Análisis Funcional

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Miguel Ángel Moreno Castro

miguelangelmc@correo.ugr.es

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Índice

I Espacios Normados 3

1. Conceptos Básicos 3

1.1. Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski 3

1.2. Espacio Dual de un Espacio Normado 5

1.2.1. Hiperplanos y formas lineales 6

2. Espacios Normados de Dimensión Finita 8

II Teorema de Hahn-Banach 12

1. Forma Analítica del Teorema de Hahn-Banach: Extensiones de funcionales lineales 12

2. Formas Geométricas del Teorema de Hanh-Banach: Separación de Conjuntos Convexos 16

3. El Espacio Bidual. Relaciones de Ortogonalidad 20

III Teorema de Banach-Steinhaus 23

1. Teorema de la Categoría de Baire 23

2. Principio de Acotación Uniforme 24

IV Topologías Débiles 30

1. Topologías Iniciales 30

2. Topologías Débiles 31

3. Topología Débil, Conjuntos Convexos y Operadores Lineales 35

4. La Topología Débil* 37

4.1. Espacios Reflexivos 41

5. Espacios de Lebesgue 43

5.1. Definición y Propiedades Elementales 44

5.2. Reflexividad 45

V Espacios de Hilbert 46

1. Espacios Prehilbertianos 46

2. Proyecciones en Conjuntos Convexos Cerrados 48

3. El Espacio Dual de un Espacio de Hilbert 52

4. Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram 54

I Espacios Normados

1 Conceptos Básicos

Definición 1.1. Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$, donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_0^+$ es una aplicación verificando:

(i) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$

Dado un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, la aplicación $d: E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in E$$

es una distancia en E que se llama **distancia asociada a la norma**.

Nota: Todo espacio normado se considera siempre como espacio métrico con la distancia asociada a su norma.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in E$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$. Y se dice que $\{x_n\}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \geq m_\varepsilon$, $q \geq m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que E es un espacio normado completo o un **espacio de Banach**.

1.1 Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski

Una operación muy frecuente en Análisis Matemático es la de acotar una cantidad; eso es lo que habitualmente hacemos cuando estudiamos procesos de convergencia o de continuidad. Como no hya reglas generales para hacer acotaciones, cualquier resultado que pueda ayudarnos es importante. Pues bien, para dicha tarea, las desigualdades de *Young*, *Hölder* y *Minkowski* son muy eficaces.

Definición 1.2. Para $1 < p < \infty$ definimos el **exponente conjungado** de p, que denotaremos por p^*, como el número real que verifica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Observamos que también $1 < p^* < \infty$ y, que la relación entre p y p^* es simétrica, es decir, $(p^*)^* = p$.

Lema 1.1 (Desigualdad de Young). Para $1 < p < \infty$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

A partir de esta desigualdad se deduce la siguiente:

Proposición 1.1 (Desigualdad de Hölder). Para $1 < p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^{p^*}\right)^{1/p^*}$$

En un tercer paso, obtenemos ya el resultado que nos va a permitir probar la desigualdad triangular para muchas de las normas que vamos a estudiar:

Proposición 1.2 (Desigualdad de Minkowski). Para $1 < p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^{p^*}\right)^{1/p^*}$$

Ejemplo 1.1. Espacios Clásicos de Sucesiones. Consideremos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cuyos elementos son todas las sucesiones de escalares, es decir, todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente. Concretamente, para $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

$$(x + y)(n) = x(n) + y(n) \qquad \text{y} \qquad (\lambda x)(n) = \lambda x(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos a considerar una amplia gama de subespacios de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que, dotados de la norma apropiada en cada caso, se convertirán en importantes ejemplos de espacios de Banach.

Para $1 \leq p < \infty$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\, x(n)\,|^p\right)^{1/p} \qquad \forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

y también definimos

$$\|x\|_\infty = \sup\{\,|\, x(n)\,| : n \in \mathbb{N}\}$$

Observamos que la desigualdad triangular para el caso $p = 1$ es inmmediata y, para $p > 1$ es consecuencia de la Desigualdad de Minkowski. Por tanto, es sencillo probar que tanto $\|\cdot\|_p$ como $\|\cdot\|_\infty$ son normas para el espacio $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Además, se puede probar que ambas son completas, entonces

$$l_p = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\} \qquad l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty < \infty\}$$

son espacios de Banach.

Existen dos subespacios interesantes de l_∞

$$c = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\colon \lim_{k\to\infty} x_k = L,\ L \in \mathbb{R}\} \qquad c_0 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\colon \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$$

Claramente se tiene que $c_0 \subset c \subset l_\infty$ y, ambos son cerrados subespacios cerrados en l_∞.

Ejercicio 1.1. Para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ se tiene que $l_p \subset l_p$

1.2 Espacio Dual de un Espacio Normado

Definición 1.3. Sea E un espacio normado, llamamos **dual algebráico** a

$$E^\# = \left\{\phi\colon E \to \mathbb{R} \;/\; \phi \text{ es lineal }\right\}$$

mientras que llamamos **dual topológico** a

$$E^* = \left\{\phi\colon E \to \mathbb{R} \;/\; \phi \text{ es lineal y continua }\right\}$$

Para E^*, si E y F son espacios normados y $\phi\colon E \to F$ es una aplicación lineal, entonces:

$$\phi \text{ es continua} \iff \exists M \geq 0\colon \|\phi(x)\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Luego

$$\phi \in E^* \implies \exists M \geq 0\colon \,|\phi(x)|\, \leq M\|x\|,\ \forall x \in E$$

Por tanto, definimos

$$\|\phi\|_{E^*} = \inf\left\{M \geq 0\colon \,|\phi(x)|\, \leq M\|x\|_E,\ \forall x \in E\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{E^*} &= \inf\left\{M \geq 0\colon \,|\phi(x)|\, \leq M\|x\|_E,\ \forall x \in E\right\} = \inf\left\{M \geq 0\colon \frac{|\phi(x)|}{\|x\|_E} \leq M,\ \forall x \in E\right\} \\ &= \inf\left\{M \geq 0\colon \left|\phi\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right| \leq M,\ \forall x \in E\right\} = \inf\left\{M \geq 0\colon \,|\phi(x)|\, \leq M,\ \|x\| = 1,\ \forall x \in E\right\}\end{aligned}$$

luego, otra definición equivalente sería

$$\|\phi\|_{E^*} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} |\phi(x)| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ x\in E}} \phi(x)$$

Nota: Dado $f \in E^*$ y $x \in E$ a veces escribiremos $\langle f, x\rangle$ en lugar de $f(x)$. En dicho caso decimos que $\langle , \rangle$ es el **producto escalar para la dualidad** E^*, E.

Ejercicio 1.2. Demostrar que $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ es un Espacio de Banach. **Pista:** $\mathbb{R}$ es completo.

El siguiente resultado proporciona varias caracterizaciones de la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados.

Proposición 1.3. Sean E, F dos espacios normados y $T\colon E \to F$ una aplicación lineal. Las siguiente afirmaciones son equivalentes

(i) T es continua

(ii) T es continua en 0

(iii) $T(B_E(0,1))$ es un conjunto acotado en F

(iv) $T(B_F(x,n))$ es un conjunto acotado en F

(v) $\exists M \geq 0\colon \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \qquad \forall x \in E$

1.2.1 Hiperplanos y formas lineales

Vamos a ver que cada aplicación lineal determina un hiperplano único y, a su vez, cada hiperplano determina de forma única, salvo por un factor de proporcionalidad, una forma lineal.

Definición 1.4. Un **hiperplano** H es un subespacio vectorial propio de E que verifica que para todo subespacio vectorial $V \subset E$ tal que $H \subset V \subset E$ se tiene que $H = V$ o $X = V$.

Otra definición equivalente es que un hiperplano es un subespacio vectorial de codimensión 1.

Proposición 1.4. Sea H un subespacio vectorial de E, entonces

$$H \text{ es un hiperplano} \iff \exists \phi \in E^{\#} \setminus \{0\} : \ H = \ker \phi$$

Demostración: Veamos cada implicación por separado

$\boxed{\Longleftarrow}$ Dado $\phi \in E^{\#} \setminus \{0\}$ se tiene que $E/\ker\phi$ es isomorfo a $\mathbb{R}$, por tanto $\dim(E/\ker\phi) = 1$ y, consecuentemente $\operatorname{codim}(\ker\phi) = 1$. Por tanto, $\ker\phi$ es un hiperplano.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que H es un hiperplano, entonces dado $u \in E \setminus H$ todo vector $x \in E$ puede escribirse de manera única como

$$x = h + \lambda u, \ h \in H, \ \lambda \in \mathbb{R} \implies E = H \oplus \mathbb{R}u$$

Entonces considerando la aplicación $\phi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \phi(h + \lambda u) = \lambda$$

es una aplicación lineal verificando, $\ker\phi = H$. □

Observamos que cualquier otra aplicación lineal de la forma $\psi = \lambda\phi$ con $\lambda \neq 0$ verifica que $\ker\psi = \ker\phi$ y ambas formas lineales determinan el mismo hiperplano. También es cierta la afirmación recíproca, es decir, si $\phi, \psi \in E^{\#} \setminus \{0\}$ tienen el mismo núcleo, entonces $\psi = \lambda\phi$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pues tomando $y \in E$ tal que $\phi(y) = 1$, para todo $x \in E$ se verifica que

$$x - \phi(x)y \in \ker\phi = \ker\psi \Longrightarrow \psi(x - \phi(x)y) = 0 \Longrightarrow \psi(x) = \psi(y)\phi(x)$$

y basta tomar $\lambda = \psi(y) \neq 0$.

Proposición 1.5. Sea $\phi \in E^{\#} \setminus \{0\}$, entonces ϕ es continuo si, y sólo si, su núcleo es un cerrado.

Demostración: Veamos ambas implicaciones por separado

$\boxed{\Longrightarrow}$ Observamos que $\ker\phi = \phi^{-1}(\{0\})$, es decir, es la imagen inversa de un cerrado.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Lo probaremos mediante el contrarecíproco, es decir, si $\phi \in E^{\#} \setminus E^{*}$ entonces $\ker\phi$ no es cerrado.

Si ϕ no es continua tendríamos que $\phi(B_E(0,1))$ no está acotado. Sabemos que $B_E(0,1)$ es un conjunto convexo y simétrico, luego $\phi(B_E(0,1))$ es también convexo y simétrico contenido en $\mathbb{R}$, luego tiene que ser un intervalo que contenga al 0 y no esté acotado, entonces necesariamente ha de ser $\phi(B_E(0,1)) = \mathbb{R}$. Haciendo uso de la linealidad de ϕ tenemos

$$\phi(B_E(x,n)) = \phi(x) + n\phi(B_E(0,1)) = \mathbb{R}$$

Luego $\exists u \in B_E(x,n)$ tal que $\phi(u) = 0$, por tanto $u \in \ker\phi$. Entonces $B_E(x,n) \cap \ker\phi \neq \emptyset$, luego $\overline{\ker\phi} = E$. Dado que $\phi \not\equiv 0$ se tiene que $\ker\phi \neq \overline{\ker\phi}$, es decir, no es cerrado. □

Corolario 1.1. Sea M un subespacio vectorial de E, entonces

$$M \text{ es un hiperplano cerrado} \iff \exists f \in E^{*} \setminus \{0\} \text{ tal que } \ker f = M$$

Lema 1.2 (Riesz). Sea M un hiperplano cerrado de E y sea $u \in E \setminus M$. Entonces

$$\exists g \in E^{*} \setminus \{0\} \text{ tal que } \begin{cases} \|g\|_{E^*} = 1 \\ g(u) = d(u,M) \\ \ker g = M \end{cases}$$

Nota: Se define $d(u,M) = \inf_{m\in M}\|u - m\|$

Demostración: Dado que M es un hiperplano de E, podemos considerar $E = M \oplus \mathbb{R}u$. Para cada $x \in E$ definimos

$$g(x) = g(m + \lambda u) = \lambda d(u,M) \qquad m \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Es decir, tenemos una aplicación $g\colon E \to \mathbb{R}$ que es lineal y verifica $\ker g = M$. Haciendo uso del Corolario 1.1 sabemos que g es continua. Además

$$|g(m + \lambda u)| = |\lambda| d(u,M) = d(\lambda u, M) \leq \|m + \lambda u\|_E$$

luego $\|g\|_{E^*} \leq 1$. Ahora, para todo $m \in M$ se tiene que

$$d(u,M) = g(m+u) \leq \|g\|_{E^*}\|m+u\|_E \Longrightarrow \|m+u\| \geq \frac{d(u,M)}{\|g\|_{E^*}} \Longrightarrow d(u,M) \geq \frac{d(u,M)}{\|g\|_{E^*}} \Longrightarrow \|g\|_{E^*} \geq 1$$

Por tanto $\|g\|_{E^*} = 1$ y, observamos que $g(u) = d(u,M)$. □

2 Espacios Normados de Dimensión Finita

Vamos a presentar dos resultados básicos acerca de los espacios normados más sencillos, los de dimensión finita.

Teorema 2.1 (Hausdorff, 1932). Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes.

El Teorema 2.1 tiene varios colorarios destacables, algunos de los cuales equivalen al propio teorema.

Corolario 2.1. Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.

Demostración: Sea $T\colon X \to Y$ una aplicación lienal de un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ de dimensión finita en un espacio normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Definimos

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$$

y es sencillo probar que dicha aplicación es una norma en X. Entonces dicha norma debe ser equivalente a la norma $\|\cdot\|_X$, es decir

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|x\|_T \leq M\|x\|_X \implies \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \implies \|T(x)\|_Y \leq (M-1)\|x\|_X$$

lo que prueba la continuidad de T. $\square$

Corolario 2.2. Toda biyección lineal, entre dos espacios normados de dimensión finita, es un homeomorfismo.

Demostración: En primer lugar, fijado $N \in \mathbb{N}$, sea $\phi\colon \mathbb{R}^N \to Y$ una biyección lineal de $\mathbb{R}^N$ sobre un espacio normado Y. Por el Colorario 2.1, ϕ es continua, pero queremos ver que ϕ^{-1} también lo es.

Consideremos la espera unidad $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon \|x\| = 1\}$ que, por ser un conjunto compacto y ϕ una aplicación continua, $\phi(\mathbb{S}^{N-1})$ es un subconjunto compacto de Y. Por tanto, existe $u_0 \in \mathbb{S}^{N-1}$ tal que $\|\phi(u_0)\| \leq \|\phi(u)\|$ para todo $u \in \mathbb{S}^{N-1}$. Tenemos entonces

$$\|y\| = \|\phi(x)\|$$

y esto prueba que ϕ^{-1} es continua, como queríamos.

Sean ahora X e Y dos espacios normados de dimensión finita y, $T\colon E \to F$ una biyección lineal. Si $\dim E = N$, entonces existe una biyección $\phi\colon \mathbb{R}^N \to X$.

Por tanto, nos encontramos ante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(E, \|\cdot\|_E) \arrow[r, "T"] & (F, \|\cdot\|_F) \arrow[d] \\
(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|) \arrow[u, "\phi"] & (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 2.3. En cualquier espacio normado, todos los subespacios de dimensión finita son cerrados.

Ejercicio 2.1. Sean E, F dos espacios normados y supongamos que F tiene dimensión finita y, dada $T\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal se tiene que

(i) T es continua $\iff$ $\ker T$ es cerrado en E

(ii) T es abierta $\iff$ $T(E) = F$

Ejercicio 2.2. Sea E un espacio normado con $\dim E = \infty$, entonces $\exists \phi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y no continua, es decir, $E^{\#} \setminus E^{*} \neq \emptyset$

Ejercicio 2.3. Sea E un espacio normado con $\dim E = \infty$, entonces $\exists \phi\colon E \longrightarrow E$ biyección lineal no continua.

