Apellidos

Firma

Nombre

45/50

Métodos Numéricos II. Curso 2023/24.

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

15 de mayo de 2024

$\boxed{1}$ Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + R(f).$$

1.5 *a*) Determina los nodos y los coeficientes para que la fórmula anterior tenga grado de exactitud máximo. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

1 *b*) Obtén la expresión del error de dicha fórmula.

0.5 *c*) Utiliza la fórmula anterior para estimar el valor de

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(1-x^2)dx\,.$$

[3 puntos]

$\boxed{2}$ Considera la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio:

$$\int_{a}^{a+h} f(x)dx = \frac{3h}{4}f(a) + \frac{h}{4}f(a+2h) + R(f)$$

1 *a*) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

1 *b*) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula incluyendo una expresión del error.

1 *c*) Deduce un método multipaso lineal para aproximar la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(f,x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases} \tag{1}$$

[3 puntos]

$\boxed{3}$ Para resolver numéricamente el PVI (1) se propone el método de Runge-Kutta Radau dado por el arreglo de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Estudia la convergencia del método.

Nota: No es necesario que compruebes que Φ es Lipschitziana.

[2 puntos]

① Consistencia 1 pto

② Estabilidad 1 pto.

4 Para aproximar la solución del PVI (1) se considera el método multipaso

$$x_{n+3} = x_n + h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1})$$

0.5 a) ¿Qué relaciones deben existir entre los parámetros β_1 y β_2 para que el método anterior sea convergente? Justifica tu respuesta.

0.5 b) Calcula los coeficentes β_1 y β_2 para que el orden de convergencia sea máximo. Indica el orden de convergencia y el término principal del error de curvatura local.

1 c) Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = x + t \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

Para ello, tomando $h = 1/4$, utiliza el método de Euler para obtener las condiciones iniciales que necesites. A continuación utiliza ~~un~~ el método anterior hasta aproximar $x(1)$.

[2 puntos]

1 $\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + R(f)$

a) $\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 + ax + b$

$$\int_{-1}^{1} \pi(x)(1-x^2)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \cancel{a\frac{x^2}{2}} + bx - \frac{x^5}{5} - \cancel{a\frac{x^4}{4}} - b\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - b\frac{2}{3} + 2b = 0 \Rightarrow \frac{4}{15} + \frac{4b}{3} = 0 \quad \boxed{b = -\frac{1}{5}}$$

$$\int_{-1}^{1} x\pi(x)(1-x^2)\,dx = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{x^4}{4}} + a\frac{x^3}{3} + \cancel{b\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^6}{6}} - a\frac{x^5}{5} - \cancel{b\frac{x^4}{4}}\Big]_{-1}^{1}$$

$$a\frac{2}{3} - a\frac{2}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$\pi(x) = x^2 - \frac{1}{5} \qquad x_0 = -\frac{1}{\sqrt5} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt5}$

Exactitud

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \alpha_0 + \alpha_1 \Rightarrow \frac{4}{3} = \alpha_0 + \alpha_1 \\ x \to \int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx = -\frac{\alpha_0}{\sqrt5} + \frac{\alpha_1}{\sqrt5} \Rightarrow 0 = -\frac{\alpha_0}{\sqrt5} + \frac{\alpha_1}{\sqrt5} \end{array}\right\}$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\,dx \approx \frac{2}{3} f\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

Grado de exactitud 3 por ser Gaussiana

b) $\left[R(f) = \int_{-1}^{1} f[x_0, x_1, x]\right]$ NO

Es una fórmula Gaussiana así que el error:

$$R(f) = \frac{f^{(IV)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^{1} \pi(x)^2 (1-x^2)\,dx = \frac{f^{(IV)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{32}{525}$$

$$R(f) = \frac{4}{1575} f^{(IV)}(\xi) \qquad \text{donde } \xi \in (-1,1)$$

c) $\int_{-1}^{1} \ln(x^2+1)(1-x^2)\,dx \approx \frac{2}{3}\ln\left(\frac{6}{5}\right) + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{4}{3}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

