

Capítulo 4

INTERPOLACIÓN.

4.1. Introducción. Interpolación polinómica.

4.1.1. Introducción

A menudo, hemos de interpretar en forma más o menos precisa la interrelación entre 2 magnitudes; a saber, x e y , supuesto conocidos algunos datos sobre ellas.

Así, más concretamente, si se conocen los puntos (o relaciones, o datos) del plano: $\{(x_i, y_i); i = 0, 1, \dots, n\}$, cabe preguntarse si hay alguna función, $y = \phi(x)$, cuya curva pase por los puntos considerados.

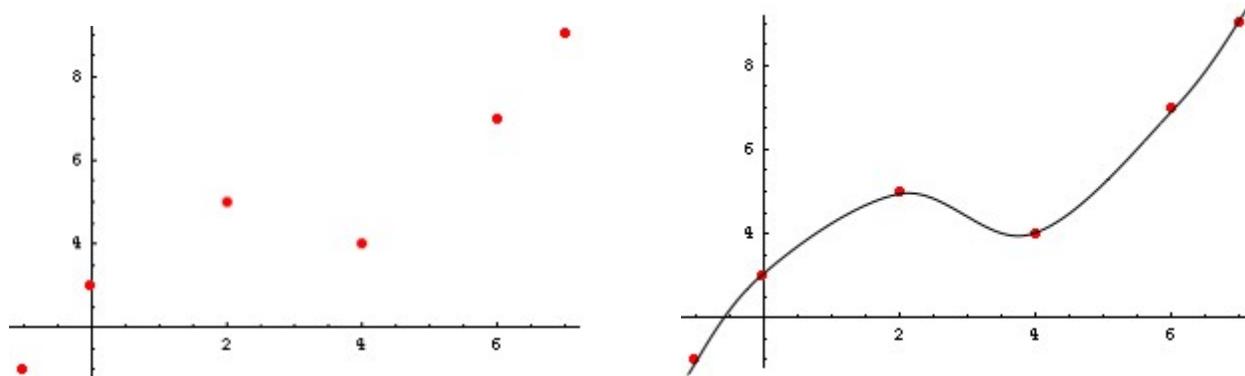


Figura 4.1: Datos de iterpolación y curva interpolante.

También puede ocurrir que , de una función dada $y = f(x)$, se conozcan algunos valores: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, y nos preguntamos, ¿cómo dar un valor aproximado de f en un "x" entre los x_i ?

En ambos casos, una función que satisfaga los requisitos impuestos se llama función interpoladora o Interpolante.

No obstante, lo anterior hay que precisarlo mejor en el sentido siguiente:

Dado el conjunto de datos, $D = \{(x_i, y_i) | i = 0, 1, \dots, n\}$, buscamos una función, $p(x)$, tal que:

- Sea interpolante; es decir, $p(x_i) = y_i \quad \forall i$
- la función $p(x)$ pertenezca a un espacio de funciones prefijado (p.e., polinómicas, racionales, splines, etc...).

Fijado el espacio de funciones, hay dos cuestiones básicas:

- ¿Existe y es único el Interpolante?;
- si existe el Interpolante, ¿cómo construirlo?

Ocupémonos, ahora, del problema de existencia y unicidad del interpolante para un caso clásico concreto (**interpolación polinomial de Lagrange**).

Sean $(x_i, y_i) | i = 0, 1, \dots, n; (n+1)$ -puntos del plano y consideramos el problema siguiente:

Hallar un polinomio, $p(x)$, de grado $\leq n$ tal que

$$p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(4.1)

Si hay solución se llama polinomio de Interpolación o interpolante polinomial.

Si notamos por \mathbb{P}_n al espacio de polinomios de grado $\leq n$ y coeficientes reales; entonces, todo $p(x) \in \mathbb{P}_n$ se escribe como: $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Así, $p(x)$ será solución del problema si, y sólo si, el S.E.L :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

admite solución.

Llamando \mathbf{M} a la matriz de coeficientes del sistema (4.2); se tiene que el problema de interpolación admite una única solución si, y sólo si, los nodos de interpolación son distintos.

Para ello basta con probar que $\det(\mathbf{M}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ y, por lo tanto, $\det(\mathbf{M}) \neq 0 \Leftrightarrow x_i \neq x_j$.

Extendiendo un poco más la idea de interpolación (problema de coincidencias) introducida se puede plantear el problema (**interpolación polinomial clásica de Hermite**) siguiente:

Hallar un polinomio de grado $\leq 2m + 1$ verificando:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= y_i \quad i = 0, 1, \dots, m \\ p'(x_i) &= y'_i \quad i = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.2. Generalización del Problema.

En los casos, anteriormente descritos, cabe destacar dos aspectos comunes:

- El número de datos es finito.
- El tipo de datos satisface las condiciones de "linealidad".

Más aún, el espacio de funciones interpolantes es de dimensión igual al número de datos o condiciones.

Así, un plantamiento general del problema sería:

Interpolación Lineal Finita.

Sean L_1, L_2, \dots, L_N N-formas o aplicaciones lineales (definen los datos de interpolación), $L_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ con \mathcal{F} espacio vectorial real y $V \subset \mathcal{F}$ un subespacio de dimensión N . Para $f \in \mathcal{F}$, se pretende:

Hallar $p \in V$ verificando:

$$L_i(p) = L_i(f) \quad i = 1, \dots, N$$

(4.4)

o, equivalentemente, para valores reales, $\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, dados;

Hallar $p \in V$ verificando:

$$L_i(p) = z_i \quad i = 1, \dots, N$$

(4.5)

Si el problema (4.4) ó (4.5) admite solución única en V se dice que es V -**unisolviente**.