Teorema 2.2 (Riez 1918). Sea E un espacio normado, son equivalentes:

(i) Todo subconjunto cerrado y acotado de E es compacto

(ii) $\overline{B_E}(0,1)$ es compacto

(iii) E es localmente compacto

(iv) $\dim E < \infty$

Demostración: Veamos las diversas implicaciones:

$\boxed{\text{i} \iff \text{ii} \iff \text{iii}}$

$\boxed{\text{iv} \implies \text{i}}$ Teorema de Heine-Borel

$\boxed{\text{ii} \implies \text{iv}}$ Sea $B = \overline{B_E}(0,1)$ compacto, fijamos $0 < \rho < 1$ y tomamos un recubrimiento $\{B_E(x,\rho)\colon x \in B\}$ de B. Por ser B compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito de B, luego existirán $x_1, \ldots, x_n \in B$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$

Nota: Recordamos que $B(x,\rho) = x_i + \rho B_E(0,1)$

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\rho) = \bigcup_{i=1}^{n} x_i + \rho B_E(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i + \rho B = F + \rho B \subset M\rho B$$

donde $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset M =< x_1, \ldots, x_n >$, siendo M claramente un subespacio de dimensión finita. Así tenemos que $B \subset M + \rho B$. Es claro entonces que

$$B \subset M + \rho B \subset M + \rho(M + \rho B) = \underbrace{M + \rho M}_{M \text{ subespacio}} + \rho^2 B = M + \rho^2 B$$

Por inducción tenemos

$$B \subset M + \rho^p B \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

lo que significa que para todo $x \in B$ podemos escribirlo como $x = m + \rho^m z$ donde $m \in M$ y $\|z\| < 1$, que también podemos escribirlo como $x - m = \rho^p z$, luego $\|x - m\| = \rho^p \|z\| \leq \rho^p$, así $0 \leq d(x, M) \leq \underbrace{\rho^p \to 0}_{p \to \infty}$ para todo $p \in \mathbb{N}$ lo que implica $d(x, M) = 0$. Por tanto $x \in \overline{M} = M$, probando que $B \subset M$ lo que implica $E \subset M$ y por tanto $E = M$, luego $\dim E = \dim M < \infty$. □

Lema 2.1 (Riesz). Sea E un espacio normado y M un subespacio cerrado de E, entonces

$$M \neq E \Longrightarrow \forall \rho \in (0,1),\ \exists x \in E \text{ tal que } \|x\| = 1,\ d(x, M) > \rho$$

Demostración: Lo probaremos mediante el contrarecíproco, es decir

$$\exists \rho \in (0,1) \text{ tal que } d(x, M) \leq \rho,\ \forall x \in B = \overline{B_E}(0,1) \iff B \subset M + \rho B$$

Por inducción

$$B \subset M + \rho^p B\ \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow B \subset \overline{M} \underbrace{=}_{M \in C_T} M \Longrightarrow E = M$$

□

Los espacios vectoriales que interesan en Análisis Funcional son espacios de funciones que, salvo excepciones, no tienen dimensión finita, es decir, no tienen sistemas finitos de generadores. La existencia de bases en tales espacios no es evidente y depende de un resultado conocido como **Lema de Zorn**.

Definición 2.1. Una relación binaria $\leq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si verifica las siguientes propiedades:

(i) $a \leq a, \quad \forall a \in A$

(ii) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b, \quad \forall a, b \in A$

(iii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c, \quad \forall a, b, c \in A$

Un conjunto no vacío $B \subset A$ está **totalmente ordenado** si y solo si para cualesquiera dos elementos $x, y \in B$ se verifica que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Dado $B \subset A$, recordemos que $c \in A$ es una **cota superior** de B si para todo elemento $b \in B$ se tiene que $b \leq c$. Además, se dice que $a \in A$ es un elemento **maximal** si no hay ningún elemento en A que sea mayor que a, es decir, si $b \in A$ verifica que $a \leq b$, entonces $a = b$.

Definición 2.2. Un conjunto A se dice **inductivo** si todo subconjunto $A \subset B$ totalmente ordenado posee una cota superior.

Lema 2.2 (Zorn). Sea A un conjunto inductivo parcialmente ordenado, entonces existe un elemento maximal de A.

Es inmediato que todo conjunto finito no vacío y totalmente ordenado tiene máximo, en consecuencia, la hipótesis del Lema de Zorn la verifica todo conjunto finito no vacío parcialmente ordenado.

El nombre *lema* se conserva por razones históricas. De hecho, en la teoría de conjunto de Zermelo-Fraenkel, el Lema de Zorn puede deducirse del **Axioma de Elección**. Y recíprocamente, este axioma puede deducirse del Lema de Zorn. Por tanto, en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, el Lema de Zorn puede considerarse como un axioma equivalente al Axioma de Elección.

II | Teorema de Hahn-Banach

1 Forma Analítica del Teorema de Hahn-Banach: Extensiones de funcionales lineales

Sea E un espacio vectorial. Recordamos que un **funcional** es una función definida en E, o algún subespacio suyo, con valores en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1 (Hanh-Banach, Versión Analítica). Sea $p\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación verificando

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in E$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y sea $g\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G$$

Bajo estas condiciones, existe un funcional lineal $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a g, es decir, verifica $f(x) = g(x),\ \forall x \in G$ y, además

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in E$$

Demostración: Consideramos el conjunto de todas las extensiones de g

$$P = \left\{ h : D(h) \subset E \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} D(h) \text{ subespacio vectorial de } E, \\ h \text{ funcional lineal, } G \subset D(h), \\ h \text{ extiende a } g, \text{ y } h(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in D(h) \end{array} \right\}.$$

Observamos que P no es vacío, pues $g \in P$. A continuación, definimos en P una relación de orden parcial

$$h_1 \leq h_2 \iff D(h_1) \subset D(h_2) \text{ y } h_2 \text{ extiende a } h_1$$

$\boxed{P \text{ es inductivo}}$

Sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, consideramos el conjunto $\bigcup_{h \in Q} D(h)$ y veamos que es un subespacio vectorial de E.

(i) Si $x, y \in \bigcup_{h \in Q} D(h)$ entonces $\exists h_1, h_2 \in Q$ tal que $x \in D(h_1)$, $y \in D(h_2)$, luego por ser Q totalmente ordenado y $D(h)$ subespacio vectorial de E, se tiene que $x + y \in D(h_2) \subset \bigcup_{h \in Q} D(h)$.

(ii) Si $x \in \bigcup_{h \in Q} D(h)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces por un razonamiento análogo se tiene que $\lambda x \in \bigcup_{h \in Q} D(h)$.

Nota: Hemos considerado el caso que $h_1 \leq h_2$ por simplicidad, pero el caso $h_2 \leq h_1$ es análogo.

A continuación consideramos la siguiente extensión de g y veamos que es una cota superior para Q:

$$f\colon D(f)=\bigcup_{h\in Q} D(h)\longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x)=h(x) \text{ si } x\in D(h)$$

Para ver que el funcional está bien definido, es decir, que no depende del dominio de h consideramos $x\in D(h_1)\cap D(h_2)$, luego se tiene

$$\left.\begin{array}{l} x\in D(h_1)\subset D(h_2) \text{ y } h_2 \text{ extiende a } h_1 \iff h_1\le h_2 \\ x\in D(h_2)\subset D(h_1) \text{ y } h_1 \text{ extiende a } h_2 \iff h_2\le h_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow h_1=h_2$$

Veamos que f es lineal

(i) Sean $x,y\in D(f)$, entonces existen $h_1,h_2\in Q$ tal que $x\in D(h_1), y\in D(h_2)$, luego

$$D(h_1)\subset D(h_2)\Longrightarrow x,y\in D(h_2)\Longrightarrow x+y\in D(h_2)\Longrightarrow f(x+y)=h_2(x+y)=h_2(x)+h_2(y)=f(x)+f(y)$$

(ii) Sean $x\in D(f), \lambda\in\mathbb{R}$, entonces existe $h_3\in Q$ tal que

$$x\in D(h_3)\Longrightarrow \lambda x\in D(h_3)\Longrightarrow f(\lambda x)=h_3(\lambda x)=\lambda h_3(x)=\lambda f(x)$$

Nota: Hemos considerado el caso que $h_1\le h_2$ por simplicidad, pero el caso $h_2\le h_1$ es análogo.

Por último, veamos que $f\in P$, para ello tendremos que comprobar

(i) $x\in D(f)\Longrightarrow \exists h\in Q\subset P\colon x\in D(h)\Longrightarrow f(x)=h(x)\le p(x)$

(ii) $x\in G\subset D(h),\ h\in Q\Longrightarrow f(x)=h(x)=g(x)$

Además acabamos de comprobar que para todo $h\in Q$, f extiende a h y trivialmente teníamos que $D(h)\subset D(f)$. Ambas equivalen a que $h\le f$, $\forall h\in Q$, luego f es una cota superior de Q.

Aplicando el Lema de Zorn tenemos que P tiene un elemento maximal, que lo denotaremos por $f\in P$.

$\boxed{D(f)=E}$

Supongamos, por reducción al absurdo, que $D(f)\subsetneq E$, entonces existe $x_0\in E\setminus D(f)$. Definimos el siguiente funcional lineal

$$h_\alpha\colon D(f)\oplus\langle x_0\rangle\longrightarrow\mathbb{R} \qquad h_\alpha(x+tx_0)=f(x)+t\alpha$$

donde $G\subset D(f)\subset D(f)\oplus\langle x_0\rangle$ es un subespacio vectorial de E. Así tenemos

$$h_\alpha(x)=f(x),\ \forall x\in D(f) \iff h_\alpha \text{ extiende a } f$$

En particular

$$h_\alpha(x)=f(x)=g(x),\ \forall x\in G \iff h_\alpha \text{ extiende a } g$$

A partir de aquí, buscamos elegir un α tal que $h_\alpha\in P$, luego deberá verificar que $h_\alpha(x)\le p(x),\ \forall x\in D(f)$.

Nota: La condición anterior equivale, por la propia definición, a

$$h_\alpha(x+tx_0)\le p(x+tx_0),\ \forall x\in D(f),\ \forall t\in\mathbb{R} \iff f(x)+t\alpha\le p(x+tx_0),\ \forall x\in D(f),\ \forall t\in\mathbb{R}$$

Podemos entonces tomar $x = ty$ con $y \in D(f)$, por tanto

$$f(ty) + t\alpha \leq p(ty + tx_0),\ \forall y \in D(f),\ \forall t \in \mathbb{R} \iff f(ty) + t\alpha \leq p(t(y + x_0)),\ \forall y \in D(f),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

A continuación tendremos que distinguir dos casos:

$$t \in \mathbb{R}^+ \quad t(f(y) + \alpha) \leq tp(y + x_0) \iff f(y) + \alpha \leq p(y + x_0) \iff \alpha \leq p(y + x_0) - f(y) \qquad \forall y \in D(f)$$

$$t \in \mathbb{R}^- \quad t(f(y) + \alpha) \leq (-t)p(-y - x_0) \iff f(y) + \alpha \leq -p(-y - x_0) \iff \alpha \geq -p(-y - x_0) - f(y) \qquad \forall y \in D(f)$$

Entonces necesitaríamos que se verificase

$$f(-y) - p(-y - x_0) \leq \alpha \leq p(y + x_0) - f(y)$$

Tomando $z = -y$ equivale

$$f(z) - p(z - x_0) \leq \alpha \leq p(y + x_0) - f(y)$$

Dicho α existe ya que

$$f(z) - p(z - x_0) \leq \sup_{z \in D(f)} \{f(z) - p(z - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{y \in D(f)} \{p(y + x_0) - f(y)\} \leq p(y + x_0) - f(y)$$

Por tanto, partiendo de que para todo $z, y \in D(f)$ se verifica

$$f(z + y) \leq p(z + y) = p(z - x_0 + y + x_0) \leq p(z - x_0) + p(y + x_0)$$

y haciendo uso de la linealidad tenemos

$$f(z) - p(z - x_0) \leq p(y + x_0) - f(y)$$

pudiendo así encontrar un α adecuado que verifique que $h_\alpha \in P$. Además, hemos comprobado que $f \leq h_\alpha$, lo cuál es imposible pues f es el elemento maximal de P. □

Corolario 1.1. Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial. Si $g\colon G \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, entonces existe $f \in E^*$, una extensión de g, tal que

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| = \|g\|_{G^*}$$

Demostración: En principio, partimos de

$$|g(x)| \leq \|g\|_{G^*} \|x\| \qquad \forall x \in G$$

Entonces definimos el funcional $p\colon E \to \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\|$$

y verifica

- $p(\lambda x) = \|g\| \|\lambda x\| \overset{\lambda \geq 0}{=} \lambda \|g\| \|x\| = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \geq 0$

- $p(x+y) = \|g\|\|x+y\| \leq \|g\|\|x\| + \|g\| + \|y\| = p(x) + p(y)$

Por tanto, haciendo uso del Teorema 1.1 existe una extensión $f \in E^* \setminus \{0\}$ de g tal que $f(x) \leq p(x),\ \forall x \in E$ y, además, se tiene que

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in G \\ \|x\|\leq 1}} |g(x)| = \|g\|_{G^*}$$

□

Corolario 1.2. Para todo $x_0 \in E$ existe $f_0 \in E^*$ tal que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \ \text{ y } \ \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$$

Demostración: Distinguimos dos casos básicos:

$\boxed{x_0 = 0}$ Entonces podemos tomar $f = 0$ para verificar lo que buscamos.

$\boxed{x_0 \neq 0}$ Dado $G = \langle x_0\rangle$ definimos el funcional $g\colon G \to \mathbb{R}$ dado por

$$g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

y observamos que $g \in G^*$ verificando

$$\|g\| = \sup_{\substack{x\in G \\ \|x\|\leq 1}} |g(x)| = \sup_{\substack{\|tx_0\|\leq 1 \\ t\in\mathbb{R}}} |t|\,\|x_0\|^2 = \frac{1}{\|x_0\|}\|x_0\|^2 = \|x_0\|$$

donde hemos usado que

$$0 < \|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|tx_0\| = |t|\,\|x_0\| \leq 1 \quad \text{cuando} \quad 0 \leq |t| \leq \frac{1}{\|x_0\|}$$

Por tanto tenemos $g(x_0) = g(1\cdot x_0) = \|x_0\|^2$ y aplicando el Colorario 1.1 obtenemos lo que buscamos. □

Corolario 1.3. Para todo $x \in E$, tenemos

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|$$

Demostración: Supongamos $x \neq 0$, pues en caso contrario la demostración es trivial. Entonces

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\| \Longrightarrow \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} \|f\|\|x\| \leq \|x\|$$

donde a partir de $x = \|x\|\frac{x}{\|x\|}$ también podemos tener $|\langle f, x\rangle| = \|x\|\,|\langle f, \frac{x}{\|x\|}\rangle| = \|x\|\|f\|$.

Por el Corolario 1.2 con $x_0 = x$ sabemos que existe $f_0 \in E^*$ tal que $\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$ y $\|f_0\| = \|x\|$. Definimos

$$f = \frac{f_0}{\|x\|} \in E^* \Longrightarrow \|f\| = \frac{\|f_0\|}{\|x\|} = 1 \leq 1$$

así

$$\langle f, x\rangle = \left\langle \frac{1}{\|x\|} f_0, x \right\rangle = \frac{1}{\|x\|}\langle f_0, x\rangle = \frac{1}{\|x\|}\|x\|^2 = \|x\|$$

obteniendo así lo que buscábamos. □

2 Formas Geométricas del Teorema de Hanh-Banach: Separación de Conjuntos Convexos

Definición 2.1. Sea E un espacio normado, un **hiperplano afín** es un subconjunto de E de la forma

$$[f = \alpha] = \{x \in E \colon f(x) = \alpha\}$$

donde $f \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante dada.

