

# Métodos Numéricos I

## Tema 1: Introducción a los problemas del Análisis Numérico

Lidia Fernández

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Granada

Curso 2022/2023

# Contenidos

## 1 Sobre el concepto de Análisis Numérico

- El cálculo de  $\sqrt{2}$
- El algoritmo de Horner

## 2 Errores

## 3 Representación en punto flotante

- Representación binaria
  - Sistemas posicionales de numeración
  - Representación de un número en punto flotante
- Implicaciones de la precisión finita

## 4 Aritmética finita

## 5 Propagación del error

## 6 El fallo de los misiles Patriot: Dharan, 25-02-91

# Sobre el concepto de Análisis Numérico

## El Análisis Numérico

es la ciencia que trata del diseño de métodos para la obtención, de una manera eficiente, de soluciones numéricas aproximadas de problemas formulados matemáticamente.

## Algoritmo

Es una secuencia finita de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación a la solución del problema matemático con una tolerancia o precisión predeterminada. Normalmente se diseña para implementarlo en una máquina

# Ejemplo: El cálculo de $\sqrt{2}$

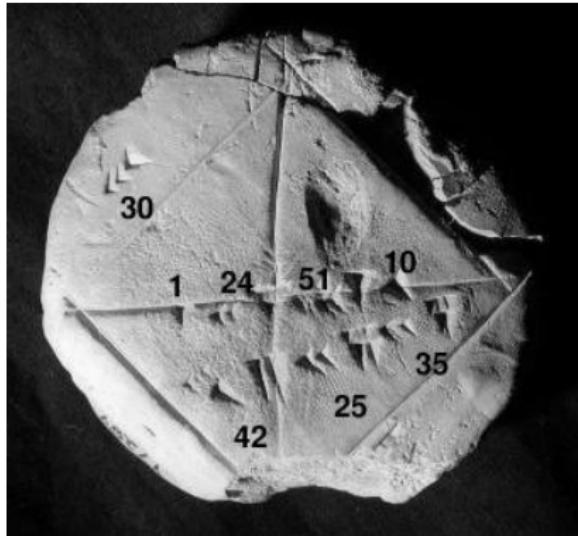
El método de Herón de Alejandría (siglo I a.C.).

$$x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{2}{x_0} \right) = 1.5,$$

Repetimos el proceso

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right),$$

$n$	$x_n$
0	2.0
1	1.5
2	1.41666666666666
3	1.41421568627451
4	1.41421356237469
5	1.414213562373095



Wikipedia

La tabla babilónica (2000-1650 a. C.) proporciona una aproximación de  $\sqrt{2}$  en cuatro dígitos sexagesimales, que es similar a seis cifras decimales:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.41421296$$

# El algoritmo de Horner

Polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde

- $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,
- $a_n \neq 0$ , llamado coeficiente líder o conductor,
- $n$  es el grado del polinomio,
- $a_0$  es el término independiente.

¿Cuántas operaciones hay que realizar para evaluar un polinomio de grado  $n$  en un punto  $c$ ?

Por ejemplo, calcular  $p(-2)$ , donde

$$p(x) = 2x^5 - 7x^3 + 2x^2 - x + 1.$$

# El algoritmo de Horner

El algoritmo de Horner (o de la división sintética) se utiliza para **evaluar un polinomio** en un número real  $c$ , minimizando el número de operaciones para minimizar los errores. Se trata de sacar factor común y disponer los cálculos de forma adecuada.

$$\begin{aligned} p(c) &= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = \\ &= (a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \cdots + a_2 c + a_1) c + a_0 = \\ &= ((a_n c^{n-2} + a_{n-1} c^{n-3} + \cdots + a_2) c + a_1) c + a_0 = \\ &= \cdots \\ &= (\cdots (a_n c + a_{n-1}) c + a_{n-2}) c + \cdots + a_2) c + a_1) c + a_0 \end{aligned}$$

# El algoritmo de Horner

$$b_n = a_n,$$

$$b_{n-1} = b_n c + a_{n-1},$$

$$b_{n-2} = b_{n-1} c + a_{n-2},$$

...

$$b_0 = b_1 c + a_0 = p(c).$$

## Algoritmo de Horner

$$b_n = a_n,$$

$$b_i = b_{i+1} c + a_i, \quad i = n-1, \dots, 0,$$

$$p(c) = b_0.$$

**Ejemplo** Calcular  $p(-2)$ , donde

$$p(x) = 2x^5 - 7x^3 + 2x^2 - x + 1.$$

Aquí,  $a_5 = 2$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_3 = -7$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_0 = 1$ .

