Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Probabilidad

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

1. Trabajos de clase **5**

1.1. Trabajo de clase del lunes 23 de Septiembre de 2024 5
1.2. Trabajo de clase del martes 24 de Septiembre de 2024 9
1.3. Trabajo de clase del lunes 30 de Septiembre de 2024 10
1.4. Trabajo de clase del martes 1 de Octubre de 2024 12
1.5. Trabajo de clase del lunes 7 de Octubre de 2024 14
1.6. Trabajo de clase del lunes 28 de Octubre de 2024 16
1.7. Trabajo de clase del lunes 4 de Noviembre de 2024 18
1.8. Trabajo de clase del martes 5 de Noviembre de 2024 19
1.9. Trabajo de clase del lunes 11 de Noviembre de 2024 20
1.10. Trabajo de clase del martes 12 de Noviembre de 2024 23
1.11. Trabajo de clase del martes 19 de Noviembre de 2024 24

1. Trabajos de clase

1.1. Trabajo de clase del lunes 23 de Septiembre de 2024

Ejercicio 1.1.1. Sea el experimento de lanzar un dado perfecto de 6 caras. Obtener:

a) La función masa de probabilidad.

La función masa de probabilidad es la que asocia cada posible suceso con su probabilidad. En este caso, al ser el dado perfecto podemos interpretar que es la siguiente, definiendo el espacio muestral como $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y notando $x_i = i$, $\forall i \in 1, \ldots, 6$

$$p_i = P(x = x_i) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in 1, \ldots, 6$$

En otro caso, $p_i = P(x = x_i) = 0$ donde $i \notin 1, \ldots, 6$

b) La función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 1 \\ \frac{x_i}{6} & \text{si} & 1 \leqslant x_i \leqslant 6 \\ 1 & \text{si} & x \geqslant 6 \end{cases}$$

c) Función generatriz de momentos.

$$M(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=1}^{6} e^{tx}, \quad t \in \mathbb{R}$$

d) Valor esperado.

$$E[x] = \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=1}^{6} x = 3{,}5$$

Otra forma de calcularlo sería:

$$M'(t) = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} e^{tx}$$

$$E[x] = M'(0) = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} x = 3{,}5$$

e) Varianza.

$$Var[x] = E[x^2] - E[x]^2 = \frac{1}{6} \cdot \sum_{x=1}^{6} x^2 - (3{,}5)^2 = 2{,}9167$$

f) La distribución de probabilidad que sigue el experimento.

Es una distribución uniforme.

Ejercicio 1.1.2. Consideramos la variable aleatoria del resultado de número de caras menos número de cruces al lanzar 3 monedas. Calcular:

1. Función masa de probabilidad.

   Para este experimento tenemos el espacio muestral $\Omega = \{ccc, xcc, cxc, ccx, cxx, xcx, xxc, xxx\}$ y la variable aleatoria puede tomar los valores $\{-3, -1, 1, 3\}$. La probabilidad asociada a cada uno será:

$$P(x = -3) = P(x = 3) = \frac{1}{8}$$
$$P(x = -1) = P(x = 1) = \frac{3}{8}$$

2. Esperanza.

$$E[x] = (-3 + 3) \cdot \frac{1}{8} + (-1 + 1) \cdot \frac{3}{8} = 0$$

3. Varianza.

$$Var[x] = E[x^2] - E[x]^2 = E[x^2] = ((-3)^2 + 3^2)\frac{1}{8} + ((-1)^2 + 1^2)\frac{3}{8} = 18 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = 3$$

4. Función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ 1/8 & \text{si} \quad -3 \leqslant x < -1 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ 7/8 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1.1.3 (puntos)**.** Dada x una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 8 \\ 0 & \end{cases}$$

Calcular k, obtener la función de distribución, la esperanza y la varianza.

