Métodos Numéricos I

Tema 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Parte 2: Normas vectoriales y matriciales

Lidia Fernández

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2022/2023

Contenidos

Normas vectoriales

Para medir el tamaño de los vectores se usa el concepto de norma, que generaliza el concepto de módulo para escalares.

Dado un espacio vectorial E, una norma es una aplicación

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$. Además $\|x\| = 0 \iff x = 0$. (Definida positiva).
2. $\|cx\| = |c|\|x\|, \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in E$. (Homogeneidad).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$. (Desigualdad triangular).

Ejemplos de normas vectoriales

Sea E un espacio de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base suya. Cualquier vector $x \in E$ se puede expresar de forma única como combinación de los vectores de la base $\mathcal{B}$

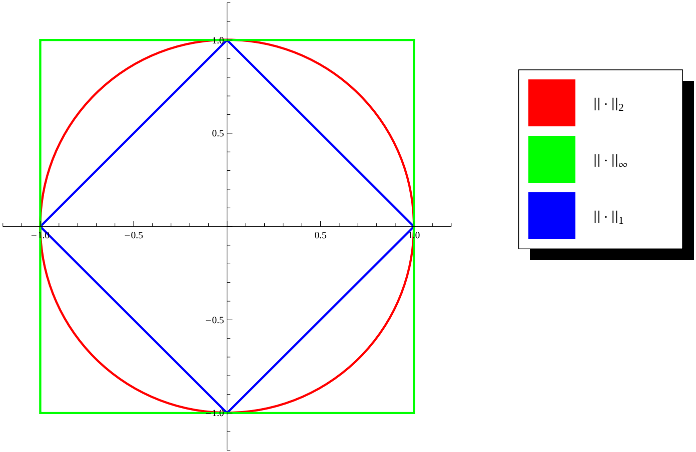
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

donde los escalares $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se conocen como coordenadas del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$.
Utilizando esta notación, son ejemplos de normas los siguientes:

- Norma-1: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- Norma euclídea: $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$
- Norma Infinito: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Ejercicio: Demostrar que la norma infinito es una norma.

La bola unidad para las distintas normas



La norma Manhattan

Equivalencia de las normas vectoriales

Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita E todas las normas vectoriales son equivalentes, en el sentido siguiente: dadas las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$, existen dos constantes positivas A y B tales que

$$A\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq B\|x\|_a, \quad \forall x \in E.$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ se verifica:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Convergencia en un espacio normado

Definición

Dado un espacio normado E, decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geqslant 0} \subset E$ converge a $x \in E$ (en norma) si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Observación

En un espacio vectorial de dimensión finita E puesto que todas las normas vectoriales son equivalentes, la convergencia es independiente la norma elegida. En particular, la convergencia es equivalente a la convergencia componente a componente.

Normas matriciales

Dado el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, una norma matricial es una aplicación

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siendo $\|\mathbf{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} = 0$. (Definida positiva).
2. $\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|, \forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Homogeneidad).
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (Desigualdad triangular).
4. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Norma matricial inducida

Definición

Dada una norma vectorial $\| \cdot \|$ se define la norma matricial inducida (o subordinada) en la forma

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|$$

Ejemplos

- Norma-1 $$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
- Norma Infinito $$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norma matricial inducida: norma 1

Vemos que la norma inducida es $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$:

Llamamos $M = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, se cumple:

$$\|\mathbf{A}x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \Big| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \Big) |x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} M|x_j| = M \sum_{j=1}^{n} |x_j| = M\|x\|_1$$

Por tanto

$$\frac{\|\mathbf{A}x\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Vemos ahora que hay un vector para el que se da la igualdad.

Norma matricial inducida: norma 1

(continuación)

Supongamos que el $\max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ se alcanza en $j = k$ y sea

$M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$ dicho máximo.

Consideramos el vector $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ con todas las componentes 0 salvo la k-ésima. Entonces:

$$\|Ae_k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = M = M\|e_k\|_1$$

por lo tanto

$$\frac{\|\mathbf{A}e_k\|_1}{\|e_k\|_1} = M$$

La norma de Frobenius

No todas las normas matriciales son normas inducidas.
La norma de Frobenius:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{traza}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}$$

no es una norma inducida.

