Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Variable Compleja I

Resumen

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

1. Tema 3

Teorema 1.1. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$. Como $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos considerar las funciones $u, v : A \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $(x, y) \in A$ por*

$$u(x,y) = Re\ f(x+iy) \qquad y \qquad v(x,y) = Im\ f(x+iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *La función f es derivable en el punto z_0.*
2. *Las funciones u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0) verificando que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

*Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones de Cauchy-Riemann**.*

Caso de que se cumplan 1. y 2., se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

2. Tema 4

Teorema 2.1 (**Test de Weierstrass**). *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *una serie de funciones complejas definidas en un conjunto* $A \subset \mathbb{C}$, *y sea* $B \subset A$. *Supongamos que, para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *existe una constante* $M_n \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \qquad \forall z \in B$$

Si la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ *es convergente, entonces la serie de funciones* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge absoluta y uniformemente en* B.

Lema 2.2 (**Lema de Abel**). Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, supongamos que la sucesión $\{|\alpha_n|\rho^n\}$ está mayorada. Entonces la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n(z-a)^n$ converge absolutamente en el disco abierto $D(a,\rho)$ y uniformemente en cada compacto K que esté contenido en dicho disco.

Proposición 2.3 (**Fórmula de Cauchy-Hadamard**). Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$

1. Si la suceción $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\}$ no está mayorada, entonces $R = 0$.
2. Si $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \to 0$, entonces $R = \infty$.
3. En otro caso se tiene: $R = \dfrac{1}{\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\}}$

Corolario 2.3.1. Supongamos que $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$.

1. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to \infty$, entonces $R = 0$.
2. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to 0$, entonces $R = \infty$.
3. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^+$, entonces $R = 1/\lambda$.

3. Tema 6

Teorema 3.1 (Caracterización de la existencia de primitiva). *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*
2. *Para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

4. Tema 7

Teorema 4.1 (**Teorema local de Cauchy**). *Si Ω es un dominio estrellado, entonces toda función admite una primitiva en Ω, es decir, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Equivalentemente se tiene*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado γ en Ω.

Proposición 4.2 (**Fórmula de Cauchy**). Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw \qquad \forall z \in D(a, r)$$

5. Tema 8

Teorema 5.1 (Desarrollo en serie de Taylor). *Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω y, en particular, f es indefinidamente derivable en Ω. Además:*

1. *Si $\Omega = \mathbb{C}$, para todo $a \in \mathbb{C}$, la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia infinito y se verifica que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. *Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ y para cada $a \in \Omega$ tomamos $R_a = d(a, \mathbb{C}\setminus\Omega)$, la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y se verifica que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

Proposición 5.2 (Teorema de Cauchy para las derivadas). Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \qquad \forall z \in D(a,r),\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 5.3 (Teorema de extensión de Riemann). *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.*
2. *f tiene límite en el punto z_0.*
3. *Existen $\delta, M > 0$ tales que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \Omega$ que verifique $0 < |z - z_0| < \delta$.*
4. *$\lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.*

6. Tema 9

Proposición 6.1 (**Desigualdades de Cauchy**). Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, sea $M(f,a,r) = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(a,r)^*\}$. Se tiene entonces:

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 6.2 (**Teorema de Liouville**). *Toda función entera y acotada es constante. De hecho, la imagen de cualquier función entera no constante es un conjunto denso en $\mathbb{C}$, es decir, para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|f(z)| \leqslant M$ $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que $\overline{Im(f)} = \mathbb{C}$.*

Teorema 6.3 (**Teorema fundamental de Álgebra**). *El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, si P es un polinomio con coeficientes complejos, no constante, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.*

Proposición 6.4 (**Principio de identidad para funciones holomorfas**). Sea Ω un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si A es un subconjunto de Ω tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, y $A' \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces f y g son idénticas: $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

7. Tema 10

Teorema 7.1 (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, en particular:*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ de las k-ésimas derivadas, converge a la derivada k-ésima $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, en particular:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Este resultado también se puede usar para series