$= 0.243095$

Valor "exacto": 0.224098

$\boxed{2}$ $$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{3h}{4} f(a) + \frac{h}{4} f(a+2h) + R(f)$$

a) $$R(f) = \int_a^{a+h} f[a, a+2h, x]\,(x-a)(x-(a+2h))\,dx \overset{\checkmark}{=}$$

$\Pi(x)$ no cambia de signo en el intervalo

$$= f[a, a+2h, \xi] \int_a^{a+h} (x-a)(x-(a+2h))\,dx$$

$$= f[a, a+2h, \xi] \left[\int_a^{a+h} (x-a)^2\,dx + \int_a^{a+h} (-2h)(x-a)\,dx\right]$$

$$= f[a, a+2h, \xi] \left(\frac{(x-a)^3}{3}\Big]_a^{a+h} - 2h\, \frac{(x-a)^2}{2}\Big]_a^{a+h} \right)$$

$\xi \in (a, a+h)$

$$= \frac{f''(\mu)}{2}\left(\frac{h^3}{3} - h\cdot h^2\right) = \frac{f''(\mu)}{6}\left(-2h^3\right) = -\frac{f''(\mu)}{3} h^3$$

$\mu \in (a, a+2h)$

b) $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx =$$

(*) $x_i + h = x_{i+1}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3h}{4} f(x_i) + \frac{h}{4} f(x_{i+2})\right) + \overbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{f''(\mu)}{3}\right)h^3}^{R(f)}$$

$$= h\left(\frac{3}{4} f(a) + \frac{3}{4} f(a+h) + \frac{3}{4}\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{n+1} f(x_i)\right) + R(f)$$

$$= h\left(\frac{3}{4} f(a) + \frac{3}{4} f(a+h) + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{4} f(b) + \frac{1}{4} f(b+h)\right)$$

$+ R(f)$ $\qquad -0.3$ si no se agrupa

donde

$$R(f) = -\frac{h^3 n}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(\mu)}{n} = -\frac{h^3 n}{3} f''(\tilde{\mu}) =$$

$$= -\frac{(b-a)^3 n}{n^3 \cdot 3} f''(\tilde{\mu}) = -\frac{(b-a)^3}{3n^2} f''(\tilde{\mu})$$

(*) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ $\qquad x_{i+1} = x_i + h$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

c) $x_{n+1} - x_n \approx x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)\,dt =$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,x(t))\,dt \approx \frac{3h}{4} f(t_n,x_n) + \frac{h}{4} f(t_{n+2}, x_{n+2})$$

Queda entonces:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{3}{4} f_n + \frac{1}{4} f_{n+2}\right)$$

1/3

Se puede hacer también con h negativa

$$x_{n+1} - x_{n+2} \approx x(t_{n+1}) - x(t_{n+2}) = \int_{t_{n+2}}^{t_{n+1}} x'(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_{n+2}}^{t_{n+2}-h} f(t,x(t))\,dt \approx \frac{3(-h)}{4} f(t_{n+2},x_{n+2}) + \frac{(-h)}{4} f(\overbrace{t_{n+2}-2h}^{t_n}, x_n)$$

$$x_{n+2} \approx x_{n+1} + \frac{3h}{4} f_{n+2} + \frac{h}{4} f_n$$

3 (4)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2\right) \qquad \phi(\cdot) = \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2$$

$$k_1 = f\left(t, x + h\left(\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{4}k_2\right)\right)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{2}{3}h, x + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{5}{12}k_2\right)\right)$$

1) Consistencia:

*) $p(\lambda) = \lambda - 1 \qquad p(1) = 0$

*) $\phi(x(t_{n+1}), x(t_n); t_n, 0) = f(t_n, x(t_n))$

Para ver esto observamos que si $h \to 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = f(t, x)$

Entonces:

$$\phi(x(t_{n+1}), x(t_n); t_n, 0) = \frac{1}{4} f(t_n, x(t_n)) + \frac{3}{4} f(t_n, x(t_n)) = f(t_n, x(t_n))$$

Por tanto es consistente

2) Estabilidad: Todas las raíces de $p(\lambda)$ están en el disco unidad y las de módulo 1 son simples.

sólo tiene la raíz $\lambda = 1$ luego se cumple.

