Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad. Relaciones de prácticas

ELÍAS MONGE SÁNCHEZ
DANIEL MORÁN SÁNCHEZ
JESÚS MUÑOZ VELASCO

Mayo 2023

Índice

3. Relación 3

3.1. Ejercicio 1:

Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:
M: 0.3 A: 0.2 C: 0.15 M y A: 0.1 M y C: 0.05 A y C: 0.06 M, A y C: 0.01
Calcular las probabilidades siguientes:
a) que una persona viaje en metro y no en autobús.
b) que una persona tome al menos dos medios de transporte;
c) que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús;
d) que viaje en metro, o bien en autobús y en coche;
e) que una persona vaya a pie.
Solución:

a) $P(M-A) = P(M) - P(M \cap A) = 0.3 - 0.1 = 0.2$

b) $P((A \cap C) \cup (A \cap M) \cup (C \cap M) \cup (A \cap C \cap M)) =$
$P(((A\cap C)\cup(A\cap M)) + P((C\cap M)\cup(A\cap C\cap M)) - P(((A\cap C)\cup(A\cap M))\cap((C\cap M)\cup(A\cap C\cap M))) =$
$P(A \cap C) + P(A \cap M) - P(((A \cap C) \cap (A \cap M)) + P((C \cap M) + P(A \cap C \cap M)) - P((C \cap M) \cap$
$(A \cap C \cap M) - P(A \cap C \cap M) =$
$\underbrace{P(A \cap C)}_{0.06} + \underbrace{P(A \cap M)}_{0.1} - \underbrace{P(A \cap C \cap M)}_{0.01} + \underbrace{P((C \cap M)}_{0.05} + \underbrace{P(A \cap C \cap M)}_{0.01} - \underbrace{P(A \cap C \cap M)}_{0.01} - \underbrace{P(A \cap C \cap M)}_{0.01} =$
0.19

c) $P((C \cup M) - A) = P(C \cup M) - P((C \cup M) \cup A) = P(C) + P(M) - P(C \cap M) - P((C \cup M) \cap A) \overset{*}{=}$
$\underbrace{P(C)}_{0.15} + \underbrace{P(A)}_{0.3} - \underbrace{P(C \cap M)}_{0.05} - \underbrace{P((C \cup M) \cap A)}_{0.15} = 0.25$
$(*) = P((C \cup M) \cap A) = P((C \cap A) \cup (M \cap A)) = P(C \cap A) + P((M \cap A) - P((C \cap A) \cap (M \cap A)) =$
$\underbrace{P(C \cap A)}_{0.06} + \underbrace{P((M \cap A)}_{0.1} - \underbrace{P(C \cap M \cap A)}_{0.01} = 0.15$

d) $P(M \cup (A \cap C)) = \underbrace{P(M)}_{0.3} + \underbrace{P(A \cap C)}_{0.06} - \underbrace{P(M \cup A \cup C)}_{0.01} = 0,35$

e) $P(A \cup M \cup C) =$
$\underbrace{P(A)}_{0.2} + \underbrace{P(M)}_{0.3} + \underbrace{P(C)}_{0.15} - \underbrace{P(A \cap M)}_{0.1} - \underbrace{P(A \cap C)}_{0.06} - \underbrace{P(M \cap C)}_{0.05} + \underbrace{P(M \cup A \cup C)}_{0.01} = 0.45$, entonces
$\underbrace{P(\Omega)}_{1} - \underbrace{P(A \cup M \cup C)}_{0.45} = 0,55$

3.2. Ejercicio 2:

Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico (ω, A, P), tales que P(A)=0,4, P(B) = 0,2, P(C)=0,3, $(A \cap B) = 0,1$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) sólo ocurre A,
Esto será $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ por lo que tendré que calcular $P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$. Por la definición de complementario y con los axiomas tenemos que

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P((A - B) - C) = P(A - B) - P(C \cap (A - B))$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$
$$P(C \cap (A - B)) = P((C \cap A) - (C \cap B)) = P(C \cap A) - P((C \cap A) \cap (C \cap B))$$

