Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Análisis Funcional

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Repaso

Definición 0.1 (Espacio normado)**.** E un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

1. $\|x\| \geqslant 0\ \forall x \in E$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \forall x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que E es un **espacio normado**
Podemos definir además una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$ a la que llamaremos **distancia**.
Decimos que un espacio E es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.
Si E es un espacio normado completo, entonces $(E, \|.\|)$ es un **espacio de Banach**.

Definición 0.2 (Espacio prehilbertiano)**.** Sea H es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo $x, y, z \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z)\\ (x, \alpha y + \beta z) &= \alpha(x, y) + \beta(x, z)\end{aligned}$$
2. **Simétrica:** $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:** $(x, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:** $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

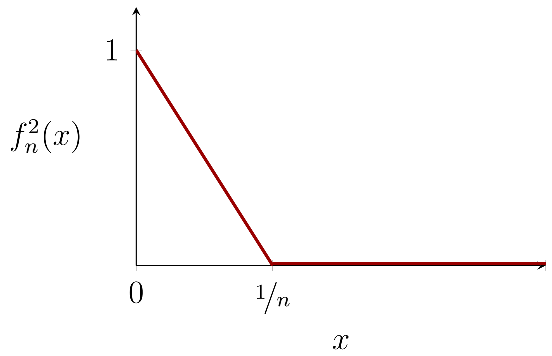
Las dos últimas propiedades se pueden resumir en $(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio prehilbertiano**.
Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ que es claramente una norma.

Si $\|\cdot\|$ es completa, diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo. Los siguientes espacios son de Banach:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, donde $|x| = |(x_1, x_2, \ldots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$. Además es de Hilbert ya que $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ es un producto escalar.
3. Dado[1] $A \subset \mathbb{R}^N$ tomamos $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada en } A\}$. Podemos definir una norma en este espacio como
$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$
4. Tomamos $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en K denotado por $\mathcal{C}(K)$ y el espacio $(K, (\cdot, \cdot))$, donde
$$(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$$
es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos
$$\|f\| = \left(\int_K f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Ejemplo (El espacio del punto 4 No es de Hilbert)**.** Veámoslo con un contraejemplo. Tomamos $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y podemos definir $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ tal que f_n^2 viene dada por la siguiente gráfica:



De esta forma tenemos que
$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x)dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$
y vemos que
$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \to 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \to 1 & \end{cases}$$
Con esto tenemos que la sucesión $\{f_n\} \to 0$ en $(\mathcal{L}([0, 1]), (\cdot, \cdot))$ (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

[1] la b de $\mathcal{C}_b$ viene de *bounded* (acotado en inglés)

Ejemplo. Consideramos $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$ con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

Ejemplo. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles } : \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de p de la siguiente forma[2]:

$$p' = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{p}{p-1} & \text{si} & 1 < p < \infty \\ & & \\ \infty & \text{si} & p = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)| dx \leqslant \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ con $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p} (x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.
2. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, N\}$
3. Sea $p = \infty$. Tenemos

   $$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

   A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma[3]:

   $$\sup_\Omega |f| = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \quad a.e.\ x \in \Omega\}$$

[2] donde asumimos que $1/\infty = 0$

[3] *a.e* viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

En algunos libros se denota por $ess\,\sup$.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup_\Omega |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$ es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con $p = \infty$, $p' = 1$ nos dice que para $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$ es una norma en H.

Ejemplo. Consideramos $1 \leqslant p < \infty$ y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p\right)^{1/p}$$

entonces $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar $x \in \mathcal{L}^p$, $y \in \mathcal{L}^{p'}$ y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \text{ y } \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant \|x\|_{\mathcal{L}^p}\|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para $p = 2$ tenemos que $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert. Para $p = \infty$ podemos definir $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$ y con $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Banach.

Ejemplo. Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$ y es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.
2. Podemos tomar otro subespacio de este, $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$ que de nuevo es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

0.1. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un par $(H, (\cdot,\cdot))$ donde H es un espacio vectorial y $(\cdot,\cdot)$ es una función bilineal simétrica y definida positiva.

Proposición 0.1. Si H es prehilbertiano entonces se tiene:

1. Se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H$$

2. Se verifica la desigualdad del paralelogramo

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right),\quad \forall u,v\in H$$

Teorema 0.2 (Teorema de la Proyección). Supongamos que H es un espacio Hilbertiano y $\emptyset\neq K\subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f\in H\ \exists_1 u\in K$ tal que $\|f-u\|=dist(f,K)$. Además, dicho u está caracterizado por:

$$\begin{cases} u\in K \\ (f-u,v-u)\leqslant 0 \quad \forall v\in K\end{cases}$$

Notaremos a dicho u por $P_K f$ y **diremos que es la proyección de f sobre K**

Demostración. En primer lugar tendremos que ver que $d(f,K)=\inf\{\|f-v\|: v\in K\}$ existe y se alcanza. Al ser un ínfimo de cantidades positivas sabemos que existe y nos quedará ver que se alcanza.
Por definición de ínfimo tenemos que

$$\exists\{v_n\}\subset K \text{ tal que } \|f-v_n\|\to d$$

Aplicando la desigualdad del paralelogramo para $u=f-v_n$ y $v=f-v_m$, con $n,m\in\mathbb{N}$

$$\left\|\frac{f-v_n+f-v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{f-v_n-(f-v_m)}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)$$
$$\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)$$
$$\frac{\|v_m-v_n\|^2}{4}=\frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)-\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$$
$$\|v_m-v_n\|^2=2\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)-4\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$$

Como K es convexo y $v_n,v_m\in K$ tendremos que $d\frac{v_n+v_m}{2}\in K$ y además $\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|\geqslant d$ por lo que tenemos

$$\|v_m-v_n\|^2=2\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)-4d^2$$

Cuando $n\to\infty$ tenemos que $\|f-v_n\|\to d$ y $\|f-v_m\|\to d$ por lo que el término de la derecha tenderá a 0 cuando $n,m\to\infty$. Esto significa que la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy.
Como H es de Hilbert, en particular es completo por lo que sabemos que $\{v_n\}\to u$ en $(H,(\cdot,\cdot))$.
Como además $\{v_n\}\subset K$ y K es cerrado, el límite $u\in K$. Tendremos que

$$d=\lim_{n\to\infty}\|f-v_n\|=\|f-u\|$$

Y tendremos probada la existencia de u.

Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la segunda parte del teorema, es decir

$$\left.\begin{array}{l} u \in K \\ \|f-u\| = dist(f,K) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{array}\right.$$

Veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f-u\| \leqslant \|f-v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0,1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1-t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f-u\|^2 \leqslant \|f-(1-t)u-tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned} \|f-(1-t)u-tw\|^2 &= (f-(1-t)u-tw, f-(1-t)u-tw) = \\ &= \|f-u\|^2 + t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u, w-u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u,w-u) \quad \forall t \in (0,1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leqslant t\|w-u\|^2 - 2(f-u,w-u) \quad \forall t \in (0,1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2(f-u,w-u) \Rightarrow (f-u,w-u) \leqslant 0$$

Se deja como ejercicio demostrar la otra implicación y la unicidad de u. □

Proposición 0.3. La aplicación dada por

$$\begin{aligned} P_K : H &\to H \\ f &\mapsto P_K f \end{aligned}$$

es Lipschitziana, es decir, $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$ para todo $f_1, f_2 \in H$.

Demostración. Tomamos $f_1, f_2 \in H$ y consideramos $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$ y tenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, v - u_1) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \\ (f_2 - u_2, v - u_2) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, u_2 - u_1) \leqslant 0 \\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Aprovechando la bilinealidad tenemos que

$$(f_2 - u_2, u_2 - u_1) \geqslant 0 \Rightarrow ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) \leqslant 0$$

Y además

$$\begin{aligned}((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) &= ((f_1 - f_2) - (u_1 - u_2), u_2 - u_1) = \\ &= (f_1 - f_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1)\end{aligned}$$

Y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|u_2 - u_1\|^2 = (u_2 - u_1, u_2 - u_1) &\leqslant -(f_1 - f_2, u_2 - u_1) \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|\|u_2 - u_1\| \Rightarrow \|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|\end{aligned}$$

□

Corolario 0.3.1 (Proyección ortogonal)**.** Sea H un espacio de Hilbert y $\emptyset \neq M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces se tiene que

$$\forall f \in H \quad \exists_1 u \in M \text{ tal que } \|f - u\| = dist(f, M)$$

Además, $u = F_M f$ está caracterizado por

- **•)** $u \in M$
- **•)** $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$

Y se tiene que $P_M : H \to H$ es lineal.

Demostración. Comencemos con la primera parte del corolario. Sabemos que $u \in K$ y $(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$ del teorema de la proyección. Tendremos que probar la equivalencia entre esto y $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$ cuando M es un subespacio vectorial. Veamos ambas implicaciones:

$\Leftarrow$) Evidente por ser M un espacio vectorial.

$\Rightarrow$) Tenemos que $(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$. Tomamos ahora $v \in M$, $t \neq 0$ y como M es un subespacio vectorial, entonces $\frac{v}{t} \in M$ por lo que

$$(f - u, \frac{v}{t} - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M,\ t \neq 0$$

Hagamos una distinción de casos:

$$\begin{cases} \text{Si } t > 0 \ \Rightarrow \ (f - u, v - tu) \leqslant 0 & \forall t > 0, v \in M \\ \text{Si } t < 0 \ \Rightarrow \ (f - u, v - tu) \geqslant 0 & \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Tomando límite cuando t tiende a 0

$$\begin{cases} (f - u, v) \leqslant 0 & \forall t > 0, v \in M \\ (f - u, v) \geqslant 0 & \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Y por tanto $(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

La demostración de que P_M es lineal se deja como ejercicio. □

0.2. Espacios Duales

Definición 0.3 (Dual algebráico)**.** Sea E un espacio vectorial, llamamos **dual algebráico** al siguiente espacio:

$$E^{\#} = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$$

Definición 0.4 (Dual topológico)**.** Dado $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, llamamos **dual topológico** a

$$E^{*} = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Observación. Si tenemos $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios normados y una aplicación $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(i) T es continua

(ii) T es continua en 0

(iii) $T(B_E(0,1))$ es un conjunto acotado de F, es decir que $\exists R > 0 : \|T(x)\|_F \leqslant R \quad \forall x \in E$ con $\|x\| < 1$

(iv) T es acotada, es decir, $T(A)$ es acotada en F para todo $A \subset E$ que esé acotado

(v) T es Lipschitziana.

Demostración.

(v)⇒(iv)) Trivial

(iv)⇒(iii)) Trivial

(iii)⇒(i)) Trivial

(i)⇒(ii)) Trivial

(ii)⇒(iii)) Sabemos que T es continua en 0. Luego para $\varepsilon = 1 \quad \exists \delta > 0$ tal que $\|x\|_E < \delta$ luego $\|T(x)\|_F < 1$. Tenemos que

$$\|T(x-y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leqslant M\|x-y\| \quad \forall x, y \in E$$

luego $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$. De esta forma tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\| \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} \right) \right\| = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

(iii)⇒(vi)) Sabemos que $A \subset E$ está acotado, luego $T(A)$ también, es decir que $T(A) \subset B(0, M)$ para cierto $M > 0$. Tenemos que probar que

$$T(A) \subset T(B(0,R)) \subset B(0,M)$$

Dado $x \in A$ tal que $\|x\| \leqslant R$, como además es Lipschitziana tenemos que

$$\|T(x)\| \leqslant N\|x\| \leqslant N\|x\| < NR = M$$

y tenemos la inclusión que queríamos probar.

