Álgebra II **Curso 2024-25**

Relación de resultados teóricos para examen

1. Define el concepto de subgrupo normal de un grupo. Demuestra el Tercer Teorema de isomorfía para grupos (esto es, describe de que forma son los subgrupos de un grupo cociente y como son los cocientes de un grupo cociente).

2. Define los conceptos de serie de composición y de serie derivada de un grupo y da dos definiciones de grupo resoluble demostrando su equivalencia. Razona que S_4 es resoluble pero que S_5 no lo es.

3. Define, para un grupo G, los conceptos de G-conjunto X y de órbita y estabilizador de un elemento $x \in X$. Demuestra los resultados requeridos que conduzcan, en las condiciones oportunas, a la llamada fórmula de clases ($|G| = |Z(G)| + \ldots$).

4. Demuestra el Teorema de Cauchy (Si G es un grupo finito y p es un primo que divide a $|G|$, entonces G tiene un elemento de orden p). Concluye que, si G es finito, entonces G es un p-grupo sí y sólo sí su orden es una potencia de p.

5. Demuestra el Teorema de Burnside (el centro de un p-grupo finito es no trivial) y concluye, como consecuencia, que todo grupo de orden p^2 es abeliano. Clasifica entonces, salvo isomorfismo, todos los grupos de órdenes 4, 9 y 841.

6. (Teoremas de Sylow) Demuestra que, si G es un grupo finito, para cualquier potencia de un primo p que divida al orden del grupo existe un subgrupo cuyo orden es esa potencia de p. Define entonces el concepto de p-subgrupo de Sylow de un grupo finito G y concluye la existencia de p-subgrupos de Sylow de G.

7. (Teoremas de Sylow) Demuestra que todo p-subgrupo de un grupo finito G (con $|G| = p^k m$ y $m.c.d.(p, m) = 1$) está contenido en un p-subgrupo de Sylow y que el número n_p de p-subgrupos de Sylow de G satisface que $n_p | m$ y que $n_p \equiv 1 (mod p)$.

8. Prueba que todos los grupos de orden $2p$ siendo p un primo impar y también todos los de orden pq siendo p, q primos con $p > q$ y $q \nmid p - 1$ son producto semidirecto. Clasifica los grupos de estos órdenes y concluye entonces con la clasificación de todos los grupos de órdenes 6, 10, 14,15, 161 y 1994.

9. Clasifica, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden 8.

10. Prueba que todo grupo de orden 12 es un producto semidirecto y clasifica, salvo isomorfismo, todos los grupos de orden 12 identificándolos con productos semidirectos.