Aplicando algunas propiedades tenemos

$$(A \cup B) \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \Rightarrow (A \cap C) = \emptyset \ , \ (B \cap C) = \emptyset$$

Y por tanto
$$P(C \cap A) - P((C \cap A) \cap (C \cap B)) = P(\emptyset) - P(\emptyset \cap \emptyset) = 0$$

Concluyendo

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0,3 - 0 = 0,3 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 30\,\%$$

b) ocurren los 3 sucesos,
Si esto ocurre estaremos calculando la probabilidad relativa a $A \cap B \cap C$. Por el apartado anterior sabemos que $B \cap C = \emptyset$ y por lo tanto $A \cap B \cap C = A \cap \emptyset = \emptyset$ y, por los axiomas tenemos $P(\emptyset) = 0$ y la probabilidad es del 0 % (es un suceso imposible).

c) ocurren A y B pero no C, Es decir $A \cap B \cap \bar{C}$

$$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A \cap (B - C)) = P((A \cap B) - (A \cap C)) = P(A \cap B) - P((A \cap B) \cap \underbrace{(A \cap C)}_{\emptyset}) =$$

$$P(A \cap B) - P(\emptyset) = 0,1 - 0 = 0,1 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 10\,\%$$

d) por lo menos dos ocurren,
Las combinaciones de que ocurran al menos 2 son:

a) A y B
b) A y C
c) B y C
d) A y B y C

Esto nos lleva a calcular

$$P((A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap C)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(A \cap B \cap C)}_{\emptyset})) = P(A \cap B) = 0,1 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 10\,\%$$

e) ocurren dos y no más
Ahora tenemos las mismas combinaciones de antes excepto la *d*) y por tanto calculamos

$$P((A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap C)}_{\emptyset}) = P(A \cap B) = 0,1 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 10\,\%$$

f) no ocurren más de dos,
Esta opción incluye a todos los casos a excepción de que ocurran A,B y C simultáneamente, es decir, la probabilidad se podría calcular como:

$$P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - \underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{0} = 1$$

ya que al ser C disjunto con $A \cup B$ lo será tanto con A como con B como con $A \cap B$.

g) ocurre por lo menos uno,
Esto incluye:

a) A
b) B
c) C
d) A y B
e) A y C
f) B y C
g) A y B y C

Lo cual son las posibilidades del apartado anterior sumado a las posibilidades de obtener los tres que, como ya hemos visto, son nulas por lo que

$$P(A \cup B \cup C \cup \underbrace{(A \cap B)}_{(A\cap B)\subset A} \cup \underbrace{(A \cap C)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap C)}_{\emptyset} + \underbrace{(A \cap B \cap C)}_{\emptyset}) = P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \underbrace{P(A \cap C)}_{0} - \underbrace{P(B \cap C)}_{0} + \underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{0} =$$

$$= 0,4 + 0,2 + 0,3 - 0,1 - 0 - 0 - 0 = 0,8 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 80\,\%$$

h) ocurre sólo uno,
Esto es $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$. Aplicando las propiedades:

$$P((A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)) = P((A\cap(\bar{B}\cap\bar{C}))\cup(B\cap(\bar{A}\cap\bar{C}))\cup(C\cap(\bar{A}\cap\bar{B}))) =$$

$$P((A\cap(\overline{B\cup C}))\cup(B\cap(\overline{A\cup C}))\cup(C\cap(\overline{A\cup B}))) = P((A-(B\cup C))\cup(B-(A\cup C))\cup(C-(A\cup B))) =$$

$$P(((A-B)\cap\underbrace{(A-C)}_{A})\cup((B-A)\cap\underbrace{(B-C)}_{B})\cup(\underbrace{(C-A)}_{C}\cap\underbrace{(C-B)}_{C})) =$$

$$= P((A-B)\cup(B-A)\cup(C)) = P(A-B) + P(B-A) + P(C)$$

Calculando cada sumando por separado

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$
$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

Y nos queda

$$0,3 + 0,1 + 0,3 = 0,7 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 70\,\%$$

i) no ocurre ninguno.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) =$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \underbrace{P(A \cap C)}_{0} - \underbrace{P(B \cap C)}_{0} + \underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{0}) =$$

$$= 1 - (0,4 + 0,2 + 0,3 - 0,1) = 1 - 0,8 = 0,2 \Rightarrow \text{La probabilidad es del } 20\,\%$$

3.3. Ejercicio 3:

Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.

b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos: *la primera bola es roja, la segunda bola es blanca* y calcular la probabilidad de cada uno de ellos.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?