A continuación, damos una caracterización de la existencia y unicidad de solución (o unisolvencia) de (4.4) ó (4.5); a saber:

Teorema 4.1 *Sea $V \subset \mathcal{F}$ de dimensión N , $f \in \mathcal{F}$, y L_1, L_2, \dots, L_N N-formas lineales. Entonces, (4.4) es V -unisolviente $\iff \text{Det}(L_i(\varphi_j))_{i,j} \neq 0$ donde $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ es una base cualquiera de V .*

Demostración:

Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ es base para V se tendrá que:

$$p = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \quad \forall p \in V$$

por lo que resolver el problema (4.4) equivale a encontrar las ctes a_i $i = 1, \dots, N$ solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot L_1(\varphi_1) + a_2 \cdot L_1(\varphi_2) + \cdots + a_N \cdot L_1(\varphi_N) &= L_1(f) \\ a_1 \cdot L_2(\varphi_1) + a_2 \cdot L_2(\varphi_2) + \cdots + a_N \cdot L_2(\varphi_N) &= L_2(f) \\ &\vdots \\ a_1 \cdot L_N(\varphi_1) + a_2 \cdot L_N(\varphi_2) + \cdots + a_N \cdot L_N(\varphi_N) &= L_N(f) \end{aligned}$$

Así, dado que la matriz de coeficientes del S.E.L. es

$$G = (L_i(\varphi_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} L_1(\varphi_1) & L_1(\varphi_2) & \cdots & L_1(\varphi_N) \\ L_2(\varphi_1) & L_2(\varphi_2) & \cdots & L_2(\varphi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_N(\varphi_1) & L_N(\varphi_2) & \cdots & L_N(\varphi_N) \end{pmatrix}$$

(llamada matriz de Gram), se tiene trivialmente la caracterización dada en el teorema.

C.Q.D.

Observación.- El teorema anterior se puede interpretar de forma idéntica si usamos el problema (4.5) sin más que intercambiar $L_i(f)$ con z_i .

4.2. Problemas habituales: Lagrange, Taylor y Hermite

Veamos como se pueden obtener los problemas clásicos usuales desde un planteamiento particular del problema general (4.4).

1. Interpolación Polinomial Clásica o Interpolación Lagrangiana.

Se considera el espacio \mathcal{F} = espacio de funciones valuadas en, al menos, un conjunto finito de puntos x_i (que llamaremos nodos de interpolación). Tomamos $V = \mathbb{P}_n$ y definimos las $(N = n + 1)$ -formas lineales:

$$L_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $L_i(f) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$ y los llamamos datos de tipo Lagrange.

Así, el problema resultante es el dado en (4.1). Dicho problema es unisolvente en $\mathbb{P}_n \iff$ la matriz de Gram tiene determinante no nulo; es decir,

$$\text{Det}(\varphi_j(x_i))_{i,j} \neq 0$$

donde $\{\varphi_j = x^j \quad j = 0, \dots, n\}$ es la base canónica de \mathbb{P}_n .

Es fácil comprobar que la matriz de Gram es la que aparece en (4.2) y, por lo tanto el problema tiene solución única si y, sólo si, los nodos son distintos entre si.

2. Interpolación Taylor.

Supongamos que son conocidos el valor y derivadas sucesivas de $f(x)$ en un nodo x_0 , entonces, tenemos las formas lineales (datos tipo Taylor) siguientes:

$$L_0(f) = f(x_0), \quad L_1(f) = f'(x_0), \dots, \quad L_n(f) = f^{(n)}(x_0)$$

y, as, el problema de Interpolación Taylor consiste en:

Hallar $T(x) \in \mathbb{P}_n / L_k(T) = L_k(f) \quad k = 0, 1, \dots, n$
 es decir, $T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, 1, \dots, n$

(4.6)

El problema (4.6) tiene solución única si la matriz de Gram asociada tiene determinante no nulo para alguna base del espacio interpolante ($V = \mathbb{P}_n$). Si elegimos como base de trabajo,

$$\{\varphi_j\} = \{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n\}$$

es fácil comprobar que la matriz de Gram es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n! \end{pmatrix}$$

Y, por lo tanto, $\det(G) \neq 0$. Luego, el problema (4.6) tiene una única solución.

3. Interpolación Clásica de Hermite.

Sean x_0, x_1, \dots, x_m nodos distintos de interpolación y se toman $\mathcal{F} = C^1([a, b])$, $V = \mathbb{P}_{2m+1}$ y formas lineales (datos de tipo Hermite):

$$\begin{aligned} L_r : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto L_r(f) = \begin{cases} f(x_i) & r = 2i \quad i = 0, \dots, m \\ f'(x_i) & r = 2i + 1 \quad i = 0, \dots, m \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, escribiendo el problema general de interpolación (4.4) con estos datos y espacio particular V se obtiene el problema:

Hallar un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_{2m+1}$ verificando:

$$\begin{aligned} L_r(p) &= p(x_i) = L_r(f) = f(x_i) = y_i \quad r = 2i \\ L_r(p) &= p'(x_i) = L_r(f) = f'(x_i) = y'_i \quad r = 2i + 1 \\ &\text{con } i = 0, \dots, m \end{aligned}$$

que es el mismo problema que se dió en (4.3).

