



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

1. Tema 1: Espacios Topológicos	5
---------------------------------	---

Tema 1: Espacios Topológicos

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es una par (X, \mathcal{T}) , donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X .

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia \mathcal{T} se le llama **topología** en el conjunto X . A los elementos de \mathcal{T} se les llama **abiertos** en el espacio topológico (X, \mathcal{T}) .

Observación. De (A1) podemos concretar que si $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{T}$. En general, si $\{U_i\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^\infty U_i$ no tiene por qué ser abierto.

Ejemplo.

- **Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t.¹.
- **Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.
- **Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.
- **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \text{ (intersección de finitos es finito)}$$
$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) \text{ (unión de finitos es finito)}$$

- **Topología connumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.
- $\mathbb{R}, \mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.
- **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t.
- **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S, U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$. (es un caso particular del punto incluido, \mathcal{T}_a).

¹A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

Observación. En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

Ejercicio 1. Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Ejercicio 2. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$.

Topología métrica. La topología usual de \mathbb{R}^n

Definición 1.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

(D1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D2) (simetría) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$.

(D3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

A la aplicación d la llamaremos **distancia**.

Ejercicio 3. (D2) + (D3) + 2ª parte de (D1) se deduce 1ª parte de (D1) luego $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

Definición 1.3. (X, d) e.m. $x \in X$, $r > 0$, se definen:

- La **bola (abierto)** de centro x y radio r como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- La **bola cerrada** de centro x y radio r como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \subset X$$

- La **esfera** de centro x y radio r como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

Algunas propiedades que se deducen de la definición anterior son:

- $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$
- Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x, s) \subset B(x, r)$

Ejemplo. (Espacio euclídeo \mathbb{R}^n) En \mathbb{R}^n consideramos la **distancia usual**,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico (\mathbb{R}^n, d) lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

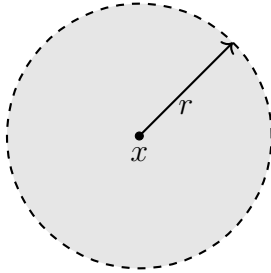
-) Si $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$,

$$B(x, r) = (x - r, x + r)$$

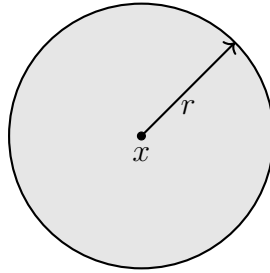
$$\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$$

$$S(x, r) = \{x, y\}$$

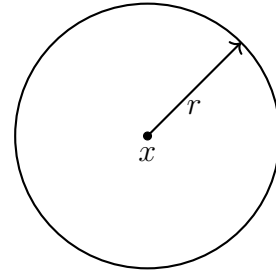
-) En $n = 2$ tenemos



$B(x, r) \equiv \text{disco}$

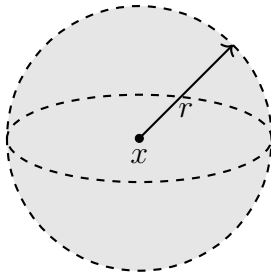


$\overline{B}(x, r) \equiv \text{disco cerrado}$

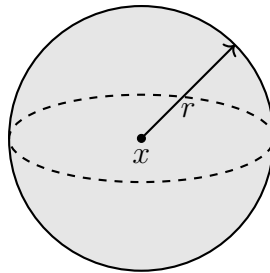


$S(x, r) \equiv \text{circunferencia}$

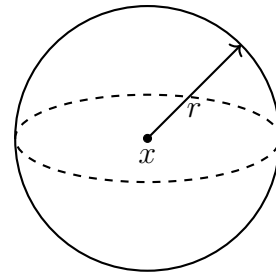
-) En $n = 3$ tenemos:



$B(x, r) \equiv \text{bola}$



$\overline{B}(x, r) \equiv \text{bola cerrada}$



$S(x, r) \equiv \text{esfera}$

Ejemplo. $X \neq \emptyset$ se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x, y) = \begin{cases} X & \text{si } r > 1 \\ \{x\} & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x, y) = \begin{cases} X & \text{si } r \geq 1 \\ \{x\} & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

$$S(x, y) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si } r = 1 \\ \emptyset & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$