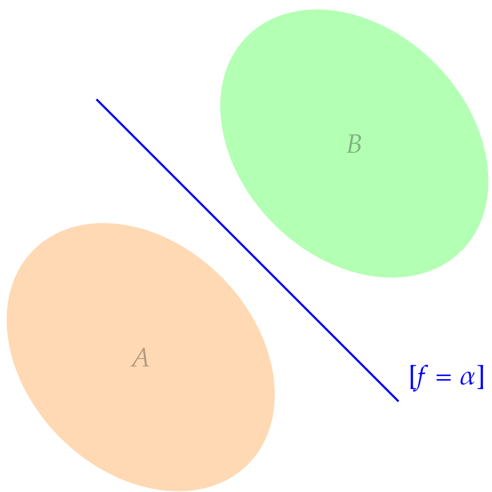
Definición 2.2. Sean $A, B \subset E$, $f \in E^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que un hiperplano $[f = \alpha]$ **separa** A y B si

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b) \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Análogamente, diremos que **separa estrictamente** A y B si

$$\exists \varepsilon > 0 \colon f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \qquad \forall a \in A,\ b \in B$$

Geométricamente, la separación significa que el conjunto A se encuentra en uno de las mitades determinadas por $[f = \alpha]$, mientras que B se encuentra en la otra.



Recordamos que un subconjunto $A \subset E$ es **convexo** si

$$tx + (1-t)y \in A, \qquad \forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1]$$

Teorema 2.1 (Hahn-Banach, Primera Versión Geométrica). Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos subconjuntos convexos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que A es abierto, entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B.

Lema 2.1. Sea $C \subset E$ un subconjunto abierto convexo con $0 \in C$. Para todo $x \in E$ se define

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha \in (0, \infty) \colon \frac{x}{\alpha} \in C \right\}$$

el cual satisface las propiedades

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E$

(ii) $\exists M > 0 \colon 0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \ \forall x \in E$

(iii) $C = \{x \in E \colon p(x) < 1\}$

(iv) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in E$

El funcional p es conocido como el **funcional de Minkowski** de C

Demostración: Veamos cada una de las propiedades por separado:

(i) Haciendo uso de la propia definición tenemos

$$p(\lambda x) = \inf \left\{ \alpha \in (0, \infty) \colon \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\} = \inf \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \in (0, \infty) \colon \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\} = \lambda \inf \left\{ \alpha \in (0, \infty) \colon \frac{x}{\alpha} \in C \right\} = \lambda p(x)$$

(ii) Sea $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset C$, entonces claramente tenemos

$$0 \leq p(x) = \inf \left\{ \alpha \in (0, \infty) \colon \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \leq \frac{1}{r}\|x\|$$

(iii) Dado $x \in C$, por ser C abierto tenemos que $(1 + \varepsilon)x \in C$, con $\varepsilon > 0$ y, por tanto,

$$p(x) \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$$

Consecuentemente, si $p(x) < 1$ existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\frac{x}{\alpha} \in C$ y, entonces $x = \alpha \left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1 - \alpha)0 \in C$

(iv) Sean $x, y \in E$ y $\varepsilon > 0$. Haciendo uso de (iii) obtenemos $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$, junto con $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$.

Por tanto

$$\frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1 - t)}{p(y) + \varepsilon} \in C, \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Considerando $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, llegamos a que

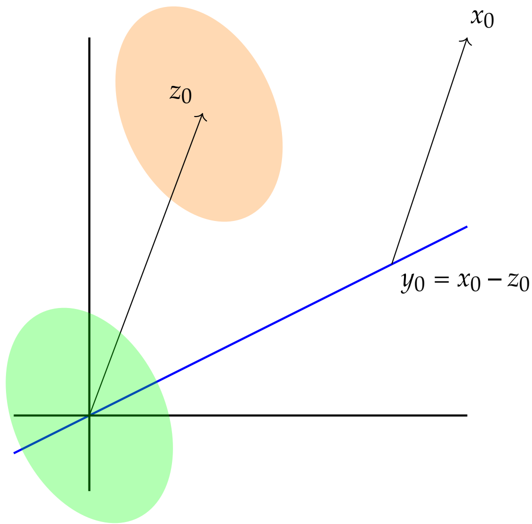
$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C$$

Haciendo uso de nuevo de (iii) llegamos a

$$p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0$$

□

Lema 2.2. Sea $A \subset E$ un subconjunto abierto convexo y sea $x_0 \in E$ con $x_0 \notin A$. Entonces existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ tal que $f(x) < f(x_0), \ \forall x \in A$. En particular, el hiperplano $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y A.



Demostración: Dado $z_0 \in A$, consideramos la traslación de A mediante el vector z_0, es decir, $C = A - z_0$. Observamos que claramente se tiene que $0 \in C$. Análogamente consideramos la traslación de x_0 mediante z_0, es decir, $y_0 = x_0 - z_0$.

A continuación, consideramos el subespacio vectorial $G = \mathbb{R}y_0$ de E y el siguiente funcional lineal

$$g\colon G \to \mathbb{R}, \qquad g(ty_0) = t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Además, dado el funcional p de Minkowski asociado a C, se verifica

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G$$

En efecto,

$$x \in G \iff \exists t \in \mathbb{R}\colon ty_0 = x \Longrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \Longrightarrow g(x) = g(ty_0) = t \leq 0 \leq p(x) \\ t > 0 \Longrightarrow g(x) = g(ty_0) = t \overset{\text{(iii)}}{\leq} tp(y_0) = p(ty_0) = p(x) \end{cases}$$

Por tanto, haciendo uso de Teorema 1.1 existe $f \in E^{\#} \setminus \{0\}$ que extiende a g y verifica

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in E$$

En particular, dado que $f(y_0) = g(y_0) = g(1y_0) = 1$, entonces tenemos

$$\alpha = f(x_0) = f(y_0 + z_0) = f(y_0) + f(z_0) = 1 + f(z_0)$$

Además, podemos deducir

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in E \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leq p(x) \overset{\text{(ii)}}{\leq} M\|x\|,\ \forall x \in E \Longrightarrow f \text{ es continua} \\ f(x) \leq p(x) \overset{\text{(iii)}}{<} 1,\ \forall x \in C \Longrightarrow f(x) < 1,\ \forall x \in C \end{cases}$$

Por tanto, tenemos

$$f(a) - f(z_0) = f(a - z_0) < 1 \iff f(a) < 1 + f(z_0) = \alpha = f(x_0), \qquad \forall a \in A$$

$\square$

Demostración del Teorema: Sea $D = A - B = \{a - b\colon a \in A, b \in B\}$ un conjunto convexo, pues dados $x = a_1 - b_1, y = a_2 - b_2 \in D$ es claro que

$$tx + (1-t)y = ta_1 - tb_1 + (1-t)a_1 - (1-t)a_2 = \underbrace{ta_1 + (1-t)a_2}_{\overset{\Cap}{A}} - [\underbrace{tb_1 + (1-t)b_2}_{\overset{\Cap}{B}}] \in D$$

Observamos claramente que D es abierto, pues podemos describirlo como una unión arbitraria de conjuntos abiertos $D = \bigcup_{b \in B}(A - b)$, y que $0 \notin D$, pues $A \cap B = \emptyset$. Por el Lema 2.2, existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq \alpha \leq f(0) = 0, \qquad \forall x \in D$$

Lo que significa

$$f(a) - f(b) = f(a-b) \leq \alpha \leq 0 \Longrightarrow f(a) \leq f(b), \qquad \forall a \in A, \forall b \in B$$

$\square$

Teorema 2.2 (Hahn-Banach, Segunda Versión Geométrica). Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ dos subconjuntos convexos tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que A es cerrado y B es compacto, entonces existen $f \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el hiperplano cerrado $[f = \alpha]$ separa estrictamente a A y B.

Demostración: Consideramos el conjunto $D = A - B = \{a - b\colon a \in A,\ b \in B\}$, el cuál podemos deducir que es cerrado. Para ello, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de elementos de D, entonces

$$\{x_n\} = \{a_n - b_n\} = \{a_n\} - \{b_n\}, \qquad \text{donde } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A,\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$$

Por ser A un conjunto cerrado y B un conjunto compacto, en particular, un conjunto cerrado, tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\} \longrightarrow a \in A \\ \{b_n\} \longrightarrow b \in B \end{array}\right\} \Longrightarrow \{x_n\} \longrightarrow x = a - b \in D$$

Mediante un procedimiento análogo al realizado en la demostración del Teorema 2.1 obtenemos que D es convexo. Además, observamos que $0 \notin D$, luego $0 \in E \setminus D$, el cuál es un conjunto abierto, por lo que

$$\exists r > 0 \text{ tal que } B(0,r) \subset E \setminus D \text{ y } B(0,r) \cap D = \emptyset$$

Por tanto, haciendo uso del Teorema 2.1 existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ tal que

$$f(a) - f(b) = f(a-b) \leq f(y), \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \forall y \in B(0,r)$$

Hemos deducido

$$f(a) - f(b) \leq \inf\left\{f(y)\colon \|y\| \leq r\right\}, \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

lo que equivale

$$f(a) - f(b) \leq r\underbrace{\inf\left\{f(z)\colon \|z\| \leq 1\right\}}_{-\|f\|_{E^*}} = -r\|f\|_{E^*}, \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Resumiendo, tenemos

$$f(a) \leq -r\|f\|_{E^*} + f(b) \iff f(a) + \frac{r}{2}\|f\|_{E^*} \leq f(b) - \frac{r}{2}\|f\|_{E^*}, \qquad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Por tanto, podemos elegir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{a\in A} f(a) + \frac{r}{2}\|f\|_{E^*} \leq \alpha \leq \inf_{b\in B} f(b) - \frac{r}{2}\|f\|_{E^*}$$

para que el hiperplano $[f = \alpha]$ separe estrictamente A y B. $\square$

Corolario 2.1. Sea $F \subset E$ un subespacio vectorial tal que

$$\{f \in E^* : \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in F\} = \{0\} \Longrightarrow \overline{F} = E$$

Demostración: Probaremos el contrarecíproco

$$\overline{F} \subsetneq E \Longrightarrow \exists f \in E^* \setminus \{0\} : \langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in F$$

Sea $x_0 \in E \setminus \overline{F}$, entonces tenemos $\overline{F} \subset E$ y $\{x_0\} \subset E$ dos subconjuntos convexos tales que $\overline{F} \cap \{x_0\} = \emptyset$, luego haciendo uso del Teorema 2.2 existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x\rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle f, x_0\rangle,\ \forall x \in \overline{F} \quad \Longrightarrow \quad \langle f, x\rangle < \alpha,\ \forall x \in F \quad \Longrightarrow \quad \lambda\langle f, x\rangle < \alpha,\ \forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

donde hemos usado que F es un subespacio vectorial, entonces necesariamente ha de verificar

$$\langle f, x\rangle = 0,\ \forall x \in F$$

$\square$

3 El Espacio Bidual. Relaciones de Ortogonalidad

Sea E un espacio normado, entonces hemos definido una norma en su dual E^*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|$$

El bidual E^{**} es el dual de E^* con la norma

$$\|\xi\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{f\in E^*\\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|$$

Entonces existe una **inyección canónica** definida como sigue

$$\begin{aligned} J\colon E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \xi_x\colon E^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad f \longmapsto \langle \xi_x, f\rangle_{E^{**},E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*,E} \end{aligned}$$

En primer lugar observamos que J está bien definida, pues para todo $x \in E,\ \xi_x \in E^{**}$

(i) $\langle \xi_x, \alpha f + \beta g\rangle = \langle \alpha f + \beta g, x\rangle = \langle \alpha f, x\rangle + \langle \beta g, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle g, x\rangle = \alpha\langle \xi_x, f\rangle + \beta\langle \xi_x, g\rangle$

(ii) $|\langle \xi_x, f\rangle| = |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|\|f\|, \ \forall f \in E^*$

$\boxed{J \text{ es lineal}}$ Dados $x, y \in E, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$J(\alpha x + \beta y) = \xi_{\alpha x + \beta y} = \alpha \xi_x + \beta \xi_y = \alpha J(x) + \beta J(y)$$

$\boxed{J \text{ es inyectiva}}$ Dados $x, y \in E$ se tiene que

$$J(x) = J(y) \iff \langle \xi_x, f\rangle = \langle \xi_y, f\rangle, \ \forall f \in E^* \iff \langle f, x\rangle = \langle f, y\rangle, \ \forall f \in E^* \overset{*}{\iff} x = y$$

donde en $*$ hemos hecho uso del Teorema 2.2

$\boxed{J \text{ es isometría}}$

$$\|J(x)\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi_x, f\rangle| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| \overset{*}{=} \|x\|$$

donde en $*$ hemos hecho uso del Cololario 1.3

Nota: Suele ocurrir que la aplicación $J \colon E \longrightarrow E^**$ no sea sobreyectiva. Sin embargo, es conveniente identificar E con un subespacio de E^{**} mediante J.

Definición 3.1. Un espacio normado E se dice **reflexivo** si y sólo si $J(E) = E^{**}$

Definición 3.2. Si $M \subset E$ un subespacio vectorial definimos

$$M^\perp = \{f \in E^* \colon \langle f, x\rangle = 0, \ \forall x \in M\} \subset E^*$$

Análogamente, si $N \subset E^*$ es un subespacio vectorial definimos

$$N^\perp = \{x \in E \colon \langle f, x\rangle = 0, \ \forall f \in N\} \subset E$$

Ejercicio 3.1. Probar que $M^\perp$ (resp. $N^\perp$) es un subespacio vectorial cerrado de E^* (resp. E).

Demostración: Veamos primero el caso de $M^\perp$:

(i) Sean $f_1, f_2 \in M^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\langle \lambda f_1 + f_2, x\rangle = \lambda \langle f_1, x\rangle + \langle f_2, x\rangle = 0, \ \forall x \in M \implies \lambda f_1 + f_2 \in M^\perp$$

(ii) Sea $\{f_n\} \subset M^\perp$ una sucesión convergente cuyo límite es $f \in E^*$, entonces

$$\{\langle f_n, x\rangle\} \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall x \in E \implies \underset{\substack{\| \\ 0}}{\{\langle f_n, x\rangle\}} \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall x \in M \implies f \in M^\perp$$

Análogamente, veamos el caso de $N^\perp$:

(i) Sean $x_1, x_2 \in N^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\langle f, \lambda x_1 + x_2 \rangle = \lambda \langle f, x_1 \rangle + \langle f, x_2 \rangle = 0, \ \forall f \in N \implies \lambda x_1 + x_2 \in N^\perp$$

(ii) Sea $\{x_n\} \subset N^\perp$ una sucesión convergente cuyo límite es $x \in E$, entonces

$$\{\langle f, x_n \rangle\} \to \langle f, x \rangle, \ \forall f \in E^* \implies \underbrace{\{\langle f, x_n \rangle\}}_{\overset{\|}{0}} \to \langle f, x \rangle, \ \forall f \in N \implies x \in N^\perp$$

□

Proposición 3.1. Sea $M \subset E$ un subespacio vectorial. Entonces

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M}$$

Sea $N \subset E^*$ un subespacio vectorial. Entonces

$$(N^\perp)^\perp \supseteq \overline{N}$$

Demostración: Veamos cada caso por separado:

$\boxed{\overline{M} \subseteq (M^\perp)^\perp}$ Sea $x \in M$, entonces $\langle f, x \rangle = 0, \ \forall f \in M^\perp$ y, por tanto, $x \in (M^\perp)^\perp$. Dado que $M \subseteq (M^\perp)^\perp$, obtenemos que $\overline{M} \subseteq \overline{(M^\perp)^\perp} = (M^\perp)^\perp$.

$\boxed{\overline{M} \supseteq (M^\perp)^\perp}$ Supongamos, por contradicción, que existe $x_0 \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M}$, luego por Teorema 2.2, existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente $\{x_0\}$ y $\overline{M}$, es decir, existe $f \in E^* \setminus \{0\}, \ \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \qquad \forall x \in M$$

Dado que M es un subespacio vectorial, se tiene que $\langle f, x \rangle = 0, \ \forall x \in M$ y, consecuentemente, $\langle f, x_0 \rangle > 0$. Así, $f \in M^\perp$ y, por tanto, $\langle f, x_0 \rangle = 0$, llegando a una contradicción.