En este caso, la matriz de Gram asociada a la base canónica de \mathbb{P}_{2m+1} es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{2m+1} \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & (2m+1)x_0^{2m} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{2m+1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dots & (2m+1)x_1^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{2m+1} \\ 0 & 1 & 2x_m & \dots & (2m+1)x_m^{2m} \end{pmatrix}$$

Además $\det(G) \neq 0 \iff x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$

Puede probarse que

$$\det(G) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)^4$$

con lo que se tiene la afirmación dada y el problema tendrá una única solución.

4.3. Métodos de Interpolación: Lagrange y Newton.

4.3.1. Método de Lagrange

Si bien, la técnica que se presenta se desarrolló desde la resolución del problema de Interpolación polinomial clásica, aquí la consideraremos para el caso general y posteriormente se aplicará a los casos más conocidos; a saber, la Interpolación lagrangiana, la de Taylor, y la interpolación clásica de Hermite.

Problema General de Interpolación

Sea $f \in \mathcal{F}$ y L_1, L_2, \dots, L_N N-formas lineales sobre \mathcal{F} . El problema de hallar $p \in V$ (subespacio de $\dim V = N$) verificando:

$$L_i(p) = L_i(f) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

admite solución única $\iff \det(L_i(\varphi_j))_{i,j} \neq 0$ siendo $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ una base de V .

Ahora bien, supongamos construida una base de V , $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$, dual respecto de las formas lineales dadas; es decir,

$$L_i(\Phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Entonces, la única solución del Problema general de interpolación se puede expresar como:

$$p = L_1(f)\Phi_1 + L_2(f)\Phi_2 + \cdots + L_N(f)\Phi_N \tag{4.7}$$

que se denomina **Fórmula de Lagrange** para el Problema General de Interpolación Lineal Finita (P.G.I.L.F.).

Observaciones:

- La fórmula (4.7) se escribe, para el problema (4.5), como:

$$p = z_1\Phi_1 + z_2\Phi_2 + \cdots + z_N\Phi_N \tag{4.8}$$

- Si el P.G.I.L.F. es unisolvante, es evidente que se pueden construir las Φ_j y recíprocamente. Además, una base de este tipo se llama **Base de Lagrange**.

Por tanto, de lo anterior puede decirse que el método de Lagrange consiste en la resolución inicial de N -problemas canónicos (un dato con valor 1 y el resto 0), y desde ellos poder resolver cualquier otro (datos con valores arbitrarios) sin más que utilizar la **Fórmula de Lagrange**.

Interpolación Polinomial Clásica (I. Lagrangiana)

Sea $D = \{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ el conjunto de datos de interpolación con nodos, x_i , distintos. Vamos a usar la idea anteriormente expuesta al Problema:

$$\boxed{\text{Hallar} \quad p(x) \in P_n / p(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n} \quad (4.9)$$

Así, construimos una Base de Lagrange en P_n ; es decir, sean $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ $n+1$ -polinomios de grado n verificando:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.10)$$

Por tanto, desde (4.10) se deduce que cada $l_i(x)$ es un polinomio de grado n que se anula en n -nodos. Más concretamente,

$$l_i(x) = A_i \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right]$$

donde A_i se obtiene sin más que imponer: $l_i(x_i) = 1$. Así,

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.11)$$

Tales polinomios son denominados, a menudo, **polinomios de Lagrange**. Y, desde aquí, es claro que la solución del problema (4.9) es:

$$\boxed{p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)} \quad (4.12)$$

La expresión (4.12) recibe el nombre de **Fórmula de Lagrange** para el interpolante.

Interpolación Polinomial de Taylor

Consideramos el problema de interpolación siguiente:

$$\boxed{\text{Hallar } T(x) \in P_n / T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, 1, \dots, n} \quad (4.13)$$

siendo $f \in C^n([x_0 - r, x_0 + r])$

Es fácil obtener la base de Lagrange, $\{T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)\}$, asociada al problema (4.13); a saber:

$$T_j(x) = \frac{(x - x_0)^j}{j!} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Por lo tanto, la **Fórmula de Lagrange** para el interpolante será:

$$\boxed{T(x) = f(x_0)T_0(x) + f'(x_0)T_1(x) + \dots + f^{(n)}(x_0)T_n(x) = \\ = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n} \quad (4.14)$$

Interpolación Clásica de Hermite

Pretendemos, ahora obtener la **Fórmula de Lagrange** para el problema:

$$\boxed{\text{Hallar } H(x) \in P_{2m+1} / \begin{cases} H(x_i) = f(x_i) \\ H'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, m} \quad (4.15)$$

Para el problema (4.15) la obtención de una base de Lagrange es algo más compleja; a saber: sean $H_i(x)$ y $K_i(x)$ con $i = 0, 1, \dots, m$ polinomios de grado $2m + 1$ verificando:

$$\left. \begin{array}{l} H_i(x_j) = \delta_{ij} \quad H'_i(x_j) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m \\ K_i(x_j) = 0 \quad K'_i(x_j) = \delta_{ij} \quad j = 0, 1, \dots, m \end{array} \right\} \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Así, teniendo en cuenta las características, respecto a los ceros, de $H_i(x)$ y $K_i(x)$ se pueden escribir de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} H_i(x) = (A_i x + B_i) \cdot (l_i(x))^2 \\ K_i(x) = C_i \cdot (x - x_i) \cdot (l_i(x))^2 \end{array} \right\} \quad i = 0, 1, \dots, m$$

donde $l_0(x), l_1(x), \dots, l_m(x)$ son los polinomios clásicos de Lagrange asociados a los nodos x_0, x_1, \dots, x_m .