Dado que f es una función de densidad debe verificar la saegunda propiedad por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \iff \int_{1}^{8} \frac{k}{x^2}dx = 1 \iff k\left[\frac{-1}{x}\right]_1^8 \iff k\left(1-\frac{1}{8}\right) \iff k = \frac{8}{7}$$

Para la función de distribución tenemos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 1 \\ \int_1^x \frac{\frac{8}{7}}{t^2} = \frac{8}{7}\left(1-\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in [1,8[\end{cases}$$

Pasamos al calcular la esperanza:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^8 x\frac{k}{x^2} = \frac{8}{7}(\ln|x|)_1^8 = \frac{8}{7}\ln(8)$$

Por último para la varianza:

$$Var[x] = E[x^2] - E[x]^2 = 8 - \left(\frac{8}{7}\ln(8)\right)^2 = 2{,}352$$

Donde hemos calculado $E[x^2]$ como

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^8 \cancel{x^2}\frac{k}{\cancel{x^2}}dx = \frac{8}{7}[x]_1^8 = \frac{64}{7} - \frac{8}{7} = 8$$

Ejercicio 1.1.4. Una gasolinera vende una cantidad x cada día de litros de gasolina. Supongamos que x (medida en miles de litros) tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 3/8 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Las ganancias de la gasolinera son 100€ cada 1000 litros vendidos si la cantidad que venden es menor o igual a 1000 litros y 40€ extras si vende por encima de esa cantidad. Calcule la ganancia esperada.

Definimos la función ganancia como:

$$g(x) = \begin{cases} 100x & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 140x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Aplicando las propiedades de la esperanza matemática tenemos:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) = \frac{3}{8}\cdot\left(\int_0^1 100x\cdot x^2dx + \int_1^2 140x\cdot x^2dx\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\left(\left[\frac{100}{4}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{140}{4}x^4\right]_1^2\right) = \frac{3}{8}(25+525) = 206{,}25$$

Por lo que se espera obtener 206,25€

Desarrollo teórico: Demostrar que $E[X^n] = M_X^{n)}(t=0)$

$$M_X^{n)}(t=0) = \frac{d^n}{dt^n} E\left[e^{tx}\right]_{|0} = E\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{tx}\right]_{|0} = E\left[x^n e^{tx}\right]_{|0} = E\left[X^n\right]$$

1.2. Trabajo de clase del martes 24 de Septiembre de 2024

Ejercicio 1.2.1. Hallar la función generatriz de momentos de la distribución de Poisson, la esperanza y la varianza

La función masa de Probabilidad es $P[X = x] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

$$\begin{aligned}
\Phi(t) = E[e^{tX}] &= \sum_{n\geqslant 0} e^{tn} \cdot P[X = x] = \sum_{n\geqslant 0} e^{tn} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(e^t\lambda)^n}{n!} = \\
&= e^{-\lambda} \cdot e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}, \quad t \in \mathbb{R} \\
M_x(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \\
E[X] &= \frac{d'}{dt} e^{\lambda(e^t-1)}_{|t=0} = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t_{|t=0} = \lambda \\
E[X^2] &= \frac{d^2}{dt} e^{\lambda(e^t-1)}_{|t=0} = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t_{|t=0} = \lambda^2 - \lambda \\
Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2.2. Hallar la función generatriz de momentos de la distribución Binomial.

La función masa de Probabilidad es $P[X = x] = \frac{n!}{x!(n-x)} p^x (1-p)^{n-x}, \;\; x = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x} = (e^t p + (1-p))^n$$

Ejercicio 1.2.3. Demostrar la propiedad de falta de memoria de la distribución Geométrica.

Teniendo en cuenta que la expresión de la función de distribución es $F_X(x) = 0$, para $x < 0$ y $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$ para $x \geqslant 0$ y que la propiedad de falta de memoria es $P(X \geqslant h + k/X \geqslant h) = P(X \geqslant k), \;\; \forall h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Desarrollemos esto último con la propiedad condicionada:

$$P(X \geqslant h + k/X \geqslant h) = \frac{P[X \geqslant h + k, X \geqslant h]}{P[X = h]} = \frac{P[X \geqslant h + k]}{P[X \geqslant h]}$$

Calculemos a partir de la función de distribución la probabilidad de $X \geqslant x$

$$P[X \geqslant x] = 1 - P[X < x] = 1 - F(x-1) = 1 - (1 - (1-p)^x) = (1-p)^x$$

Aplicando esto tenemos que

$$\frac{P[X \geqslant h + k]}{P[X \geqslant h]} = \frac{(1-p)^{h+k}}{(1-p)^h} = (1-p)^k = P[X \geqslant k]$$

1.3. Trabajo de clase del lunes 30 de Septiembre de 2024

Desarrollo teórico: (Demostración de la distribución reproductiva de la distribución binomial) Sabemos que la función generatriz de momentos de una distribución binomial es $M_{x_i}(t) = (pe^t + (1-p))^{x_i} \quad \forall t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.

$$M_{\sum x_i}(t) \overset{(*)}{=} \Pi \left(pe^t + (1-p)^{x_i}\right)^{x_i} = (pe^t + (1-p))^{\sum x_i}$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución Binomial de parámetros $\sum x_i, p$.

