Álgebra I. Cuestiones-IV

1. En el anillo $\mathbb{Z}_{10}$, la afirmación: *“$3^{4k+3} = -3$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$”* es

   - ☐ siempre es falsa.
   - ■ siempre cierta.
   - ☐ a veces verdad y a veces cierta, depende de k.

   Justifica brevemente la respuesta: $3^{4k+3} = (3^4)^k \cdot 3^3 = (9 \cdot 9)^k \cdot 9 \cdot 3 = 1^k \cdot 7 = 7 = -3$.

2. En el anillo $\mathbb{Z}_n[x]$, la afirmación; *‘La suma reiterada n veces de cualquier polinomio es 0,”* es

   - ☐ verdad o falsa, depende de de n.
   - ☐ siempre falsa.
   - ■ siempre verdad.

   Justifica brevemente la respuesta: *Sea $R_n : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_n[x]$ el homomorfismo de reducción módulo n. Para cualquier $f \in \mathbb{Z}_n[x]$, $nf = nR_n(f) = R_n(nf) = R_n(n)R_n(f) = 0 \cdot f = 0$.*

3. Un subanillo A de un anillo B se dice propio si $A \subsetneq B$. Seleccione el enunciado correcto:

   - ■ El anillo $\mathbb{Z}$ no tiene subanillos propios.
   - ☐ El conjunto $A = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo propio de $\mathbb{Z}$.
   - ☐ El cuerpo $\mathbb{Q}$ no tiene subanillos propios.

   Justifica brevemente la respuesta: *Si A es un subanillo de $\mathbb{Z}$ entonces $1 \in A$ con lo que para todo $n \geq 0$, $1 + \overset{n\ veces}{\cdots} + 1 = n \in A$ y, como A contiene a sus opuestos, entonces $\mathbb{Z} \subseteq A$. Consecuentemente $A = \mathbb{Z}$.*

4. Homomorfismos $\phi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$,

   - ☐ hay exactamente uno.
   - ☐ hay al menos dos.
   - ■ no hay ninguno.

   Justifica brevemente la respuesta: *Si $\phi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ fuese un homomorfismo, tendríamos que $\phi(1+1) = \phi(1)+\phi(1) = 1+1 = 2$. Pero, en $\mathbb{Z}_2$, $1+1 = 0$ y, por tanto, $\phi(1+1) = \phi(0) = 0$. Así que sería $0 = 2$ en $\mathbb{Z}$.*

5. Sea A un anillo conmutativo, la afirmación *“Para cualesquiera indeterminadas x e y, los anillos de polinomios $A[x]$ y $A[y]$ son isomorfos.”* es

   - ☐ verdad o falsa, depende de A.
   - ■ siempre verdad.
   - ☐ siempre falsa.

   Justifica brevemente la respuesta: *El automorfismo identidad $id_A : A \cong A$ extiende a un único homomorfismo $\Phi : A[x] \to A[y]$ tal que $\phi(x) = y$. Explícitamente, $\Phi(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$. Claramente Φ es biyectivo.*