



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026



# Índice general

<b>1. Espacios Recubridores</b>	<b>5</b>
1.1. Levantamiento de aplicaciones . . . . .	5



# 1. Espacios Recubridores

*Observación.* A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

## 1.1. Levantamiento de aplicaciones

*Observación.* Vamos a tener en cuenta que si  $X$  es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

*Demostración.* Si  $O$  es abierto y  $A$  es una componente arcoconexa de  $O$ , entonces dado  $a \in A$ , como  $X$  es localmente arcoconexo tendremos que existe un  $U$  entorno arcoconexo de  $a$  tal que  $U \subseteq O$ . Como  $A$  es el mayor arcoconexo en  $O$  que contiene al punto  $a$  tendremos que  $U \subseteq A$ , luego  $A$  es abierto.  $\square$

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$  y un punto  $b_0 \in B$ . Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto  $O$  que contiene a  $b_0$ . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de  $O$  que contiene a  $b_0$  podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

**Lema 1.1** (Unicidad del levantamiento). Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $f_1, f_2 : X \rightarrow R$  continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un  $x_0 \in X$  tal que  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ , entonces  $f_1 = f_2$ .

*Demostración.* Para la demostración solo se necesita que  $X$  sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow^{f_1, f_2} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f=p \circ f_1 = p \circ f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como  $X$  es conexo y tenemos que  $Y \neq \emptyset$ , ya que por hipótesis  $x_0 \in Y$ , si probamos que  $Y$  es abierto y cerrado tendremos que  $Y = X$ , es decir,  $f_1 = f_2$ .

Veamos que  $Y$  es abierto. Para ello tomamos  $y \in Y$ , es decir, un punto  $y$  tal que  $f_1(y) = f_2(y)$ . Elegimos el punto  $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ . Sea  $O$  abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a  $b$ , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los  $A_i$  son abiertos disjuntos de  $R$  y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto  $A_{i_0}$  donde se encuentra  $f_1(y) = f_2(y)$ . Elegimos  $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$ . Veamos que  $\forall x \in V$  se tiene que  $f_1(x) = f_2(x)$ . Como  $x \in V$  tendremos que  $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$  por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \xrightarrow{(*)} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en  $(*)$  hemos usado que  $p|_{A_i}$  es inyectiva. Tenemos finalmente que  $Y$  es abierto.

Veamos ahora que  $Y$  es cerrado. Para ello demostramos que  $X \setminus Y$  es abierto. Tomamos  $y \in X \setminus Y$  y vemos que existe un  $V$  abierto que contiene al punto  $y$  y tal que  $V \subseteq X \setminus Y$ . Sea  $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$  y de nuevo tomamos  $O$  regularmente recubierto que contiene a  $b$ . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los  $A_i$  son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos  $f_1(y) \in A_{i_1}$  y  $f_2(y) \in A_{i_2}$  y además se verificará que  $A_{i_1} \neq A_{i_2}$  ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora  $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$ , donde se tiene que  $y \in V$ . Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada  $x \in V$  se tendrá que  $f_1(x) \neq f_2(x)$  ya que  $f_1(x) \in A_{i_1}$  y  $f_2(x) \in A_{i_2}$ . Esto nos dice que  $V \subseteq X \setminus Y$ , luego  $Y$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 1.2** (Teorema de monodromía). Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ . El homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  es inyectivo. En particular,  $\pi_1(R, r_0)$  es isomorfo a  $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p_*$  es inyectiva si y solo si  $\ker(p_*)$  es trivial. Tomamos  $\alpha$  lazo basado en  $r_0$  tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además  $[p \circ \alpha] = p_*([\alpha])$  tenemos que existe una homotopía por lazos de  $\varepsilon_{b_0}$  en  $p \circ \alpha$ . Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en  $R$  de  $\hat{\varepsilon}_{b_0}$  y  $\widehat{p \circ \alpha}$  (empezando en  $r_0$ ). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

*Observación.* Recordemos que dados dos subgrupos  $H_1, H_2$  de un grupo  $G$  se dice que  $H_1$  y  $H_2$  son conjugados si existe un  $g \in G$  tal que

$$H_2 = g^{-1}H_1g$$

**Corolario 1.2.1.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$ . Elegimos un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$  tal que

$$\alpha(0) = r_1$$

$$\alpha(1) = r_2$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular,  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  y  $p_*(\pi_1(R, r_2))$  son conjugados en  $\pi_1(B, b_0)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p \circ \alpha$  es un lazo basado en  $b_0$  por lo que  $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$ . Además,

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_2) &\xrightarrow{isom.} \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] &\mapsto [\alpha * \beta * \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\tilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \tilde{\alpha}] = [\widetilde{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