$$b_5 = a_5 = 2,$$

$$b_4 = b_5c + a_4 = 2 \times (-2) + 0 = -4,$$

$$b_3 = b_4c + a_3 = (-4) \times (-2) - 7 = 1,$$

$$b_2 = b_3c + a_2 = 1 \times (-2) + 2 = 0,$$

$$b_1 = b_2c + a_1 = 0 \times (-2) - 1 = -1,$$

$$b_0 = b_1c + a_0 = (-1) \times (-2) + 1 = 3 = p(-2).$$

## Otra disposición de los cálculos

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ c & & cb_n & cb_{n-1} & \cdots & cb_3 & cb_2 & cb_1 \\ \hline b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & = p(c) \end{array}$$

Así, el algoritmo de Horner no es más que la conocida **regla de Ruffini** para la evaluación de un polinomio.

Para evaluar un polinomio de grado  $n$  se realizan  $n$  sumas y  $(n^2 + n)/2$  multiplicaciones (viendo las potencias como productos repetidos). Con el algoritmo de Horner se hacen  $n$  sumas y  $n$  multiplicaciones.

# Algoritmos

- Un algoritmo recoge las instrucciones que permiten resolver un problema. Los algoritmos se suelen ejecutar en un ordenador.
- Al desarrollar y analizar un algoritmo hemos de tener en cuenta los siguientes elementos: complejidad, precisión, estabilidad y efectos de la representación finita de los números reales.

## Complejidad de un algoritmo

Medida del tiempo de ejecución y que suele expresarse en términos de un parámetro asociado al problema.

## Estabilidad de un algoritmo

Medida de la sensibilidad del algoritmo a la variación de los datos

# Error absoluto y relativo

## Definición

Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , se define el error absoluto mediante la expresión

$$|p - p^*|,$$

y el error relativo se define por

$$\frac{|p - p^*|}{|p|},$$

siempre y cuando  $p \neq 0$ .

## Ejemplos

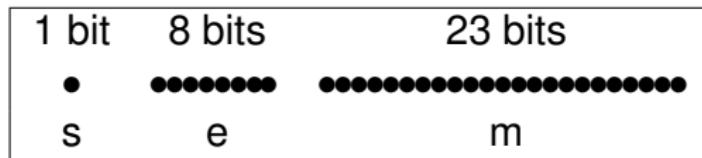
- ① Si  $p = 0.3000 \times 10^1$  y  $p^* = 0.3100 \times 10^1$ , el error absoluto es 0.1 y el error relativo es  $0.333\tilde{3} \times 10^{-1}$ .
- ② Si  $p = 0.3000 \times 10^{-3}$  y  $p^* = 0.3100 \times 10^{-3}$ , el error absoluto es  $0.1 \times 10^{-4}$  y el error relativo es  $0.333\tilde{3} \times 10^{-1}$ .
- ③ Si  $p = 0.3000 \times 10^4$  y  $p^* = 0.3100 \times 10^4$ , el error absoluto es  $0.1 \times 10^3$  y el error relativo es  $0.333\tilde{3} \times 10^{-1}$ .

# Errores en los cálculos numéricos

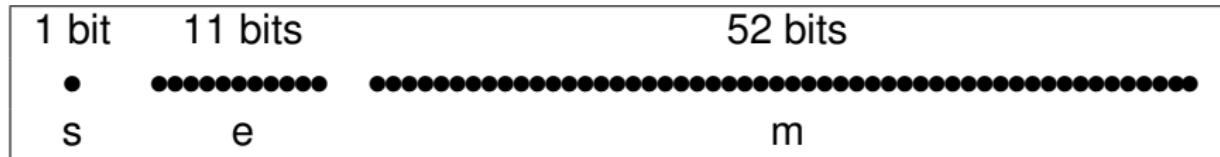
- Cuando se usa un ordenador para realizar cálculos numéricos, el error es inevitable.
- Este error se origina porque la aritmética realizada en una máquina utiliza números con sólo una cantidad finita de dígitos, con el resultado de que los cálculos se realizan con representaciones aproximadas de los números reales.

# Representación binaria

Estándar ISO/IEC/IEEE60559:2011, representación binaria, N = 32 bits (binary digits), precisión simple



Estándar ISO/IEC/IEEE60559:2011, representación binaria, N = 64 bits, precisión doble



# Sistemas posicionales de numeración

- Sea  $b \in \mathbb{N}$  la base de un sistema de numeración (binaria, octal, decimal, hexadecimal, ...)
- Cualquier número real puede escribirse en la forma

$$x = (-1)^s \sum_{n=-\infty}^N x_n b^n$$

donde  $s \in \{0, 1\}$  representa el signo,  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $x_k$  es la cifra en la posición  $k$  tal que  $0 \leq x_k < b$ ,  $\forall k = -\infty, \dots, N$ .

