Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Probabilidad

Resumen

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

1. Tema 4

- **Esperanza condicionada:**

$$E[X|Y](y) := E[X|Y=y]$$

  - Caso discreto:

$$E[X|Y=y] = \sum_{x\in E_x} x \cdot P[X=x|Y=y] = \sum_{x\in E_x} x \cdot \frac{P[X=x,Y=y]}{P[Y=y]}$$

  - Caso continuo:

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

  - Propiedades:
    - $E[c|Y] = c, \; c \in \mathbb{R}$
    - $E[aX_1 + bX_2|Y] = aE[X_1|Y] + bE[X_2|Y]$
    - Si X, Y independientes, entonces $E[g(X)|Y] = E[g(X)]$ con g medible.
    - $E[E[g(X)|Y]] = E[g(X)]$ con g medible.

- **Varianza Condicionada:**

$$Var[X|Y] = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$$
$$Var[X|Y] = Var[E[X|Y]] + E[Var[X|Y]]$$

- **Error cuadrático medio:**

$$\begin{aligned} E.C.M(\varphi) &= E[(Y-\varphi(X))^2] = \\ E.C.M(E[Y|X]) &= E[(y - E[Y|X])^2] \\ E.C.M(E[Y|X]) &= E[Var[Y|X]] = E[E[Y^2|X] - E[Y|X]^2] = \\ &= E[Y^2] - E[E[Y|X]^2] \end{aligned}$$

- **Curva de Regresión Mínimo Cuadrática de Y sobre X:**

$$\hat{Y}(x) = E[Y|X=x] \;\; \forall x \in E_x$$

- **Curva de Regresión Mínimo Cuadrática de X sobre Y:**

$$\hat{X}(y) = E[X|Y=y] \;\; \forall y \in E_y$$

- **Razón de correlación**

$$\eta^2_{Y/X} = \frac{Var[E[Y|X]]}{Var[Y]}$$

$$\eta^2_{X/Y} = \frac{Var[E[X|Y]]}{Var[X]}$$

•) **Rectas de Regresión:** El cálculo consistirá en minimizar $E[(Y - aX - b)^2]$. Con este proceso llegamos a

$$a = \frac{Cov(X,Y)}{Var[X]} \qquad\qquad b = E[Y] - \frac{Cov(X,Y)}{Var[Y]}E[X]$$

Por lo que la recta será

$$\hat{Y} = E[Y] + \frac{Cov(X,Y)}{Var[X]}(X - E[X])$$

Su error cuadrático medio será

$$E.C.M(\hat{Y}) = Var[Y] - \frac{Cov^2(X,Y)}{Var[X]}$$

•) **Coeficiente de determinación lineal:**

$$\rho^2_{X,Y} = \frac{Cov^2(X,Y)}{Var[X] \cdot Var[Y]}$$

•) **Coeficiente de correlación lineal de Pearson:**

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X] \cdot Var[Y]}}$$

2. Tema 5

2.1. Distribución multinomial

•) **Función masa de probabilidad:**

$$P[X = (x_1, \dots, x_k)] = \frac{n!}{\left(\prod\limits_{i=1}^{k} x_i!\right) \cdot \left(n - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i\right)!} \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i\right)^{n - \sum\limits_{i=1}^{k} x_i}$$

•) **Función generatriz de momentos:**

$$M_X(t_1, \dots, t_k) = \left[\left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{t_i}\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i\right)\right]^n$$

•) **Esperanza:**

$$E[X] = n(p_1, \dots, p_k)$$

•) **Covarianza:**

$$Cov(X_i, X_j) = -n \cdot p_i p_j \qquad\qquad \forall i,j\{1,\dots,k\}, i \neq j$$

2.2. Distribución Normal Bidimensional