Donde en (*) aplicamos que son independientes (el Teorema visto en clase en la diapositiva 36).

Desarrolo teórico: (Obtención de la función generatriz de momentos de una distribución uniforme continua)

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \sum_a^b e^{tx} dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \left[\dfrac{e^{tx}}{t}\right]_a^b = \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{(b-a)^t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Aunque por definición la función generatriz de momentos vale uno, dicho valor se puede obtener por continuidad (calculando los límites laterales cuando t tiende a 0 de la función anterior).

Desarrolo teórico: (Comprobación de que la función de densidad de la distribución normal es función de densidad).

Para ello tendremos que comprobar que verifica las 2 propiedades de las funciones de densidad:

(i) $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \geqslant 0$, se verifica.

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dt = \frac{dx}{\sigma} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Integral de Gauss} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\sqrt{2\pi} = 1$$

Por lo que se verifica.

Desarrollo teórico: (Prueba de que en intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ se encuentra el 68.26 % de la población).

$$\begin{aligned} P[\mu - \sigma < X \leqslant \mu + \sigma] &= P\left[\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leqslant Z < \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right] = P[-1 < Z < 1] = \\ &= P[Z < 1] - P[Z < -1] = P[Z < 1] - (1 - P[Z < 1]) = \\ &= 2P[Z < 1] - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826 \end{aligned}$$

Esto es simplemente una tipificación de cualquier distribución normal para transformarla en una normal 0-1 (para poder usar la tabla).

1.4. Trabajo de clase del martes 1 de Octubre de 2024

Ejercicio 1.4.1. Ejemplos T1 (Ejemplo de ejercicio de la distribución normal)

$$\begin{aligned} X_i \equiv & \text{ Puntuaciones obtenidas por los candidatos} \rightsquigarrow N(100, \sigma^2) \\ & P(X > 100{,}6) = 0{,}4404 \Rightarrow P(X \leqslant 100{,}6) = 0{,}5596 \\ & \Rightarrow P\left[Z \leqslant \frac{100{,}6 - 100}{\sigma} = 0{,}5596\right] \\ & \Rightarrow P\left[Z \leqslant \frac{0{,}6}{\sigma}\right] = 0{,}5596 \Rightarrow \frac{0{,}6}{\sigma} = 0{,}15 \Rightarrow \sigma = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, $N(100, 4^2)$.

a) $P(X > 105) = 1 - P(X \leqslant 105) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}25) = 1 - 0{,}8943 = 0{,}106$. Por tanto solo un 10,6 % supera la oposición.

b) Tengo que calcular el valor de a que verifique $P(X > a) = 0{,}33$

$$P\left[Z \leqslant \frac{a - 100}{4}\right] = 0{,}67$$

$$\frac{a - 100}{4} = 0{,}44 \Rightarrow a = 101{,}76$$

c) $P(100 \leqslant X \leqslant 101{,}7) = P\left(0 \leqslant Z \leqslant 0{,}44\right) = P(Z \leqslant 0{,}44) - P(Z \leqslant 0) = 0{,}67 - 0{,}5 = 0{,}17$

Ejercicio 1.4.2. Ejercicio 7 de la Relación 1.

$X \equiv$ Número de individuos que sufren reacción de una muestra de 400 $\rightsquigarrow B(400, 0{,}1)$

Como $n = 400 > 30$ y $1 \leqslant p \leqslant 0{,}9$, entonces puedo aproximar por una normal $\Rightarrow X \rightsquigarrow B(400, 0{,}1) \cong N(np, npq)$, es decir, $N(40, 6^2)$.

