de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ de índice 2 o, lo que es lo mismo, con los elementos de orden 4 de $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$. De esta forma, los subcuerpos de K de grado 2 sobre \mathbb{Q} son:

$$\begin{aligned} \bullet) K^{<\tau_{21}, \tau_{22}>} &= \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \\ \bullet) K^{<\tau_{31}>} &= \mathbb{Q}(i) \\ \bullet) K^{<\tau_{32}, \tau_{21}>} &= \mathbb{Q}(i\sqrt{5}) \end{aligned}$$

De esta forma, el retículo de subcuerpos de K es:

