



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

ANÁLISIS FUNCIONAL

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026



# Índice general



# Repaso

**Definición 0.1** (Espacio normado).  $E$  un espacio vectorial y  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función que verifica:

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$
2.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que  $E$  es un **espacio normado**. Podemos definir además una función  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$  a la que llamaremos **distancia**.

Decimos que un espacio  $E$  es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente. Si  $E$  es un espacio normado completo, entonces  $(E, \|\cdot\|)$  es un **espacio de Banach**.

**Definición 0.2** (Espacio prehilbertiano). Sea  $H$  es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo  $x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se verifica que

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z) \\(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha(x, y) + \beta(x, z)\end{aligned}$$

2. **Simétrica:**  $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:**  $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:**  $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Las dos últimas propiedades se pueden resumir en  $(x, x) = 0 \iff x = 0$ .

Diremos que  $(H, (\cdot, \cdot))$  es un **espacio prehilbertiano**.

Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  que es claramente una norma.

Si  $\|\cdot\|$  es completa, diremos que  $(H, (\cdot, \cdot))$  es un **espacio de Hilbert**.

**Ejemplo.** Los siguientes espacios son de Banach:

1.  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .
2.  $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$ , donde  $|x| = |(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$ . Además es de Hilbert ya que  $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$  es un producto escalar.
3. Dado<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{R}^N$  tomamos  $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada en } A\}$ . Podemos definir una norma en este espacio como

$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

4. Tomamos  $K \subset \mathbb{R}^N$  compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en  $K$  denotado por  $\mathcal{C}(K)$  y el espacio  $(K, (\cdot, \cdot))$ , donde

$$(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$$

es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos

$$\|f\| = \left( \int_K f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

**Ejemplo** (El espacio del punto 4 No es de Hilbert). Veámoslo con un contraejemplo. Tomamos  $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y podemos definir  $\forall n \in \mathbb{N}$  la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $f_n^2$  viene dada por la siguiente gráfica:



De esta forma tenemos que

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x) dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$$

y vemos que

$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \rightarrow 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \rightarrow 1 \end{cases}$$

Con esto tenemos que la sucesión  $\{f_n\} \rightarrow 0$  en  $(\mathcal{L}([0, 1]), (\cdot, \cdot))$  (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

---

<sup>1</sup>la  $b$  de  $\mathcal{C}_b$  viene de *bounded* (acotado en inglés)

**Ejemplo.** Consideramos  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$  medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$  con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

**Ejemplo.** Sea  $1 \leq p < \infty$ . Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de  $p$  de la siguiente forma<sup>2</sup>:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < \infty \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int |f|^p dx \right)^{1/p} \left( \int |g|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

**Ejemplo.**

1.  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$  con  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p}$  ( $x, y = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ ).
2.  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_{\infty})$  con  $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, N\}$
3. Sea  $p = \infty$ . Tenemos

$$L^{\infty} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma<sup>3</sup>:

$$\sup_{\Omega} |f| = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

<sup>2</sup>donde asumimos que  $1/\infty = 0$

<sup>3</sup>a.e. viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

En algunos libros se denota por *ess sup*.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \sup_{\Omega} |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio  $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  con  $\|f\|_\infty = \sup_{\Omega} |f|$  es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con  $p = \infty$ ,  $p' = 1$  nos dice que para  $f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $g \in L^1(\Omega)$  entonces  $fg \in L^1(\Omega)$  y  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$  es una norma en  $H$ .

**Ejemplo.** Consideramos  $1 \leq p < \infty$  y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$$

entonces  $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$  es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar  $x \in \mathcal{L}^p$ ,  $y \in \mathcal{L}^{p'}$  y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \quad \text{y} \quad \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|x\|_{\mathcal{L}^p} \|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para  $p = 2$  tenemos que  $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$  es un espacio de Hilbert. Para  $p = \infty$  podemos definir  $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$  y con  $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  es un espacio de Banach.

**Ejemplo.** Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos  $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$  y es un subespacio de  $\mathcal{L}^\infty$ .
2. Podemos tomar otro subespacio de este,  $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$  que de nuevo es un subespacio de  $\mathcal{L}^\infty$ .