Álgebra I. Cuestiones-III

1. Sea X un conjunto no vacío. Definimos en $P(X)$ operaciones de suma y producto por $A + B = A \cup B$ y $A \cdot B = A \cap B$. Entonces (selecciona la respuesta correcta)

   - ☐ $P(X)$ es un anillo conmutativo.
   - ■ $P(X)$ no es un anillo conmutativo, falla un axioma.
   - ☐ $P(X)$ no es un anillo conmutativo, fallan dos axiomas.

   Justifica brevemente la respuesta: *En este caso,* $0 = \emptyset$ *y claramente no hay opuestos.*

2. Para enteros m y n tales que $2 \leq m < n$, la afirmación *"$\mathbb{Z}_m$ es un subanillo de $\mathbb{Z}_n$"* es

   - ☐ verdad o falsa, depende de m y de n.
   - ☐ siempre verdad.
   - ■ siempre falsa.

   Justifica brevemente la respuesta: *En* $\mathbb{Z}_m$ *es* $1 + (m - 1) = 0$*, pero en* $\mathbb{Z}_n$ *se tiene que* $1 + (m - 1) = m \neq 0$

3. En el anillo $\mathbb{Z}_8$ (selecciona la afirmación verdadera)

   - ■ 3 es una unidad y $4 \cdot 3^{-1} = 4$.
   - ☐ 3 es una unidad, pero $4 \cdot 3^{-1} \neq 4$.
   - ☐ 3 es no una unidad.

   Justifica brevemente la respuesta: 3 *es una unidad con* $3^{-1} = 3$*. Entonces,* $4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 3 = 4$.

4. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, la afirmación *"$(7 + 4\sqrt{3})^n$ us una unidad para todo natural $n \geq 1$"* es

   - ☐ verdad o falsa, depende de n.
   - ☐ siempre falsa.
   - ■ siempre verdad.

   Justifica brevemente la respuesta: $7 + 4\sqrt{3}$ *es invertible, puesto que* $N(7 + 4\sqrt{3}) = (7^2 - 3 \cdot 16) = 49 - 48 = 1$*. Como el producto de unidades es unidad, cualquier potencia de una unidad lo es también.*

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subanillo. La afirmación *"$\mathbb{Z}$ es un subanillo de A"* es:

   - ■ siempre verdad.
   - ☐ siempre falsa.
   - ☐ verdad o falsa, depende de A.

   Justifica brevemente la respuesta: Por inducción vemos que $\mathbb{N} \subseteq A$ ($0, 1 \in A$ y, si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$). Finalmente,, para cualquier entero $n \geq 0$, $-n \in A$ al ser A cerrado para opuestos.