Ahora, imponiendo las condiciones de interpolación que restan, en cada caso; se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} H_i(x_i) = 1 \\ H'_i(x_i) = 0 \end{array} \right\} \implies H_i(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)] \cdot (l_i(x))^2 \quad i = 0, 1, \dots, m$$

y, análogamente:

$$K'_i(x_i) = 1 \implies K_i(x) = (x - x_i) \cdot (l_i(x))^2 \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Con esto se deduce la **Fórmula de Lagrange** para el interpolante de Hermite:

$$H(x) = f(x_0)H_0(x) + f'(x_0)K_0(x) + \dots + f(x_m)H_m(x) + f'(x_m)K_m(x) \quad (4.16)$$

4.3.2. Método de Newton.

El objetivo del método de Newton es la obtención del interpolante de una forma recursiva.

A tal fin, se intenta encontrar la relación entre el interpolante para $k+1$ -datos y el interpolante para k -datos de ellos.

Vemos como se lleva esta idea a la práctica según el problema a resolver.

Interpolación Polinomial Clásica.

Pretendemos, aquí, resolver el problema (4.9).

Sea $p_k(x)$ el polinomio de grado $\leq k$ interpolante para los datos, $D = \{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \dots, k\}$, entonces:

$$p_{k+1}(x) - p_k(x) \in P_{k+1}$$

y se anula en los nodos, x_0, x_1, \dots, x_k ; por consiguiente,

$$p_{k+1}(x) - p_k(x) = A_{k+1} \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_k) \quad \text{con} \quad A_{k+1} = C^{te}$$

Imponiendo la condición $p_{k+1}(x_{k+1}) = y_{k+1}$ se obtiene el valor de A_{k+1} ; a saber:

$$A_{k+1} = \frac{y_{k+1} - p_k(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0) \cdots (x_{k+1} - x_k)}$$

Desde aquí, es trivial que el polinomio buscado (solución de (4.9)) es:

$$p(x) = p_n(x) = A_0 + A_1 \cdot (x - x_0) + \dots + A_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (4.17)$$

La expresión (4.17) recibe el nombre de **Fórmula de Newton** para la interpolación lagrangiana.

No obstante, el cálculo de las ctes. A_k puede simplificarse. Para ello, debido a la dependencia respecto de los nodos correspondientes, notamos:

$$A_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

y la llamamos **Diferencia Dividida de orden i** de f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_i (D.D. orden i). De su cálculo nos ocupamos en la sección siguiente.

4.4. Diferencias Divididas. Diferencias Finitas.

En primer lugar, nuestro objetivo es obtener una relación de recurrencia, apropiada, para el cálculo de las D.D. en general, y de las ctes. A_i en particular para la obtención del polinomio de interpolación para el problema de Lagrange y el problema de Hermite.

Propiedades

1. Para cada $k \geq 0$, se tiene:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

2. Para cada permutación, (i_0, i_1, \dots, i_k) , de los índices $\{0, 1, \dots, k\}$ se verifica:

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Demostración:

1. Sea $p_k(x)$ el polinomio de interpolación, en la forma de Lagrange, para la función $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_k \implies$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot l_i(x) \quad \text{con} \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

entonces, el coeficiente de x^k en dicho polinomio es:

$$\sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Por otra parte, la forma de Newton para $p_k(x)$ es:

$$p_k(x) = A_0 + A_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + A_k \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

de donde, puesto que el interpolante es único, se tiene:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = A_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

C.Q.D.

2. Basta utilizar la propiedad 1 para verificar 2.

Así, estamos en disposición de obtener la relación de recurrencia para las D.D. de órdenes sucesivos. Esta se expresa en el teorema siguiente:

Teorema 4.2 *Sea $f \in C([a, b])$ y $\{x_i\}_i \subset [a, b]$, entonces:*

1. $f[x_j] = f(x_j)$
2. *Para cada $k \geq 1$ se verifica:*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Con la relación de recurrencia anterior, se puede obtener una tabla de D.D. de órdenes 1, 2, ..., k, ... como sigue:

x_i	$f(x_i)$ o y_i	D.D. 1	D.D. 2	D.D. 3
x_0	$f(x_0)$	-	-	-
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	-	-
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	-
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
:	:	:	:	:

Entonces, calculada la tabla, se obtiene la formula de interpolación de Newton:

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (4.18)$$

Esta idea es extensible al problema de Hermite y al de Taylor. Para ello es de gran interés la propiedad siguiente:

Proposición 4.1 *Si $f \in C^n([a, b])$, entonces*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

donde ξ es un nodo entre los x_i .

Demostración.

En efecto, consideramos el polinomio interpolante en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n (supuestos distintos) para f entonces, $f(x) - p(x)$ se anulará en $n+1$ -nodos, y usando el teorema de Rolle deducimos que $(f - p)^{(n)}(x)$ se anula, al menos, una vez; es decir:

$$\exists \xi \quad / \quad f^{(n)}(\xi) - p^{(n)}(\xi) = 0 \implies f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

C.Q.D.

