Algebra II (Curso 2024-2025)

Doble Grado Matemáticas - Informática

Relación 7

Clasificación de grupos abelianos finitos

Ejercicio 1. Calcular los órdenes de todos los elementos de los distintos grupos abelianos de orden 8,12, 16 y 24.

Ejercicio 2. Para los siguientes grupos calcular sus descomposiciones cíclicas.

1. $G_1 = \{1, 8, 12, 14, 18, 21, 27, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 53, 57, 64\}$ con operación dada por multiplicación módulo 65.

2. $G_2 = \{1, 8, 17, 19, 26, 28, 37, 44, 46, 53, 62, 64, 71, 73, 82, 89, 91, 98, 107, 109, 116, 118, 127, 134\}$ con operación dada por multiplicación módulo 135.

3. $G_3 = \{1, 7, 17, 23, 49, 55, 65, 71\}$ con operación dada por multiplicación módulo 96.

4. $G_4 = \{1, 4, 11, 14, 16, 19, 26, 29, 31, 34, 41, 44\}$ con operación dada por multiplicación módulo 45.

Ejercicio 3. Calcular la descomposición cíclica y cíclica primaria de los grupo abelianos $C_{24} \times C_{40} \times C_{35}$ y $C_{14} \times C_{100} \times C_{40}$. ¿Son isomorfos?

Ejercicio 4. Sea G el grupo de las simetrías de un rectángulo (no cuadrado). Probar que G es un grupo abeliano. Calcular sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria

Ejercicio 5. Sea G un grupo abeliano de orden n y $l(G)$ su longitud. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (C_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, C_{p_1}, \ldots, C_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, C_{p_r}).$$

En particular, todos los grupos abelianos del mismo orden tienen la misma longitud y la misma lista de factores de composición.

Ejercicio 6. Listar todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 10, 16, 20, 30 , 40 , 108 y 360, dando sus factores invariantes, divisores elementales y descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.

Ejercicio 7. Calcular la forma normal, los factores invariantes y los divisores elementales de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -22 & -48 & -267 \\ -4 & -4 & 31 \\ -4 & -24 & 105 \\ 4 & -6 & -6 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Para los siguientes grupos abelianos calcular sus rangos y sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias:

a) $G_1 =< a, b, c; \begin{array}{ll} 3a + 9b + 9c & = 0 \\ 9a - 3b + 9c & = 0 \end{array} >$;

b) $G_2 =< a, b, c; \begin{array}{ll} 2a + 2b + 3c & = 0 \\ 5a + 2b - 3c & = 0 \end{array} >$;

c) $G_3 =< a, b, c, d; \begin{array}{ll} a + 3b + 2c & = 0 \\ 5a + 17b + 12c & = 0 \\ 6a + 4c & = 0 \end{array} >$;

d) $G_4 =< a, b, c; \begin{array}{ll} 12a + 4b + 6c & = 0 \\ -4a + 2b + 8c & = 0 \\ -2a + 16b + 34c & = 0 \end{array} >$;

e) $G_5 = \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_{35}$

¿Son algunos de estos grupos isomorfos?

Ejercicio 9. Dados los grupos abelianos:

$$G =< a, b, c, d; \begin{array}{ll} a + 2c - d & = 0 \\ a + 5c + 5d & = 0 \\ 2a + 4c + 2d & = 0 \end{array} > \qquad \text{y} \qquad H = \mathbb{Z}^3/K,$$

donde K es el subgrupo con generadores $\{(1, 2, 7), (1, 4, 7), (-1, 0, 2)\}$. Calcular:

1. El rango, los factores invariantes y los divisores elementales de cada uno de ellos.

2. Sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.

3. Las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de $G \oplus H$.

Ejercicio 10. a) Encuentra todos los grupos abelianos distintos, salvo isomorfismo, de orden 500. Da para cada uno de ellos sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria.

b) Calcula las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de

$$G = \left\langle a, b, c \;\middle|\; \begin{array}{c} 3a - 3b + 9c = 0 \\ 6a + 12b - 9c = 0 \\ 12b + 9c = 0 \end{array} \right\rangle.$$

¿Cuantos elementos tiene G? ¿Tiene algún elemento de orden seis?

Ejercicio 11. Dados los grupos abelianos

$$G = \left\langle a, b, c \mid \begin{array}{c} 2a - 6b + 18c = 0 \\ 6a + 6c = 0 \end{array} \right\rangle$$

y

$$H = \mathbb{Z}^3 / \langle (1, -9, 3), (1, -7, 1), (1, -1, 1) \rangle.$$

1. Calcula sus rangos, descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.

2. ¿Son isomorfos? ¿Lo son sus subgrupos de torsión?

3. ¿Cuántos elementos de orden 6 tiene H? ¿Y G?

4. ¿Cuantos grupos hay, salvo isomorfismos, con los mismos elementos que H?

Ejercicio 12. i) Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria de todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 484.

ii) Sea

$$G = \left\langle a, b, c \mid \begin{array}{c} 2a + b + 4c = 0 \\ 2a + 2b + 6c = 0 \end{array} \right\rangle$$

y $H = \mathbb{Z}^2/K$, con K el subgrupo de $\mathbb{Z}^2$ generado por los pares $(2, 3)$ y $(6, 3)$. Razona, calculando las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de ambos, que no son isomorfos.

Ejercicio 13. 1. Encuentra todos los grupos abelianos distintos, salvo isomorfismo, de orden 1176. Da para cada uno de ellos sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria.

2. Calcula las descomposiciones cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano dado en términos de generadores y relaciones siguiente:

$$G = \left\langle x, y, z \mid \begin{array}{c} 2x = 5y \\ 2y = 5z \\ 2z = 5x \end{array} \right\rangle.$$

¿Qué tipo de órdenes tienen sus elementos?

Ejercicio 14. Calcular las descomposiciones cíclica y cíclica primaria del siguiente grupo abeliano dados en términos de generadores y relaciones:

$$G = \left\langle a, b, c, d \mid \begin{array}{c} 9a + 9b + c + 8d = 0 \\ 63a - b + 63c + 64d = 0 \\ 56a - 8b + 64c + 56d = 0 \end{array} \right\rangle$$

¿Tiene G elementos de orden infinito? ¿Y de orden finito? Calcular cuantos grupos abelianos no isomorfos hay con el mismo orden que la torsión de G.

Ejercicio 15. Calcular las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 13916. Identifica la componente 3-primaria de cualquiera de esos grupos.