Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Análisis Funcional

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Repaso

Definición 0.1 (Espacio normado)**.** E un espacio vectorial y $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ una norma que verifica:

1. $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in E$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \forall x, y \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$

Podemos definir además una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$ llamada distancia.

Si E es completo (toda sucesión de cauchy es convergente), entonces $(E, \|.\|)$ es un espacio de Banach.

Definición 0.2 (Espacio prehilbertiano)**.** Supongamos que H es un espacio vectorial, un producto escalar es una función $(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que sea bilineal, simétrica, positiva y definida positiva, es decir:

1. $(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x, z)+\beta(y, z)$, $(z, \alpha x+\beta y) = \alpha(z, x)+\beta(z, y)$ donde $x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in H$
3. $(x, x) \geqslant 0 \forall x \in H$
4. $(x, x) > 0 \forall x \in H \setminus \{0\}$

Las dos últimas propiedades se pueden resumir en que $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ que es una norma.

Si $\|.\|$ es completa, diremos que $(H, (.,.))$ es un espacio de Hilbert

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}, |.|)$ es de Banach.

2. $(\mathbb{R}^N, |.|)$, donde $|x| = |(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$. Además es de Hilbert ya que $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ es un producto escalar.

3. dado $A \subset \mathbb{R}^N$ tomamos $\mathcal{L}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R}$ tal que f es continua y acotada en $A\}$ (la b viene de bounded en inglés). Podemos definir una norma en este espacio como

$$\|f\|_{\mathcal{L}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

4. Supongamos que $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en K denotado por $\mathcal{L}(K)$ y el espacio $(K, (.,.))$, donde $(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$ es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos $\|f\| = \left(\int_K f(x)^2 dx\right)^{1/2}$

Ejemplo (El espacio del punto 4 No es de Hilbert)**.** $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Tenemos $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ donde f_n^2 viene dada por la siguiente gráfica [insertar gráfica]:

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x)dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}$$
$$\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$

y vemos que $\{f_n(x)\} \to 0$ para todo $x \in (0, 1]$ mientras que $\{f_n(0) = 1\} \to 1$.

Con esto tenemos que la sucesión $\{f_n\} \to 0$ en $(\mathcal{L}([0, 1]), (.,.))$ (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

Consideramos $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, entonces podemos definir $L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible $: \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty\}$. $L^2(\Omega)$ con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fisher)

Ejemplo. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Consideramos $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles $: \int_\Omega |f|^p dx < \infty\}$. Entonces tenemos que con $\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p}$ es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hilder, Minteowski.

Definimos el conjugado de p.
Tenemos $p' = \frac{p}{p-1}$ para $1 < p < \infty$ y ∞ para $p = 1$. Con esto tenemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La desigualdad de Holder dice que si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además $\int |f(x)g(x)|dx \leqslant (\int |f|^p dx)^{1/p} dx (\int |f|^{p'} dx)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ con $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p} (x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.

2. $\mathbb{R}^N$, $\|.\|_\infty$ con $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \ldots, N\}$

3. Sea $p = \infty$. Tenemos $L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$. A este supremo lo llamaremos supremo esencial que se define de la siguiente forma:

   $\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \ \ a.e.\ x \in \Omega\}$ a.e. significa almost everywhere (casi por doquier). En algunos libros se denota por $ess \sup$.

   Tendremos que reescribir lo anterior como $L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup_\Omega |f| < \infty\}$.

   Entonces el espacio $(L^\infty, \|x\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$ es un espacio de Banach.

   La desigualdad de Holder con $p = \infty$, $p' = 1$ nos dice que $\lambda \in L^\infty$, $g \in L^1(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$ es una norma en H.

Ejemplo. Consideramos $1 \leqslant p < \infty$. Consideramos $\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty\}$. Si definimos $\|x\|_{\mathcal{L}^p} = (\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p)^{1/p}$, entonces $(\mathcal{L}^p, \|.\|_p)$ es un espacio de Banach.

Esto se hace tomando $x \in \mathcal{L}^p$, $y \in \mathcal{L}^{p'}$ y tenemos que $xy \in \mathcal{L}^1$ y que $\|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant \|x\|_{\mathcal{L}^p}\|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$ de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para $p = 2$ tenemos que es un espacio de Hilbert.

Para $p = \infty$ podemos definir $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$ y con $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Banach.

Ejemplo. Tomamos $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$ y es un subespacio del anterior.
Podemos tomar otro subespacio de este $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$