$\boxed{(N^\perp)^\perp \supseteq \overline{N}}$ Análogamente observamos que $N \subseteq (N^\perp)^\perp$ y, consecuentemente, $\overline{N} \subseteq \overline{(N^\perp)^\perp} = (N^\perp)^\perp$. □

III | Teorema de Banach-Steinhaus

1 Teorema de la Categoría de Baire

Teorema 1.1 (Baire). Sea X un espacio métrico completo y sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X. Entonces

$$Int(X_n) = \emptyset,\ \forall n \in \mathbb{N} \implies Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \emptyset$$

El Teorema de la Categoría de Baire es normalmente utilizado de la siguiente forma:

Corolario 1.1. Sea X un espacio métrico completo y sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X. Entonces

$$Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \neq \emptyset \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon Int(X_{n_0}) \neq \emptyset$$

Demostración del Teorema: Consideramos $O_n = X \setminus X_n$ y, observamos que, O_n es un conjunto abierto y denso en X, pues

$$\overline{O_n} = \overline{X \setminus X_n} = X \setminus Int(X_n) = X$$

Tomamos $O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, así buscamos probar que O es denso en X, ya que

$$\overline{O} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus X_n)} = \overline{X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X \setminus Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = X \implies Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \emptyset$$

Sea $W \subset X$ un conjunto abierto no vacío, entonces fijado $x_0 \in W$ existe $r_0 > 0$ tal que $\overline{B(x_0, r_0)} \subset W$.

Dado que O_1 es denso en X, $O_1 \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$ es también un conjunto abierto, luego existen

$$x_1 \in O_1 \cap B(x_0, r_0),\ r_1 \in \left(0, \frac{r_0}{2}\right) \ \text{ tal que } \ \overline{B(x_1, r_1)} \subset O_1 \cap B(x_0, r_0)$$

Análogamente, dado que O_2 es denso en X, $O_2 \cap B(x_1, r_1) \neq \emptyset$ es un conjunto abierto y, existen

$$x_2 \in O_2 \cap B(x_1, r_1),\ r_2 \in \left(0, \frac{r_1}{2}\right) \ \text{ tal que } \ \overline{B(x_2, r_2)} \subset O_2 \cap B(x_1, r_1)$$

Por inducción se construyen dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}, \qquad r_{n+1} \in \left(0, \frac{r_n}{2}\right)$$

Veamos a continuación que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. Por la forma en la que hemos construido la sucesión $\{x_n\}$ observamos que $x_{n+k} \in B(x_n, r_n),\ k \geq 0$, luego $\|x_m - x_k\| \leq 2r_n \to 0,\ \forall k, m \geq n$.

Así, nos encontramos ante una sucesión de Cauchy y, ya que X es completo, dicha sucesión es convergente. Consideramos $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$ el límite de dicha sucesión convergente, es decir, $\{x_n\} \to x$. Por tanto, $x \in O$ y, en particular, $x \in W$. Finalmente, dado que $x \in O \cap W$, se tiene que $O \cap W \neq \emptyset$ por tanto O es denso en X como buscábamos. □

2 Principio de Acotación Uniforme

Dados E, F dos espacios normados, denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ al espacio de las aplicaciones lineales continuas de E en F con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|$$

Teorema 2.1 (Banach-Steinhaus). Sea E, F dos espacios de Banach y sean $\mathcal{F}$ una familia (no necesariamente numerable) de operadores de $\mathcal{L}(E,F)$. Entonces

$$\|T(x)\|_F \leq C_x,\ \forall x \in E,\ \forall T \in \mathcal{F} \implies \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C,\ \forall T \in \mathcal{F}$$

Equivalentemente

$$C_x = \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\|_F < \infty,\ \forall x \in E \implies C = \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$E_n = \{x \in E \colon \|T(x)\|_F \leq n,\ \forall T \in \mathcal{F}\}$$

Observamos que E_n es un conjunto cerrado ya que

$$E_n = \bigcap_{T\in\mathcal{F}} T^{-1}(\overline{B_F(0,n)})$$

Además, tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \\ Int(E) \neq \emptyset \end{array}\right\} \overset{*}{\implies} \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon Int(E_{n_0}) \neq \emptyset$$

donde en $*$ hemos hecho uso del Teorema 1.1. Por tanto existe $x_0 \in Int(E_{n_0})$ y, por tanto, $r > 0$ tal que

$$x_0 + rB_E(0,1) = B_E(x_0, r) \subset E_{n_0}$$

Entonces para todo $y \in B_E(0,1)$ se tiene

$$\|T(x_0 + ry)\|_F \leq n_0,\ \forall T \in \mathcal{F} \implies r\|T(y)\|_F - \|T(x_0)\|_F \leq \|T(x_0) + rT(y)\|_F \leq n_0,\ \forall T \in \mathcal{F}$$

Así

$$\|T(y)\| \leq \frac{\|T(x_0)\| + n_0}{r},\ \forall T \in \mathcal{F} \implies \|T(y)\| \leq \frac{C_{x_0} + n_0}{r} = C,\ \forall T \in \mathcal{F}$$

□

Corolario 2.1. Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathcal{L}(E,F)$ tal que para todo $x \in E$, $\{T_n(x)\}$ es convergente en F. Entonces

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{L(E,F)} < \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x) \in \mathcal{L}(E,F)$

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

Demostración: Veamos cada apartado por separado:

$\boxed{\text{(i)}}$ Si $\{T_n(x)\}$ es convergente en F, entonces $\{T_n(x)\}$ es acotado en F, por tanto, gracias al Teorema 2.1

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{L(E,F)} < \infty$$

como buscábamos.

$\boxed{\text{(ii)}}$ Por otro lado, consideramos la aplicación $T\colon E \longrightarrow F$ dada por

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Observamos que T es lineal y, además, continua, ya que

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E, \qquad \forall x \in E$$

donde hemos hecho uso de que $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$. Así

$$\|T(x)\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_F \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right) \|x\|_E \leq C\|x\|_E, \qquad \forall x \in E \tag{1}$$

Luego $T \in L(E,F)$.

$\boxed{\text{(iii)}}$ Por último, de (1) tenemos claramente que

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

□

Corolario 2.2. Sea E un espacio de Banach y $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$. Entonces

$$\text{Para todo } x \in E, \text{ el conjunto } \langle \mathcal{F}, x\rangle = \big\{\langle f, x\rangle : f \in \mathcal{F}\big\} \text{ es acotado en } \mathbb{R} \implies \mathcal{F} \text{ es acotado en } E^*$$

Demostración: Usamos el Teorema 2.1 con $F = \mathbb{R}$. □

Corolario 2.3. Sea E un espacio de Banach y $B \subset E$. Entonces,

$$\text{Para todo } f \in E^*, \text{ el conjunto } f(B) = \{\langle f, x\rangle : x \in B\} \text{ es acotado en } \mathbb{R} \implies B \text{ es acotado en } E$$

Demostración: Dado $b \in B$ consideramos la aplicación

$$T_b(f) = \langle f, b\rangle \qquad \forall f \in E^*$$

Observamos que T_b es una aplicación lineal y continua, pues

$$|T_b(f)| = |\langle f, b\rangle| \leq \|x\|_E\|f\|_{E^*} \implies \|T_b\|_{E^{**}} \stackrel{*}{=} \|b\|_E$$

donde en $*$ hemos hecho uso del Corolario 1.3.

Así tenemos E^* un espacio de Banach y $\{T_b\colon b \in B\} \subset \mathcal{L}(E^*, \mathbb{R}) = E^{**}$ donde para todo $f \in E^*$ el conjunto $\{T_b(f)\colon b \in B\}$ está acotado en $\mathbb{R}$. Por tanto, haciendo uso del Teorema 2.1 obtenemos lo que buscábamos. □

Ejercicio 2.1. Sea $T\colon E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios de Banach. Entonces

$$T \text{ es abierta} \iff \exists c > 0\colon T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$$

Demostración: Veamos ambas implicaciones por separado

$\boxed{\implies}$ Dado que T es una aplicación abierta se tiene que $T(B_E(0,1)) \in \mathcal{T}_F$, entonces existe $c > 0$ tal que

$$B_F(0,c) = B_F(T(0),c) \subset T(B_E(0,1))$$

$\boxed{\impliedby}$ Sea $U \in \mathcal{T}_E$, veamos que $T(U) \in \mathcal{T}_F$. Para ello, consideremos $y \in T(U)$ tal que $y = T(x)$ para algún $x \in U$. Dado que $U \in \mathcal{T}_E$ existe $r > 0$ tal que

$$B_E(x,r) = x + rB_E(0,1) \subset U \implies T(x) + rT(B_E(0,1)) \subset T(U)$$

Además, por hipótesis, existe $c > 0$ tal que

$$B_F(y, rc) = y + B_F(0, rc) = T(x) + rB_F(0,c) \subset T(x) + rT(B_E(0,1)) \subset T(U)$$

Así, $T(U) \in \mathcal{N}_y$ para todo $y \in T(U)$, por tanto, $T(U) \in \mathcal{T}_F$. □

Teorema 2.2 (Aplicación Abierta). Sean E, F dos espacios de Banach y $T\colon E \to F$ una aplicación lineal continua. Si T es sobreyectiva, entonces existe $c > 0$ tal que

$$T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)$$

Demostración: Dividimos el argumento en dos pasos:

$\boxed{\exists c > 0\colon \overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F(0,2c)}$

Dado que T es sobreyectiva, tenemos

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0,n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_E(0,1)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B_E(0,1))$$

Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$E_n = \overline{nT(B_E(0,1))} = \overline{\{T(x)\colon \|x\|_E < n\}}$$

Por tanto tenemos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = F \implies Int\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = Int(F) = F \neq \emptyset$$

Por el Teorema 1.1 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$Int(n_0\overline{T(B_E(0,1))}) \neq \emptyset \implies Int(\overline{T(B_E(0,1))}) \neq \emptyset$$

Así, existe $y_0 \in Int(\overline{T(B_E(0,1))})$ y, consecuentemente, $c > 0$ tal que

$$B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$

En particular, $y_0 \in \overline{T(B_E(0,1))}$ y, por simetría, $-y_0 \in \overline{T(B_E(0,1))}$. Por tanto

$$B_F(0,4c) = \underbrace{-y_0}_{\substack{\Cap \\ \overline{T(B_E(0,1))}}} + \underbrace{B(y_0,4c)}_{\substack{\cap \\ \overline{T(B_E(0,1))}}} \subset \overline{T(B_E(0,1))} + \overline{T(B_E(0,1))} \overset{*}{=} 2\overline{T(B_E(0,1))} \implies B_F(0,2c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$

donde en $*$ se ha hecho uso de que $\overline{T(B_E(0,1))}$ es convexo.

$$\boxed{\exists c > 0 \colon \overline{T(B_E(0,1))} \supset B_F(0,2c) \implies T(B_E(0,1)) \supset B_F(0,c)}$$

Consideramos $y \in B_F(0,c)$ y, buscamos $x \in B_E(0,1)$ tal que $T(x) = y$. Por el paso anterior tenemos que

$$2y \in B_F(0,2c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$

luego

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists w \in B_E(0,1) \colon \|2y - T(w)\|_F < 2\varepsilon \iff \left\|y - T\left(\frac{w}{2}\right)\right\|_F < \varepsilon$$

Tomamos $\varepsilon = \frac{c}{2}$ y llamemos $z_1 = \frac{w}{2} \in B_E\left(0, \frac{1}{2}\right)$, entonces

$$\|y - T(z_1)\|_F < \frac{c}{2} \qquad z_1 \in B_E\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Por tanto, tenemos $2y - 2Tz_1 \in B_F(0,c)$ y, repitiendo el argumento para $y - T(z_1)$, encontramos

$$\|y - T(z_1) - T(z_2)\|_F < \frac{c}{2^2} \qquad z_2 \in B_E\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$$

Mediante inducción construimos una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|y - T(z_1) - T(z_2) - \cdots - T(z_n)\|_F = \left\|y - T\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\right\|_F < \frac{c}{2^n} \qquad z_n \in B_E\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$$

es decir, tenemos una suma parcial de la serie $\sum_{k\geq 1} z_k$, donde se verifica

$$\|z_k\|_E < \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \implies \sum_{k\geq 1} \|z_k\| << \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k}$$

Haciendo uso del criterio de comparación y, dado que la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k}$ es convergente, tenemos que la nuestra también lo es, luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Además, observamos que la sucesión $\{x_n\} = \{z_1 + z_2 + \cdots + z_n\}$ es una sucesión de Cauchy y, como nuestro espacio es de Banach, podemos considerar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = x \in E$$

por tanto

$$\|x_n\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} z_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n}\|z_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < 1 \implies \|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} z_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < 1$$

Concluyendo tenemos

$$0 \leq \|y - T(x)\| = \lim_{n\to\infty}\|y - T(x_n)\|_F \leq \lim_{n\to\infty}\frac{c}{2^n} = 0 \implies y = T(x) \in T(B_E(0,1)) \qquad x \in B_E(0,1)$$

□

Corolario 2.4. Sean E, F dos espacios de Banach y $T\colon E \to F$ una aplicación lineal continua. Si T es biyectiva, entonces T^{-1} es también continua.

Demostración: Dado que T es sobreyectiva, hacemos uso del Teorema 2.2 y, existe $c > 0$ tal que

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$$

Luego, dado $x \in E$ tal que $\|T(x)\| < c$ por ser T inyectiva se tiene que $\|x\| < 1$, entonces

$$\|T^{-1}(T(x))\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|$$

y así obtenemos que T^{-1} es continua. □

Corolario 2.5. Sean $(E, \|\cdot\|_1), (E, \|\cdot\|_2)$ dos espacios de Banach y, supuesto que existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq c\|x\|_1, \ \forall x \in E$$

entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

Demostración: Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} I\colon (E, \|\cdot\|_1) &\to (E, \|\cdot\|_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

la cuál es lineal y, además, continua pues

$$\|I(x)\|_2 = \|x\|_2 \leq c\|x\|_1$$

Observamos trivialmente que se trata de una biyección, luego aplicando el Corolario 2.4 su inversa

$$I^{-1}\colon (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$$

es continua, obteniendo así la desigualdad que nos falta. □

Teorema 2.3 (Teorema de la Gráfica Cerrada). Sean E, F dos espacios de Banach y $T\colon E \to F$ una aplicación lineal. Considerando

$$Gr(T) = \{(x, T(x))\colon x \in E\} \subset E \times F$$

Luego, si $Gr(T)$ es cerrado en $E \times F$, entonces T es continua.

Demostración: Definimos

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F,\ \forall x \in E$$

y, comprobamos que es una norma en E. Es evidente que dicha norma verifica

$$\|x\|_E \leq \|x\|_T, \forall x \in E$$

Comprobemos que $\|\cdot\|_T$ es completa en E, esto es, dada una sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset E$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon m, n \geq n_0 \Longrightarrow \varepsilon > \|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_E + \|Tx_n - Tx_m\|_F$$

Así tenemos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_E$ y que la sucesión $\{Tx_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_F$.

Dado que E, F son espacios de Banach, existen $x \in E, y \in F$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} \|x_n - x\|_E \to 0 \\ \|Tx_n - y\|_F \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \{(x_n, T(x_n))\} \to (x, y) \in \overline{Gr(T)} = Gr(T) \Longrightarrow y = T(x)$$

Por tanto

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n + Tx\|_F \to 0$$

Haciendo uso del Corolario 2.5, las normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_T$ son equivalentes. Entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|T(x)\|_F < c\|x\|_E,\ \forall x \in E \Longrightarrow c > 1 \Longrightarrow \|T(x)\|_F \leq (c-1)\|x\|_F,\ \forall x \in E$$

$\square$

IV | Topologías Débiles

1 Topologías Iniciales

Consideramos X un conjunto (sin ninguna estructura) y $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces dada una familia de aplicaciones

$$\phi_i : X \to Y_i \qquad i \in I$$

buscamos construir una topología $\mathcal{T}$ sobre X, lo más pequeña posible, de forma que haga continua a cada aplicación ϕ_i.