Solución:

a) El espacio muestral sería:

$\Omega = \{b_ib_j;\ i,j = 1,2;\ i \neq j\} \cup \{r_ib_j;\ i = 1,2,3;\ j = 1,2\} \cup \{b_ir_j;\ i = 1,2;\ j = 1,2,3\} \cup \{r_ir_j;\ i,j = 1,2,3\ i \neq j\}$
$|\Omega| = 2 + 6 + 6 + 6 = 20$

b) La primera bola es roja:

$R1 = \{r_ib_j;\ i = 1,2,3;\ j = 1,2\} \cup \{r_ir_j;\ i,j = 1,2,3;\ i \neq j\}$

$$P(R1) = \frac{|R1|}{|\Omega|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

La segunda bola es blanca:

$B2 = \{r_ib_j;\ i = 1,2,3;\ j = 1,2\} \cup \{b_ib_j;\ i,j = 1,2;\ i \neq j\}$

$$P(B2) = \frac{|B2|}{|\Omega|} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

c) La probabilidad sería 1 menos la probabilidad del suceso complementario, es decir, de que la primera sea blanca y la segunda roja:

$R1 \cup B2 = \{r_ib_j;\ i = 1,2,3;\ j = 1,2\} \cup \{r_ir_j;\ i,j = 1,2,3;\ i \neq j\} \cup \{b_ib_j;\ i,j = 1,2;\ i \neq j\}$

$$P(R1 \cup B2) = \frac{|R1 \cup B2|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

3.4. Ejercicio 4:

Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas simultáneamente sean de distinto color?

Sean a (bolas blancas) y b (bolas negras), entonces sean $A, B \in \varLambda$, los sucesos referidos a que la bola sea blanca o negra, respectivamente.

$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{a}{a+b}$ y, análogamente: $P(B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{b}{a+b}$

Por tanto, como las dos bolas se sacan simultáneamente, podemos afirmar que la probabilidad de que salgan ambas es la multiplicación de las mismas: $P(AB) = \frac{a}{a+b} * \frac{b}{a+b-1}$ ya que hay que considerar que en la segunda extracción (aunque diga simultánea se consideran secuenciales en los cálculos), hay una bola menos.

$$= \frac{ab}{a^2 + b^2 + 2ab - a - b}$$

Análogamente, para el caso contrario, que salgan negra y blanca el resultado es $P(BA) = \frac{b}{a+b} * \frac{a}{a+b-1} = \frac{ba}{a^2+b^2+2ab-a-b}$ y por tanto la probabilidad de que suceda alguno de los dos es:

$$P(AB) + P(BA) = \frac{ab}{a^2 + b^2 + 2ab - a - b} + \frac{ba}{a^2 + b^2 + 2ab - a - b} = \frac{2ab}{a^2 + b^2 + 2ab - a - b}$$

3.5. Ejercicio 5:

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) dos bolas rojas,
Los distintos casos que pueden resultar de sacar 2 bolas rojas se calculan como $\binom{3}{2}$. Las distintas posibilidades de sacar 2 bolas de cualquier color son $\binom{8}{3}$. La probabilidad la puedo calcular como los casos favorables partido de los casos totales por lo que:

$$P(\text{Roja , Roja}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28} = 0.107$$

b) dos bolas blancas,
Si seguimos el razonamiento anterior los posibles casos de sacar 2 bolas blancas de entre todas las blancas son $\binom{5}{2}$. Por tanto:

$$P(\text{Blanca , Blanca}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{20}{56} = 0.357$$

c) una blanca y otra roja.
Los posibles casos de sacar una bola blanca son $\binom{5}{1}$ y las de sacar una roja son $\binom{3}{1}$. El número total de casos no varía y por tanto:

$$P(\text{Blanca , Roja}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\ 2!}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56} = 0.5357$$

3.6. Ejercicio 6:

En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?

b) ¿Cuantos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor que 4/5?