**Corolario 1.2.2.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_1 \in p^{-1}(b_0)$ . Sea  $H$  un subgrupo conjugado de  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  en  $\pi_1(B, b_0)$ . Entonces existe un punto  $r_2 \in R$  tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

*Demostración.* Por hipótesis sabemos que  $p(r_1) = b_0$  y que  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  es conju-  
gado con  $H$  en  $\pi_1(B, b_0)$ , es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con  $g \in \pi_1(B, b_0)$ , esto es,  $g = [\gamma]$ . Consideramos  $\hat{\gamma}$  el levantamiento de  $\gamma$  a  $R$  con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos  $r_2 = \hat{\gamma}(1)$  al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.3.** Consideramos una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$ , una aplicación  
continua  $f : X \rightarrow B$ ,  $x_0 \in X$ ,  $b_0 = f(x_0)$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ .

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento  $\hat{f} : X \rightarrow R$  de  $f$  con  $\hat{f}(x_0) = r_0$ .
2.  $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento  $\hat{f}$  de  $f$  con  
 $\hat{f}(x_0) = r_0$  es único.

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que  $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$  por lo que tenemos esta implicación simple-  
mente desarrollando la composición.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Empezamos definiendo  $\hat{f}$ :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado  $x \in X$  elegimos  $\alpha_x$  un arco en  $X$  que una  $x_0$  con  $x$ . Entonces  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  es un arco en  $B$  que une  $b_0 = f(x_0)$  con  $f(x)$ . Consideramos ahora  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  el único arco en  $R$  tal que  $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$  y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que  $\hat{f}$  está bien definida, es decir, que no depende del arco  $\alpha_x$  elegido. Tomamos otro arco  $\beta_x$  en  $X$  tal que  $\beta_x(0) = x_0$  y  $\beta_x(1) = x$  y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos  $\gamma = \alpha_x * \beta_x$  que es un lazo en  $X$  con base en  $x_0$ . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \beta_x)$$

es un lazo con base en  $b_0$ . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco  $\delta$  con base en  $r_0$  tal que  $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$ . Sea  $\widehat{f \circ \gamma}$  el único levantamiento de  $f \circ \gamma$  que comienza en  $r_0$ . Tenemos que  $\widehat{f \circ \gamma}$  es homotópico por arcos con  $p \circ \delta$ . Como  $p_*$  es inyectiva tenemos que  $\widehat{f \circ \gamma}$  es homotópico con  $\delta$ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widetilde{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  es el levantamiento de  $f \circ \alpha_x$  empezando en  $r_0$  y  $\omega$  es el levantamiento de  $\widetilde{f \circ \beta_x}$  comenzando en  $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$ . Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widetilde{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta_x} \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de  $\hat{f}(x)$  está bien hecha.

Veamos ahora que  $p \circ \hat{f} = f$ . Para ello, dado  $x \in X$  tenemos que ver que  $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$ . Veamos quién es  $\hat{f}(x)$ :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ \widehat{f \circ \alpha_x})(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que  $\hat{f}(x_0) = r_0$  ya que para  $x_0$  podemos elegir  $\varepsilon_{x_0}$  verificándose que  $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$  luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \varepsilon_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que  $\hat{f}$  es continua.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B\end{array}$$

Comenzamos tomando un punto  $x \in X$  y vemos que  $\hat{f}$  es continua en  $x$ . Sea  $U$  un entorno de  $\hat{f}(x)$ . Tomamos  $O$  abierto arcoconexo de  $f(x)$  que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homomorfismo}\end{aligned}$$

Como  $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$  tenemos que existe un único  $i_0 \in I$  tal que  $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$ . Podemos suponer que  $A_{i_0} \subseteq U$  (si no fuese así consideraríamos  $U \cap A_{i_0}$ ). Como  $f$  es continua, existe un abierto  $V$  que contiene a  $x$  tal que  $f(V) \subseteq O$ . Podemos suponer que  $V$  es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de  $V$  que contenga a  $x$ ).

Si probamos que  $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$  tendríamos que  $\hat{f}$  es continua en  $x$ . Para verlo consideramos un punto  $y \in V$  y tomamos un arco  $\gamma$  dentro de  $V$  que una  $x$  con  $y$ . Tenemos entonces que  $\alpha_x * \gamma$  es un arco que une  $x_0$  con  $y$ . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = \widehat{f \circ (\alpha_x * \gamma)}(1) = \widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}(1)$$

donde  $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$  es la única curva que se proyecta por  $p$  en  $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$  y comienza en  $r_0$ . Es decir,  $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$  se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{f \circ \gamma}$$

donde  $\widehat{f \circ \gamma}$  es el levantamiento de  $f \circ \gamma$  pero comenzando en el punto  $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$

□

*Observación.* Una consecuencia inmediata es que si  $X$  es simplemente conexo, toda  $X : X \rightarrow B$  continua se puede levantar.