Álgebra I (Doble Grado Informática-Matemáticas)

Curso 22-23.

Relación 1

En los siguientes enunciados, $A, B, C, ...$ refieren a subconjuntos arbitrarios de un conjunto dado X, y se pide demostrar la veracidad de las equivalencias o igualdades propuestas.

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.
3. (a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq c(B) \Leftrightarrow B \subseteq c(A)$.
   (b) $A \cup B = X \Leftrightarrow c(A) \subseteq B \Leftrightarrow c(B) \subseteq A$.
4. $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.
5. (a) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
   (b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
6. Siendo la "*diferencia simétrica*" $A \triangle B$ de A y B el subconjunto

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A),$$

   demostrad:
   (a) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
   (b) $A \triangle B = B \triangle A$.
   (c) $A \triangle \emptyset = A$.
   (d) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
   (e) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
7. Si A y B son finitos, $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.
8. Si A, B, y C son finitos,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

En los siguientes dos ejercicios, $P, Q, R, ...$ refieren a propiedades que pueden ser satisfechas, o no, por los elementos de un conjunto X.

9. Argumentar que las siguientes proposiciones son equivalentes:
   (a) $P \Rightarrow Q$.
   (b) $P \vee Q \Leftrightarrow Q$.
   (c) $P \wedge Q \Leftrightarrow P$.
10. Argumentar la veracidad de las siguientes equivalencias
   (a) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
   (b) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
   (c) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$.
   (d) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$.
   (e) $(P \vee \neg Q) \vee (P \vee \neg R) \Leftrightarrow P \vee \neg(Q \wedge R)$.
   (f) $P \vee Q \vee \neg Q \Leftrightarrow P \vee Q \vee \neg(P \vee R)$.
   (g) $(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)$.

11. Sean S y T conjuntos, $A \subseteq S$ y $B \subseteq T$.
   (a) Probar $A \times B$ es un subconjunto de $S \times T$.
   (b) Probar, con el siguiente ejemplo, que no todo subconjunto X de $S \times T$ es de la forma $X = A \times B$: $S = T = \{0, 1\}$, $X = \{(0, 0), (1, 1)\} \subseteq S \times T$.
12. Sean $f : S \to T$ y $g : T \to U$ aplicaciones.

(a) Probar que si ambas son inyectivas, entonces su composición $gf : S \to U$ es también inyectiva.
(b) Probar que si ambas son sobreyectivas, entonces su composición $gf : S \to U$ es también es sobreyectiva.
(c) Si su compuesta $gf : S \to U$ es inyectiva o sobreyectiva ¿qué podemos decir sobre f y g?

13. Sea $f : S \to T$ una aplicación.
(a) Probar que f es inyectiva si y solo si tiene una *inversa por la izquierda*, es decir, existe una aplicación $g : T \to S$ tal que $gf = id_S$.
(b) Dar un ejemplo de una aplicación inyectiva con dos diferentes inversas por la izquierda.
(c) Probar que f es sobreyectiva si y solo si tiene una *inversa por la derecha*, es decir, existe una aplicación $g : T \to S$ tal que $fg = id_T$.
(d) Dar un ejemplo de una aplicación sobreyectiva con dos diferentes inversas por la derecha.

14. Denotemos por $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ al conjunto con dos elementos. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathbf{2}^X$ al conjunto de todas las aplicaciones $f : X \to \mathbf{2}$. Si $A \in \mathcal{P}(X)$, se define su **aplicación característica** $\chi_A : X \to \mathbf{2}$ por
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$
Probar que la correspondencia $A \mapsto \chi_A$, define una aplicación biyectiva
$$\chi : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{2}^X.$$

Toda aplicación $f : S \to T$ determina otras
$$f_* : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(T), \quad f^* : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S),$$
llamadas las aplicaciones *imagen* e *imagen inversas* por f, respectivamente, que están definidas, para cada $A \subseteq S$ y $X \subseteq T$, por
$$f_*(A) = \{f(a) \mid a \in A\}, \quad f^*(X) = \{a \in S \mid f(a) \in X\}.$$

En los ejercicios siguientes, $f : S \to T$ refiere a una aplicación dada, $A, B \subseteq S$ son subconjuntos de S y $X, Y \subseteq T$ son subconjuntos de T.

15. Probar que $f^*(X \cup Y) = f^*(X) \cup f^*(Y)$ y $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$.
16. Probar que $f^*(X \cap Y) = f^*(X) \cap f^*(Y)$ y $f_*(A \cap B) \subseteq f_*(A) \cap f_*(B)$.
17. Demostrar que si f es inyectiva, entonces $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$.
18. Demostrar con el siguiente ejemplo que, en general, $f_*(A \cap B) \neq f_*(A) \cap f_*(B)$: Sea $f = |\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación “valor absoluto”, $A = (0, 1)$ y $B = (-1, 0)$.
19. $f_*(f^*(X)) \subseteq X$, y se da la igualdad si f es sobreyectiva.
20. $A \subseteq f^*(f_*(A))$, y se da la igualdad si f es inyectiva.
21. Probar que, si f es una biyección entonces las aplicaciones $f_* : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(T)$ y $f^* : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(S)$ son biyectivas e inversas una de la otra.