Teorema 7.2 (Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro). *Sea γ u ncamino, Ω un abierto del plano y $\Phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que, para cada $w \in \gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\Phi_w(z) = \Phi(w, z)$ para todo $z \in \Omega$, es holomorfa en Ω. Entonces, definiendo*

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w, z)dw \qquad \forall z \in \Omega$$

se obtiene una función holomorfa: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \Omega$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en $\mathbb{C}$, es continua y se verifica que

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \Phi_w^{(k)} dw = \int_\gamma \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(w, z) \qquad \forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$$

8. Tema 11

Proposición 8.1 (**Propiedad de la media**). Sea Γ un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})dt$$

Teorema 8.2 (**Principio del módulo máximo**). *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces f es constante.*

Teorema 8.3 (**Principio del módulo mínimo**). *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$ es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante.*

Teorema 8.4 (**Teorema de la función inversa global**). *Sea U un dominio y $f \in \mathcal{H}(U)$ una función inyectiva. Entonces $V = f(U)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$$

9. Tema 12

Teorema 9.1 (Forma general del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy). *Sea Ω un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω, nul-homólogo con respecto a Ω. Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene:*

1. $Ind_\Gamma(z)f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$
2. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$

10. Tema 13

Teorema 10.1 (Desarrolo en serie de Laurent). *Sea $\Gamma = A(a; r, R)$ un anillo abierto arbitrario y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces exite una única serie de Laurent no trivial $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, cuyo anillo de convergencia contiene a Ω, que verifica:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

De hecho, para cualquier $\rho \in \mathbb{R}^+$ que verifique $r < \rho < R$, se tiene;

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Proposición 10.2 (Caracterización de los puntos regulares). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. a es un punto regular de f.
2. $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$.
4. f tiene límite en a: $\lim\limits_{z\to a} f(z) = w \in \mathbb{C}$.
5. Existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$.
6. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

Proposición 10.3 (Caracterización de los polos teniendo en cuenta su orden). Dado $k \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. a es un polo de orden k de f.
2. $c_{-k} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n > k$.
3. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$.
4. Existe una función $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\psi(a) \neq 0$ tal que:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

Proposición 10.4 (Caracterización de los polos). La función f tiene un polo en a si y solo si diverge en a.

Teorema 10.5 (Teorema de Casorati). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función f tiene una singularidad esencial en el punto a*

2. *Para cada* $\delta \in \mathbb{R}^+$ *con* $D(a,\delta) \subset \Omega$*, el conjunto* $f(D(a,\delta) \setminus \{a\})$ *es denso en* $\mathbb{C}$*.*

3. *Para cada* $w \in \mathbb{C}$ *existe una sucesión* $\{z_n\}$ *de puntos de* $\Omega \setminus \{a\}$ *tal que* $\{z_n\} \to a$ *y* $\{f(z_n)\} \to w$*. También existe una sucesión* $\{u_n\}$ *de puntos de* $\Omega \setminus \{a\}$ *tal que* $\{u_n\} \to a$ *y* $\{f(u_n)\} \to \infty$*.*

11. Tema 14

Teorema 11.1 (**Teorema de los residuos**). *Sea Ω un abierto del plano, A un subconjunto de Ω tal que $A' \cap \Omega = \emptyset$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$. Sea Γ un ciclo en $\Gamma \setminus A$, nul-homólogo con respecto a Ω. Entonces, el conjunto $\{a \in A : Ind_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito y se verifica que*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} Ind_\Gamma(a) Res(f(z), a)$$

Teorema 11.2 (**Teorema de l'Hôpital para funciones holomorfas**). *Sean $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f, g \in \mathcal{H}(D(a,R))$. Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$ y que g no es idénticamente nula. Entonces existe un $\delta \in]0, R[$, tal que $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$. Además, se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:*

1. $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C}$.
2. $\dfrac{f(z)}{g(z)} \to \infty \ (z \to a)$ *y* $\dfrac{f'(z)}{g'(z)} \to \infty \ (z \to a)$.