$P(33 \leqslant X \leqslant 50) = P(X \leqslant 50) - P(X < 33) = P(X \leqslant 50) - P(X \leqslant 32) = P[X \leqslant 50{,}5] - P[X \leqslant 3$

Ejercicio 1.4.3. Ejercicio 12 de la Relación 1.

a) $X \equiv$ Tiempo entre dos llegadas consecutivas de coches (en un minuto) $\rightsquigarrow exp(6)$

$$P[X > 1/2] = 1 - P[X \leqslant 1/2] = 1 - (1 - e^{-6/2}) = e^{-3} = 0{,}04978$$

b) $X \equiv$ Número de coches que llegan en 1/2 minuto $\rightsquigarrow P(6/2) = P(3)$

$$P[X = 0] = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = e^{-3} = 0{,}04978$$

Ejercicio 1.4.4. Ejercicio 8 de la Relación 1
$X \equiv$ Tiempo que el equipo funciona $\rightsquigarrow E(3, 0{,}2)$.

a)

$$P[X > 0] = 1 - P[X \leqslant 10] = 1 - \int\limits_0^{10} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x dx} = 1 - \frac{0{,}2^3}{2!} - \int\limits_0^{10} x^2 e^{-0{,}2x} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{cc} u = x^2 & du = 2xdv \\ dv = e^{-0{,}2} & v = \frac{-1}{0{,}2} e^{-0{,}2x} \end{array} \right\} = 1 - \frac{0{,}2^3}{2!} \cdot 80{,}8262 = 0{,}6767s$$

b)

$$P[10 \leqslant X \leqslant 15] = 0{,}2228$$

1.5. Trabajo de clase del lunes 7 de Octubre de 2024

Ejercicio 1.5.1. Lanzo un dado y hay 2 variables:

$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{impar} \\ 1 & \text{par} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} -2 & \text{si sale} & 1,2,3 \\ 0 & \text{si sale} & 4 \\ 3 & \text{si sale} & 5,6 \end{cases}$$

Podemos calcular

$$\begin{aligned} P[X_1 = -1, X_2 = -2] &= P[\text{salga impar y salga 1,2 o 3}] = 2/6 \\ P[X_1 = -1, X_2 = 0] &= 0 \\ P[X_1 = -1, X_2 = 3] &= 1/6 \\ P[X_1 = 1, X_2 = -2] &= 1/6 \\ P[X_1 = 1, X_2 = 0] &= 1/6 \\ P[X_1 = 1, X_2 = 3] &= \underline{1/6} \\ & \ 1 \end{aligned}$$

Podemos resumir esta información como

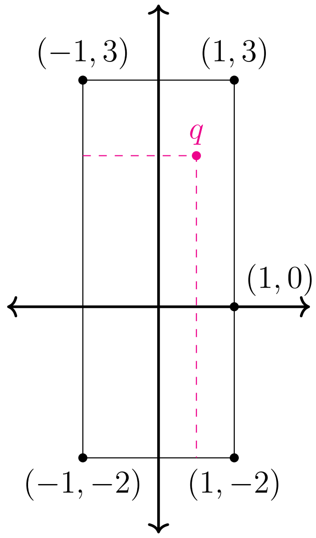
$X_1 \backslash X_2$	-2	0	3	
-1	2/6	0	1/6	
1	1/6	1/6	1/6	

Sabeos que

$$P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P[X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2]$$

Por lo que

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \text{si} & x_1 \leqslant -1 & \text{o} & x_2 \leqslant -2 \\ 2/6 & \text{si} & -1 \leqslant x_1 < 1 & \text{y} & -2 \leqslant x_2 < 3 \\ 2/6 & \text{si} & -1 \leqslant x_1 < 1 & \text{y} & x_2 \geqslant 3 \\ 3/6 & \text{si} & x_1 \geqslant 1 & \text{y} & -2 \leqslant x_2 < 0 \\ 4/6 & \text{si} & x_1 \geqslant 1 & \text{y} & 0 \leqslant x_2 < 3 \\ 1 & \text{si} & x_1 \geqslant 1 & \text{y} & x_2 \geqslant 3 \end{array}$$



$P[X_1 + X_2 \leqslant 1] = P[X \in \{(-1,-2),(-1,0),(1,-2),(1,0)\}] = {}^2\!/_6 + 0 + {}^1\!/_6 + {}^1\!/_6 = {}^2\!/_3$

Ejemplo. Dos vectores aleatorios dimensionales $X = (X_1, X_2)$ y $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_1) \in \mathbb{R}^2_+$

$$F_{\underline{X}}(X_1+\epsilon_1, X_2+\epsilon_2) - F_{\underline{X}}(X_1, X_2+\epsilon_2) - F_{\underline{X}}(X_1+\epsilon_1, X_2) + F_{\underline{X}}(X_1, X_2) \geqslant 0$$

Demostrar que no es una función de distribución (probar con la propiedad 4).