Esta propiedad permite, sin mucha dificultad, extender la noción de D.D. al caso en que sus argumentos puedan ser repetidos. Más concretamente:

Definición 4.1 Sean los nodos $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k$ en un intervalo $[a, b]$ donde f es suficientemente derivable, entonces:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & \text{si } x_0 = x_k \\ \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} & \text{si } x_0 \neq x_k \end{cases}$$

Así, la solución del problema de Hermite (4.15) adoptaría la forma de Newton siguiente:

$$H(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1] \cdot (x - x_0)^2 + \dots +$$

$$+ f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n] \cdot (x - x_0)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2 \cdot (x - x_n)$$

(4.19)

donde las D.D. consideradas se obtienen desde la tabla:

x_i	$f(x_i)$ o y_i	D.D. 1	D.D. 2	D.D. 3
x_0	$f(x_0)$	-	-	-
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	-	-
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$	-
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$

Ejemplo:

Calculemos el polinomio de grado ≤ 5 , interpolante de Hermite, verificando:

$$p(0) = 1 \quad p(1) = -1 \quad p(3) = 2$$

$$p'(0) = 0 \quad p'(1) = 5 \quad p'(3) = 2$$

Para ello usamos la tabla de D.D. del tipo anterior que da lugar a:

x_i	$f(x_i)$ o y_i	D.D. 1	D.D. 2	D.D. 3	D.D. 4	D.D. 5
0	1					
0	1	0				
1	-1	-2	-2			
1	-1	5	7	9		
3	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{35}{12}$	$-\frac{143}{36}$	
3	2	2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{47}{36}$	$\frac{95}{54}$

Por tanto el interpolante de Hermite es:

$$H(x) = 1 - 2x^2 + 9x^2(x-1) - \frac{143}{36}x^2(x-1)^2 + \frac{95}{54}x^2(x-1)^2(x-3)$$

La gráfica del interpolante se da en la Figura 4.2.

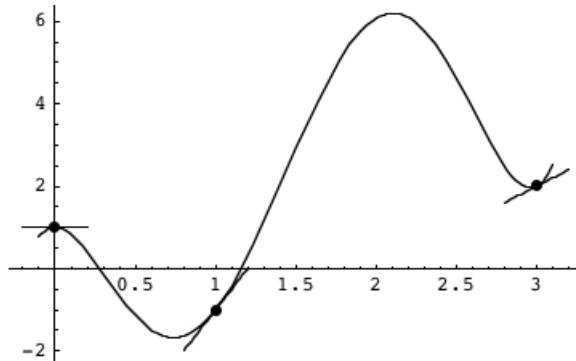


Figura 4.2: Interpolante de Hermite

4.4.1. Diferencias Finitas: Fórmulas de Newton Progresiva y Regresiva.

Nos preguntamos, ahora, ¿cómo puede expresarse el polinomio de interpolación para datos lagrangianos; es decir, $p(x_i) = f(x_i) = y_i$ cuando los nodos están igualmente espaciados?.

Supongamos que los nodos son de la forma: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ con $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$ y $h = \frac{b-a}{n}$; entonces, podemos relacionar las diferencias divididas de $f(x)$ con las llamadas Diferencias Finitas (D.F.) de $f(x)$. Pero, ¿cómo se definen?.

Definición 4.2 *Llamamos D.F. progresiva de f de orden $k \geq 0$ en un punto x , al valor:*

$$\Delta^k f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } k = 0 \\ f(x+h) - f(x) & \text{si } k = 1 \\ \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Si usamos como punto un nodo de interpolación, entonces las D.F. progresivas serán:

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_i &= y_i, i = 0, 1, \dots, n \\ \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i, i = 0, \dots, n-1 \\ \Delta^k y_i &= \Delta(\Delta^{k-1} y_i), i = 0, \dots, n-k \end{aligned}$$

De forma similar pueden definirse las D.F. regresivas para f o datos; a saber,

Definición 4.3 *Llamamos D.F. regresiva de f de orden $k \geq 0$ en un punto x , al valor:*

$$\begin{aligned} \nabla^0 f(x) &= f(x) \\ \nabla f(x) &= f(x) - f(x-h) \\ \nabla^k f(x) &= \nabla(\nabla^{k-1} f(x)) \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \nabla^0 y_i &= y_i, i = 0, 1, \dots, n \\ \nabla y_i &= y_i - y_{i-1}, i = 1, \dots, n \\ \nabla^k y_i &= \nabla(\nabla^{k-1} y_i), i = k, \dots, n \end{aligned}$$

Ahora, con esta nomenclatura, es fácil comprobar la propiedad siguiente:

Proposición 4.2 *Dada f evaluada en nodos igualmente espaciados, $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$, entonces:*

1. $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, k = 0, \dots, n$ (D.D. ascendentes mediante D.F. progresivas)
2. $f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k y_n}{k!h^k}, k = 0, \dots, n$ (D.D. descendentes mediante D.F. regresivas).

Por lo tanto, desde las dos propiedades anteriores, el polinomio de interpolación en la forma de Newton admite las representaciones que especificamos a continuación.

Fórmula de Newton Progresiva.