Nota: Observamos que si otorgamos a X con la topología discreta, entonces cada aplicación ϕ_i sería continua. Pero claramente dicha topología esta muy lejos de ser interesante, por lo que buscamos una con el menor número de conjuntos abiertos.

Si $w_i \in \tau_i$, entonces $\phi_i^{-1}(w_i)$ tendría que ser necesariamente un conjunto abierto en $\mathcal{T}$, es decir, dicha topología deberá contener obligatoriamente a

$$U_\lambda = \{\phi_i^{-1}(w_i) : w_i \in \tau_i,\ i \in I\} \qquad \lambda \in \Lambda$$

Así, dada la familia $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X, construimos la topología más pequeña que sea estable por uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Primero, consideramos las intersecciones finitas de dichos conjuntos, obteniendo

$$\Phi = \left\{ \bigcap_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda : \Gamma \subset \Lambda \right\}$$

Observamos que Φ es una familia de subconjuntos de X que incluye a los conjuntos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y es estable por intersecciones finitas. Sin embargo, no debería necesariamente ser estable bajo uniones arbitrarias. Así consideramos finalmente

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{j\in J} \Phi_j : \Phi_j \in \Phi \right\} = \left\{ \bigcup_{j\in J} \left(\bigcap_{k=1}^{n} \phi_i^{-1}(w_i) \right) : w_i \in \tau_i,\ i \in I,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Lema 1.1. Dado $x \in X$, el conjunto

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \bigcap_{i\in J} \phi_i^{-1}(V_i) : V_i \in \mathcal{N}_{\phi_i(x)},\ J \subset I \text{ finito} \right\}$$

es una base de entornos de x.

Demostración: Dado $N \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{T}$, sabemos que N es una unión arbitraria de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\phi_i^{-1}(w_i)$, donde $w_i \in \tau_i$. Consecuentemente, dado que $x \in N$, pertenece a al menos una de dichas intersecciones finitas, es decir,

$$x \in \bigcap_{i\in J} \phi_i^{-1}(w_i),\ w_i \in \tau_i,\ J \subset I \text{ finito}$$

Además

$$x \in \phi_i^{-1}(V_i),\ i \in J \ \text{ tal que } \ \phi_i(x) \in V_i,\ V_i \in \tau_i \implies V_i \in \mathcal{N}_{\phi_i(x)}$$

Por tanto acabamos de probar que dado $N \in \mathcal{N}_x \cap \mathcal{T}$ existe $J \subset I$ finito tal que

$$x \in \bigcap_{i \in J} \phi_i^{-1}(V_i) \subset N, \qquad V_i \in \mathcal{N}_{\phi_i(x)}$$

□

Proposición 1.1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces

$$\{x_n\} \xrightarrow{\mathcal{T}} x \iff \phi_i(x_n) \to \phi_i(x),\ \forall i \in I$$

Demostración: Veamos ambas implicaciones:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $x_n \to x$, entonces $\phi_i(x_n) \to \phi_i(x)$ para cada $i \in I$, puesto que cada ϕ_i es una aplicación continua.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Consideramos, gracias al Lema 1.1, $\bigcap_{i\in J} \phi_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{N}_x$ donde $J \subset I$ finito y $V_i \in \mathcal{N}_{\phi_i(x)}$. Entonces para cada $i \in J$ existe, por hipótesis, $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_i,\ \phi_i(x_n) \in V_i$, es decir, $x_n \in \phi_i^{-1}(V_i)$. Por tanto, considerando $N = \max_{i\in J}\{n_i\}$ tenemos que $x_n \in \bigcap_{i\in J} \phi_i^{-1}(V_i)$ como buscábamos. □

Proposición 1.2. Sea Z un espacio topológico y sea una aplicación $\psi \colon Z \to X$. Entonces ψ es continua si y sólo si $\phi_i \circ \psi$ es continua para todo $i \in I$.

Demostración: Veamos ambas implicaciones:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Trivial por composición de aplicaciones continuas.

$$(Z, \mu) \xrightarrow{\psi} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{\phi_i} (Y_i, \tau_i)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que para todo $i \in I$ se tiene que $\phi_i \circ \psi$ es una aplicación continua, es decir

$$(\phi_i \circ \psi)^{-1}(w_i) \in \mu, \qquad w_i \in \tau_i$$

Entonces, dado $U \in \mathcal{T}$ se tiene que existe $J \subset I$ finito tal que

$$\psi^{-1}(U) = \psi^{-1}\left(\bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J} \phi_i^{-1}(w_i)\right)\right) = \bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J} \psi^{-1}\left(\phi_i^{-1}(w_i)\right)\right) = \bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J} (\phi_i \circ \psi)^{-1}(w_i)\right) \in \mu$$

□

2 Topologías Débiles

Sea E un espacio de Banach y $f \in E^*$. Denotaremos $\phi_f \colon E \to \mathbb{R}$ al funcional lineal $\phi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Así obtenemos una colección $\{\phi_f\}_{f\in E^*}$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$. Ignoraremos en este momento la topología asociada a la norma de E y construiremos una topología como sigue:

Definición 2.1. La **topología débil** $\sigma(E, E^*)$ sobre E es la topología inicial asociada a la familia de aplicaciones $\{\phi_f\}_{f\in E^*}$.

Nota: Observamos que cada aplicación ϕ_f es continua para la topología asociada a la norma, así, la topología débil es más pequeña que dicha topología, es decir, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_E}$.

Proposición 2.1. La topología débil $\sigma(E, E^*)$ es Hausdorff

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in E$ tal que $x_1 \neq x_2$, entonces buscamos $O_1, O_2 \in \sigma(E, E^*)$ tal que $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Considerando los conjuntos $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ y haciendo uso del Teorema 2.2 obtenemos $f \in E^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x_1\rangle < \alpha < \langle f, x_2\rangle$$

Así, los conjuntos

$$x_1 \in O_1 = \{x \in E\colon \langle f, x\rangle < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha))$$
$$x_2 \in O_2 = \{x \in E\colon \langle f, x\rangle > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$$

son abiertos y verifican lo que buscábamos. □

Proposición 2.2. Sean $x_0 \in E$ y un conjunto finito $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset E^*$, entonces

$$V(f_1, \ldots, f_k;\, x_0;\, \varepsilon) = \left\{x \in E\colon |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon,\ \forall i = 1, \ldots, k\right\}$$

es un entorno de x_0 en $\sigma(E, E^*)$. Así,

$$V = \left\{V(f_1, \ldots, f_k;\, x_0;\, \varepsilon)\colon \varepsilon > 0,\ f_1, \ldots, f_k \in E^*\right\}$$

es una base de entornos de x_0 en $\sigma(E, E^*)$.

Demostración: Dado $x \in E$ observamos que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ se verifica

$$|\langle f_i, x - x_0\rangle| = |\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle < \varepsilon \iff \langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon < \langle f_i, x\rangle < \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon$$

Así, denotando por $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$ tenemos que $x \in f_i^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$. Por tanto, se deduce que

$$V(f_1, \ldots, f_k;\, x_0;\, \varepsilon) = \bigcap_{i\in\{1,\ldots,k\}} f_i^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \qquad \text{donde} \qquad x_0 \in (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$$

Finalmente, haciendo uso del Lema 1.1 se prueban ambos apartados. □

Nota: Si una sucesión $\{x_n\} \subset E$ converge a $x \in E$ en la topología débil $\sigma(E, E^*)$ escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x$$

Proposición 2.3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de E. Entonces

(i) $\{x_n\} \rightharpoonup x \iff \{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle,\ \forall f \in E^*$

(ii) $\{x_n\} \to x \implies \{x_n\} \rightharpoonup x$

(iii) $\{x_n\} \rightharpoonup x \implies \{\|x_n\|\}$ está acotada y $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(iv) $\{x_n\} \rightharpoonup x \ \wedge\ \{f_n\} \to f \implies \{\langle f_n, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$

Demostración: Veamos cada uno de los apartados por separado:

(i) Proposición 1.1 aplicado al caso particular de la topología débil.

(ii) Sabemos que $\{x_n\} \to x \iff \|x_n - x\| \to 0$, entonces dada $f \in E^*$ se tiene que

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \iff |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0 \iff |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\|\|x_n - x\| \to 0$$

Por tanto, se sigue de (i) que $\{x_n\} \rightharpoonup x$.

(iii) Dado que $\{x_n\} \rightharpoonup x$, se tiene por (i) que

$$\big\{\langle f, x_n\rangle\big\} \to \langle f, x\rangle, \qquad \forall f \in E^*$$

entonces $\{\langle f, x_n\rangle\}$ está acotada en $\mathbb{R}$, para todo $f \in E^*$. Por el Corolario 2.3, se deduce que

$$\{x_n\} \text{ está acotado en } E \implies \{\|x_n\|\} \text{ está acotado en } \mathbb{R}$$

Además,

$$|\langle f, x_n\rangle \leq \|f\|\|x_n\| \implies |\langle f, x\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\| \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x_n\rangle|$$

Haciendo uso de Corolario 1.3

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| \leq \sup_{\substack{f\in E^* \\ \|f\|\leq 1}} \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

(iv) Observamos

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| = |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \leq \\ &\leq \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle| \overset{*}{\to} 0 \end{aligned}$$

donde en $*$ hemos hecho uso de (i) y (iii)

$\square$

Ejercicio 2.1. La esfera unidad

$$S_E(0,1) = \{x \in E \colon \|x\|_E = 1\}$$

donde E es de dimensión infinita, no es cerrada en la topología débil $\sigma(E,E^*)$. En particular,

$$\overline{S_E(0,1)}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B}_E(0,1)$$

Demostración: Veamos ambas inclusiones por separado:

$\boxed{\supseteq}$ En principio nos bastaría probar que $B_E(0,1) \subseteq \overline{S_E(0,1)}^{\sigma(E,E^*)}$. Para ello, dado $x_0 \in B_E(0,1)$ tomamos un entorno V de x_0 en $\sigma(E,E^*)$, que sabemos que es de la forma

$$V = \{x \in E \colon |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon,\ \forall i = 1,2,\ldots,k\}$$

donde $f_1,\ldots f_k \in E^*,\ \varepsilon > 0$. Entonces, consideramos la aplicación $\psi \colon E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$\langle \psi, x\rangle = (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_k, x\rangle)$$

Observamos que ψ es lineal, ya que

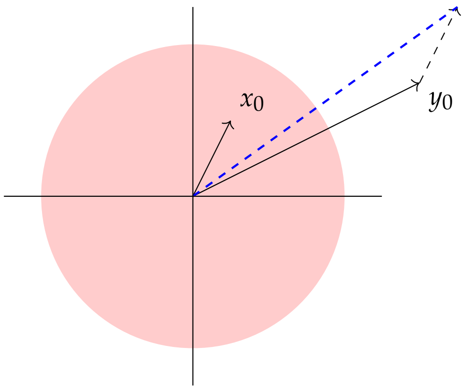
$$\langle \psi, \alpha x + \beta y\rangle = (\langle f_1, \alpha x + \beta y\rangle, \ldots, \langle f_k, \alpha x + \beta y\rangle) = (\alpha\langle f_1, x\rangle + \beta\langle f_1, y\rangle, \ldots, \alpha\langle f_k, x\rangle + \beta\langle f_k, y\rangle) = \alpha\langle \psi, x\rangle + \beta\langle \psi, y\rangle$$

Dado que $\dim E = \infty > k = \dim \mathbb{R}^k$, observamos que ψ no es inyectiva, luego $\ker \psi \neq \{0\}$, esto es

$$\exists y_0 \in E \setminus \{0\} \text{ tal que } \langle \psi, y_0\rangle = 0$$

Así, la aplicación

$$g(t) = \|x_0 + t y_0\|_E \qquad t \in \mathbb{R}^+$$



es continua en $[0,\infty)$ vericando

$$g(0) = \|x_0\|_E < 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \|x_0 + t y_0\| \geq \lim_{t\to\infty} t\underbrace{\|y_0\|_E}_{\neq 0} - \|x_0\|_E = +\infty$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $g(t_0) = \|x_0 + t_0 y_0\| = 1$, luego $x_0 + t_0 y_0 \in S_E(0,1)$. Además,

$$\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0\rangle = t_0\langle f_i, y_0\rangle \overset{*}{=} 0 < \varepsilon,\ \forall i = 1,\ldots,k \implies x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S_E(0,1) \implies x_0 \in \overline{S_E(0,1)}^{\sigma(E,E^*)}$$

donde en $*$ hemos hecho uso de que $\langle \psi, y_0 \rangle = 0$. Consecuentemente

$$S_E(0,1) \subset \overline{B}_E(0,1) \subset \overline{S_E(0,1)}^{\sigma(E,E^*)}$$

$\boxed{\subseteq}$ Sabemos que $\overline{B}_E(0,1)$ es un cerrado en la topología de la norma, entonces

$$\overline{B}_E(0,1) = \{x \in E \colon \|x\|_E \leq 1\} \overset{*}{=} \left\{ x \in E \colon \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| \leq 1 \right\} = \bigcap_{\substack{f \in E^*, \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} \left\{ x \in E \colon |\langle f, x \rangle| \leq 1 \right\}$$
$$= \bigcap_{\substack{f \in E^*, \\ \|f\|_{E^*} \leq 1}} f^{-1}([0,1])$$

donde en $*$ hemos hecho uso del Corolario 1. Por tanto hemos expresado $\overline{B}_E(0,1)$ como una intersección de conjuntos débilmente cerrados. Así, dado que $\overline{S_E(0,1)}^{\sigma(E,E^*)}$ es el cerrado más pequeño que contiene a $S_E(0,1)$, necesariamente ha de estar contenido en $\overline{B}_E(0,1)$ pues es un cerrado que contiene a $S_E(0,1)$. □

Ejercicio 2.2. Si $\dim E = \infty$, entonces

$$B_E(0,1) = \{x \in E \colon \|x\|_E < 1\} \notin \sigma(E, E^*)$$

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que es débilmente abierta, entonces su complementario $E \setminus B_E(0,1)$ sería débilmente cerrada. Dado que $\overline{B}_E(0,1) = \overline{S_E(0,1)}^{\sigma(E,E^*)}$ es débilmente cerrado tendremos que el conjunto

$$S_E(0,1) = \overline{B}_E(0,1) \cap (E \setminus B_E(0,1))$$

es débilmente cerrado, llegando a una contradicción. □

3 Topología Débil, Conjuntos Convexos y Operadores Lineales

Teorema 3.1. Sea C un subconjunto convexo de E. Entonces C es débilmente cerrado si y sólo si C es fuertemente cerrado.

Demostración: Veamos ambas implicaciones:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Dado que C es débilmente cerrado, $E \setminus C$ es débilmente abierto y, consecuentemente fuertemente abierto. Por tanto $E \setminus (E \setminus C) = C$ es fuertemente cerrado.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que C es fuertemente cerrado, entonces consideramos $x_0 \in E \setminus C$ y, por el Teorema 2.2 existe un hiperplano cerrado que separa $\{x_0\}$ y C, es decir, existen $f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle \qquad \forall y \in C$$

Entonces $x_0 \in V = \{x \in E \colon \langle f, x \rangle < \alpha\} \subset E \setminus C$, donde V es un entorno básico de la topología débil. Por tanto acabamos de probar que $E \setminus C$ es débilmente abierto y consecuentemente C es débilmente cerrado.