(iv)⇒(ii)) Por hipótesis tenemos que si $\|x\| < 1$ entonces $\|T(x)\| \leqslant R$ y queremos probar que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces $\|T(x)\| < \varepsilon$. Tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$ y suponiendo que $\|x\| < \delta$ tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|} \cdot 2\|x\|\right)\right\| = 2\|x\| \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right\| \leqslant 2\|x\|R < 2\delta R = \varepsilon$$

y ya lo tenemos.

□

Definición 0.5. Dado E un espacio vectorial, consideramos su dual topológico E^* y definimos la norma

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \quad \forall f \in E^*$$

Ejercicio 0.2.1. Demostrar que $\|f\|_{E^*}$ es una norma.

Ejercicio 0.2.2. Demostrar que $(E^*, \|\cdot\|_{E*})$ es de Banach.

Ejercicio 0.2.3. Demostrar que $\|f\|_{E^*} = \inf\{M \geqslant 0 : \|f(x)\| \leqslant M\|x\|_E \;\; \forall x \in E\}$

0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

Observación. Es elemental que si tomo $v \in H$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_v : H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = (u, v) \end{aligned}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y $\|\varphi_v\|_{H^*} = \|v\|_H$. Además, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : H &\to H^* \\ v &\mapsto \phi_v \end{aligned}$$

que será lineal por lo que tenemos que un espacio de Hilbert y su dual topológico serán isomorfos.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. □

Teorema 0.4 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** Para toda $\varphi \in H^*$, se tiene que $\exists_1 v \in H$ tal que $\varphi(u) = (u, v) \quad \forall u \in H$. Además, se tiene que $\|\varphi\|_{H^*} = \|v\|_H$

Ejercicio 0.3.1. Sea H un espacio de Hilbert, y tomamos un elemento cualquiera $y \in H$. Consideramos $f : H \to \mathbb{R}$ dada por $f_y(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$. Entonces se tiene que f_y es lineal, y además

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\| \;\; \forall x \in H \Rightarrow f_y \text{ acotada}$$

con lo que $\|f_y\|_{H^*} \leqslant \|y\|_H$.

Con la definición de la norma tenemos que

$\|f_y\|_{H^*} = \sup\{|(x,y)| : x \in H,\ \|x\|_H \leqslant 1\} \leqslant \|y\|_H \sup\{\|x\|_H : x \in H,\ \|x\|_H \leqslant 1\} = \|y\|_H$

Comenzamos con el caso $y \neq 0$ y tomamos $x = \frac{y}{\|y\|_H}$ y tenemos que

$$|(x,y)| = \left|\left(\frac{y}{\|y\|_H}, y\right)\right| = \frac{1}{\|y\|_H}(y,y) = \|y\|_H$$

por lo que hemos visto que se alcanza el máximo por lo que $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. Veamos ahora qué sucede cuando $y = 0$. En este caso tendremos $f_y(x) = (x, 0)$ y por tanto se tiene directamente que $\|f_y\|_{H^*} = 0 = \|y\|_H$.

La linealidad se deja como ejercicio.

Teorema 0.5 (Teorema de representación del dual de un espacio de Hilbert de Riesz-Fréchet)**.** Sea H un espacio de Hilbert, entonces $\forall f \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = (x,y)\ \ \forall x \in H$. Además, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Demostración. Solo tenemos que probar la primera parte, pues la segunda es consecuencia del ejercicio anterior. Para ello tomamos $f \in H^*$ y tenemos dos casuísticas:

- •) Si $f = 0$, entonces puedo tomar $y = 0$ y es evidente.
- •) Si $f \neq 0$, entonces tenemos que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un subespacio vectorial cerrado (imagen inversa de un cerrado por una función continua[4] y lineal[5]). Podemos aplicar entonces el teorema de la proyección ortogonal. Sabemos que $\exists z_0 \in H \setminus M$. Llamamos $z_1 = P_M z_0 \in M$ y tenemos que $(z_0 - z_1, v) = 0$ para todo $v \in M$. Definimos ahora

  $$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|_H}$$

  y está bien definido ya que $z_0 \notin M$ y $z_1 \in M$ luego $z_0 - z_1 \neq 0$. Es claro que $\|z\| = 1$ y veamos cuánto vale (z,v) para todo $v \in M$:

  $$(z,v) = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|}(z_0 - z_1, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

  Veamos que $z \notin M$. Sabemos que M es un espacio vectorial y si $z_0 - z_1$ estuviera en M, entonces $z_0 \in M$ pero sabemos que $z_0 \notin M$ luego $z \notin M$ o equivalentemente $f(z) \neq 0$ (por la definición de M).

  Tenemos ahora que para todo $x \in H$ tenemos que $x - \frac{f(x)}{f(z)} \in M = \ker f$ ya que

  $$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}f(z) = 0$$

[4] nos dice que es cerrado.
[5] nos dice que es espacio vectorial.

luego $f(x) = f\left(\frac{f(x)}{f(z)}z\right)$ lo que nos dice que

$$0 = \left(z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = (z,x) - \frac{f(x)}{f(z)} \Rightarrow f(x) = f(z)(z,x) = (x, f(z)z)$$

Por tanto, tomando $y = f(z)z$ tenemos la existencia probada. Nos queda por ver la unicidad. Para ello, supongamos que existen $y_1, y_2 \in H$ tal que $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$ para todo $x \in H$. Con esto tendríamos que $(x, y_1 - y_2) = 0$ para todo $x \in H$. Elijo $x = y_1 - y_2$ y tenemos que $0 = (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2$ por lo que finalmente $y_1 = y_2$.