Si es consistente y estable $\Rightarrow$ Es convergente

Faltaría ver que ϕ es Lipschitziana

1) También se puede hacer teniendo en cuenta que RK es consistente $\Leftrightarrow$ $b_1 + \dots + b_n = 1$

En este caso $b_1 = 1/4 \quad b_2 = 3/4$

$$b_1 + b_2 = 1$$

4 $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{cases}$ $x_{n+3} = x_n + h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1})$

a) Estabilidad:

$p(\lambda) = \lambda^3 - 1$ tiene 3 raíces distintas de módulo 1

$\Rightarrow$ El método es estable.

Consistencia: $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = 1 - \alpha_0 = 1 - 1 = 0 \\ C_1 = 3 - 0\alpha_0 - \beta_2 - \beta_1 = 0 \end{array}\right\} \boxed{\beta_1 + \beta_2 = 3}$$

El método es convergente $\Leftrightarrow$ es estable y consistente

$\Leftrightarrow$ $\beta_1 + \beta_2 = 3$

b) $C_2 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\alpha_0 - 2\beta_2 - \beta_1 = 0$

$\beta_1 + 2\beta_2 = \frac{9}{2}$ $\quad 3 - \beta_2 + 2\beta_2 = \frac{9}{2}$ $\quad \beta_2 = \frac{9}{2} - 3$

$\beta_2 = \frac{3}{2}$ $\quad \beta_1 = \frac{3}{2}$

$C_3 = \frac{3^3}{3!} - \frac{2^2}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{9}{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ Orden 2

Término principal del error de truncatura local

$\frac{3}{4} x'''(\xi) h^3$

c) $\begin{cases} x' = x+t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad f(t,x) = x+t \qquad x(1) \approx x_4$

$x_{n+1} = x_n + h\, f(t_n, x_n)$ Método de Euler.

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 + h(x_0) = x_0(1+h) = 1+h = \frac{5}{4} = 1.25$

$x_2 = x_1 + h(x_1 + t_1) = (1+h)^2 + h^2 = \frac{25}{16} + \frac{1}{16} = \frac{26}{16} = 1.625$

Ahora usemos

$$x_{n+3} = x_n + h\left(\frac{3}{2} f_{n+1} + \frac{3}{2} f_{n+2}\right)$$

$$x_3 = x_0 + h\left(\frac{3}{2}(x_1+t_1) + \frac{3}{2}(x_2+t_2)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}(1.25 + 0.25) + \frac{3}{2}(1.625 + 0.5)\right) = 2.35938$$

$$x_4 = x_1 + h\left(\frac{3}{2}(x_2+t_2) + \frac{3}{2}(x_3+t_3)\right) = 3.21289$$

La solución exacta es

$x(t) = 2e^t - t - 1 \qquad x(1) = 2e - 2 \simeq 3.43656$

$t_0 = 0 \quad t_1 = \frac{1}{4} \quad t_2 = \frac{1}{2} \quad t_3 = \frac{3}{4} \quad 1 = t_4$

$x(1) \approx x_4$

Apellidos

Firma

Nombre

Métodos Numéricos II. Curso 2023/24.
Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
9 de abril de 2024.

1 Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

0.5 *a*) Se pretende resolver la ecuación
$$f(x) = 0$$
¿Qué debe cumplir la función f para que el método de Newton-Raphson tenga convergencia al menos cúbica?

1 *b*) ¿Es el método de Newton-Raphson para resolver el sistema
$$F(x) = 0$$
invariante frente a transformaciones lineales de F?
Nota: Que sea invariante frente a transformaciones ineales quiere decir que la secuencia de aproximaciones $\{X_n\}$ es la misma si se aplica el método al sistema $F(X) = 0$ o si se aplica al sistema $AF(X) = 0$, siendo A una matriz no singular, partiendo del mismo vector inicial X_0.

