

1.3 Relaciones de equivalencia. Conjuntos cocientes.

Definimos una *relación* (binaria) entre los elementos de un conjunto S (o, simplemente, en S) como un subconjunto $R \subseteq S \times S$.

Si $(a, b) \in R$, se dice que a está relacionado con b por la relación R , y se escribe aRb . Muchas relaciones tienen una o más de las siguientes propiedades:

- **Reflexiva.** $\forall a \in S, aRa$,
- **Simétrica.** $\forall a, b \in S$, si aRb , entonces bRa .
- **Transitiva.** $\forall a, b, c \in S$, si aRb y bRc , entonces aRc .

Por ejemplo:

1. La relación “ a es padre de b ” referida al conjunto de los humanos, no tiene ninguna de estas propiedades.
2. La relación “ a tiene los mismos parientes que b ” tiene las tres.
3. La relación “ a es antecesor de b ” es transitiva.
4. La relación “ a es hermano de b ” es simétrica.

Una relación R en un conjunto S que es reflexiva, simétrica y transitiva es llamada una *relación de equivalencia* sobre S .

Una relación de equivalencia separa los elementos del conjunto S en *bloques* o *clases de equivalencia* donde se agrupan todos los elementos que se relacionan entre sí por la relación dada. Si $a \in S$ es cualquier elemento, definimos “*su clase de equivalencia*” o “*la clase de equivalencia que representa a*”, denotada por \bar{a} (o $[a]$), como el subconjunto de S

$$\bar{a} = \{x \in S \mid xRa\},$$

donde se reúnen todos los elementos equivalentes a a . Cada uno de estos subconjuntos es no vacío, pues por la reflexividad $a \in \bar{a}$, y se verifica que cualesquiera dos bloques \bar{a} , \bar{b} bien son disjuntos o coinciden:

Proposición 1.3.1. *para cualesquiera $a, b \in S$, son equivalentes*

1. $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$.
2. aRb .
3. $\bar{a} = \bar{b}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) \Rightarrow (2): Supongamos que $\exists c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Como cRa y cRb , por la simetría, tenemos aRc y cRb , y entonces, por la transitividad, aRb .

(2) \Rightarrow (3): Si $x \in \bar{a}$, entonces $xRa \wedge aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow x \in \bar{b}$, así que $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. Un argumento similar prueba que $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ y por tanto $\bar{a} = \bar{b}$.

(3) \Rightarrow (1) Es obvio. □

Resulta así que las diferentes clases de equivalencia proporcionan una descomposición S en subconjuntos no vacíos dos cualesquiera de ellos son disjuntos. Esto es lo que se llama una *partición* de S .

Por ejemplo, si R es la relación “ a tiene los mismos parientes que b ” entre los españoles, que es claramente de equivalencia, agrupa a los españoles en bloques conformados por las familias.

Si R es la relación entre los puntos del plano \mathbb{R}^2 estableciendo que pRq si p y q están a la misma distancia del origen, los bloques son las circunferencias $C_r = \bar{r}$ centradas en el origen y radio r , con $r \geq 0$.

Similarmente, si R es la relación “ a da el mismo resto que b al dividirlo por 2” sobre el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ de los números naturales, esta relación parte el conjunto de naturales en dos subconjuntos disjuntos, de una parte el conjunto de los números pares, $\bar{0}$, y de otra el conjunto de los impares, $\bar{1}$.

Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto S , se define el *conjunto cociente de S por la relación R* , denotado S/R , como el conjunto cuyos elementos son los diferentes bloques o clases de equivalencia para tal relación:

$$S/R = \{\bar{a} \in \mathcal{P}(S) \mid a \in S\}.$$

En tal descripción, es muy importante tener claro que, aunque los elementos de S/R están parametrizados por los elementos a de S , tal parametrización no es unívoca pues tenemos que tener muy presente que

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow aRb.$$

Desde esa observación, puede pensarse en el conjunto cociente S/R como el *que se obtiene a considerar iguales (el mismo, identificados) todos los elementos de S que son equivalentes entre sí por la relación dada*.