□

Nos planteamos ahora qué ocurre cuando tenemos un espacio de Banach E y un subespacio $G \subset E$. Tenemos además una aplicación $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Lo que nos plantemos ahora es si existe una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que su restricción $f_{|G} = g$.

Que g sea continua es equivalente a decir que $|g(x)| \leqslant k\|x\|$ para todo $x \in G$ y queremos ver si se verifica la continuidad de f, es decir que $|f(x)| \leqslant k\|x\|$ para todo $x \in E$.

Ejercicio 0.3.2. Definimos $p(x) = k\|x\| \quad \forall x \in E$. Probar que se verifican las siguientes propiedades:

1. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in E$

Definición 0.6. Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación $\leqslant$ de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva). Entonces

•) un subconjunto $Q \subset P$ es **totalmente ordenado** si para cualesquiera dos elementos $a, b \in Q$ se tiene que $a \leqslant b$ o $b \leqslant a$ (o ambas).

•) Si $Q \subset P$ y $x \in P$, diremos que x es **cota superior** de Q si $a \leqslant x$ para todo $a \in Q$.

•) Si $m \in P$, entonces diremos que m es un **elemento maximal** de P si

$$\{x \in P : m \leqslant x\} = \{m\}$$

es decir, no hay ningún elemento de P excepto m que esté por encima de m.

•) Diremos que P es **inductivo** si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

Lema 0.6 (Lema de Zorn)**.** Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación de orden $\leqslant$. Entonces se tiene que si P es inductivo, entonces P tiene un elemento máximo.

Teorema 0.7 (versión analítica del teorema de Hanh-Banach)**.** Supongamos que E es un espacio vectorial y tenemos $p : E \to \mathbb{R}$ tal que se verifica

$$\begin{gathered} p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E \\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E \;\; \forall \lambda > 0 \end{gathered}$$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y $G : G \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal verificando

$$g(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in G$$

Entonces se tiene que $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal verificando

$$\begin{gathered} f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E \\ f_{|G} = g \end{gathered}$$

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$P = \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h \text{ lineal, } \; h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h) \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \end{array} \right\}$$

y lo llamaremos **conjunto de extensiones** de g. Sabemos que $P \neq \emptyset$ ya que $g \in P$ (es una extensión de sí misma en el espacio P). Necesitamos ahora definir una relación de orden. Lo haremos de la siguiente forma

$$h_1 \leqslant h_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{array} \right. \qquad \forall h_1, h_2 \in P$$

y diremos que h_2 es una **extensión** de h_1. Se deja como ejercicio demostrar que $\leqslant$ es una relación de orden.

Probemos ahora que P es inductivo. Para ello tendremos que probar que cualquier subconjunto suyo que esté totalmente ordenado tiene una cota superior. Sea $Q \subset P$ totalmente ordenado. Consideramos

$$V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$$

y definimos la aplicación

$$\begin{aligned} h_0 : V_0 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_0(x) = h(x) \quad \text{ si } x \in D(h) \end{aligned}$$

Está bien definida como consecuencia de que el conjunto sea totalmente ordenado. Se deja como ejercicio demostrar que V_0 es un subespacio vectorial, que h_0 está bien definida, que es lineal y que $h_0(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in V_0$.

Con esto tengo que h_0 es una extensión de todas las $h \in Q$, es decir, $h \leqslant h_0$ para todo $h \in Q$ lo que nos dice que h_0 es la cota superior de Q. Con esto podemos concluir que P es inductivo.

Tenemos todas las hipótesis necesarias para aplicar el teorema de Zorn, que nos dice que $\exists f \in P$ elemento maximal de P, es decir,

$$f : D(f) \to \mathbb{R} \begin{cases} G \subset D(f) \subset E \\ f \text{ lineal}, \quad f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(f) \\ f_{|G} = g \end{cases}$$

Se deja como ejercicio demostrar que si f es maximal, entonces $D(f) = E$ (por contrarrecíproco).

Para ello supongamos que por contradicción se tuviera $D(f) \subsetneq E$ por lo que $\exists x_0 \in E \setminus D(f)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &D(f) \oplus x_0\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\qquad x + tx_0 \mapsto f(x) + t\alpha = \hat{f}(x + t_0) \end{aligned}$$

Solo tendremos que ver que $\hat{f}_{|D(f)} = f$ y que $\hat{f}(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0)$ para todo $x \in D(f)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sabemos que Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} &\hat{f}(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0) \quad \forall x \in D(f),\ \forall r \in \mathbb{R} \iff \\ \iff &\hat{f}(t_z + tx_0) \leqslant p(t_z + tx_0) \quad \forall z \in D(f),\ \forall r \in \mathbb{R} \iff \\ \iff &t\hat{f}(z + x_0) \leqslant p(t(z + x_0)) = \begin{cases} tp(z + x_0) & t > 0 \\ -tp(-z - x_0) & t < 0 \end{cases} \iff \\ \iff &\begin{cases} f(z) + \alpha = \hat{f}(z + x_0) \leqslant p(z + x_0) & t > 0,\ z \in D(f) \\ -f(z) - \alpha = -\hat{f}(z + x_0) \leqslant p(-z - x_0) & t > 0,\ z \in D(f) \end{cases} \iff \\ \iff &\begin{cases} \alpha \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \\ -f(z) - p(-z - x_0) \leqslant \alpha \end{cases} \forall z \in D(f) \end{aligned}$$