Solución:

a) Empecemos calculando la probabilidad de no ganar ningún premio. La probabilidad de ganar será 1 menos el resultado que obtengamos. Con 1 billete, la probabilidad es de $\frac{98}{100}$. Con 2 la probabilidad será de $\frac{98}{100} \times \frac{97}{99}$. Con 3, $\frac{98}{100} \times \frac{97}{99} \times \frac{96}{98}$ y así sucesivamente obtenemos que la probabilidad de no ganar ningún premio comprando n billetes será de:

$$\frac{98!(100-n)!}{100!(98-n)!} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{98-k}{100-k}$$

Por tanto la probabilidad de ganar un premio comprando n billetes será:

$$P(n) = 1 - \frac{98!(100-n)!}{100!(98-n)!} = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{98-k}{100-k}$$

Entonces comprando 12 billetes la probabilidad será:

$$P(12) = 1 - \prod_{k=0}^{11} \frac{98-k}{100-k} = 0.22667$$

b) Para que la probabilidad sea mayor que 4/5, como P(n) es creciente, buscamos un n tal que:

$$P(n-1) < 4/5 \leq P(n)$$

Vemos que para n=55, se cumple la condición:

$$P(54) = 0.790909 < 0.8 \leq 0.8 = P(55)$$

3.7. Ejercicio 7:

Se consideran los 100 primeros números naturales. Se sacan 3 al azar.

a) Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto
b) Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto.
c) Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, de que existan dos, y la de que los tres lo sean.

Para el transcurso del ejercicio vamos a suponer que no se pueden repetir números. El hecho de que si el 0 es par no influye en ningún apartado así que nos da igual.
Sea $\square$ el suceso referido a sacar un cuadrado perfecto, y sea $P_i(\square)$ la probabilidad asociada al suceso referido a no sacar cuadrado perfecto en la i-ésima sacada de bola.

a) Los cuadrados perfectos son 10 en total, (los cuadrados de los primeros 10 números naturales)
   Entonces $P_1(\square) = \frac{90}{100}$
   $P_2(\square) = \frac{89}{99}$
   $P_3(\square) = \frac{88}{98}$
   Podemos afirmar entonces que la probabilidad de que salga algún cuadrado al menos es de
   $P(\square) = \frac{90}{100} \times \frac{89}{99} \times \frac{88}{98} = 0.727$

b) $P(\Omega - \square) = P(\Omega) - P(\square) = 1 - 0.727 = 0.273$

c) Empiezo por la Probabilidad de que solo salga 1, calcularé qué probabilidad hay de que salgan 1, 2, o 3 cuadrados perfectos, $P(1\square), P(2\square), P(3\square)$, respectivamente. :

$$P(1\square) = \frac{\binom{90}{2} \times \binom{10}{1}}{\binom{100}{3}} = 0.2477$$

$$P(2\square) = \frac{\binom{90}{1} \times \binom{10}{2}}{\binom{100}{3}} = 0.025$$

$$P(3\square) = \frac{\binom{90}{0} \times \binom{10}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.00742$$

3.8. Ejercicio 8:

En una carrera de relevos cada equipo se compone de 4 atletas. La sociedad deportiva de un colegio cuenta con 10 corredores y su entrenador debe formar un equipo de relevos que disputará el campeonato, y el orden en que participarán los seleccionados.

a) ¿Entre cuántos equipos distintos habrá de elegir el entrenador si los 10 corredores son de igual valía? (Dos equipos con los mismos atletas en orden distinto se consideran diferentes)

Dado que sí importa el orden, no se pueden repetir corredores y que hay 10 corredores posibles a rellenar 4 huecos se trata de un problema de variación sin repetición.

$$V_{4,10} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Por tanto hay 5040 posibles equipos.

b) Calcular la probabilidad de que un alumno cualquiera sea seleccionado.