Así, por ejemplo, para la relación R sobre \mathbb{N} donde dos números son equivalentes si dan el mismo resto al dividirlos por 2, el conjunto cociente tiene exactamente dos elementos

$$S/R = \{\bar{0}, \bar{1}\},$$

puesto que para cualquier natural n , $\bar{n} = \bar{0}$ si n es par, y $\bar{n} = \bar{1}$ si n es impar.

Análogamente, Si R es la relación entre los puntos del plano \mathbb{R}^2 estableciendo que dos puntos p y q son equivalentes si están a la misma distancia del origen, el conjunto cociente

$$\mathbb{R}^2/R = \{C_r \mid r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$$

es el conjunto de las diferentes circunferencias centradas en el origen del plano \mathbb{R}^2 (¡sus elementos son circunferencias, no puntos!).

La proyección canónica. Dada una relación de equivalencia R en un conjunto S se tiene una aplicación que llamaremos la proyección canónica $p : S \rightarrow S/R$ y que lleva un elemento $x \in S$ en su clase de equivalencia, $p(x) = \bar{x}$. Esta aplicación es claramente sobreyectiva.

La relación núcleo de una aplicación. Toda aplicación $f : S \rightarrow T$ da lugar a una relación de equivalencia R_f en su dominio S , definida por $xR_fy \Leftrightarrow f(x) = f(y), \forall x, y \in S$. Esta relación es llamada la relación núcleo de f .

Notación. A la relación núcleo de una aplicación f también la denotaremos como \sim_f .

Notemos que la relación de equivalencia asociada a la proyección canónica $p : S \rightarrow S/R$ es precisamente R , i.e. $R_p = R$.

La siguiente observación es muy útil para definir aplicaciones desde un conjunto cociente.

Proposición 1.3.2. *Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto S . Sea $f : S \rightarrow T$ una aplicación con la propiedad*

$$\forall a, b \in S, \text{ si } aRb \text{ entonces se verifica que } f(a) = f(b).$$

Entonces hay una aplicación $\bar{f} : S/R \rightarrow T$ definida por la fórmula

$$\bar{f}(\bar{a}) = f(a), \forall \bar{a} \in S/R.$$

Se verifica que $Im(\bar{f}) = Im(f)$, por tanto que \bar{f} es sobreyectiva si y solo si f lo es. Además \bar{f} es inyectiva si y solo si se verifica que

$$\forall a, b \in S, \text{ si } f(a) = f(b), \text{ entonces } aRb.$$

DEMOSTRACIÓN. Hemos de comprobar que la correspondencia $\bar{a} \mapsto f(a)$ define una aplicación de S/R en T . La primera condición de aplicación es clara, pues $\forall \bar{a} \in S/R$ tenemos que $(\bar{a}, f(a)) \in f$, esto es, todo elemento tiene asignada una imagen. Para ver la segunda, esto es que cada elemento tiene asignada una única imagen, supongamos que $(\bar{a}, f(a)), (\bar{b}, f(b)) \in S/R$, y que $\bar{a} = \bar{b}$. Entonces aRb y, por hipótesis, $f(a) = f(b)$. Luego, efectivamente, tenemos una aplicación bien definida.

La afirmación $Im(\bar{f}) = Im(f)$, y su consecuencia sobre la sobreyectividad, es inmediata. Para estudiar la inyectividad de \bar{f} , notemos que $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b}) \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Par tanto, \bar{f} será inyectiva si y solo si $f(a) = f(b) \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$ o, equivalentemente, $f(a) = f(b) \Rightarrow aRb$. \square

La aplicación $\bar{f} : S/R \rightarrow T$ es llamada la *inducida por f en el cociente*. Esta asigna a cada clase de equivalencia el valor que f asigna a cualquiera de sus representantes lo que, lógicamente, explica la condición de que f sea constante sobre elementos relacionados.