($\mathbf{A}^*$ representa la matriz traspuesta conjugada de **A**. Si la matriz es de números reales, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$ coincide con la traspuesta de **A**)

Para ver que no es una norma inducida basta con calcular la norma de la matriz identidad y ver cuál sería la norma de la identidad con cualquier norma inducida.

Normas matriciales: ejemplo

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \text{máx}\{2, 4, 4\} = 4 \\ \|A\|_\infty &= \text{máx}\{4, 4, 2\} = 4 \\ \|A\|_F &= \sqrt{1+1+4+1+4+1+1+1} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

¿Cuál es la norma de la matriz identidad de orden n?

Norma matricial inducida

De la definción de norma inducida:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|$$

se deduce:

Proposición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|$ y la correspondiente norma matricial inducida, se verifica

$$\|\mathbf{A}x\| \leq \|\mathbf{A}\|\|x\|$$

Normas compatibles

Definición

Dada una norma vectorial $\|\cdot\|_v$ y una norma matricial $\|\cdot\|_M$, decimos que ambas normas son compatibles si para toda matriz **A** y todo vector x se verifica

$$\|\mathbf{A}x\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_M \|x\|_v$$

Proposición

Dada una norma matricial $\|\cdot\|_M$ siempre existe una norma vectorial compatible con ella.

Idea de la demostración: Se define como $\|x\|_v = \|x \cdot v^*\|_M$ donde $v^* = (1, 0, \ldots, 0)$. Se demuestra que así definida es una norma y que cumple la condición anterior.

La norma de Frobenius es compatible con la norma Euclídea.

Valores y vectores propios

λ es valor propio de $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si y sólo si existe un vector no nulo v tal que

$$\mathbf{A}\, v = \lambda\, v.$$

v se llama *vector propio asociado al valor propio* λ.

Cálculo de valores y vectores propios

$$\mathbf{A}\, v - \lambda\, v = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I})v = 0$$

luego buscamos soluciones no triviales al sistema anterior, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo

$$det(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I}) = 0$$

esto es, debemos calcular las raíces de este polinomio.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ denota el conjunto de matrices cuadradas de orden n con entradas en $\mathbb{C}$

Valores y vectores propios

- Polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}).$$

- Ecuación característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = 0.$$

- Espectro:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}.$$

- Radio espectral:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : p(\lambda) = 0\}.$$

Normas matriciales y radio espectral

Proposición

Para toda matriz **A** y para toda norma matricial $\|\cdot\|_M$ se verifica

$$\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\|_M \ .$$

Demostración:
Si $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ es un valor propio de **A** y v es un vector propio asociado, construimos la matriz

$$\mathbf{M} = (v|0\ldots0)$$

que tiene a v como primera columna y el resto es nula. Como $v \neq 0$, se tiene que $\|\mathbf{M}\|_M \neq 0$.
Por otro lado,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{M} = (\mathbf{A}v|0\ldots0) = (\lambda v|0\ldots0) = \lambda\mathbf{M}$$

Normas matriciales y radio espectral

Demostración (cont.):

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \|\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}\|_M = \|\lambda\mathbf{M}\|_M = |\lambda|\|\mathbf{M}\|_M \\ \|\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}\|_M \leq \|\mathbf{A}\|_M\|\mathbf{M}\|_M \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda|\|\mathbf{M}\|_M \leq \|\mathbf{A}\|_M\|\mathbf{M}\|_M$$

Como $\|\mathbf{M}\|_M \neq 0$, entonces $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|_M$ $\forall\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ y por tanto $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|_M$.

