Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Inferencia Estadística

Resolución de ejercicios de clase

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice

1. Tarea del 17 de septiembre de 2025

Ejercicio 1.1. Obtener la función masa de probabilidad conjunta de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$ y la función de densidad conjunta de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow U(a, b)$.

- •) Consideramos $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$

  Por definición tenemos que

  $$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X = x_i] \quad , (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$$

  Aplicándolo al caso particular de una distribución binomial tenemos que para $x_i \in \{0, \ldots, k_0\}$, $i = 1, \ldots, n$

  $$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \prod_{i=1}^{n} \binom{k_0}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{(k_0 - x_i)} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} k_0 - x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \binom{k_0}{x_i}$$

- •) Consideramos $X \rightsquigarrow U(a, b)$

  Por definición tenemos ahora que

  $$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \quad , (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$$

  Conociendo la función de densidad de una distribución uniforme tenemos, para todo $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$

  $$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

  En otro caso tendremos $f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Ejercicio 1.2. Dada una muestra aleatoria formada por las observaciones $(3, 8, 5, 4, 5)$, obtener su función de distribución muestral y realizar la representación gráfica.

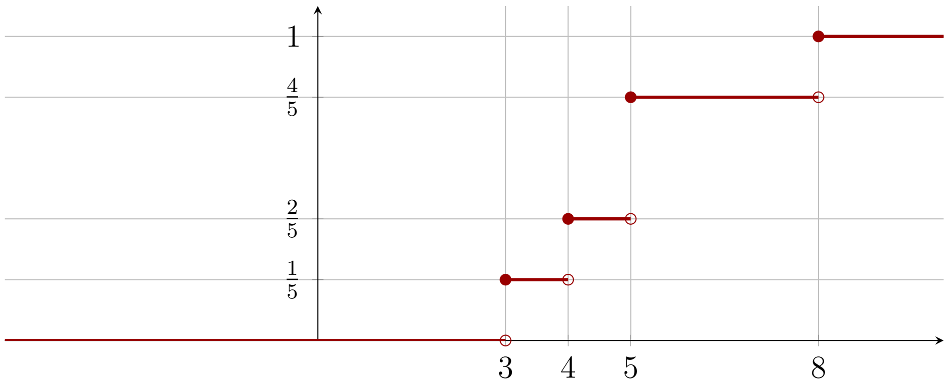
Por la definición de función de distribución muestral tenemos que

$$\begin{aligned} F^*_{(3,8,5,4,5)}(x) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} I(-\infty, x](X_i) = \\ &= \frac{1}{5}(I(-\infty, x](3) + I(-\infty, x](4) + 2I(-\infty, x](5) + I(-\infty, x](8)) \end{aligned}$$

Lo que resulta

$$F^*_{(3,8,5,4,5)}(x) = \begin{cases} 1/5 \cdot 0 = 0 & \forall x \in (-\infty, 3) \\ 1/5 \cdot 1 = 1/5 & \forall x \in [3, 4) \\ 1/5 \cdot (1+1) = 2/5 & \forall x \in [4, 5) \\ 1/5 \cdot (1+1+2) = 4/5 & \forall x \in [5, 8) \\ 1/5 \cdot (1+1+2+1) = 5/5 = 1 & \forall x \in [8, \infty) \end{cases}$$

Gráficamente resulta en:



2. Tarea del 19 de septiembre de 2025

Ejercicio 2.1. Obtener las distribuciones muestrales de $X(1)$ y $X(n)$ para $X \rightsquigarrow U(a,b)$
Podemos escribir $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$.

$$F_{X_{(n)}}(x) = P[X(n) \leqslant x] = P[X_1 < x, \dots, X_n \leqslant x] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leqslant x] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P[X \leqslant x] = (P[X \leqslant x])^n = (F_X(x))^n$$

Derivando este término tenemos

$$f_{X_{(n)}}(x) = n(F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$

Pasamos ahora a la del mínimo:
$X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, \dots, X_n\}$

$$F_{X_{(1)}}(x) = P[X(1) \leqslant x] = 1 - P[X(1) > x] = 1 - P[X_1 > x, \dots X_n > x] = 1 - \prod_{i=1}^{n} P[X_i > x] =$$

$$= n - \prod_{i=1}^{n} P[X > x] = 1 - (P[X > x])^n = 1 - (1 - P[X \leqslant x])^n = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

Donde hemos aplicado la independencia y el hecho de que estén idénticamente distribuidas.

Derivando esto tenemos

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$

Ejercicio 2.2.

$$M_{(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X})} = ?M_{\overline{X}}(t) M_{(X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X})}$$

Pero sabemos que ...

1. Ya probada
2. Ya probada
3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

   Demostración. Tipificando tenemos
   $$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(n)$$
   Podemos ahora sumando y restando el mismo término obtener
   $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2} =$$
   $$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})^2 + \sum_{i=0}^{n}(\overline{X}-\mu)^2 + 2\sum_{i=0}^{n}(X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu)}{\sigma^2} =$$
   $$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} + \frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$$
   Sabemos ahora que $\dfrac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} \rightsquigarrow \chi^2(1)$. Además, por la propiedad de independencia tenemos que la función generatriz de momentos de la suma coincide con el producto de funciones generatrices de momentos
   $$M_{A=B+C}(t) = M_B(t)M_C(t) = M_B(t)\frac{1}{(1-2t)^{1/2}}$$
   Despejando obtenemos
   $$M_B(t) = \frac{\frac{1}{(1-2t)^{n/2}}}{\frac{1}{(1-2t)^{n/2}}} = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n-1}{2}}} \quad t < \frac{1}{2}$$
   $\square$

4. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t(n-1)$

   Demostración. Sabemos que $\overline{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ por lo que tipificando tenemos $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \rightsquigarrow N(0,1)$ y además sabemos que $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$. Como son independientes podemos aplicar el lema de Fisher
   $$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t(n-1)$$
   $\square$