Esta la obtenemos usando la fórmula de Newton clásica para el interpolante de Lagrange; es decir,

$$P_N(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Esta expresión quedaría reducida a la siguiente:

$$P_N(x) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

pero si realizamos el cambio de variable:

$$s = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow \frac{x - x_i}{h} = \frac{x - (x_0 + ih)}{h} = s - i$$

entonces,

$$\begin{aligned} P_N(s) &= \Delta^0 y_0 + \Delta y_0 s + \Delta^2 y_0 \frac{s(s-1)}{2!} + \cdots + \Delta^n y_0 \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k y_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Fórmula de Newton Regresiva.

Si, en el método de interpolación de Newton, usamos un proceso descendente; es decir, desde el nodo x_n hasta el nodo x_0 tendríamos la Fórmula de Newton siguiente:

$$P_N(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

y, desde aquí, de forma similar pero con las diferencias regresivas llegamos a la expresión:

$$P_N(x) = \nabla^0 y_n + \frac{\nabla y_n}{h} (x - x_n) + \cdots + \frac{\nabla^n y_n}{n! h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)$$

Como antes, si hacemos el cambio:

$$t = \frac{x_n - x}{h} \Rightarrow \frac{x_{n-i} - x}{h} = \frac{(x_n - ih) - x}{h} = t - i$$

tenemos la expresión:

$$\begin{aligned} P(t) &= \nabla^0 y_n - \nabla y_n t + \nabla^2 y_n \frac{t(t-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \nabla^n y_n \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{t}{k} \nabla^k y_n \end{aligned} \quad (4.21)$$

Observación.- En las expresiones (4.20) y (4.21) he usado el combinatorio formal:

$$\binom{w}{k} = \frac{w(w-1)\cdots(w-k+1)}{k!} \text{ con } w = s \text{ ó } w = t.$$

EJEMPLO

Calculamos la tabla respectivas de diferencias finitas progresivas y regresivas para los datos: $\{(-2, 3), (0, -1), (2, 3), (4, 5)\}$ y damos las respectivas expresiones del interpolante.

Solución: Las diferencias finitas (progresivas y regresivas) son:

$\Delta^k y_0 \searrow$	$y_i = \Delta^0 y_i \downarrow$	$\Delta y_i \downarrow$	$\Delta^2 y_i \downarrow$	$\Delta^3 y_i \downarrow$
	3	-4	8	-10
-1		4		
3		2	-2	
5				
$\nabla^k y_n \nearrow$	$y_i = \nabla^0 y_i \uparrow$	$\nabla y_i \uparrow$	$\nabla^2 y_i \uparrow$	$\nabla^3 y_i \uparrow$

Por lo tanto, los respectivos polinomios de interpolación son:

FORMA PROGRESIVA (coeficientes en azul-morado):

$$p(s) = 3 - 4s + 8\frac{s(s-1)}{2} - 10\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

donde $s = \frac{x+2}{2}$ (pues $h = 2$, y $x_0 = -2$)

FORMA REGRESIVA (coeficientes en rojo-morado):

$$p(s) = 5 - 2t - 2\frac{t(t-1)}{2} + 10\frac{t(t-1)(t-2)}{6}$$

donde $t = \frac{4-x}{2}$ (pues $h = 2$, y $x_3 = 4$)

4.4.2. Interpolación por resurrección

Aquí se pretende obtener de forma recursiva el valor del polinomio de interpolación en "x" desde una modificación adecuada en la tabla de diferencias divididas. El procedimiento está basado en el resultado siguiente (que se atribuye a Aitken).

Lema general de Aitken

Sean $P_{S_i}(x)$ y $P_{S_j}(x)$ sendos polinomios interpolantes para los conjuntos de nodos respectivos S_i y S_j . Supongamos que ambos conjuntos difieren, exactamente, en un nodo; a saber, $x_i \in S_i - S_j$ y $x_j \in S_j - S_i$. Entonces, el interpolante para la unión de nodos, $S = S_i \cup S_j$ es:

$$P_S(x) = \frac{(x - x_j)P_{S_i}(x) - (x - x_i)P_{S_j}(x)}{x_i - x_j}$$

La demostración es muy simple, pues basta con evaluar la expresión propuesta en los nodos de interpolación de S , x_r , para los casos:

- $r \neq i$ ó j
- $r = i$
- $r = j$

y comprobar que el resultado es el valor y_r respectivo.

En particular, si $P_{i,i+1,\dots,i+k-1}(x)$ y $P_{i+1,\dots,i+k-1,i+k}(x)$ son los polinomios de interpolación en los nodos $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}\}$ y $\{x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}\}$ respectivamente. Entonces, el interpolante para los nodos $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}\}$ es:

$$P_{i,i+1,\dots,i+k-1,i+k}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1,\dots,i+k-1,i+k}(x) - (x - x_{i+k})P_{i,i+1,\dots,i+k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}$$

Ahora, desde este resultado podemos generar una tabla de interpolantes sucesivos para 1 nodo, 2 nodos, , hasta el total de nodos con el objetivo de conseguir el valor del polinomio de interpolación en "x". Dependiendo de la estrategia elegida aparecen dos tablas diferenciadas:

Estrategia de Neville

Ésta tiene el mismo procedimiento de cálculo que las diferencias divididas salvo por los factores $x - x_r$ y conduce a la tabla siguiente:

$x - x_i$	x_i	$y_i = P_i(x)$	P grado 1	P grado 2	P grado 3
$x - x_0$	x_0	$y_0 = P_0(x)$			
$x - x_1$	x_1	$y_1 = P_1(x)$	$P_{01}(x)$		
$x - x_2$	x_2	$y_2 = P_2(x)$	$P_{12}(x)$	$P_{012}(x)$	
$x - x_3$	x_3	$y_3 = P_3(x)$	$P_{23}(x)$	$P_{123}(x)$	$P_{0123}(x)$
.