Nota: EL $\in$ se obtiene mediante la primera desigualdad y el $\subset$ se obtiene mediante la segunda. □

Nota: Consideramos que toda combinación lineal es finita

Corolario 3.1 (Teorema de Mazur). Supongamos $\{x_n\} \subset E$ tal que $\{x_n\} \rightharpoonup x \in E$. Entonces existe $\{y_n\} \subset E$ tal que cada y_n es una combinación convexa de elementos de la sucesión $\{x_n\}$ tal que

$$\{y_n\} \to x$$

Demostración: Consideramos la envolvente convexa de $\{x_n\}$, esto es, el conjunto de todas las combinaciones convexas y finitas de x_n's.

$$F = conv(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i x_i : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

En primer lugar, observamos que $x \in \overline{F}^{\sigma(E,E^*)}$, ya que $\{x_n\} \subset F$. Veamos que $\overline{F}^{\sigma(E,E^*)}$ es también un conjunto convexo. Para ello, sean $a, b \in \overline{F}^{\sigma(E,E^*)}$ entonces existen sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \subset F$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\} \rightharpoonup a \\ \{b_n\} \rightharpoonup b \end{array}\right\} \overset{*}{\Longrightarrow} \{(1-t)a_n + tb_n\} \rightharpoonup (1-t)a + tb \in \overline{F}^{\sigma(E,E^*)} \qquad \forall t \in [0,1]$$

donde en $*$ hemos hecho uso de que F es convexo, así $\{(1-t)a_n + tb_n\} \subset F$ para cada $t \in [0,1]$.

Por tanto, dado que $\overline{F}^{\sigma(E,E^*)}$ es convexo y débilmente cerrado, el Teorema 3.1 nos asegura que $\overline{F}^{\sigma(E,E^*)}$ es fuertemente cerrado, luego

$$\overline{F}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{F}$$

Entonces $x \in \overline{F}$, luego existe una sucesión $\{y_n\} \subset F$ tal que $\{y_n\} \to x$. □

Teorema 3.2. Sean E y F dos espacios de Banach y $T: E \to F$ una aplicación lineal. Equivalen las siguiente afirmaciones:

(i) $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ es continua

(ii) $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \sigma(F, F^*))$ es continua

(iii) $T : (E, \sigma(E, E^*) \to (F, \sigma(F, F^*)))$ es continua

Demostración: Veamos cada implicación por separado:

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Evidentemente se tiene que

$$U \in \sigma(F, F^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_F} \implies T^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_E}$$

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Mediante la Proposición 1.2, se tiene que

$$\begin{aligned} T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \sigma(F, F^*)) \text{ es continua } &\iff f \circ T : (E, \|\cdot\|_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ es continua }, \forall f \in F^* \\ &\iff f \circ T \in E^*, \ \forall f \in F^* \end{aligned}$$

Análogamente, por ser $\sigma(E,E^*)$ la topología inicial para la familia $\{\phi\}_{\phi\in E^*}$ se tiene que

$$f\circ T\colon (E,\sigma(E,E^*))\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)\ \text{ es continua },\ \forall f\in F^* \iff T\colon (E,\sigma(E,E^*))\longrightarrow(F,\sigma(F,F^*))\ \text{ es continua}$$

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Buscamos aplicar el Teorema 2.3, es decir

$$Gr(T)\ \text{ es cerrado en } E\times F \iff T\colon (E,\|\cdot\|_E)\longrightarrow(F;\|\cdot\|_F) \text{ es continua}$$

En primer lugar, veamos que $Gr(T)$ es un conjunto convexo. Para ello sean $(x,T(x)),\ (y,T(y))\in Gr(T)$, entonces

$$(1-t)(x,T(x))+t(y,T(y))=((1-t)x,T((1-t)x))+(ty,T(ty))=\big((1-t)x+ty,T((1-t)x+ty)\big)\in Gr(T)$$

En particular, sabemos que $Gr(T)$ es cerrado en $\sigma(E,E^*)\times\sigma(F,F^*)=\sigma(E\times F,E^*\times F^*)$. Por tanto, haciendo uso del Teorema 3.1, tenemos que $Gr(T)$ es cerrado en $E\times F$, obteniendo así lo que buscábamos. □

Nota: En espacios de dimensión infinita, la topología débil no es metrizable. Por tanto, no podemos caracterizar ciertas propiedades topológicas mediante sucesiones. A pesar de ello, existen ciertas implicaciones que siguen siendo válidas

(i) A es cerrado en $\sigma(E,E^*) \Longrightarrow \forall\{a_n\}\subset A$ tal que $\{a_n\}\rightharpoonup a$ se tiene que $a\in A$

(ii) A es compacto en $\sigma(E,E^*) \Longrightarrow \forall\{a_n\}\subset A$, existe $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estric. crec. tal que $\{a_{\sigma(n)}\}\rightharpoonup a\in A$

(iii) $f\colon E\to F$ es continua en $\sigma(E,E^*) \Longrightarrow \forall\{x_n\}\subset E$ tal que $\{x_n\}\rightharpoonup x$ se tiene que $\{f(x_n)\}\rightharpoonup f(x)$

4 La Topología Débil*

El dual E^*, como espacio normado, también le podemos asociar una topología débil, $\sigma(E^*,E^{**})$, es decir, la topología inicial en E^* para todos los funcionales lineales de E^{**}. Nosotros consideraremos en E^* una topología más pequeña, es decir, la topología inicial en E^* para los funcionales $J(E)\subset E^{**}$. Recordamos que

$$J(E)=\{\phi_x\in E^{**}: x\in E\}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_x\colon E^*&\longrightarrow\mathbb{R}\\ f&\longmapsto\langle f,x\rangle\end{aligned}$$

Así obtenemos la siguiente definición

> **Definición 4.1.** La **topología débil*** $\sigma(E^*,E)$ es la topología inicial asociada a la familia de aplicaciones $\{\phi_x\}_{x\in E}$.

Dado que $J(E)\subset E^{**}$ deducimos

$$\sigma(E^*,E)\subset\sigma(E^*,E^{**})\subset\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E^*}}$$

Proposición 4.1. La topología débil* $\sigma(E^*, E)$ es Hausdorff

Demostración: Sean $f_1, f_2 \in E^*$ con $f_1 \neq f_2$, entonces existe $x \in E$ tal que

$$\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$$

Dado $\alpha \in (\langle f_1, x\rangle, \langle f_2, x\rangle)$, consideramos los conjuntos

$$O_1 = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle < \alpha\} = \phi_x^{-1}((-\infty, \alpha))$$
$$O_2 = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle > \alpha\} = \phi_x^{-1}((\alpha, \infty))$$

Entonces tenemos que $O_1, O_2 \in \sigma(E^*, E)$ tal que $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposición 4.2. Sea $f_0 \in E^*$, $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset E$ y $\varepsilon > 0$. Entonces el conjunto

$$V(f_0\,;\, x_1, \ldots, x_k\,;\, \varepsilon) = \left\{f \in E^* : \left|\langle f - f_0, x_i\rangle\right| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\right\}$$

es un entorno de f_0 en $\sigma(E^*, E)$. Así, el conjunto

$$V = \left\{V(f_0\,;\, x_1, \ldots, x_k\,;\, \varepsilon) : \varepsilon > 0,\ x_1, \ldots, x_k \in E\right\}$$

es una base de entornos de f_0 en $\sigma(E^*, E)$.

Nota: Si una sucesión $\{f_n\}$ de E^* converge a $f \in E^*$ en la topología débil*, escribiremos

$$\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

Por otro lado, si converge a $f \in E^*$ en $\sigma(E^*, E^{**})$, escribiremos

$$\{f_n\} \rightharpoonup f$$

Proposición 4.3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de E^*. Entonces

(i) $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \{\langle f_n, x\rangle\} \to \langle f, x\rangle,\ \forall x \in E$

(ii) $\{f_n\} \to f \implies \{f_n\} \rightharpoonup f \implies \{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f$

(iii) $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \implies \{\|f_n\|_{E^*}\}$ está acotada y $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(iv) $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} f \wedge \{x_n\} \to x \implies \{\langle f_n, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$

Proposición 4.4. Sea $\phi : E^* \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo en $\sigma(E^*, E)$. Entonces existe $x_0 \in E$ tal que

$$\phi = J(x_0) = \phi_{x_0}$$

La demostración se basa en el siguiente resultado

Lema 4.1. Sea X un espacio vectorial y $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_k$ funcionales lineales en X tal que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \ker \phi_i \subset \ker \phi$$

Entonces existen constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tal que $\phi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i$

Demostración: Consideramos la aplicación $F\colon X \to \mathbb{R}^{k+1}$ dada por

$$F(u) = ((\phi(u), \phi_1(u), \ldots, \phi_k(u)))$$

y, observamos que

$$a = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}) \notin R(F)$$

Por tanto existe un hiperplano $[f = \alpha]$ que separa $\{a\}$ y $R(F)$, es decir, existe $f \in \left(\mathbb{R}^{k+1}\right)^*$ de forma que

$$[f = \alpha] = \left\{x \in \mathbb{R}^{k+1} \colon f(x) = \alpha\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^{k+1} \colon \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \alpha\right\}$$

verificando

$$\lambda = \langle f, a \rangle < \alpha < \langle f, F(u) \rangle = \lambda\phi(u) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i(u) \qquad \forall u \in X$$

Fijado $u \in X$, se tiene que $\beta u \in X$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\alpha < \beta \left(\lambda\phi(u) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i(u)\right), \ \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Tomando un β concreto podríamos obtener la desigualdad contraria, luego necesariamente ha de ser

$$\lambda\phi(u) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i(u) = 0$$

Por tanto, se tiene que $\lambda < \alpha < 0$ y, consecuentemente

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^{k} \frac{-\lambda_i}{\lambda} \phi_i(u)$$

□

Demostración de la Proposición: Dado que ϕ es continua en $\sigma(E^*, E)$, existe un entorno V de $0 \in E^*$ tal que

$$|\phi(f)| < 1, \qquad \forall f \in V$$

Además sabemos que V es de la forma

$$V = V(0\,; x_1, \ldots, x_k\,; \varepsilon) = \left\{f \in E^* \colon |\langle f, x_i \rangle| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \ldots, k\right\}$$

En particular, si $f \in E^*$ verifica

$$\langle f, x_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, \dots, k \overset{*}{\implies} \phi(f) = 0$$

donde en $*$ hemos hecho uso de que $\lambda f \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Así, por el Lema 4.1 se tiene

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^{k} \lambda \langle f, x_i \rangle = \langle f, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \rangle, \ \forall f \in E^* \implies \phi = \phi_{x_0}$$

□

Corolario 4.1. Sea $H \subset E^*$ un hiperplano cerrado en $\sigma(E^*, E)$. Entonces H es de la forma

$$H = \{f \in E^* : \langle f, x_0 \rangle = \alpha\}$$

para algún $x_0 \in E \setminus \{0\}$ y algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Dado que H es un hiperplano de E^* sabemos que existen $\phi \in E^{**} \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$H = \left\{f \in E^* : \phi(f) = \alpha\right\}$$

Por la Proposición 4.4 basta ver que ϕ es continua en $\sigma(E^*, E)$, en particular, nos bastará con ver que es continua en 0. Por contradicción, supongamos que existe $\{f_n\} \subset E^*$ tal que $\{f_n\} \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ y, además, verifica

$$|\phi(f_n)| \geq \varepsilon_0 > 0 \qquad \wedge \qquad \frac{1}{\phi(f_n)} \to \mu \neq 0$$

Entonces dado $f_0 \notin H$ tal que $\phi(f_0) \neq 0$ se tiene

$$\frac{f_n}{\phi(f_n)} - \frac{1-\alpha}{\phi(f_0)} f_0 \in H \ \text{ ya que } \ \phi\left(\frac{f_n}{\phi(f_n)} - \frac{1-\alpha}{\phi(f_0)} f_0\right) = \alpha$$

entonces H es cerrado en $\sigma(E^*, E)$, así

$$0 - \frac{1-\alpha}{\phi(f_0)} f_0 \in H \implies \alpha = \phi\left(-\frac{1-\alpha}{\phi(f_0)} f_0\right) = -(1-\alpha)$$

□

Teorema 4.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). La bola cerrada unidad

$$\overline{B}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil $\sigma(E^*, E)$.

4.1 Espacios Reflexivos

Recordamos que un espacio de Banach E se dice **reflexivo** si $J(E) = E^{**}$, es decir, si la inyección canónica J es sobreyectiva. En ese caso se suele identificar E^{**} con E.

Teorema 4.2 (Kakutani). Sea E un espacio de Banach. Entonces E es reflexivo si y sólo si

$$\overline{B}_E = \{x \in E\colon \|x\| \leq 1\}$$

es compacta en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

Demostración: Veamos una de las implicaciones:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Dado que E es reflexivo, entonces la inyección canónica J es un isomorfismo de E en E^{**}, luego

$$\|J(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E \implies J\left(\overline{B}_E\right) = \overline{B}_{E^{**}}$$

Por el Teorema 4.1 aplicado a E^* se tiene que

$$\overline{B}_{E^{**}} \text{ es compacto en } \sigma(E^{**}, E^*)$$

Llegado a este punto, nos basta probar que la aplicación

$$J^{-1}\colon (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*))$$

es continua, lo cual equivale a probar que

$$\begin{aligned} f \circ J^{-1}\colon E^{**} &\longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto J^{-1}(\xi) \mapsto \langle f, J^{-1}(\xi)\rangle = \langle \xi, f\rangle \end{aligned}$$

con $f \in E^*$ fijo, es continua en $\sigma(E^{**}, E^*)$. Lo cual es cierto pues $f \circ J^{-1} \in (E^{**})^* = E^*$.

Juntando todo lo anterior tenemos

$$J\left(\overline{B}_E\right) = \overline{B}_{E^{**}} \text{ es compacto en } \sigma(E^{**}, E^*) \overset{*}{\iff} \overline{B}_E = J^{-1}(\overline{B}_{E^{**}}) \text{ es compacto en } \sigma(E, E^*)$$

donde en $*$ hemos hecho uso de que J^{-1} es continua de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ en $(E, \sigma(E, E^{**}))$. □

Obtenemos dos consecuencias importantes de este resultado:

(i) Para todo $x \in E$, $R > 0$ se tiene que

$$\overline{B}_E(x, R) = x + R\overline{B}_E(0, 1)$$

Entonces, dado que $\overline{B}_E(0, 1)$ es compacta en $\sigma(E, E^*)$ se tiene que $\overline{B}_E(x, R)$ también lo és, por ser imagen de una homotecia y una traslación de la anterior.

(ii) Si A es un conjunto cerrado en $\sigma(E, E^*)$ y acotado, entonces existe $R > 0$ tal que

$$A \subset \overline{B}_E(0, R) = R\overline{B}_E(0, 1)$$

Entonces por ser A un subconjunto cerrado de un compacto se tiene que

$$A \text{ es compacto en } \sigma(E, E^*)$$

Además, el recíproco también es cierto, pero esto ya se supone conocido por ser E un espacio normado.

Proposición 4.5. Sea E un espacio de Banach reflexivo y M es un subespacio cerrado de E. Entonces M es reflexivo.