Por lo que nos basta con demostrar lo siguiente

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Podemos cambiar $-z$ por un $w \in D(f)$ cualquiera de la siguiente forma:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Veamos que esta desigualdad se verifica. Para cualesquiera $z, w \in D(f)$

$$\begin{gathered} f(z) + f(w) = f(z + w) \leqslant p(z + w) = p(z + x_0 - x_0 + w) \leqslant p(z + x_0) + p(w) - x_0 \Rightarrow \\ f(w) - f(w - x_0) \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \end{gathered}$$

y hemos probado que cualquier elemento del segundo conjunto es cota superior de todos los elementos del primer conjunto, lo que prueba la existencia del α probando lo buscado. $\square$

Observación. Sea E un espacio normado, $f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación no nula ($f \neq 0$) y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f lineal y continua, entonces

$$[f = \alpha] = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

es un hiperplano[6] cerrado[7].

Definición 0.7. Si $A, B \subset E$ es un espacio normado. Diremos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ **separa** A y B si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Diremos que **separa estrictamente** A y B si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(y) \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B$$

Teorema 0.8 (Primera forma geométrica del teorema de Hanh-Banach)**.** Supongamos que E es un espacio normado, $A, B \subset E$ dos subconjuntos de E no vacíos, disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$, convexos y con A abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado H que separa A y B.

Demostración.

Paso 1: Vamos a considerar $B = \{x_0\}$ y $\emptyset \neq A \subset E$ abierto convexo con $x_0 \notin A$. Elijo $C = A - z_0$. Se deja como ejercicio probar que C es convexo y abierto con $0 \in C$. Probar también que $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$.

Sabemos que $\mathbb{R}y_0$ es un espacio de dimensión 1 y buscamos una función lineal, que en este espacio será de la forma

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}y_0 &\to \mathbb{R} \\ ty_0 &\mapsto g(ty_0) = t \end{aligned}$$

Buscamos ahora una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ que extienda a g verificando $f(x) \leqslant f(y_0) = g(y_0) = 1$ para todo $x \in C$. El teorema de Hanh-Banach nos dirá que existe un $f : E \to \mathbb{R}$ lineal tal que

$$\begin{aligned} f(ty_0) &= t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ f(x) &\leqslant p(x) \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$\square$

[6] basta con la linealidad (primer teorema de isomorfía)

[7] por ser f continua

0.4. Funcional de Minkowski de un conjunto

Definición 0.8 (Funcional de Minkowski)**.** Sea E un espacio normado y $C \subset E$ convexo, abierto y tal que $0 \in C$. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} p : E &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto p(x) &= \begin{cases} \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} & \text{si} \quad \forall x \in E \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \qquad x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y la llamaremos **funcional de Minkowski**.

Propiedades. El funcional de Minkowski verifica las siguientes propiedades:

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0$
2. $\exists M > 0$ tal que $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E$
3. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$
4. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$

Demostración.

1. $p(\lambda x) = hf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha/\lambda} = \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\} = \lambda\, \text{ínf}\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\} = \lambda p(x)$
2. Como C ebierto y $0 \in C$ sabemos que $\exists r > 0 : B_E(0, r) \subset C$ y se tiene
$$\alpha > \frac{\|x\|}{r} \Rightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < r \Rightarrow \frac{x}{\alpha} \in B_E(0, r) \subset C$$
por lo que
$$\left(\frac{\|x\|}{r}, +\infty\right) \subset \left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \Rightarrow p(x) \leqslant \frac{\|x\|}{r}$$
3. Queremos ver que $p(x) < 1$ para todo $x \in C$. Sabemos que si $x \in C$ abierto, entonces $\exists r > 0$ tal que $B_E(x, r) \subset C$. Tomamos ahora un $\varepsilon > 0$ y queremos ver cuánto vale la siguente norma:
$$\left\|\frac{x}{1+\varepsilon} - x\right\| = \left\|\frac{-\varepsilon x}{1+\varepsilon}\right\| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x\|$$
Elegimos ahora un $\varepsilon_0 > 0$ tal que
$$\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} < \varepsilon_0 < \frac{r}{\|x\|+1}$$
y podemos afirmar que
$$\left\|\frac{x}{1+\varepsilon} - x\right\| < r \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

por lo que

$$\frac{x}{1+\varepsilon} \in B_E(x,r) \subset C \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

Acabamos de demostrar que $p(x) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Hay algo mal en la demostración de este apartado. Se deja como ejercicio para el lector averiguar qué es lo q está mal (deberíamos haber empezado con $(1+\varepsilon)x$ en vez de con $\frac{x}{1+\varepsilon}$).

La otra inclusión la haremos sabiendo que si $p(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} < 1$, entonces sabemos que $\exists \alpha_0 < 1$ tal que $\frac{x}{\alpha_0} \in C$. Como además C es convexo y $0 \in C$ tenemos que

$$x = \alpha_0 \cdot \frac{x}{\alpha_0} + (1-\alpha) \in C$$

4. Podemos afirmar que

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C \quad \forall \varepsilon > 0$$

y por el apartado anterior tenemos que

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) < 1$$

Como C es convexo, puedo considerar $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ y cualquier combinación convexa de x e y estará en C. Consideramos

$$0 \leqslant t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \leqslant 1$$

y con este t formamos la siguiente combinación

$$t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

por el apartado anterior tenemos que $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

$\square$

Ejemplo. Para $C = B(0,1)$ tenemos que $p_C(x) = \|x\|$ (sale claramente si se piensa lo que se está haciendo).