Estrategia de Aitken

Esta estrategia conduce a la tabla siguiente:

$x - x_i$	x_i	$y_i = P_i(x)$	P grado 1	P grado 2	P grado 3
$x - x_0$	x_0	$y_0 = P_0(x)$			
$x - x_1$	x_1	$y_1 = P_1(x)$	$P_{01}(x)$		
$x - x_2$	x_2	$y_2 = P_2(x)$	$P_{02}(x)$	$P_{012}(x)$	
$x - x_3$	x_3	$y_3 = P_3(x)$	$P_{03}(x)$	$P_{013}(x)$	$P_{0123}(x)$
.

Por último, observe que ambas estrategias tiene los mismos valores en la diagonal de las tablas respectivas. As, el valor de salida de ambas estrategias es:

$$p(x) = P_{0,1,\dots,n}(x)$$

Ejemplo.

Calcula el valor del polinomio de interpolación en $x = 3$ para los datos: $\{(-1, 0), (2, -1), (5, 2), (6, 5)\}$

Solución.

- Si utilizamos la tabla de Neville, se obtiene:

$x - x_i$	x_i	$y_i = \text{grad. } 0$	grado 1	grado 2	grado 3
4	-1	0			
1	2	-1	$-\frac{4}{3}$		
-2	5	2	0	$-\frac{4}{9}$	
-3	6	5	-4	-1	$-\frac{16}{21}$

Desde aquí, el valor buscado es: $p(3) = P_{0123}(3) = -\frac{16}{21}$

- Si usamos la estrategia de Aitken, obtenemos la tabla de valores:

$x - x_i$	x_i	$y_i = \text{grad. } 0$	grado 1	grado 2	grado 3
4	-1	0	-	-	-
1	2	-1	$-\frac{4}{3}$	-	-
-2	5	2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{9}$	-
-3	6	5	$\frac{20}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{16}{21}$

De nuevo, el valor del interpolante es: $p(3) = P_{0123}(3) = -\frac{16}{21}$.

Ejercicio.

Compruebe, usando la fórmula de interpolación de Newton, que el valor obtenido mediante las tablas anteriores es el correcto.

4.5. Error en la Interpolación Polinomial.

Cuando calculamos el polinomio de interpolación para el problema de Lagrange o Hermite, en general, estamos dando una estimación del modelo exacto por lo que se comete un error que pretendemos analizar de forma escueta en esta sección. Lo hacemos para los dos problemas más clásicos: Interpolación polinomial lagrangiana y de Hermite clásica.

Así supongamos que los datos vienen de la función $f(x)$ y sea $p(x)$ el interpolante de $f(x)$ entonces llamamos error de interpolación en " x " al valor:

$$E(x) = f(x) - p(x)$$

En esta situación, nos preguntamos si podemos dar una estimación manejable de este valor. Veámoslo en los casos comentados anteriormente.

Sea $p_n(x)$ el interpolante de $f(x)$ en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , entonces, el error lo escribimos como $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$. Si usamos la fórmula de Newton, tenemos que:

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

y también, si agregamos un nuevo nodo de interpolación, $x_{n+1} = \hat{x}$ tendremos la expresión formal de Newton:

$$p_{n+1}(x; \hat{x}) = p_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, \hat{x}] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)$$

Pues bien, si suponemos que el nodo elegido es precisamente el nodo genérico $\hat{x} = x$, es evidente que la expresión anterior es una forma de escribir la función $f(x)$; es decir,

$$f(x) \equiv p_{n+1}(x; x) = p_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)$$

Por lo tanto, el error de interpolación polinomial es:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)$$

Si usamos la propiedad que relaciona las diferencias divididas con la derivabilidad de una función podemos obtener el resultado siguiente:

Teorema 4.3 *Sea $f \in C^{n+1}([a, b])$ y sea $p_n(x)$ el polinomio de interpolación de f en los nodos $x_i \quad i = 0, 1, \dots, n$ del intervalo $[a, b]$. Entonces,*

$$1. \quad E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!} \Pi(x)$$

$$\text{donde } \Pi(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$2. \quad \text{Una estimación del error es la siguiente: } |E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\Pi(x)| \text{ donde } M \text{ es una cota para } |f^{n+1}(x)| \text{ en el intervalo } [a, b].$$

Así, podemos observar que el error de interpolación puede estar controlado para funciones suaves pero el término que depende de los nodos en una forma especial puede presentar grandes oscilaciones debido a tal propiedad intrínseca de los polinomios de grado elevado. Nos preguntamos, pues, si interpolamos una función dada en un intervalo $[a, b]$ mediante el aumento sucesivo de nodos de interpolación ¿será más pequeño el error?; es decir, ¿convergerá la sucesión de polinomios de interpolación a la función cuando $n \rightarrow \infty$?

La respuesta, en general, es negativa, a menos que los nodos sean elegidos de forma especial. Observe esto con el ejemplo de la Figura 4.3.