Demostración: El Teorema 4.2 nos asegura que

$$M \text{ es reflexivo} \iff \overline{B}_M \text{ es compacto en } \sigma(M, M^*)$$

Además, observamos que por el Corolario 1.1 tenemos que

$$\sigma(M, M^*) = \{A \cap M \colon A \in \sigma(E, E^*)\} = \sigma(E, E^*)\big|_M$$

ya que para toda $g \in M^*$ se tiene que $g = f\big|_M$ para algún $f \in E^*$. Por tanto

$$\overline{B}_M \text{ es compacto en } \sigma(M, M^*) \iff \overline{B}_M \text{ es compacto en } \sigma(E, E^*)\big|_M \iff \overline{B}_M \text{ es compacto en } \sigma(E, E^*)$$

Dado que M es un subespacio cerrado se tiene que

$$\overline{B}_M = \{x \in M \colon \|x\|_E \leq 1\} = M \cap \overline{B}_E$$

es cerrado en E. Además, gracias a la desigualdad triangular observamos que $\overline{B}_M$ es convexo, luego haciendo uso del Teorema 3.1, $\overline{B}_M$ es débilmente cerrado. Entonces, dado que E es reflexivo, se tiene que

$$\overline{B}_M \subset \overline{B}_E \ \wedge \ \overline{B}_E \text{ compacto en } \sigma(E, E^*) \Longrightarrow \overline{B}_M \text{ es compacto en } \sigma(E, E^*)$$

□

Corolario 4.2. Un espacio de Banach E es reflexivo si, y sólo si, E^* es reflexivo

Demostración: Veamos ambas implicaciones:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $J \colon E \to E^{**}$ la inyección canónica de E en E^{**} y, dada $\phi \in E^{***}$ podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f \colon E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle \phi, J(x) \rangle \end{aligned}$$

Observamos que $f \in E^*$, por ser $\phi \colon E^{**} \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo. Entonces tenemos que

$$\langle \phi, J(x) \rangle = \langle f, x \rangle = \langle J(x), f \rangle, \ \forall x \in E \implies \langle \phi, \xi \rangle = \langle \xi, f \rangle, \ \forall \xi \in E^{**}$$

lo que demuestra que la inyección canónica de E^* en E^{***} es sobreyectiva.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Dado que E^* es reflexivo, aplicando el resultado anterior sobre su dual, E^{**} es reflexivo. Entonces por ser

$$J\colon E \longrightarrow J(E) \subset E^{**}$$

una isometría

$$\|J(x) - J(y)\| = \|x - y\|$$

entonces al ser E completo tenemos que $J(E)$ es un subconjunto completo de E^{**}, luego

$$J(E) \ \text{ es un subespacio cerrado de } \ E^{**} \overset{*}{\Longrightarrow} J(E) \ \text{ es reflexivo } \overset{**}{\Longrightarrow} E \ \text{ es reflexivo}$$

donde en $*$ hemos hecho uso de la Proposición 4.5 y en $**$ que $J(E)$ es isométrico a E. □

Corolario 4.3. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Entonces todo subconjunto K cerrado, acotado y convexo de E es compacto en $\sigma(E, E^*)$.

Demostración: Dado que K es convexo y fuertemente cerrado, se tiene que K es débilmente cerrado (Teorema 3.1). Además, dado que K es acotado entonces $K \subset \overline{B}_E(0, R) = R\overline{B}_E(0, 1)$ donde $R > 0$. Por tanto, como $\overline{B}_E(0, 1)$ es compacto en $\sigma(E, E^*)$ (Teorema 4.2), entonces K es compacto en $\sigma(E, E^*)$. □

5 Espacios de Lebesgue

Vamos a estudiar una amplia gama de espacios de Banach, directamente relacionados con la teoría de la integración.

Dado un conjunto de medida positiva, Ω, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ al espacio de las funciones medibles de Lebesgue de Ω en $\mathbb{R}$. Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}(\Omega)$. Así, consideraremos $L(\Omega)$ como el espacio vectorial cociente $\mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$.

A continuación introducimos una serie de resultados que consideramos conocidos

Teorema 5.1 (Convergencia Monótona). Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas, y sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Se tiene entonces

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Lema 5.1 (Fatou). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles positivas. Se tiene entonces

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Teorema 5.2 (Convergencia Dominada). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles, que converge puntualmente en Ω a una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Supongamos que existe una función integrable

$g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{c. p. d.} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $f \in L_1$ y verifica

$$\int_\Omega |f_n - f| \longrightarrow 0$$

Definición 5.1. Denotamos por $C_c(\mathbb{R}^N)$ al espacio de todas las funciones continuas de soporte compacto, es decir,

$$C_c(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^N) \colon f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus K, \ \text{ donde } \ K \ \text{ es compacto} \right\}$$

Teorema 5.3 (Densidad). El espacio $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^N)$, es decir,

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^N)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) \ \text{ tal que } \ \|f - f_1\|_1 < \varepsilon$$

5.1 Definición y Propiedades Elementales

Para cada $p \geq 1$ definimos

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) \colon \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

con

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Análogamente definimos

$$L_\infty(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) \colon \exists C > 0 \ \text{ tal que } \ |f(x)| \leq C \ \text{ c.p.d.} \right\}$$

con

$$\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 \colon \ |f(x)| \leq C \ \text{ c.p.d}\}$$

Proposición 5.1 (Desigualdad de Hölder). Sean $p > 1$, $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_{p^*}$, entonces $fg \in L_1(\Omega)$ y se tiene

$$\int_\Omega |fg| \leq \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Proposición 5.2 (Desigualdad de Minkowski). Sean $p > 1$ y $f, g \in L_p(\Omega)$, entonces

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

A partir de estas desigualdades deducimos el siguiente resultado

Teorema 5.4. $L_p(\Omega)$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_p$ es una norma para cualquier $1 \le p \le \infty$

Teorema 5.5 (Riesz-Fisher). El espacio normado $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach

Conviene resaltar la relación existente entre dos tipos de convergencia que aparecen en la demostración de dicho Teorema.

Corolario 5.1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L_p(\Omega)$ y $f \in L_p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Entonces existe una sucesión parcial $\{f_{n_k}\}$ y una función $h \in L_p(\Omega)$ tal que

(i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) \qquad$ p.c.t. $x \in \Omega$

(ii) $|f_{n_k}(x)| \le h(x), \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad$ p.c.t. $x \in \Omega$

5.2 Reflexividad

Teorema 5.6. $L_p(\Omega)$ es reflexivo para cualquier $1 < p < \infty$

Teorema 5.7 (Densidad). El espacio $C_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^N)$ para cualquier $1 \le p < \infty$

V Espacios de Hilbert

El siguiente cápitulo está dedicado a los espacios de Banach más perfectos desde un punto de vista geométrico, pues verifican todos los postulados de la geometría euclídea. Con el estudio, por parte de David Hilbert (1862-1943) y su escuela, de las formas cuadráticas en infinitas variables, aparecen los primeros espacios de Hilbert de dimensión infinita, y puede decirse que arranca, en los albores del siglo XX, la prehistoria del Análisis Funcional.

1 Espacios Prehilbertianos

Definición 1.1. Sea H un espacio vectorial. Un **producto escalar** (u, v) es una aplicación bilineal de $H \times H$ en $\mathbb{R}$ tal que

(i) $(u, v) = (v, u) \qquad \forall u, v \in H$

(ii) $(u, u) \geq 0 \qquad \forall u \in H$

(iii) $(u, u) \neq 0 \qquad \forall u \neq 0$

La siguiente propiedad clave del producto escalar es el punto de partida en el estudio de los espacios de Hilbert.

Proposición 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea $(\cdot, \cdot)$ un producto escalar en H. Entonces

$$|\,(u, v)\,| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u, v \in H$$

Demostración: Dados $u,\ v \in H$ se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$0 \overset{(ii)}{\leq} (u - tv, u - tv) = (u, u) - t(v, u) - t(u, v) + t^2(v, v) \overset{(i)}{=} (u, u) - 2t(u, v) + t^2(v, v)$$

entonces considerando $t = \frac{(u,v)}{(v,v)}$ tenemos

$$0 \leq (u, u) - 2\frac{(u, v)^2}{(v, v)} + \frac{(u, v)^2}{(v, v)} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} 0 \leq (u, u)(v, v) - 2(u, v)^2 + (u, v)^2 \iff (u, v)^2 \leq (u, u)(v, v)$$

basta tomar raices cuadradas para obtener la desigualdad buscada. □

Definición 1.2. Un espacio **prehilbertiano** es un espacio vectorial H, dotado un producto escalar.

Se considera automáticamente a H como un espacio normado, cuya norma viene dada por

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(u, u)} \qquad \forall u \in H$$

(i) Para todo $u \in H$ se tiene

$$\|u\| = 0 \iff (u,u)^{\frac{1}{2}} = 0 \iff (u,u) = 0 \implies u = 0$$

(ii) Para todo $u \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\|\lambda u\| = (\lambda u, \lambda u)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| (u,u)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|u\|$$

(iii) Para todo u, $v \in H$ se tiene

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) \overset{*}{\leq} (u,u) + 2(u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}} + (v,v) = \left((u,u)^{\frac{1}{2}} + (v,v)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

donde en $*$ hemos hecho uso de la Proposición 1.1. Así, tomando raices cuadradas obtenemos

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Es natural buscar una caracterización de los espacios prehilbertianos entre los espacios normados, esto es, una caracterización de las normas que proceden de un producto escalar.

Ejercicio 1.1 (Ley del Paralelogramo). Para todo u, $v \in H$ se verifica

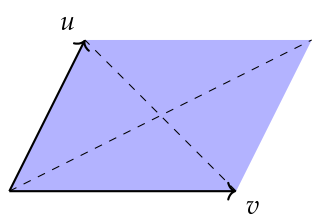
$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Demostración: Observamos que

$$\left.\begin{array}{l} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2(u,v) + \|v\|^2 \end{array}\right\} \implies \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \tag{2}$$

de donde se deduce lo que buscábamos. □

A partir de la ecuación (8) obtenemos una clara interpretación geométrica del resultado; en todo paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales coincide con la suma de los cuadrados de los lados.



Tenemos así una condición necesaria para que una norma proceda de un producto escalar. Además, es suficiente

Teorema 1.1 (Jordan-Von Neumann, 1935). Un espacio normado es prehilbertiano si, y sólo si, se verifica la identidad del paralelogramo

Definición 1.3. Un **espacio de Hilbert** es un espacio prehilbertiano cuya norma inducida por el producto escalar es completa, o equivalentemente, es un espacio de Banach cuya norma procede de un producto escalar.

Ejemplo 1.1. Veamos varios ejemplos concretos de espacios de Hilbert:

(i) El espacio vectorial
$$\ell_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$
equipado con el producto escalar
$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y(n)$$
es un espacio de Hilbert

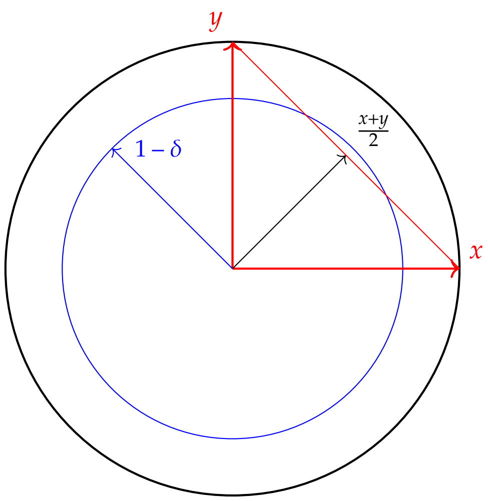
(ii) El espacio vectorial
$$L^2(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}) : \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\}$$
equipado con el producto escalar
$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$
es un espacio de Hilbert

Ejercicio 1.2. Si H es un espacio prehilbertiano, la aplicación $\phi : H \to \mathbb{R}$ dada por
$$\phi(u) = \|u\|^2$$
es derivable. Además, calcular su derivada.

2 Proyecciones en Conjuntos Convexos Cerrados

La identidad del paralelogramo permite obtener muy fácilmente un resultado clave, sobre existencia y unicidad de mejores aproximaciones en espacios de Hilbert, que nos llevará después al teorema más importante referente a dichos espacios.

Definición 2.1. Un espacio normado se dice uniformemente convexo si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ tal que } \left. \begin{array}{l} \|x\|_E \|y\|_E \leq 1 \\ \|x - y\|_E > \varepsilon \end{array} \right\} \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_E < 1 - \delta \tag{3}$$



Proposición 2.1. Todo espacio prehilbertiano es uniformemente convexo

Demostración: Sean $u, v \in H$ tal que

$$\|u\|\|v\| \leq 1 \ \wedge \ \|u-v\| > \varepsilon$$

Entonces por la identidad del paralelogramo tenemos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\|u-v\|^2}{4} < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} = \mu$$

luego

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| < \sqrt{\mu} = 1-\delta$$

□

Ejercicio 2.1 (Milman-Pettis). Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo

Teorema 2.1 (Teorema de la Proyección). Sea $K \subset H$ un subconjunto no vacío cerrado y convexo. Entonces para todo $f \in H$, existe un único $u \in K$ tal que

$$\|f-u\| = \min\left\{\|f-v\| : v \in K\right\} = d(f, K)$$

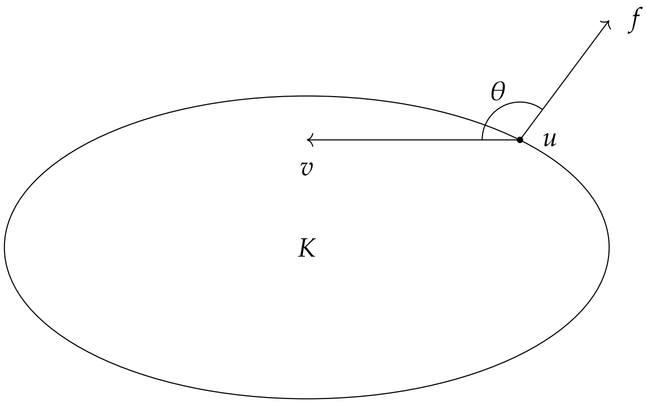
Además, u está caracterizado por la propiedad

$$u \in K \ \wedge \ (f-u, v-u) \leq 0 \ \forall v \in K \tag{4}$$

Nota: Gracias a la unicidad, el elemento u se le conoce como la **proyección** de f en K y se denota por

$$u = P_K(f)$$

La desigualdad (8) nos dice que el producto escalar del vector $\overrightarrow{uf}$ con cualquier vector $\overrightarrow{uv}$ es negativo, es decir, el ángulo que determinan esos dos vectores es mayor que $\pi/2$.



Demostración: Dado que el conjunto

$$\left\{\|f-v\|: v \in K\right\} \subset [0,\infty)$$

está acotado inferiormente nos aseguramos la existencia del ínfimo. Entonces existe una sucesión $\{v_n\} \subset K$ tal que

$$\{d_n\} = \{\|f-v_n\|\} \searrow d = \inf\{\|f-v\|: v \in K\}$$

Además, la identidad del paralelogramo para $a = f - v_n$ y $b = f - v_m$ nos lleva a que

$$\left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) - \left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right) - d^2$$

Nota: Fijado $\delta > 0$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tal que } \forall n \geq n_0 \implies |\, d_n - d\,| < \delta \\ \exists m_0 \in \mathbb{N},\ \text{tal que } \forall m \geq m_0 \implies |\, d_m - d\,| < \delta \end{array}\right\} \implies |\, d_n^2 - d^2\,| + |\, d_m^2 - d^2\,| < 2\delta$$

Entonces para $n, m \geq \max\{n_0, m_0\}$ llegamos a

$$\frac{1}{2}\left|d_n^2 + d_m^2\right| - d^2 \leq \left|d_n^2 + d_m^2 - 2d\right| \leq \left|d_n^2 - d^2\right| + \left|d_m^2 - d^2\right| < 2\delta = \varepsilon$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ se tiene que para todo $n, m \geq \max\{n_0, m_0\}$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right) - d^2 < \varepsilon \implies \left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 < \varepsilon$$

De donde se deduce que la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy luego, por ser H un espacio de Hilbert, es convergente

$$v_n \longrightarrow u \in K \implies d = \|f-u\|$$

Esto es, existe un elemento en K donde se alcanza el ínfimo, otorgándonos un mínimo.

Antes de probar la unicidad, veamos que equivalen

$$\|f-u\| = \min\left\{\|f-v\|: v \in K\right\} \iff (f-u, v-u) \leq 0,\ \forall v \in K$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ La hipótesis equivale a

$$\|f-u\| \leq \|f-v\|,\ \forall v \in K \iff \|f-u\|^2 \leq \|f-v\|^2,\ \forall v \in K$$

Entonces desarrollando llegamos a que

$$\begin{aligned} \|f-u\|^2 \leq (f-u+u-v, f-u+u-v) &\iff \|f-u\|^2 \leq \|f-u\|^2 + 2(f-u, u-v) + \|u-v\|^2 \\ &\iff 2(f-u, v-u) \leq \|u-v\|^2,\ \forall v \in K \end{aligned}$$

Por ser K convexo, podemos tomar $w \in K$ y, entonces

$$v = (1-t)u + tw \in K, \qquad \forall t \in [0,1]$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene que

$$2(f-u, t(w-u)) \leq t^2\|u-w\|^2,\ \forall t \in [0,1] \iff 2(f-u, w-u) \leq t\|u-w\|^2,\ \forall t \in [0,1]$$

Así, considerando $t \longrightarrow 0$ se obtiene la desigualdad buscada. Análogamente, el procedimiento inverso nos daría la otra implicación.