Sabiendo que hay 10 alumnos y solo 4 plazas, las posibilidades de que un alumno cualquiera sea seleccionado serían de

$$\frac{4}{10} = 0,4 \;\Rightarrow\; \text{Tiene un } 40\,\% \text{ de posibilidades}$$

3.9. Ejercicio 9:

Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rechazándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

Solución:

Para calcular la probabilidad de que un lote sea aceptado, calcularemos las probabilidades de que se encuentren 0, 1, 2, 3, 4 y 5 bombillas defectuosas, llamando a dichos sucesos A, B, C, D, E y F respectivamente.

Para el cálculo de cada una de las probabilidades, haremos uso de combinatoria y la regla de Laplace. El número de maneras posibles de seleccionar 60 de entre 300 bombillas es de $\binom{300}{60}$, esos serán los casos posibles para cada suceso.
Los casos favorables del suceso A serán el número de formas posibles de seleccionar 60 bombillas perfectas de entre las 290 que hay, por lo que su probabilidad quedaría:

$$P(A) = \frac{\binom{290}{60}}{\binom{300}{60}} = \frac{290!\ 60!\ 240!}{300!\ 60!\ 230!} = \frac{240 \times 239 \times ... \times 231}{300 \times 299 \times ... \times 291} = \prod_{k=0}^{9} \frac{240-k}{300-k} = 0.103328$$

Para la probabilidad del suceso B hay que tener en cuenta que hay 10 maneras de seleccionar la bombilla defectuosa, para el suceso C hay $\binom{10}{2}$ formas de seleccionarla y así hasta el suceso F, de manera que las probabilidades quedan así:

$$P(B) = \frac{\binom{10}{1}\binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = 10 \times \frac{290!\ 60!\ 240!}{300!\ 59!\ 231!} = 10 \times \frac{60}{291} \prod_{k=0}^{8} \frac{240-k}{300-k} = 0.268383$$

Y de manera similar:

$$P(C) = \frac{\binom{10}{2}\binom{290}{58}}{\binom{300}{60}} = \frac{10 \times 9 \times 60 \times 59}{2 \times 292 \times 291} \prod_{k=0}^{7} \frac{240-k}{300-k} = 0.307137$$

$$P(D) = \frac{\binom{10}{3}\binom{290}{57}}{\binom{300}{60}} = \binom{10}{3} \left(\prod_{k=0}^{2} \frac{60-k}{291+k} \right) \left(\prod_{k=0}^{6} \frac{240-k}{300-k} \right) = 0.203879$$

$$P(E) = \frac{\binom{10}{4}\binom{290}{56}}{\binom{300}{60}} = \binom{10}{4} \left(\prod_{k=0}^{3} \frac{60-k}{291+k} \right) \left(\prod_{k=0}^{5} \frac{240-k}{300-k} \right) = 0.086910$$

$$P(F) = \frac{\binom{10}{5}\binom{290}{55}}{\binom{300}{60}} = \binom{10}{5} \left(\prod_{k=0}^{4} \frac{60-k}{291+k} \right) \left(\prod_{k=0}^{4} \frac{240-k}{300-k} \right) = 0.024852$$

Y la suma quedaría:

$$P(X) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = 0.994489$$

Se podría condensar todo en una sola fórmula:

$$P(X) = \sum_{n=0}^{5} \frac{\binom{10}{n}\binom{290}{60-n}}{\binom{300}{60}} = \sum_{n=0}^{5} \left[\binom{10}{n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{60-k}{291+k} \right) \left(\prod_{k=0}^{10-n-1} \frac{240-k}{300-k} \right) \right] = 0.994489$$

3.10. Ejercicio 10:

Una secretaria debe echar al correo 3 cartas; para ello, introduce cada carta en un sobre y escribe las direcciones al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una carta llegue a su destino?

Pongamos el suceso de que alguna carta llegue a su destino, como A_x para cada x variando desde 1 hasta 3. Como todos los sucesos tienen las mismas condiciones, podemos afirmar para todos que:

$P(A_x) = \frac{1}{3}, \forall x = 1, 2, 3$
$P(A_x \cap A_y) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \forall x, y = 1, 2, 3,\ x \neq y$
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$, podemos destacar que si los dos primeros se dan, el tercero es trivial.

Por tanto tenemos que, como hemos visto en clase.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$