Normas matriciales y radio espectral

Proposición

Para toda matriz **A** se verifica

$$\rho(\mathbf{A}) = \inf_{\|\cdot\|_M} \{\|\mathbf{A}\|_M\}$$

El radio espectral puede ser 0 por lo que no es un mínimo. Por ejemplo para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(A) = 0 < \|A\|, \quad \forall \| \cdot \|$$

Convergencia de sucesiones matriciales

Definición

Decimos que una sucesión de matrices $\{\mathbf{A}_k\}_{k\geqslant 0}$ converge a una matriz $\mathbf{A}$ si existe una norma matricial $\|\cdot\|_M$ para la cual se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\|_M = 0.$$

Observación

Puesto que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes, la convergencia es independiente de la norma elegida. En particular, la convergencia es equivalente a la convergencia componente a componente.

Convergencia de las potencias

Proposición

Para toda matriz $\mathbf{A}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\{\mathbf{A}^k\}_{k\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{0}$

(ii) Existe una norma matricial $\|\cdot\|_M$ para la cual se verifica $\|\mathbf{A}\|_M < 1$

(iii) $\rho(\mathbf{A}) < 1$

Demostración:

$\boxed{(ii) \Leftrightarrow (iii)}$ Se deduce del hecho de que $\rho(\mathbf{A}) = \text{ínf}_{\|\cdot\|_M}\{\|\mathbf{A}\|_M\}$

Convergencia de las potencias

Demostración (cont.):

$\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ Sea $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ y sea v un vector propio asociado. Entonces:

$$\{\mathbf{A}^k v\} = \{\lambda^k v\}$$

Por tanto, si $\{\mathbf{A}^k\} \to \mathbf{0}$, se tiene que $\{\lambda^k v\} \to 0$ y, como $v \neq 0$, debe ser $|\lambda| < 1$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Supongamos que $\|\mathbf{A}\|_M < 1$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_M \leq \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}\|_M^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|_M = 0$$

Por tanto $\{\mathbf{A}^k\} \to \mathbf{0}$

Convergencia de las potencias

Como ejemplo, nos fijamos en la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

¿Hay alguna norma para la cual $\|\mathbf{A}\|_M < 1$? ¿Qué conclusiones obtenemos?

Condicionamiento de una matriz

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}x = b$ para los vectores

- $b = (32, 23, 33, 31)^T$
- $b^* = (32.1, 22.9, 33.1, 30.9)^T$ (una perturbación de 0.1).

Las soluciones son

- $x = (1, 1, 1, 1)^T$
- $x^* = (9.2, -12.6, 4.5, -1.1)^T$.

Esto es, se produce un enorme error relativo en la solución.

Condicionamiento de una matriz

Supongamos que $\mathbf{A}$ es una matriz regular, y consideremos el sistema

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

que tiene por solución $x = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
Si alteramos el segundo término considerando un vector $\mathbf{b}^*$, obtenemos una solución distinta $x^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}^*$
Tomando normas vectoriales y matriciales compatibles, podemos calcular el error

$$\|x - x^*\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|b - b^*\| = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}x\|\frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$$

Y por tanto

$$\frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|b - b^*\|}{\|b\|}$$

Número de condición

Definición

El número de condición (A. Turing) de una matriz regular **A**, $\kappa(\mathbf{A})$, se define como

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial.

Se tiene que $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$, y el sistema se comportará peor con respecto a la propagación de errores de redondeo cuanto mayor sea $\kappa(\mathbf{A})$.

Observaciones acerca del número de condición

- El número de condición puede ser interpretado como un factor de amplificación de los errores en los datos.
- Para $\kappa(\mathbf{A}) \approx 10^k$ podemos esperar una posible pérdida de k dígitos significativos exactos en la solución calculada, independientemente del método que utilicemos.
- En el ejemplo anterior $\kappa(\mathbf{A}) = 4488$ para la norma $\|\cdot\|_\infty$

Alan Turing (1912-1954)

https://arbor.revistas.csic.es/index.php/arbor/article/view/1886

"Alan Turing publicó un artículo de gran relevancia sobre este tema: *Rounding-off errors in matrix processes* (Quart. J. Mech. Appl. Math. 1, pp. 287-308). En este artículo, Turing formuló la eliminación Gaussiana en términos de la factorización LU de una matriz e introdujo la noción de número de condición de una matriz, que son dos de las nociones más fundamentales del Análisis Numérico moderno."