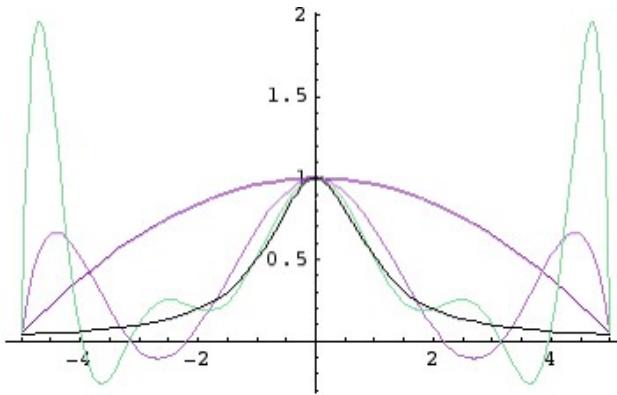


Figura 4.3: función e interpolantes $p_2(x)$, $p_6(x)$ y $p_{10}(x)$

La función considerada es: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $]-5, 5[$ y nodos de interpolación igualmente espaciados:

$$\{-5, 0, 5\}; \left\{-5, -\frac{20}{6}, -\frac{10}{6}, 0, \frac{10}{6}, \frac{20}{6}, 5\right\}; \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

En estas gráficas puede apreciarse que el error de interpolación no disminuye con el grado sino que es mayor, por lo que esta distribución de nodos conduce a una sucesión de polinomios divergente. Nos preguntamos, pues, ¿es posible elegir unos nodos óptimos respecto del error de interpolación?

En términos más precisos,

¿existen nodos x_i en el intervalo de interpolación para los que $\max_{x \in [a,b]} \{|\Pi(x)|\}$ sea mínimo?

La respuesta a esta cuestión está en las propiedades de los llamados polinomios de Chebyshev cuyo análisis detallado se hace en el capítulo 5.

Tales polinomios vienen definidos, en el intervalo $[-1,1]$ mediante la relación de recurrencia:

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}, n \geq 1$$

Así por ejemplo los cinco primeros polinomios de Chebyshev son:

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x, T_4 = 8x^4 - x^2 + 1$$

Pues bien, estos polinomios tienen propiedades muy interesantes en relación al error de interpolación.

1. $p(x) = \frac{T_{n+1}}{2^n}$ es un polinomio de grado $n+1$ y coeficiente líder 1 que cumple:

$$\|p(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} \left\{ \frac{|T_{n+1}(x)|}{2^n} \right\} = \frac{1}{2^n}$$

2. para cualquier polinomio de grado $n+1$ y coeficiente líder 1, $q(x)$, se cumple:

$$\|q(x)\|_\infty \geq \frac{1}{2^n}$$

3. El polinomio de Chebyshev, T_{n+1} , tiene exactamente $n+1$ ceros distintos en el intervalo $[-1, 1]$ que vienen dados por la igualdad:

$$x_i = \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(esta igualdad proviene de la igualdad siguiente: $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$, con $\theta = \arccos(x)$)

Como consecuencia de estas dos propiedades podemos asegurar que los mejores $n+1$ nodos de interpolación para una función en el intervalo $[-1, 1]$ serían los ceros del polinomio de Chebyshev T_{n+1} pues, en tal caso, el polinomio $\Pi(x)$ sería $\frac{T_{n+1}}{2^n}$ cuyo valor máximo en el intervalo $[-1, 1]$ es lo más pequeño posible y por tanto el error de interpolación sería óptimo.

Pero, ¿qué ocurre si deseamos interpolar una función suave en un intervalo $[a, b] \neq [-1, 1]$? Pues, lo único que hay que hacer es un cambio de variable adecuado que transforme los nodos del intervalo $[-1, 1]$ en nodos del intervalo $[a, b]$.

Con el cambio de variable se tienen los nodos en $[a, b]$:

$$x_i = a + \frac{b-a}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

En la tabla siguiente se dan los nodos óptimos para $n=2, 3, 4$ en intervalos diferentes:

	$[-1, 1]$	$[-5, 5]$
2	$\{-0,866025, 0., 0,866025\}$	$\{-4,33013, 0., 4,33013\}$
3	$\{-0,92388, -0,382683, 0,382683, 0,92388\}$	$\{-4,6194, -1,91342, 1,91342, 4,6194\}$
4	$\{-0,951057, -0,587785, 0., 0,587785, 0,951057\}$	$\{-4,75528, -2,93893, 0., 2,93893, 4,75528\}$

Observe y compare el comportamiento de los interpolantes en las Figuras 4.3 y 4.4.

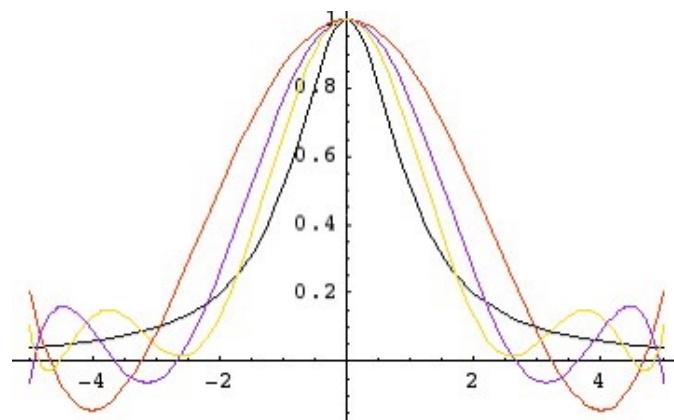


Figura 4.4: Interpolantes con nodos óptimos para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en $[-5, 5]$