EJEMPLO. Consideremos $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, el intervalo cerrado de la recta real formado por los números t tales que $0 \leq t \leq 1$. Definamos en él la relación de equivalencia R por la que identificamos los puntos 0 y 1, y solo estos. Más precisamente, decimos que

$$tRu \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } t, u \in \{0, 1\} \\ t = u \text{ en otro caso} \end{cases}$$

De manera que el conjunto cociente $[0, 1]/R$ consiste del bloque $\bar{0} = \bar{1} = \{0, 1\}$ y de los bloques unitarios $\bar{t} = \{t\}$ con $0 < t < 1$.

Consideremos ahora la aplicación $f : [0, 1] \rightarrow C_1$, donde $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es la circunferencia del plano real con radio 1 y centrada en el origen, definida por

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Puesto que f es sobreyectiva y $f(t) = f(u) \Leftrightarrow tRu$, tenemos una biyección inducida

$$[0, 1]/R \cong C_1$$

que permite pensar a la circunferencia como el resultado de identificar los extremos del intervalo $[0, 1]$.

Como consecuencia inmediata de la Proposición 1.3.2 tenemos el siguiente

Teorema 1.3.3 (Descomposición canónica de una aplicación.). *Dada una aplicación $f : S \rightarrow T$ existe un isomorfismo $b : S/R_f \xrightarrow{\cong} Im(f)$ que hace commutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ S/R_f & \xrightarrow[b]{\cong} & Im(f) \end{array}$$

donde p es la proyección canónica e i es la inclusión.

Demostración. Ya que, por definición $xR_fy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, la Proposición 1.3.2 nos permite definir $\bar{f} : S/R_f \rightarrow T$ como $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ que además será inyectiva y cumple $f\bar{p}(x) = f(x)$. Definimos entonces $b : S/R_f \rightarrow Im(f)$ como $b(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ y tenemos el teorema. ■

EJERCICIOS

1. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos $(a, b) \sim (c, d)$ si $a + d = b + c$.
 - (a) Verificar que \sim es una relación de equivalencia.
 - (b) Sea $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación definida por $f(a, b) = a - b$. Verificar que f induce una biyección $\mathbb{N}^2 / \sim \cong \mathbb{Z}$.
2. ¿Qué está mal en la siguiente demostración de que toda relación R sobre S que es simétrica y transitiva es reflexiva? Para $a, b \in S$, aRb , implica bRa (por simetría) y entonces (por transitividad) aRa .
3. Sea $f : S \rightarrow T$ una aplicación. Probar que, si f es sobreyectiva, induce una biyección $S/R_f \cong T$.
4. Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto. Sea $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ la aplicación tal que $f(A) = A \cap Y$, para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.
 - (a) Probar que f es una sobreyeción.
 - (b) Describir la relación R_f , núcleo de f .
 - (c) Probar que f induce una biyección $\mathcal{P}(X)/R_f \cong \mathcal{P}(Y)$.
5. Sea R una relación de equivalencia sobre el conjunto S . La aplicación $p : S \rightarrow S/R$ definida por $p(a) = \bar{a}$ es llamada la *proyección canónica* de S sobre el cociente. ¿Qué relación hay entre R y R_p ?
6. Un subconjunto $P \subseteq \mathcal{P}(S)$, recordar, es llamado una *partición del conjunto* S si
 - (a) $\forall A \in P, A \neq \emptyset$.
 - (b) $\bigcup_{A \in P} A = S$.
 - (c) Para cualesquiera $A, B \in P, A \neq B$, se verifica que $A \cap B = \emptyset$.

Así, por ejemplo, el conjunto cociente S/R , para R una relación de equivalencia sobre S , es una partición.

Sea P una partición de S . Definimos la aplicación $p : S \rightarrow P$ por $p(a) = A$ si $a \in A$. ¿Qué relación hay entre P y S/R_p ?