0.5 *c*) ¿El error en las fórmulas de derivación numérica disminuye si aumentamos el número de nodos?

[2 puntos]

2 El problema de trisección de un ángulo consiste en hallar las razones trigonométricas de $\alpha/3$, conociendo las de $\alpha \in (0, \pi/2)$.

0.5 *a*) Llamando $x = \operatorname{sen}(\alpha/3)$ y $a = \operatorname{sen}\alpha$, demuestra que x es solución de la ecuación
$$-4x^3 + 3x - a = 0 \qquad (1)$$

1 *b*) Construye una sucesión de Sturm de polinomios asociada a $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ y deduce que p tiene exactamente 3 raíces reales.
Sucesión 0.5 / Raíces 0.5

1 *c*) Demuestra que $\operatorname{sen}(\alpha/3)$ es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$, en el intervalo $(0, a/2)$ y que, tomando como valores iniciales $x_0 = a/3$ o $x_0 = a/2$, el método de Newton-Raphson converge.
- Sol en $(0, a/2)$ 0.5
- Condiciones NR 0.5

1 *d*) Para resolver (1), se propone el método iterativo
$$x_{n+1} = \frac{a}{3 - 4x^2}$$
- Convergencia 0.5
- Comparación 0.5

Estudia bajo qué condiciones el método converge a la solución. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

0.5 *e*) Tomando $a = 1/2$, realiza una iteración del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1/6$ para obtener una aproximación de $\operatorname{sen}(\pi/18)$.

[4 puntos]

(1)

$\boxed{3}$ Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(a) + R(f), \qquad a \neq -1, 1, 2.$$

0.5 *a*) Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

1.5 *b*) Determina los valores de α_0, α_1, α_2, α_3 y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

1 *c*) Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f.

1 *d*) Aplica el resultado para la función $x\, e^{x^2+1}$.

[4 puntos]

b) 0.5 Plantear el sistema

0.5 Valores de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

0.5 valor de a.

(0,1)

1 a) $x_{n+1} = g(x_n)$ donde $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{\left(f'(x) f''(x) + f(x) f'''(x)\right) f'(x)^2 - 2 f(x) f'(x) f''(x)^2}{f'(x)^4}$$

$$= \frac{f'(x)^2 f''(x) + f(x) f'(x) f'''(x) - 2 f(x) f''(x)^2}{f'(x)^3}$$

Si s es la solución de $f(x)=0$ que buscamos,

$g'(s) = 0$

$g''(s) = \frac{f'(s)^2 f''(s)}{f'(s)^3}$ $\qquad g''(s) = 0 \Leftrightarrow f''(s) = 0$

Entonces, si f es de clase 3 en el intervalo en el que está localizada la raíz s y $f''(s) = 0$ el método de NR tendría convergencia local al menos ~~cuadrática~~ cúbica.

b) $F(X) = 0$

$X_0 \qquad X_{n+1} = X_n - JF(X_n)^{-1} \cdot F(X_n) \qquad n \geq 0$

Si llamamos $G(X) = AF(X) \Rightarrow JG = A \cdot JF$ $\quad (*)$

$\Rightarrow JG(X_n)^{-1} = (A\, JF(X_n))^{-1} = JF(X_n)^{-1} \cdot A^{-1}$

La sucesión construida con G será entonces

$X_0, \quad \tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n - JG(\tilde{X}_n)^{-1} \cdot G(\tilde{X}_n) \Rightarrow$

$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n - JF(\tilde{X}_n)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A F(\tilde{X}_n)$

$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n - JF(\tilde{X}_n)^{-1} F(\tilde{X}_n) \qquad n \geq 0$

Como partimos del mismo X_0 la sucesión es la misma.