1.6. Trabajo de clase del lunes 28 de Octubre de 2024

Ejercicio 1.6.1. Sea $X = (X_1, X_2)$ y dada la tabla

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	
-2	$1/6$	$1/12$	$1/6$	
1	$1/6$	$1/12$	$1/6$	
2	$1/12$	0	$1/12$	

Hallar la función masa de probabilidad conjunta de $Y = (|X_1|, X_2^2)$.

$$
\begin{aligned}
&P[Y = (0,1)] = P[X_1 = 0, X_2 = 1] = 1/12 \\
&P[Y = (1,1)] = P[X_1 = -1, X_2 = 2] + P[X_1 = 1, X_2 = 1] = 1/6 + 1/6 = 1/3 \\
&P[Y = (0,4)] = P[X_1 = 1, X_2 = -2] + P[X_1 = 0, X_2 = 2] = 1/12 + 0 = 1/12 \\
&P[Y = (1,4)] = P[X_1 = -1, X_2 = -2] + P[X_1 = 1, X_2 = -2] \\
&\qquad + P[X_1 = 1, X_2 = 2] + P[X_1 = -1, X_2 = 2] = 1/6 + 1/6 + 1/12 + 1/12 = 1/2
\end{aligned}
$$

Y obtenemos la siguiente tabla de fmp:

$X_2^2 \backslash \lvert X_1 \rvert$	0	1	
1	$1/12$	$1/3$	
4	$1/12$	$1/2$	

Ejercicio 1.6.2. Sea $X = (X_1, X_2)$ el vector aleatorio continuo que tiene por función de densidad

$$f_X(x_1, x_2) = \lambda\mu e^{-\lambda x_1} e^{-\mu x_2} \quad \text{con } \ x_1, x_2 > 0, \quad \lambda, \mu > 0 \text{ constantes}$$

Sea la transformación

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 > x_2 \\ 1 & \text{si} \quad x_1 < x_2 \end{cases}$$

Calcula la función masa de probabilidad de Y.

Para ello tendremos que calcular la probabilidad de que Y sea igual a 1 y la probabilidad de que Y sea igual a 0, es decir:

$$
\begin{aligned}
P[Y = 0] = P[X_1 > X_2] &= \lambda\mu \int_0^\infty \int_{x_2}^\infty e^{-\lambda x_1} e^{-\mu x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \lambda\mu \int_0^\infty e^{-\mu x_2} \cdot \left[-\frac{e^{-\lambda x_1}}{\lambda} \right]_{x_2}^\infty dx_2 = \mu \int_0^\infty e^{-\mu x_2} \cdot (-0 + e^{-\lambda x_2}) dx_2 \\
&= \mu \int_0^\infty e^{(-\lambda-\mu) x_2} dx_2 = \mu \left[\frac{e^{(-\lambda-\mu)x_2}}{\lambda + \mu} \right]_0^\infty = \mu \left(-0 + \frac{1}{\lambda + \mu} \right) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}
\end{aligned}
$$

$$P[y = 1] = P[X_1 < X_2] = 1 - P[X_1 > X_2] = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Ejercicio 1.6.3. (Ejercicio 3 de la relación 2 parte 2)
Tenemos que $f_X(x,y) = 1$ para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

$$(Z,T) = (X+Y, X-Y)$$

$$\begin{array}{r} Z = X+Y \\ \underline{T = X-Y} \\ Z-T = 2Y \end{array}$$

$$X = Z - Y = Z - \frac{Z-T}{2} = \frac{Z+T}{2}$$
$$Y = \frac{Z-T}{2}$$

$$J_{g^{-1}} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -1/2 \neq 0$$

Por lo que $g^{-1}(z,t) = \left(\frac{Z+T}{2}, \frac{Z-T}{2}\right) \Rightarrow f_{Z,T}(z,t) = f_{X,Y}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \cdot |J| = 1 \cdot |-1/2| = 1/2$.
Por tanto llegamos a

$$f_{Z,T}(z,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 < z+t < 2 \ \vee \ 0 < z-t < 2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Pasamos a calcular las marginales:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-z}^{+z} 1/2 dt = z & \text{si} \quad 0 < z < 1 \\ \int_{z-2}^{2-z} 1/2 dt = 2-z & \text{si} \quad 1 < z < 2 \end{cases}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si} \quad -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \end{cases}$$