Teorema 0.9 (Primera forma geométrica del teorema de Hanh-Banach)**.** Supongamos que E es un espacio normado, $A, B \subset E$ dos subconjuntos de E no vacíos, disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$, convexos y con A abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado H que separa A y B.

Demostración.

Paso 1: Vamos a considerar $B = \{x_0\}$ y $\emptyset \neq A \subset E$ abierto convexo con $x_0 \notin A$. Elijo $C = A - z_0$. Se deja como ejercicio probar que C es convexo y abierto con $0 \in C$. Probar también que $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$.

Sabemos que $G = \mathbb{R}y_0$ es un espacio de dimensión 1 y buscamos una función lineal, que en este espacio será de la forma

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}y_0 &\to \mathbb{R} \\ ty_0 &\mapsto g(ty_0) = t \end{aligned}$$

Considero p el funcionar de Minkowski de C. Observemos

- Como $y_0 \notin C \Rightarrow p(y_0) \geqslant 1$
- Si $t > 0$, entonces $g(ty_0) = t \leqslant p(y_0) = p(ty_0)$
- Si $t < 0$, entonces $g(ty_0) = t < 0 \leqslant p(ty_0)$

En cualquier caso tendremos que

$$g(ty_0) \leqslant p(ty_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Usando el teorema de Hanh-Banach tenemos que existe un $f : E \to \mathbb{R}$ lineal tal que

$$f_{|G} = g$$
y
$$f(y) \leqslant p(y) \leqslant M\|y\| \quad \forall x \in E$$

Por lo que podemos concluir que

$$|f(y)| \leqslant M\|y\| \quad \forall y \in E$$

lo que nos dice que f es continua. Nos queda probar que f es la aplicación que queremos buscar y por tanto tendremos que encontrar α, es decir, probar que $f(y) \leqslant 1 = f(y_0)$ para todo $y \in C$, lo que significaría que hemos separado C de y_0. Se deja como ejercicio.

Paso 2: Consideramos $\emptyset \neq A \subset E$ abierto, $\emptyset \neq B \subset E$ convexos tales que $A \cap B = \emptyset$. Consideramos

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}$$

y como $A \cap B = \emptyset$ sabemos que $0 \notin (A - B)$. Veamos ahora que $A - B$ es abierto. Esto es muy sencillo ya que podemos escribir

$$A - B = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

y tenemos que es unión de abiertos trasladados que siguen siendo abiertos luego $A - B$ es abierto. Se deja como ejercicio demostrar que $A - B$ es convexo y terminar la demostración.

□

Teorema 0.10 (Segunda forma geométrica del teorema de Hanh-Banach)**.** Sea $\emptyset \neq A \subset E$, $\emptyset \neq B \subset E$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y con A y B convexos, A cerrado y B compacto. Entonces existe un hiperplano que separa estrictamente A y B, es decir,

$$\exists f : E \to \mathbb{R} \text{ lineal y continua}$$
$$\text{y}$$
$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0 : f(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Demostración. Consideramos el conjunto $C := A - B$ que sabemos que es convexo de la demostración del teorema anterior. Como A es cerrado y B es compacto sabemos que C es cerrado (se deja la demostración como ejercicio). Igual que antes, sabemos que $0 \notin C$ y además, como C es cerrado tenemos que $E \setminus C$ es abierto y tenemos que

$$\exists r > 0 : B_E(0, r) \cap C = 0$$

Por la primera forma geométrica del teorema de Hanh-Banach podemos separar $B_E(0, r)$ y C. El resto de la demostración se deja como ejercicio (la idea es separar estrictamente 0 de C y aprovechar la linealidad para separar estrictamente A de B). □

Lema 0.11. Sean E, F espacios normados, $T \in L(E, F)$, entonces se tiene que

$$\sup_{\|x - x_0\| < r} \|T_x\| \geqslant r\|T\| \quad \forall x_0 \in E, \quad \forall f > 0$$

Demostración. Tenemos, para todo $y \in E$ que

$$\begin{aligned} \|T_y\| = \left\| T\left(\frac{1}{2}[x_0 + y - (x_0 - y)]\right) \right\| &= \frac{1}{2}\left[\|T(x_0 + y)\| + \|T(x_0 - y)\|\right] \leqslant \\ &\leqslant \text{máx}\{\|T(x_0 + y)\|,\ \|T(x_0 - y)\|\} \quad \forall x_0 \in E \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} r\|T\| = \sup_{\|y\| \leqslant r} \|Ty\| \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant r} &\text{máx}\{\|T(x_0 + y)\|,\ \|T(x_0 - y)\|\} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|z - x_0\| \leqslant r} \|Tz\| \end{aligned}$$

□

Proposición 0.12 (Principio de acotación uniforme)**.** Sea E un espacio de Banach, F espacio normado, $\mathcal{F}$ una familia de operadores $T \in L(E, F)$. Si $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T_x\| < \infty$ para todo $x \in E$, entonces $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$.