$(*)$ $F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$$A \cdot F(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} f_1(x) + \cdots + a_{1n} f_n(x) \\ \vdots \\ a_{n1} f_1(x) + \cdots + a_{nn} f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i1} f_1(x) + \dots + a_{in} f_n(x)\right) = a_{i1}\frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x) + \dots + a_{in}\frac{\partial}{\partial x_j} f_n(x)$$

$$= (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_n(x) \end{pmatrix} \rightarrow \text{elemento } ij \text{ de la matriz } J(AF(x))$$

Entonces:

$$J(AF(x)) = \begin{pmatrix} a_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 + \dots + a_{1n}\frac{\partial}{\partial x_1} f_n, & \dots & , a_{11}\frac{\partial}{\partial x_n} f_1 + \dots + a_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} f_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 + \dots + a_{nn}\frac{\partial}{\partial x_1} f_n & \dots & a_{n1}\frac{\partial}{\partial x_n} f_1 + \dots + a_{nn}\frac{\partial}{\partial x_n} f_n \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot JF(x)$$

c) No, puede ocurrir el fenómeno de Runge ...

$\boxed{2}$ $\alpha \in (0, \pi/2)$

a) $x = \operatorname{sen}(\alpha/3)$ $\quad a = \operatorname{sen}\alpha$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha/3 + 2\alpha/3) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(2\frac{\alpha}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(2\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 2\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 2\operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a = x - 2x^3 + 2x - 2x^3 \quad \Rightarrow -4x^3 + 3x - a = 0$$

b) $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ $\quad$ con $a \in (0, 1)$

$$\alpha = \text{máx}\left\{\frac{3}{4}, \frac{a}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow$ Todas las raíces de $p(x)$ están en el intervalo

$$\left[-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right] \subset [-2, 2]$$

Sucesión de Sturm:

$f_0(x) = -4x^3 + 3x - a$

$f_1(x) = -12x^2 + 3$

$$\begin{array}{l|l} -4x^3+3x-a & -12x^2+3 \\ \underline{4x^3 - x} & \frac{1}{3}x \\ \quad 2x - a & \end{array}$$

$f_2(x) = -2x + a$

$$\begin{array}{l|l} -12x^2+3 & -2x+a \\ \underline{12x^2 - 6ax} & 6x+3a \\ \quad -6ax + 3 & \\ \quad \underline{6ax - 3a^2} & \\ \quad\quad -3a^2 + 3 \neq 0 & \end{array}$$

$f_3(x) = 3a^2 - 3 < 0$

pues $a \in (0, 1)$

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Cambios de signo
-2	+	−	+	−	3
2	−	−	−	−	0

Entonces $p(x)$ tiene 3 raíces reales en $[-2, 2]$

c)

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Cambios de signo
0	−	+	+	−	2
$a/2$	+	+	0	−	1

$f(0) = 0 \quad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$

$\frac{a}{2}(1 - a^2) \qquad 0 < \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) \quad ¿\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}? \qquad f'(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{\alpha}{3} - \frac{\cos\alpha}{2} \leq 0$

[illegible]

Hay exactamente una raíz en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$

$p'(x) = -12x^2 + 3 \qquad p'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} < \begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

Como $a < 1$ $\; p'(x)$ no se anula en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$

1) $p(0)\, p\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \qquad$ 2) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$

3) $p''(x) = -24x \leq 0$ en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ no cambia de signo

4) $\max\left\{ \left| \frac{f(0)}{f'(0)} \right|, \left| \frac{f(a/2)}{f'(a/2)} \right| \right\} = \max\left\{ \left| -\frac{a}{3} \right|, \frac{a}{6} \right\} = \frac{a}{3} \leq \frac{a}{2}$

Entonces, por el teorema de convergencia global del método de NR, este converge si tomamos cualquier $x_0 \in (0, \frac{a}{2})$

d) $x_{n+1} = g(x_n)$ con $g(x) = \frac{a}{3-4x^2}$

Si $g(s) = s$

$s = \frac{a}{3-4s^2}$

$-4s^3 + 3s = a$

Si hay convergencia, el método converge a la raíz

$$g'(x) = \frac{+a \cdot 8x}{(3-4x^2)^2}$$

Si s es la solución de la ecuación $-4x^3+3x-a=0$ que estamos buscando

$$3-4s^2 = \frac{a}{s}$$

$\left(\text{pues } -4x^3+3x = a \Rightarrow x(3-4x^2) = a \Rightarrow 3-4x^2 = \frac{a}{x}\right)$