Veamos ahora lo que sucede con la siguiente transformación:

$$(Z,T) = \left(\frac{X}{Y}, XY\right)$$

1.7. Trabajo de clase del lunes 4 de Noviembre de 2024

Ejercicio 1.7.1. Si la función de densidad del vector $X = (X_1, X_2)$ está dada por cada una de las siguientes expresiones comprobar si las componentes son independientes:

1. $f_X(x_1, x_2) = 12 \cdot x_1^2 \cdot x_2^3 \qquad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$
   Si definimos
   $$h_1(x_1) = \begin{cases} 12x_1^2 & \text{si} \quad x_1 \in]0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x_1 \notin]0,1[\end{cases}$$
   $$h_2(x_2) = \begin{cases} x_2^3 & \text{si} \quad x_1 \in]0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x_1 \notin]0,1[\end{cases}$$
   Entonces tenemos que $f_X(x_1, x_2) = h_1(x_1) \cdot h_2(x_2)$ y por tanto son independientes.

2. $f_{X_1}(x_1, x_2) = 12 \cdot x_1^2 \cdot x_2^3 \qquad 0 < x_1 < x_2 < 1$
   Tenemos que
   $$f_{X_2}(x) = \int_{x_1}^{1} 12x_1^2 x_2^3 dx_2 = 12x_1^2 \left[\frac{x_2^4}{4}\right]_{x_1}^{1} = 3 \cdot x_1^2 \cdot (1 - x_1^4) = 3x_1^2 - 3x_1^6$$
   $$f_{X_2}(x) = \int_{0}^{x^2} 12x_1^2 x_2^3 dx_1 = 12x_2^3 \left[\frac{x_1^3}{3}\right]_{0}^{x_2} = 4 \cdot x_2^3 \cdot (x_2^3) = 4x_2^6$$
   Y tenemos entonces que $12 \cdot x_1^2 \cdot x_2^3 \neq (3x_1^2 - 3x_1^6) \cdot 4x_2^6$ por lo que X_1 y X_2 no son independientes.

1.8. Trabajo de clase del martes 5 de Noviembre de 2024

Ejercicio 1.8.1. Probar la propiedad reproductiva de una distribución normal:

$$M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Entonces

$$M_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} = e^{\sum\limits_{i=1}^{n} (\mu_i) t + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(\sigma_i^2) t^2}{2}}$$

Y llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

1.9. Trabajo de clase del lunes 11 de Noviembre de 2024

Ejercicio 1.9.1. Se extraen sucesivamente sin reemplazamiento dos bolas de una urna que contiene tres bolas blancas y dos negras En relación a este experimento se definen las siguientes variables:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si la primera bola es blanca} \\ 1 & \text{si la primera bola es negra} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si la segunda bola es blanca} \\ 1 & \text{si la segunda bola es negra} \end{cases}$$

Calcular $E[X/Y]$ y $E[Y/X]$

□

Rellenamos la siguiente tabla de probabilidad condicionada:

$X\backslash Y$	0	1	$P[X = x_i]$
0	$3/5 \cdot 1/2 = 3/10$	$3/5 \cdot 1/2 = 3/10$	$3/5$
1	$2/5 \cdot 3/4 = 3/10$	$2/5 \cdot 1/4 = 1/10$	$2/5$
$P[Y = y_i]$	$3/5$	$2/5$	

$$E[X/Y=0] = 0 \cdot p[X=0/Y=0] + 1 \cdot P[X=1|Y=0] = \frac{P[X=1,Y=0]}{P[Y=0]} = \frac{3/10}{3/5} = 1/2$$

$$E[X/Y=1] = 0 \cdot p[X=0/Y=1] + 1 \cdot P[X=1|Y=1] = \frac{P[X=1,Y=1]}{P[Y=1]} = \frac{1/10}{2/5} = 1/4$$

Podemos ya escribir

$$E[X/Y] = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad Y = 0 \\ 1/4 & \text{si} \quad Y = 1 \end{cases}$$

$$E[Y/X] = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad X = 0 \\ 1/4 & \text{si} \quad X = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 1.9.2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f_X(x, y) = 2$ para $0 < x < y < 1$. Calcular $E[X/Y]$ y $E[Y/X]$.