Demostración. Por contradicción al absurdo. Supongamos que $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| = \infty$. Esto significa que existe una sucesión de operadores de $\mathcal{F}$, $\{T_n\} \subset \mathcal{F}$ con $\|T_n\| \geqslant 4^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomo $x_0 = 0$ y $r = \frac{1}{3}$ y aplicamos el lema recién probado y llegamos a que existe un $x_1 \in B(x_0, 1/3)$

$$\|T_1 x_1\| > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \|T_1\|$$

y seguimos contruyendo por inducción

$$\sup_{\|x - x_{n-1}\| < \frac{1}{3^n}} \|Tx\| \geqslant \frac{1}{3^n} \|T_n\| > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \|T_n\|$$

Esto nos da una sucesión $\{x_n\} \subset E$ y veamos ahora que dicha sucesión es de Cauchy. Para ello tomamos $m > n$ y tenemos

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+1}} =$$
$$= \frac{1}{3^n} \left[\frac{1}{3^{m-n} + \cdots + \frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{3^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^t} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$$

y tenemos que es de Cauchy en un espacio de Banach, luego $\{x_n\}$ converge a un $x \in E$. Tenemos además

$$\lim_{n \to \infty} \|x_m - x_n\| = \|lim_{m \to \infty}(x_m - x_n)\| = \|x - x_n\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$$

Vamos a estimar la norma de $T_n x$. Para ello escribimos

$$\|T_n(x)\| = \|T_n(x - x_n + x_n)\| \geqslant \|T_n(x_n)\| - \|T_n(x - x_n)\| \geqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \|T_n\| - \|T_n\| \|x - x_n\| \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3^n} \|T_n\| = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^n} \|T_n\| \geqslant \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3} \right)^n \to \infty$$

y en este caso tendríamos que

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| \geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| = \infty$$

por lo que llegamos a la contradicción buscada. □

Lema 0.13 (Lema de Beire)**.** Supongamos que X es un espacio métrico completo, $X_n \subset X$ tal que X_n cerrado y $intX_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Etnonces se tiene que

$$int \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right) = \emptyset$$

Observación. El contrarrecíprodo del lema anterior sería:
Si X es un espacio métrico completo y $X_n \subset X$ es cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$int \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right) \neq \emptyset \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } intX_{n_0} \neq \emptyset$$

Se recomienda ver este lema y su demostración en el libro de Brezis.

Ejercicio 0.4.1. Sean X, Y espacio de Banach, $T \in L(X,Y)$ y definimos

$$\|y\|_n := \text{ínf}\{\|u\|_X + n\|v\|_Y : u \in X,\ v \in Y,\ y = T(u) + v\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in Y$$

Probar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en Y que verifica

$$\|y\|_n \leqslant n\|y\|_y \quad \forall y \in Y$$

Además, si $y = T(x)$, con $x \in X$ entonces se verifica

$$\|y\|_n \leqslant \|x\|_X$$

0.5. Teorema de la aplicación abierta

Ejercicio 0.5.1. Sea $T : X \to Y$ lineal. Entonces se tiene que T es abierta si y solo si

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } B_Y(0,\delta) \subset T(B_X(0,1))$$

Teorema 0.14 (Teorema de la aplicación abierta)**.** Sean X, Y espacios de Banach, y $T \in L(X,Y)$ una aplicación sobreyectiva. Entonces T es abierta.

Demostración.

Paso 1. Vamos a demostrar en primer lugar que existe un $r > 0$ tal que

$$B_Y(0,r) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$$

Para ello considero en el espacio Y la siguiente norma para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\|y\|_n = \text{ínf}\{\|u\|_X + n\|v\|_Y : u \in X,\ v \in Y,\ y = T(u) + v\} \quad \forall y \in Y$$

Abreviaremos la notación como

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v}\{\|u\|_X + n\|v\|_Y\} \quad \forall y \in Y$$

entendiendo que es equivalente a la definición anterior. Consideramos ahora el siguiente espacio

$$Z \equiv \begin{array}{c}\text{espacio de todas las sucesiones } \{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset Y \\ \text{con un número finito de términos } z_m \text{ no nulo}\end{array}$$

y en dicho espacio podemos considerar

$$\|\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}}\|_\infty = \max_{m\in\mathbb{N}} \|z_m\|_n$$

Se deja como ejercicio demostrar que esto es una norma en Z. Vamos a definir la aplicación

$$\begin{aligned} T_n : Y &\to Z \\ y &\mapsto T_n(y) = \{\delta_{nk} y\}_{k\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

donde δ_{nk} es la aplicación delta de Kronecker,

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n \end{cases}$$

Con estas definiciones tenemos que $\forall y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} T_n(y_1 + y_2) &= \{\delta_{nk}(y_1 + y_2)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\delta_{nk}y_1 + \delta_{nk}y_2\}_{k\in\mathbb{N}} = \\ &= \{\delta_{nk}y_1\}_{k\in\mathbb{N}} + \{\delta_{nk}y_2\}_{k\in\mathbb{N}} = \\ &= T_n(y_1) + T_n(y_2) \end{aligned}$$

por lo que T_n es lineal y además es continua con $\|T_n\|_{L(Y,Z)} \leqslant n$. Con esto tenemos que

$$\|T_n(y)\|_\infty = \|\{\delta_{nk}y\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} \|\delta_{nk}y\|_n = \|y\|_n \leqslant n\|y\|_Y$$

Vemos ahora que $\forall y \in Y$ la sucesión $\{T_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Como T es sobreyectiva sabemos que $\exists x \in X$ tal que $T(x) = y$ por lo que podemos escribir $y = T(x) + 0$ y tomando $u = x$, $v = 0$ y con la definición de la norma anterior tenemos que

$$\|y\|_n \leqslant \|x\|_X + n\|0\| = \|x\|_X$$

por lo que $\|T_n(y)\|_\infty \leqslant n\|y\|_Y \leqslant n\|x\|_X$ y tenemos que la sucesión$\{T_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Por el principio de acotación uniforme sabemos que $\{\|T_n\|(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, es decir, que $\exists M \geqslant 0$ tal que

$$\|T_n\|_{Y(Y,Z)} \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que nos dice que

$$\|T_n(y)\|_\infty \leqslant M\|y\|_Y \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $y \in B_Y(0, 1/M)$ y queremos ver que $y \in \overline{T(B_X(0,1))}$. Para ello empecemos calculando