- La representación posicional del número real  $x$  es:

$$x_b := (-1)^s \cdot (x_N \dots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots)_b$$

## Ejemplo

- $x = (101.11)_{10}$ , es la representación posicional de  
 $x = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$
- $y = (101.11)_2$ , es la representación posicional de  
 $y = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$

# Representación en punto flotante

- En un ordenador, fijada una base  $b$ , para representar los números reales se considera sólo un subconjunto finito de números racionales.
- Sea  $t \in \mathbb{N}$ , el número máximo de dígitos  $d_n$  tales que  $0 \leq d_n \leq b - 1$
- Sea  $e \in \mathbb{Z}$  el exponente, tal que  $L \leq e \leq U$  donde  $L, U \in \mathbb{Z}$ ,  $L \leq U$  son, respectivamente, el valor mínimo y máximo de los exponentes.
- Sea  $s \in \{0, 1\}$
- La representación de un número en punto flotante será

$$(-1)^s b^e \cdot \sum_{n=1}^t d_n b^{-n} \sim (-1)^s \cdot (0.d_1 \dots d_t) \cdot b^e$$

## Ejemplo

Sea  $x = -3.1415$  y la base  $b = 10$ , su representación con punto flotante con  $t = 6$  y  $e = 2$  será

$$\begin{aligned}x &= (-1) \cdot 10^2 \cdot (0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} \\&\quad + 1 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6}) \\&= (-1)(0.031415) \cdot 10^2\end{aligned}$$

Con esta definición un número puede tener varias representaciones.

## Ejemplo

Tomemos  $b = 2$ ,  $t = 3$ ,  $L = 1$ ,  $U = 3$ . Entonces:

$$1 = (0.100) \cdot 2^1 = (0.010) \cdot 2^2 = (0.001) \cdot 2^3$$

## Representación normalizada en punto flotante

Para evitar este problema, usaremos la representación normalizada que se obtiene al hacer que la primera cifra de la mantisa sea no nula, es decir  $d_1 \neq 0$ .

Cualquier número real positivo  $x$  puede ser normalizado para que adquiera la forma

$$x = (0.d_1d_2 \dots d_t d_{t+1} d_{t+2} \dots) \times b^e.$$

Si suponemos que  $x$  está dentro del rango numérico de la máquina, esto es  $L \leq e \leq U$ , la **representación en punto flotante** se obtiene considerando la mantisa de  $x$  con  $t$  dígitos. Puede realizarse de dos formas distintas

- Mediante **truncatura**
- Mediante **redondeo**

Fijado un sistema de punto flotante concreto y  $x \in \mathbb{R}$

$$x = (-1)^s(0.d_1d_2 \dots d_t d_{t+1} \dots) b^e$$

- La **representación por truncatura** de  $x$  es

$$tr(x) := (-1)^s \cdot (0.d_1 \dots d_t) \cdot b^e$$

- La **representación por redondeo** de  $x$  es

$$rd(x) := (-1)^s \cdot (0.d_1 \dots d_{t-1} r_t) \cdot b^e$$

donde

$$r_t := \begin{cases} d_t & \text{si } d_{t+1} < \frac{b}{2} \\ d_t + 1 & \text{si } d_{t+1} \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

## Ejemplo

El número  $\pi$  tiene un desarrollo decimal infinito

$$\pi = 3.14159265\dots = (0.314159265\dots)10^1.$$

Supongamos que  $t = 5$  y que se emplea el truncamiento. Entonces la forma de punto flotante de  $\pi$  es

$$tr(\pi) := (0.31415)10^1$$

Como el sexto dígito del desarrollo decimal de  $\pi$  es un nueve, la forma de punto flotante de  $\pi$  usando redondeo a cinco dígitos es

$$rd(\pi) := (0.31416)10^1$$

## Definición

El error que resulta de reemplazar un número por su forma de punto flotante se denomina **error de redondeo** (independientemente de que se use el método de redondeo o el de truncamiento).

# Implicaciones de la precisión finita

- ① Los números de máquina son discretos y finitos
- ② Los números de máquina están acotados
  - ▶ Si  $|x| < b^{L-1}$ : *desbordamiento inferior* (**underflow**),
  - ▶ si  $|x| > b^U(1 - b^{-t})$ : *desbordamiento superior* (**overflow**).
- ③ Los números de máquina no están uniformemente distribuidos

# Aritmética finita

En un sistema de cálculo bien diseñado se debería verificar

$$x \oplus y = rd(rd(x) + rd(y)),$$

$$x \ominus y = rd(rd(x) - rd(y)),$$

$$x \otimes y = rd(rd(x) \times rd(y)),$$

$$x \oslash y = rd(rd(x)/rd(y)).$$

Las propiedades habituales (asociatividad, elemento neutro) para las operaciones suma, diferencia, multiplicación y división no se cumplen en general.