□

Comencemos calculando $E[X/Y]$.

$$f_Y(y) = \int_0^y f_X(x,y)dx = \int_0^y 2dx = 2y \quad 0 < y < 1$$

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} \quad 0 < x < y < 1$$

Tenemos entonces

$$E[X/Y] = \int_0^y x \cdot f(x/y)dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y}dx = \frac{y}{2} \Rightarrow E[X/Y] = \frac{Y}{2} \quad 0 < Y < 1$$

Repitamos el mismo proceso para calcular $E[Y/X]$:

$$f_X(x) = \int_x^1 f_X(x,y)dy = \int_x^1 2dy = 2(x-1) \quad 0 < x < 1$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(x-1)} = \frac{1}{x-1} \quad 0 < x < 1$$

$$E[Y/X] = \int_x^1 y \cdot f(y/x)dy = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{x-1}dy = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-x^2}{2} = \frac{1+x}{2} \Rightarrow \frac{1+X}{2} \quad 0 < X < 1$$

Ejercicio 1.9.3. Del lanzamiento de 3 monedas se consideran las variables:

$X \equiv$ nº de caras

$Y \equiv$ diferencia en valor absoluto entre el nº de caras y de cruces

Calcular $E[X^2/Y]$

□

$X\backslash Y$	1	3	$P[X = x_i]$
0	0	$1/8$	$1/8$
1	$3/8$	0	$3/8$
2	$3/8$	0	$3/8$
3	0	$1/8$	$1/8$
$P[Y = y_i]$	$6/8$	$2/8$	

$$\begin{aligned} E[X^2/Y=1] &= 1^2 \cdot P[X=1/Y=1] + 2^2 \cdot P[X=2/Y=1] \\ &= \frac{P[X=1,Y=1]}{P[Y=1]} + 4 \cdot \frac{P[X=2,Y=1]}{P[Y=1]} = \frac{3/8}{6/8} + 4 \cdot \frac{3/8}{6/8} = \frac{5}{2} \\ E[X^2/Y=3] &= 3^2 \cdot P[X=3/Y=3] = 3^2 \cdot \frac{P[X=3,Y=3]}{P[Y=3]} = 9 \cdot \frac{1/8}{2/8} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.9.4. Sea (X,Y) el vector aleatorio con función de densidad $f_{X,Y}(x,y) = 2 \ \ 0 < x < y < 1$. Obtener la esperanza de $E[X^3/Y]$.

□

Tenemos que $f_Y(y) = 2y$ y $f(x/y) = \frac{1}{y}$.
Por tanto

$$E[X^3/Y] = \int_0^3 x^3 \cdot \frac{1}{y}dx = \frac{y^3}{4}, \quad y \in (0,1)$$

Ejercicio 1.9.5. Demostrar la propiedad 7 de las propiedades de la esperanza condicionada.

□

Veamos en primer lugar el caso discreto

$$
\begin{aligned}
E[g(x)/y] &= \sum_{x\in E_x} g(x)P[X=x\ Y=y_0] \\
E[E[g(x)/y]] &= \sum_{y\in E_y} E[g(x)/Y=y]\cdot P[Y=y] = \sum_{y\in E_y}\sum_{x\in E_x} g(x)P[X=x/Y=y]P[Y=y] \\
&= \sum_{y\in E_y}\sum_{x\in E_x} g(x)P[X=x,Y=y] = \sum_{x\in E_x} g(x)P[X=x] = E[g(x)]
\end{aligned}
$$

Estudiemos ahora el caso continuo

$$
\begin{aligned}
E[E[g(x)/Y]] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[g(X)/Y]f(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x/y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x,y)dxdy = E[g(X)]
\end{aligned}
$$

1.10. Trabajo de clase del martes 12 de Noviembre de 2024

Ejercicio 1.10.1. (Continuación Ejercicio 1.9.1)

$$Var[X] = Var[E[X/Y]] + E[Var[X/Y]]$$

Del ejercicio teníamos la siguiente tabla:

$X \backslash Y$	0	1	$P[X = x_i]$
0	$^3/_{10}$	$^3/_{10}$	$^3/_5$
1	$^3/_{10}$	$^1/_{10}$	$^2/_5$
$P[Y = y_i]$	$^3/_5$	$^2/_5$	

Veamos en primer lugar cuál es la varianza de X:

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \cdot {}^3/_5 + 1 \cdot {}^2/_5 = {}^2/_5 \\ E[X^2] &= 0^2 \cdot {}^3/_5 + 1^2 \cdot {}^2/_5 = {}^2/_5 \\ Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = {}^2/_5 - ({}^2/_5) = {}^6/_{25} \end{aligned}$$

