Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Métodos Numéricos II (curso 2024/25)

Ejercicios sobre integración numérica

1 En la integración numérica se obtienen fórmulas simples, con pocos nodos, para aproximar la integral en un intervalo $[a, b]$. Estás fórmulas, al tener pocos nodos, no dan resultados satisfactorios en ocasiones, pero unas tienen un mayor grado de exactitud que otras.

(a) Explica cómo podrías obtener fórmulas de tipo interpolatorio clásico con más exactitud de n, cuando puedes elegir libremente los nodos de interpolación: $x_0, \dots, x_n$.

(b) Sea a igual a la suma de los dígitos de tu dni; sea $b = a + 3$. Calcula la fórmula con nodos a, x_1 de mayor grado de exactitud para aproximar la integral entre a y b.

(c) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Aplica la fórmula simple obtenida para aproximar, previo cambio de variable si es necesario, el valor de la integral: $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Aplica la fórmula compuesta asociada a la fórmula simple, haciendo dos subintervalos a partir del [-1,1] , para aproximar el mismo valor de la integral anterior.

(d) ¿Qué puedes decir del error de la fórmula simple obtenida, de la compuesta asociada a ella y de sus aplicaciones particulares en el apartado anterior?

2 Determina razonadamente si es posible diseñar una fórmula numérica de tipo interpolatorio en el espacio generado por $\langle 1, x, x^2, x^4 \rangle$ para aproximar

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_{-2}^{2} |x| f(x)\, dx$$

usando para ello los datos $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx$, $f(0)$ y $f'(0)$. En particular determina el peso de $f'(0)$.

3 Considera la fórmula de cuadratura simple del trapecio en la forma

$$\int_a^b f(x)\, dx = T(a, b) + R(f).$$

a) Obtén la expresión del error $R(f)$ para f suficientemente regular.

b) Obtén la fórmula compuesta asociada y la correspondiente expresión del error.

c) Llama $h = b - a$. De forma similar a la vista en clase para la integración adaptativa con la fórmula de Simpson, obtén un criterio de estimación del error

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - T(a, m) - T(m, b) \right|$$

basado en $T(a, b)$, $T(a, m)$ y $T(m, b)$, siendo $m = \frac{a+b}{2}$.

d) Estima el error cometido en la aproximación en dos subintervalos

$$\int_4^8 \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)\, dx \approx T(4, 6) + T(6, 8) = 4.0054471$$

sabiendo que $f(4) = 1.0045789$, $f(6) = 1.0004131$ y $f(8) = 1.0000419$.

4 Se pretende aproximar una integral del tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx$$

utilizando tres nodos, es decir:

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

a) Si fijamos los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, determina el valor de los parámetros para que sea una fórmula de tipo interpolatorio, así como el orden de exactitud de dicha fórmula.

b) ¿Cuáles serían los nodos si utilizamos una fórmula de Newton-Cotes abierta?

c) Determina la fórmula gaussiana correspondiente así como la expresión del error.

d) Utiliza las fórmulas de los apartados *a*) y *c*) para aproximar

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)(1-x^2)dx$$

5 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{2} f(x)x\,dx \sim a_0\, f(0) + a_1\, f(2) + a_2\, f'(0) + a_3 f'(2).$$

a) Determina los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3 para que la fórmula anterior sea de tipo interpolatorio.

b) Indica el grado de exactitud de la fórmula anterior. ¿Es el grado de exactitud superior al esperado?

c) Si se pretende utilizar una fórmula gaussiana con 2 nodos para aproximar la integral, determina cuáles serían dichos nodos y la expresión del error cometido en la aproximación.

6 Se pretende aproximar la integral

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = S_n(f) + R(f) \tag{1}$$

donde $S_n(f)$ es una fórmula de integración compuesta obtenida al hacer una partición uniforme del intervalo $[a,b]$ de la forma:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad x_i = x_{i-1} + h, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

y $R(f)$ es el error de integración numérica que tiene el siguiente desarrollo:

$$R(f) = a_1 h^3 + a_2 h^6 + \cdots + a_m h^{3m} + \ldots$$

Siguiendo el mismo argumento de la integración de Romberg, combina $S_n(f)$ con $S_{3n}(f)$ para obtener una aproximación más precisa para la integral. Aplica recursivamente el método.

7 A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considera la fórmula:

$$\int_{a}^{a+h} f(x)dx = \frac{5h}{12} f(a+h) + \frac{2h}{3} f(a) - \frac{h}{12} f(a-h) + R(f)$$

a) Demuestra que es de tipo interpolatorio y determina el grado de exactitud.

b) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

c) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula.

8 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx = \alpha_0\, f(x_0) + \alpha_1\, f(x_1) + R(f).$$

a) Determina los nodos y los coeficientes para que la fórmula anterior tenga grado de exactitud máximo. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

b) Obtén la expresión del error de dicha fórmula.

c) Utiliza la fórmula anterior para estimar el valor de

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(1-x^2)dx\,.$$

9 Considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio:

$$\int_{a}^{a+h} f(x)dx = \frac{3h}{4} f(a) + \frac{h}{4} f(a+2h) + R(f)$$

a) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

b) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula incluyendo una expresión del error.

c) Deduce un método multipaso lineal para aproximar la solución del PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(f,x) \\ x(t_0) = \mu \end{array} \right. \tag{2}$$