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{\|u\|_X + n\|v\|_Y\} \leqslant M\|Y\|_Y < M \cdot \frac{1}{M} = 1$$

Vamos ahora a definir

$$A = \{\|u\|_X + n\|v\|_Y : y = T(u) + v,\ u \in X,\ v \in Y\}$$

y sabemos que $\inf A < 1$, luego $\exists a_n \in A$ tal que $\inf A \swarrow a_n < 1$

y podemos garantizar que $\exists u_n \subset X$, $\exists v_n \subset Y$ tales que si podemos escribir $y = T(u_n) + v_n$, entonces

$$\|u_n\| + n\|v_n\|_Y < 1$$

por lo que además por ser suma de cantidades positivas tenemos

$$\left.\begin{array}{r}\|u_n\|_X < 1\\ n\|v_n\|_Y < 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\|u_n\|_X < 1\\ \|v_n\|_Y < \frac{1}{n}\end{array}\right\}$$

Evaluamos ahora T en u_n.

$$T(u_n) = \{T(u_n) + v_n - v_n\} = \{y - v_n\} \xrightarrow{Y} y \quad \text{(cuando } n \to \infty)$$

Sabemos que $v_n \to 0$ en Y cuando $n \to \infty$ y $T(u_n) \in T(B_X(0,1))$ y como $y = T(u_n) + v_n$ tendremos que $y \in \overline{T(B_X(0,1))}$ como queríamos demostrar.

Paso 2. Vamos a demostrar ahora que $B_Y(0, r/2) \subset T(B_X(0,1))$. Esto es equivalente a probar que

$$\frac{1}{2^n} B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) \subset \overline{\frac{1}{2^n} \cdot T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)} \iff B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) \subset \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)}$$

Veámoslo por inducción. Para $n = 1$ tenemos que

$$y \in B_Y\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)} \Rightarrow \exists x_1 \in B_X\left(0, \frac{1}{2}\right) : \|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2^2}$$

Tenemos entonces

$$y - T(x_1) \in B_Y\left(0, \frac{r}{2^2}\right) \subset \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists x_2 \in B_X\left(0, \frac{1}{2^2}\right) : \|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{2^3}$$

Si repetimos este proceso podemos llegar a que

$$\exists x_n \in B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right) : \|y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k)\| < \frac{r}{2^{n+1}}$$

Por lo tanto, tendríamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

por lo que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge en norma[8]. Por ser X un espacio de Banach tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Tenemos entonces $\|x\|_X \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < 1$. Además, de lo anterior podemos concluir que

$$\|y - \sum_{k=1}^{T} (x_k)\| < \frac{r}{2^{n+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) = y$$

[8] o equivalentemente es de Cauchy

Y escribirmos ahora

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = T\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x_k\right) \overset{T \text{ cont.}}{=} \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)$$
$$\overset{T \text{ lineal.}}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{N\to\infty}^{N} T(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) = y \in T(B_X(0,1))$$

$\square$

Teorema 0.15 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** Sean E, F espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. Entonces si T es continua si y solo si

$$Gr(T) = \{(x, T_x) : x \in E\}$$

es cerrado en $E \times F$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Se deja como ejercicio.

$\Leftarrow$) Vamos a construir una nueva norma $\|\cdot\|_T$ que la definimos como

$$\|x\|_T := \|x\|_E + \|T_x\|_F \quad \forall x \in E$$

Veamos que es una norma.

(i) $\|x\|_T \geqslant 0$ ya que es suma de dos normas.

(ii) $\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_E + \|T(\lambda x)\|_F = |\lambda \; \|x\|_E + |\lambda|\|T_x\|_F = |\lambda|\|x\|_T$.

(iii) $\|x_1 + x_2\|_T = \|x_1 + x_2\|_E + \|T(x_1 + x_2)\| \leqslant \|x_1\|_E + \|x_2\|_E + \|T_{x_1}\|_F + \|T_{x_2}\|_F = \|x_1\|_E + \|x_2\|_E$

y ya tenemos probado que es una norma. Veamos ahora que es completa. En efecto si $\|x_n\| \subset E$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_T$ se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_1 - x_2\|_E + \|T_{x_n} - T_{x_m}\|_F = \|x_n - x - m\|_T < \varepsilon$$

por lo que tenemos que

$$\{x_n\} \text{ de Cauchy para } \|\cdot\|_E \overset{\text{E.Banach}}{\Longrightarrow} \exists x \in E : \|x_n - x\|_E \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$
$$\{T_{x_n}\} \text{ de Cauchy para } \|\cdot\|_F \overset{\text{E.Banach}}{\Longrightarrow} \exists y \in F : \|T_{x_n} - y\|_E \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Esto nos dice que $\{(x_n, T_{x_n})\} \overset{E\times F}{\longrightarrow} (x, y)$. Además por hipótesis tenemos que $\{(x_n, T_{x_n})\} \subset Gr(T)$ cerrado en $E \times F$ luego se tiene que $(x, y) \in Gr(E) \Rightarrow y = T_x$.

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_E + \|T_{x_n} - T_x\|_F \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Por la definición de $\|\cdot\|_T$ tenemos que

$$\|x\|_E \leqslant \|x\|_T \;\; \forall x \in E$$

y por el teorema de la aplicación abierta sabemos que

$$\exists k \geqslant 0 : \|x\|_T \leqslant k\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

luego se tiene que

$$\|x\|_E + \|T_x\|_F \leqslant k\|x\|_E \quad \forall x \in E \Rightarrow k \geqslant 1$$

es decir,

$$\|T_x\|_F \leqslant (k-1)\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

y tenemos entonces que es Lipschitziana y por tanto se tiene finalmente que T es continua en E.

□