Para la unicidad, supongamos que existen dos $u_1, u_2 \in K$ tal que

$$\|u_1 - f\| = \|u_2 - f\| = \min\left\{\|k-f\| : k \in K\right\}$$

Entonces

$$\left.\begin{aligned} (f-u_1, w-u_1) \leq 0,\ \forall w \in K &\overset{w=u_2}{\Longrightarrow} (f-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \\ (f-u_2, w-u_2) \leq 0,\ \forall w \in K &\overset{w=u_1}{\Longrightarrow} (f-u_2, u_1-u_2) \leq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} (f-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \\ (f-u_2, u_2-u_1) \geq 0 \end{cases}$$

Sumando ambas desigualdades

$$(f-u_1-f+u_2, u_2-u_1) \leq 0 \iff \|u_2-u_1\| \leq 0 \iff u_2-u_1 = 0 \iff u_2 = u_1$$

□

Proposición 2.2. Sea $K \subset H$ un subconjunto no vacío cerrado y convexo. Entonces P_K no incrementa las distancias, es decir

$$\|P_K(f_1) - P_K(f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\| \qquad \forall f_1, f_2 \in H$$

Demostración: Sean $u_1 = P_K(f_1)$, $u_2 = P_K(f_2)$, entonces tenemos

$$\left.\begin{aligned} (f_1-u_1, v-u_1) \leq 0,\ \forall v \in K &\overset{v=u_2}{\Longrightarrow} (f_1-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \\ (f_2-u_2, v-u_2) \leq 0,\ \forall v \in K &\overset{v=u_1}{\Longrightarrow} (f_2-u_2, u_1-u_2) \leq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} (f_1-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \\ (f_2-u_2, -u_1+u_2) \geq 0 \end{cases}$$

Restando ambas desigualdades

$$(f_1-f_2+u_2-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \iff (f_1-f_2, u_2-u_1) + (u_2-u_1, u_2-u_1) \leq 0$$

Reordenando

$$\|u_1-u_2\|^2 \ \leq\ (f_2-f_1, u_2-u_1) \overset{*}{\leq} \|f_2-f_1\|\|u_2-u_1\| \Longrightarrow \|u_1-u_2\| \leq \|f_2-f_1\|$$

donde en $*$ hemos hecho uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz 1.1 □

Corolario 2.1 (Teorema de la Proyección Ortogonal). Sea M un subespacio vectorial cerrado de H. Entonces $u = P_M(f)$ está caracterizazdo por

$$u \in M \qquad \wedge \qquad (f - u, v) = 0, \qquad \forall v \in M$$

Además, P_M es una aplicación lineal, conocida como la **proyección ortogonal**.

Demostración: Por el Teorema 2.1 sabemos que existe una única u y que u está caracterizado por

$$u \in M \qquad \wedge \qquad (f - u, w - u) \leq 0, \ \forall w \in M$$

Dado que M un subespacio vectorial se tiene que

$$\left.\begin{array}{r} v = w - u \in M \implies (f - u, v) \leq 0 \\ -v = u - w \in M \implies (f - u, v) \geq 0 \end{array}\right\} \implies (f - u, w) = 0 \qquad \forall w \in M$$

□

El corolario anterior tiene una cierta interpretación geométrica, es decir, equivale a decir que $P_M(f)$ es el único elemento de M que hace el vector $\overrightarrow{P_M(f)f}$ ortogonal a M.

$$f - P_M(f) \perp M$$

3 El Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

Es muy sencillo, en espacios de Hilbert, construir funcionales lineales continuos. Basta fijar cualquier $f \in H$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto (f, u) \end{aligned}$$

es lineal y continua. En particular, el siguiente resultado nos muestra que todos los funcionales lineales de H se obtienen de esta forma.

Teorema 3.1 (Teorema de Representación de Riesz-Fréchet). Para toda $\phi \in H^*$ existe un único $v \in H$ tal que

$$\phi(u) = (v, u) \qquad \forall u \in H$$

Además,

$$\|\phi\|_{H^*} = \|v\|_H$$

Demostración: Distinguimos dos casos elementales:

$\boxed{\phi = 0}$ Tomamos $v = 0$ y la conclusión es obvia.

$\boxed{\phi \neq 0}$ Consideramos

$$M = \ker \phi = \phi^{-1}(\{0\}) \subset H$$

Así, M es un subespacio vectorial cerrado. Suponemos que $M \neq H$, entonces existe $z_0 \in H \setminus M$ luego, por el Corolario 2.1 existe $z_1 = P_M(z_0) \in M$ verificando

$$(z_0 - z_1, v) = 0, \qquad \forall v \in M$$

Dado que $z_0 \notin M$, $z_1 \in M$ se tiene que $z_0 - z_1 \neq 0$, entonces podemos considerar

$$(z, v) = \left(\frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|}, v \right) = 0, \qquad \forall v \in M \tag{5}$$

Así

$$\|z\| = 1 \qquad \wedge \qquad z \in H \setminus M \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(z) \neq 0 \tag{6}$$

Llegados a este punto tomamos

$$\phi\left(u - \frac{\phi(u)}{\phi(z)} z\right) = \phi(u) - \frac{\phi(u)}{\phi(z)}\phi(z) = \phi(u) - \phi(u) = 0$$

Esto significa que

$$u - \frac{\phi(u)}{\phi(z)} z \in M \overset{(12)}{\Longrightarrow} \left(z, u - \frac{\phi(u)}{\phi(z)} z\right) = 0 \iff (z, u) = \frac{\phi(u)}{\phi(z)}(z, z) = \frac{\phi(u)}{\phi(z)} \overset{(13)}{\Longrightarrow} \big(\phi(z) z, u\big) = \phi(u)$$

es decir

$$(v, u) = \phi(u) \qquad \forall u \in H$$

Para demostrar la unicidad consideramos dos $v_1, v_2 \in H$ tal que

$$(v_1, u) = \phi(u) = (v_2, u),\ \forall u \in H \implies (v_2 - v_1, u) = 0,\ \forall u \in H \overset{*}{\implies} \|v_2 - v_1\|^2 = (v_2 - v_1, v_2 - v_1) = 0$$
$$\implies v_2 = v_1$$

donde en $*$ hemos tomado $u = v_2 - v_1 \in H$. Por último, tenemos que

$$\phi(u) = (v, u),\ \forall u \in H \implies \|\phi\|_{H^*} = \sup_{\|u\| \leq 1} |\phi(u)| = \sup_{\|u\| \leq 1} |(v, u)| \overset{*}{\leq} \sup_{\|u\| \leq 1} \|v\|\|u\| \leq \|v\|$$

donde en $*$ hemos hecho uso de la desigualdad de Cauchy Schwarz 1.1.

Además, si $v \neq 0$, considerando $u = \frac{v}{\|v\|} \in H$ se tiene

$$(v, u) = \frac{(v, v)}{\|v\|} = \|v\| \implies \|\phi\| = \|v\|$$

Si $v = 0$ la igualdad se cumple trivialmente. □

Ejemplo 3.1. Espacios de Lebesgue. Sea $1 \leq p < \infty$, entonces para cada $\phi \in (L_p)^*$ existe una única $u \in L_{p^*}$ tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf \qquad \forall f \in L_p$$

Además

$$\|u\|_{p^*} = \|\phi\|_{(L_p)^*}$$

En el caso particular de los espacios L_p el Teorema de Riesz nos dice que todo funcional lineal continuo de L_p se puede representar concretamente como una integral. Por tanto, podemos realizar la siguiente identificación

$$(L_p)^* = L_{p^*} \qquad (L_1)^* = L_\infty$$

4 Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

Definición 4.1. Una forma bilineal $a\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice

(i) **continua** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \qquad \forall u, v \in H$$

(ii) **coerciva** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$$

Teorema 4.1 (Stampacchia). Sea $a\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, continua y coerciva. Sea K un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de H. Entonces para toda $\phi \in H^*$ existe un único $u \in K$ tal que

$$a(u, v-u) \geq \langle \phi, v-u \rangle \qquad \forall v \in K$$

Además, si a es simétrica entonces u está caracterizado por la propiedad

$$u \in K \qquad \wedge \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle\right\}$$

La demostración requiere la aplicación del Teorema del Punto Fijo de Banach:

Teorema 4.2 (Punto Fijo de Banach). Sea X un espacio métrico completo y sea $S\colon X \longrightarrow X$ una contracción estricta, es decir

$$d(S(v_1), S(v_2)) \leq Kd(v_1, v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in X, \;\; K < 1$$

Entonces S tiene un único punto fijo, esto es, existe un único $u \in H$ tal que $u = S(u)$.

Demostración del Teorema de Stampacchia: Dividiremos la demostración en cuatro pasos:

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $\phi \in H^*$, entonces por el Teorema de Riesz-Fréchet existe un único $z \in H$ tal que

$$\langle \phi, v \rangle = (z, v) \qquad \forall v \in H$$

Por otro lado, fijado $u \in H$ la aplicación

$$v \longmapsto a(u,v)$$

es un funcional lineal continuo en H, luego usando de nuevo el Teorema de Riesz-Fréchet existe un único $Au \in H$ tal que

$$a(u,v) = (Au, v) \qquad \forall v \in H$$

Así tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} A \colon H &\longrightarrow H \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

lineal

$$A(\lambda u + \beta v) = \big(A(\lambda u + \beta v), w\big) = \lambda(Au, w) + \beta(Av, w) = \lambda A(u) + \beta A(v) \qquad \forall u, v \in H$$

y continua

$$\|Au\|_H = \sup_{\|v\| \le 1} |(Au, v)| = \sup_{\|v\| \le 1} |a(u, v)| \le \sup_{\|v\| \le 1} C\|u\|\|v\| = C\|u\| \qquad \forall u \in H \tag{7}$$

Además, por la coercitividad de la forma bilineal a tenemos

$$(Au, u) = a(u, u) \ge \alpha\|u\|^2 \qquad \forall u \in H$$

Buscamos encontrar $u \in K$ verificando

$$a(u, v - u) \ge \langle \phi, v - u \rangle \quad \forall v \in K \iff (Au, v - u) \ge \langle \phi, v - u \rangle = (z, v - u) \qquad \forall v \in K$$

entonces

$$(Au, v - u) - (z, v - u) \ge 0 \iff (Au - z, v - u) \ge 0 \iff (z - Au + u - u, v - u) \le 0 \iff u = P_K(z - Au + u)$$

Por tanto, considerando $\rho > 0$ se tiene que

$$(\rho Au - \rho z, v - u) \ge 0 \iff (\rho z - \rho Au + u - u, v - u) \le 0 \iff u = P_K(\rho z - \rho Au + u)$$

Así, podemos consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} S_\rho \colon H &\to H \\ u &\mapsto P_K(\rho z - \rho Au + u) \end{aligned}$$

y buscamos llegar a que tiene un punto fijo

$$S_\rho(u) = u$$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Haremos uso del Teorema del punto fijo de Banach, para ello deberemos probar que existe $\rho_0 > 0$ tal que S_ρ es una contracción cuando $0 \le \rho \le \rho_0$.

Sean $u_1, u_2 \in H$ y buscamos calcular $\|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_2)\|$.

$$\begin{aligned} \|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_2)\|^2 &= \|P_K(\rho z - \rho Au_1 + u_1) - P_K(\rho z - \rho Au_2 + u_2)\|^2 \overset{*}{\le} \|\rho z - \rho Au_1 + u_1 - \rho z - \rho Au_2 + u_2\|^2 \\ &= \|\rho A(u_1 - u_2) - (u_1 - u_2)\|^2 = \|u_1 - u_2\|^2 - 2(u_1 - u_2, \rho A(u_1 - u_2)) + \rho^2\|A(u_1 - u_2)\|^2 \\ &\overset{(12)}{\le} \|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) + \rho^2 C^2\|u_1 - u_2\|^2 \end{aligned}$$

donde en $*$ hemos hecho uso de que la proyección es una aplicación lipchiztciana. De nuevo por la coercitividad tenemos

$$(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) \ge \alpha\|u_1 - u_2\|^2 \implies -2\rho(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) \le -2\rho\alpha\|u_1 - u_2\|^2$$

entonces

$$\|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) + \rho^2 C^2 \|u_1 - u_2\|^2 \leq \|u_1 - u_2\|^2 \left[1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2\right]$$

Se puede observar que podemos tomar $\rho > 0$ de forma que

$$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1 \implies 0 < C < 1$$

Por tanto, S es una contracción

$$\|S_\rho(u_1) - S_\rho(u_2)\|^2 \leq C^2 \|u_1 - u_2\|^2, \qquad \forall u_1, u_2 \in H$$

y al ser H completo el Teorema del Punto Fijo de Banach nos dice que existe dicho punto fijo.

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Supongamos que a es simétrica, es decir

$$a(u, v) = a(v, u) \qquad \forall u, v \in H$$

Entonces podemos construir un nuevo producto escalar en H

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] \colon H \times H &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto a(u, v) \end{aligned}$$

Luego su norma asociada

$$[[u]] = \sqrt{a(u, u)}$$

tiene que ser equivalente a $\|\cdot\|$. Ya que

$$\sqrt{C}\|u\| = \sqrt{C\|u\|\|u\|} \geq [[u]] = \sqrt{a(u, u)} \geq \sqrt{\alpha\|u\|^2} = \sqrt{\alpha}\|u\|$$

Entonces el dual con la norma $\|\cdot\|$ es isométricamente isomorfo al dual con la norma $[[\cdot]]$. Luego dado $\phi \in H^*$ el Teorema de Riesz-Fréchet existe una única $z \in H$ tal que

$$\langle \phi, v \rangle = [z, v] = a(z, v)$$

Así lo probado anteriormente se resume en

$$\begin{aligned} [u, u - v] \geq [z, u - v],\ \forall v \in K &\iff a(u, u - v) \geq a(z, u - v) = a(u, z) - a(v, z),\ \forall v \in K \\ &\iff a(u - z, u - v) \geq 0,\ \forall v \in K \\ &\iff a(z - u, u - v) \leq 0, \forall v \in K \overset{*}{\iff} P_K(z) = u \end{aligned}$$

donde en $*$ hemos hecho uso del Teorema 2.1. Entonces

$$[[z - u]] \leq [[z - v]],\ \forall v \in K$$

Luego

$$\begin{aligned} a(z - u, z - u) \leq a(z - v, z - v) &\iff a(z, z) - a(u, z) - a(z, u) + a(u, u) \leq a(z, z) - a(v, z) - a(z, v) + a(v, v) \\ -2a(u, z) + a(u, u) \leq -2a(z, v) + a(v, v) &\iff \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, z) \leq \frac{1}{2}a(v, v) - a(z, v) \\ &\quad \frac{1}{2}a(u, v) - \phi(u) \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 4.1 (Lax-Milgram). Sea $a\colon H{\times}H \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, continua y coerciva. Entonces para toda $\phi \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u, w) = \langle \phi, w \rangle \qquad \forall w \in H$$

Si además, a es simétrica entonces u está caracterizado mediante

$$u \in H \qquad \wedge \qquad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{w \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(w, w) - \langle \phi, w \rangle \right\}$$

Demostración: Usamos el Teorema 4.1 considerando $K = H$ y se deduce lo que buscamos. □

El Teorema de Lax-Milgram es una herramienta muy simple y eficiente para resolver ecuaciones elípticas lineales en derivadas parciales.