Calculemos lo que nos queda:

$$\begin{aligned} Var(E[X/Y]) &= E[E[X/Y]^2] - (E[E[X/Y]])^2 = \\ &= E[E[X/Y]^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Del ejercicio nos quedaba lo siguiente:

$$E[X/Y] = \begin{cases} {}^1/_2 & \text{si} \quad Y = 0 \\ {}^1/_4 & \text{si} \quad Y = 1 \end{cases}$$

Tenemos entonces lo siguiente:

$$E[E[X/Y]^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot P[Y = 0] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot P[Y = 1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{40}$$

$$E[Var[X/Y]] = E[E[X^2/Y] - E[X/Y]^2] = E[E[X^2/Y]] - E[E[X/Y]^2] = \frac{2}{5} - \frac{7}{40} = \frac{9}{40}$$

Ejercicio 1.10.2. Se lanzan 2 monedas numeradas con las caras 1 y 2. Notemos X a la suma e Y al máximo de las caras obtenidas. Obtener las funciones de regresión mínimo-cuadráticas de Y dado X y de X dado Y así como los errores cuadráticos medios asociados.

Tenemos la siguiente tabla:

$X \backslash Y$	1	2	$P[X = x_i]$
2	$^1/_4$	0	$^1/_4$
3	0	$^1/_2$	$^1/_2$
4	0	$^1/_4$	$^1/_4$
$P[Y = y_i]$	$^1/_4$	$^3/_4$	

1.11. Trabajo de clase del martes 19 de Noviembre de 2024

Ejercicio 1.11.1. Al finalizar un ejercicio obtenemos el siguiente resultado: $\eta^2_{X/Y} = {}^2/_3$. La conclusión que podríamos extraer de esto sería la siguiente:
La función ajustada explica el 66,66 % de la variabilidad de X a partir de Y

Ejercicio 1.11.2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x, y) = 1$ con $(x, y) \in T$, siendo T el triángulo con vértices $(0, 0), (2, 0)$ y $(1, 1)$. Obtener la función de regresión óptima de la variable Y a partir de X, su error cuadrático medio y decir si el ajuste es fiable.

□

Nos están pidiendo calcular $E[Y/X]$. Para ello necesito $f(y/x)$ y sabemos que $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 1dy = x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \\ \int_0^{2-x} 1dy = 2 - x & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Con esto tengo que

$$f(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < y < x \qquad (0 < x < 1) \\ \\ \frac{1}{2-x} & \text{si} \quad 0 < y < 2 - x \quad (1 < x < 2) \end{cases}$$

Y puedo escribir

$$E[Y/X] = \int_R Y f(y/x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{y}{x} dy = \frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \\ \int_0^{2-x} \frac{y}{2-x} dy = \frac{2-x}{2} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Y ya tenemos la función de regresión óptima de la variable Y a partir de X:

$$E[Y/X] = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si} \quad 0 < X < 1 \\ \\ \frac{2-X}{2} & \text{si} \quad 1 < X < 2 \end{cases}$$

Calculemos el error cuadrático medio, es decir, $E[Var(Y/X)]$. Comencemos por calcular $Var(Y/X)$.

$$E[Y^2/X] = \begin{cases} \int_0^x y^2 \cdot \frac{1}{x} dy = \frac{x^2}{3} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \\ \int_0^{2-x} y^2 \cdot \frac{1}{2-x} dy = \frac{(2-x)^2}{3} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$Var(Y/X) = E[Y^2/X] - E[Y/X]^2 = \begin{cases} \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{12} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \\ \frac{(2-x)^2}{3} - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \frac{(2-x)^2}{12} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Finalmente calculamos el E.C.M calculando la esperanza del resultado recién obtenido:

$$E[Var(Y/X)] = \int_R Var(y/x) f_X(x)dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{x^2}{12} \cdot xdx + \int_1^2 \frac{(2-x)^2}{12} \cdot (2-x)dx = \frac{1}{24}$$

Para interpretar la fiabilidad del ajuste calcularemos la razón de correlación de Y sobre X.

$$\eta^2_{Y/X} = 1 - \frac{E.C.M}{Var(Y)} = 1 - \frac{1/24}{1/18} = \frac{1}{4}$$

Donde nos han dado ya calculada la varianza de Y (aunque en un ejercicio deberíamos de calcularla nosotros).