Entonces:

$$g'(s) = \frac{8as}{(a/s)^2} = \frac{8s^3}{a} \neq 0 \qquad |g'(s)| = \frac{8s^3}{a} < a^2 < 1$$

$$\downarrow$$

$$\left(s < \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{8s^3}{a} < \frac{8a^3}{2^3 \cdot a}\right)$$

Hay convergencia local pero el orden de convergencia es menor que NR

e) $a = \frac{1}{2}$ $\quad a = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$x = \operatorname{sen}(\alpha/3) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{18}$$

$$x_0 = \frac{1}{6} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{-4x_n^3 + 3x_n - 1/2}{-12x_n^2 + 3}$$

$$x_1 = 0.173611$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{18} \simeq 0.173648\ldots\right)$$

$\boxed{3}$ $f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(a) + R(f) \quad a \neq -1, 1, 2$

a) Es una fórmula con 4 nodos $(n=3)$ y estamos aproximando una derivada primera $(k=1)$, entonces según el teorema visto en clase (limitación del grado de exactitud) el máximo orden de exactitud es $\boxed{n+k=4}$

b) Imponemos exactitud en $1, x, x^2, x^3$ y después comprobamos si puede haber exactitud en x^4

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ x & 1 = -\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + a\alpha_3 \\ x^2 & 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + 4\alpha_2 + a^2\alpha_3 \\ x^3 & 0 = -\alpha_0 + \alpha_1 + 8\alpha_2 + a^3\alpha_3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a^2 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & a^3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3' = F_3 - F_1 \\ F_4' = F_4 + F_1}]{F_2' = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & a^3+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4' = F_4 - F_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & a^3-a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4' = F_4 - 2F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a-2)(a^2-1) & -1 \end{array}\right)$$

$$a(a^2-1) - 2(a^2-1) = (a-2)(a^2-1) \quad \left(= a^3 - 2a^2 - a + 2\right)$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{(a-2)(a^2-1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{(a^2-1)}{(a-2)(a^2-1)}\right) = \frac{1}{3(a-2)}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - 3\cdot\frac{1}{3(a-2)} + \frac{(a+1)}{(a-2)(a^2-1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(a-2)(a-1)-(a-1)+1}{(a-2)(a-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-4a+4}{(a-2)(a-1)} = \frac{(a-2)}{2(a-1)}$$

$$\alpha_0 = -\frac{a-2}{2(a-1)} - \frac{1}{3(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a^2-1)} =$$

$$= +\frac{3(a^2-4a+4)(a+1) - 2(a^2-1) + 6}{6(a^2-1)(a-2)} = \frac{-3a^3+7a^2-4}{6(a^2-1)(a-2)} =$$

$$= -\frac{(3a+2)}{6(a+1)}$$

Si además imponemos exactitud en x^4

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 + 16\alpha_2 + a^4\alpha_3$$

$$\frac{-3a^3+7a^2-4}{6(a^2-1)(a-2)} + \frac{a^2-4a+4}{2(a-2)(a-1)} + \frac{16(a^2-1)}{3(a-2)(a^2-1)} - \frac{a^4}{(a-2)(a^2-1)} = 0$$

$$-3a^3+7a^2-4+3(a+1)(a^2-4a+4)+32(a^2-1)-6a^4=0$$

$$\cancel{-16a^4+3a^3+21a^2-12=0}$$

$$-6a^4+30a^2-24=0 \Rightarrow a=-2,\ a=2,\ a=-1,\ a=1$$

Entonces se consigue exactitud 4 si $\boxed{a=-2}$

Se resuelve más sencillo si a esta ecuación le restamos la primera del sistema anterior y queda

$$15\alpha_2 + (a^4-1)\alpha_3 = 0$$

$$15\frac{1}{3(a-2)} - (a^4-1)\frac{1}{(a-2)(a^2-1)} = 0$$

$$\frac{5}{a-2} - \frac{a^2+1}{a-2} = 0 \Rightarrow a^2+1 = 5 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

