Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales I

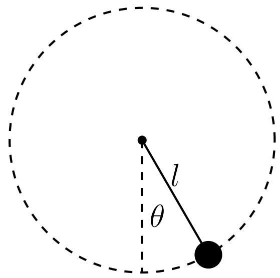
Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

0. Introducción

La mayoría de ecuaciones diferenciales han sido planteadas por campos como la física. Veamos el caso de un péndulo:



Las condiciones que definen el péndulo son $g > 0$, ya que se encuentra en la Tierra, l que es la longitud del péndulo y θ que es el ángulo con respecto a la vertical.
La ecuación que define el ángulo a lo largo del tiempo es la siguiente:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\operatorname{sen}(\theta(t)) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden (ya que aparece una segunda derivada). En ella tenemos que t es la variable independiente y θ es la incógnita o variable dependiente (que es una función).
Si estudiamos las soluciones de esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
&\theta(t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \text{ es una solución (trivialmente)}\\
&\theta(t) = \pi,\ t \in \mathbb{R} \text{ es también solución}\\
&\theta(t) = 2n\pi,\ \theta(t) = n\pi,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \text{ son infinitas soluciones}
\end{aligned}$$

De esta forma podemos ver que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones.

Definición 0.1. Podemos definir una **ecuación diferencial de primer orden** como la relación funcional dada por

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

donde t es la **variable independiente** y $x = x(t)$ es la **variable independiente** o **incógnita**.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial dada por

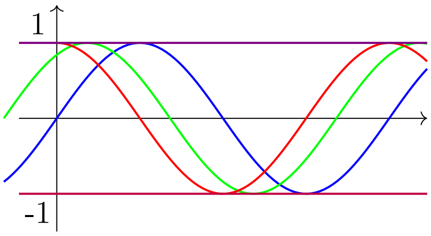
$$x(t) + x'(t)^2 = 1$$

Podemos definir[1] $\Phi = \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1$, o equivalentemente[2]

$$\begin{aligned}
\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\
(t, x, y) &\mapsto \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1
\end{aligned}$$

[1] Notación física
[2] Notación moderna (matemática)

Estudiemos las soluciones a esta ecuación:



- $x(t) = \text{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = -1$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \text{sen}(t + c)$, $t \in \mathbb{R}$ $\forall c \in \mathbb{R}$ (familia uniparamétrica).

Podemos construir otra solución uniendo las ya dadas como por ejemplo

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable y por tanto solución a la ecuación.

Típicamente estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden en **forma normal**, es decir, ecuaciones que se pueden escribir como

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Esto es una subfamilia de las ecuaciones previamente descritas.

Ejemplo.

a) $x'(t) = 7x(t)$

$$\Phi(t, x, y) = y - 7x$$
$$f(t, x) = 7x$$

Algunas de las soluciones son $x(t) = 0$ (trivial), $x(t) = e^{7t}$ y $x(t) = c \cdot e^{7t}$, $\ c, t \in \mathbb{R}$

b) $x`(t) = 7t$

$$\Phi(t, x, y) = y - 7t$$
$$f(t, x) = 7t$$

Algunas de las soluciones son de la forma $x(t) = \frac{7t^2}{2} + c$, $c, t \in \mathbb{R}$ (realmente es una integral).

Ejemplo.

a) $x`(t) = \text{sen}(t)$. Sus soluciones son de la forma $x(t) = \cos(t) + c$, $c, t \in \mathbb{R}$

b) $x`(t) = \text{sen}(x(t))$. No es tan simple calcular las soluciones (aunque $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ es solución).

Definición 0.2. Una función diferencial va a venir dada por un

$$\begin{aligned} \Phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto \Phi(t, x, y) \text{ (continua)} \end{aligned}$$

donde el conjunto D es un abierto de $\mathbb{R}^3$ conexo llamado **dominio**.
Una **solución** de una ecuación diferencial, $\Phi(t, x(t), x`(t)) = 0$ será una función de la forma

$$\begin{aligned} x : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

donde I es un intervalo abierto y x tiene las siguientes propiedades:

(i) $x(t)$ es derivable en I.

(ii) $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$

(iii) $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

Ejemplo.

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}, \qquad\qquad x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

¿Es $t(x)$ una solución de la ecuación dada?

$$\Phi(t, x, y) = y - \frac{1}{x} \qquad\qquad D = \mathbb{R}\times]0, \infty[\times\mathbb{R} \qquad\qquad I =]19, \infty[$$

Tomamos así D porque hay que quitar la discontinuidad que se produce en el plano $\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y además tiene que ser conexo ($\mathbb{R}^3$ sin un plano no es conexo).
I es el mayor intervalo abierto de $\mathbb{R}$ en el que $x(t)$ es derivable.
Además, se verifica que $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$ y

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t - 38}} = \frac{1}{x(t)}$$

Por lo que se verifica que es solución

A partir de ahora la notación que utilizaremos para expresar ecuaciones diferenciales será

$$\Phi(t, x, x') = 0 \text{ en lugar de } \Phi(x, x(t), x'(t))$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} x' &= 3x \qquad (\iff x'(t) = 3x(t)) \\ x(t) &= c \cdot e^{3t} \end{aligned}$$

En general, tenemos que

$$x = \lambda x \quad \text{tiene por solución} \quad x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

$$x' = \lambda t \quad \text{tiene por solución} \quad x(t) = \frac{\lambda t^2}{2} + c$$

Proposición 0.1. Dada $x(t)$ solución de $x' = \lambda x$ definida en un intervalo abierto I, existe $c \in \mathbb{R}$ de forma que $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}, \ \forall t \in I$.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución. Consideramos la aplicación $e^{-\lambda t} \cdot x(t)$ que es derivable por ser producto de funciones derivables y tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}x(t)\right) = -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t}x`(t) \overset{(*)}{=} -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda x(t) = 0$$

donde en $(*)$ he aplicado que $x' = \lambda x$ por ser solución. Al anularse la derivada de una función de clase $C^1(I)$, necesariamente tenemos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-\lambda t}x(t) = c$ $\forall t \in I$.
Con esta expresión, dado que la exponencial no se anula para ningún valor del dominio podemos dividir entre ella y obtenemos

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

□