# Ejemplo

Utilizando

$$rd(x) = (0.341) \cdot 10^4, \quad rd(y) = (0.487) \cdot 10^1, \quad rd(z) = (0.492) \cdot 10^1,$$

en un ordenador de tres dígitos con redondeo, probar que no se cumplen las propiedades asociativa y elemento neutro de la suma.  
Para el elemento neutro de la suma

$$x \oplus y = rd(3410 + 4.87) = rd(3414.87) = (0.341) \cdot 10^4 = \textcolor{red}{rd(x)!!!}$$

Para la propiedad asociativa se tiene:

$$x \oplus y = rd(3410 + 4.87) = rd(3414.87) = (0.341) \cdot 10^4$$

$$(x \oplus y) \oplus z = rd(3410 + 4.92) = rd(3414.92) = (0.341) \cdot 10^4$$

Por otro lado,

$$y \oplus z = rd(4.87 + 4.92) = rd(9.79) = (0.979) \cdot 10^1$$

$$x \oplus (y \oplus z) = rd(3410 + 9.79) = rd(3419.79) = (0.342) \cdot 10^4$$

# Control del error de cancelación

Las raíces de una ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ , cuando  $a \neq 0$ , vienen dadas por las expresiones

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Consideremos

$$x^2 + 62.10x + 1 = 0,$$

con raíces  $x_1 = -0.01610723$  y  $x_2 = 62.08390$ .

Usando aritmética de redondeo a cuatro dígitos

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2 - 4ac} &= \sqrt{(62.10)^2 - 4.000} \\ &= \sqrt{3856. - 4.000} \\ &= \sqrt{3852.} = 62.06.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}rd(x_1) &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-62.10 + 62.06}{2.000} \\&= \frac{-0.04000}{2.000} = -0.02000,\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}rd(x_2) &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} \\&= \frac{-124.2}{2.000} = -62.10.\end{aligned}$$

Racionalizando el numerador:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \\&= \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\end{aligned}$$

Se obtiene el resultado exacto:

$$rd(x_1) = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610$$

## Propagación del error

Aunque una única operación genere un error pequeño una sucesión finita de operaciones es susceptible de producir la llamada propagación del error, que puede ser considerable.

Dada la sucesión

$$x_n := \int_0^1 x^n e^x dx,$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^1 x^n e^x dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$$

Por lo que  $x_n = e - nx_{n-1}$ .

Si  $x \in [0, 1]$ , entonces  $x^n e^x \leq x^{n-1} e^x \Rightarrow \{x_n\}_{n \geq 0}$  es decreciente y positiva, luego converge a un número real  $\ell \geq 0$ .

Ahora bien

$$x_{n-1} = \frac{e - x_n}{n} \Rightarrow \ell = 0.$$

Sin embargo, redondeando en el sistema de punto flotante  $b = 10$  y  $t = 7$  obtenemos

$$x_0 = 2.7182818 \cdot 10^0$$

$$x_1 = 1.0 \cdot 10^0$$

$$x_2 = 7.182818 \cdot 10^{-1}$$

$$x_3 = 5.634364 \cdot 10^{-1}$$

$$x_4 = 4.645362 \cdot 10^{-1}$$

$$x_5 = 3.956006 \cdot 10^{-1}$$

⋮

$$x_{15} = 1.103763 \cdot 10^4$$

$$x_{16} = -1.765994 \cdot 10^5$$

$$x_{17} = 3.002193 \cdot 10^6$$

$$x_{18} = -5.403947 \cdot 10^7$$

# El fallo de los misiles Patriot: Dharan, 25-02-91



El 25 de febrero de 1991, durante la Guerra del Golfo, una batería de misiles Patriot estadounidenses en Dharan (Arabia Saudita) no logró interceptar un misil Scud iraquí. Murieron 28 soldados estadounidenses.

Aquí

Veamos de donde proviene el error.  $1/10$  en binario no tiene una representación finita

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \dots$$

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 0.0001100110011001100110011001100\dots$$

Al truncar a 24 bits el error es

$$0.00000000000000000000000011001100_2 \dots \approx 0.000000095_{10}$$

En 100 horas el error será

$$0.000000095 \times 100 \times 60 \times 60 \times 10 = 0.34$$

Y el espacio recorrido por un misil a 1702 m/s (mach 5) será 578.68 m.