Entonces el máximo grado de exactitud es 4 y la fórmula queda:

$\alpha_0 = - \dfrac{3(-2)+2}{6(-1)} = -\dfrac{2}{3}$

$\alpha_1 = \dfrac{-4}{2\cdot(-3)} = \dfrac{2}{3}$

$\alpha_2 = \dfrac{1}{3(-4)} = -\dfrac{1}{12}$

$\alpha_3 = -\dfrac{1}{-4\cdot 3} = \dfrac{1}{12}$

$$\boxed{f'(0) = -\frac{2}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{12}f(2) + \frac{1}{12}f(-2) + R(f)}$$

c) $E(x) = f[-2,-1,1,2,x]\underbrace{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}_{(x^2-1)(x^2-4)}$

$R(f) = E'(0)$

$E'(x) = f[-2,-1,1,2,x,x](x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$+ f[-2,-1,1,2,x]\Big(\cancel{(x-1)(x+2)(x-2) + (x+1)(x+2)(x-2)} \cancel{+ (x+1)(x-1)}$

$\big(2x(x^2-4) + 2x(x^2-1)\big)\Big)$

$E'(0) = 4f[-2,-1,1,2,0,0] = 4\dfrac{f^{V}(\xi)}{5!}$

donde $\xi \in [-2,2]$

Es necesario que f sea de clase 5 en $[-2,2]$

d) $f(x) = x e^{x^2+1}$

$f'(0) \approx -\dfrac{2}{3}(-e^2) + \dfrac{2}{3}e^2 - \dfrac{1}{12}\cdot 2e^5 + \dfrac{1}{12}(-2e^5)$

$f'(0) \approx \dfrac{4}{3}e^2 - \dfrac{1}{3}e^5 \quad (\approx -39.619)$

$f'(0) = 2.71828$ (error muy grande)

$\boxed{3}$ b) utilizando polinomios de Lagrange $\quad x_0=-1 \quad x_1=1 \quad x_2=2$

$x_3=a$

$$\ell_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(-1-1)(-1-2)(-1-a)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-6(a+1)}$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x+1)(x-2)(x-a)}{(1+1)(1-2)(1-a)}=\frac{(x+1)(x-2)(x-a)}{-2(1-a)}=\frac{(x+1)(x-2)(x-a)}{2(a-1)}$$

$$\ell_2(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-a)}{(2+1)(2-1)(2-a)}=\frac{(x+1)(x-1)(x-a)}{3(2-a)}$$

$$\ell_0'(x)=-\frac{1}{6(a+1)}\left[(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)\right]$$

$$\ell_0'(0)=-\frac{1}{6(a+1)}\left[2a+a+2\right]=\boxed{-\frac{3a+2}{6(a+1)}=\alpha_0}$$

$$\ell_1'(x)=\frac{1}{2(a-1)}\left[(x-2)(x-a)+(x+1)(x-a)+(x+1)(x-2)\right]$$

$$\ell_1'(0)=\frac{1}{2(a-1)}\left[2a-a-2\right]=\boxed{\frac{a-2}{2(a-1)}=\alpha_1}$$

$$\ell_2'(x)=\frac{1}{3(2-a)}\left[(x-1)(x-a)+(x+1)(x-a)+(x+1)(x-1)\right]$$

$$\ell_2'(0)=\frac{1}{3(2-a)}\left[a-a-1\right]=\boxed{-\frac{1}{3(2-a)}=\alpha_2}$$

$$\ell_3(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(a+1)(a-1)(a-2)}$$

$$\ell_3'(x)=\frac{1}{(a+1)(a-1)(a-2)}\left[(x-1)(x-2)+(x+1)(x-2)+(x+1)(x-1)\right]$$

$$\ell_3'(0)=\frac{1}{(a+1)(a-1)(a-2)}\left[2-2-1\right]=\boxed{\frac{-1}{(a+1)(a-1)(a-2)}=\alpha_3}$$