



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

| | |
|--|----------|
| 1. Espacios Topológicos | 5 |
| 1.1. Topología métrica. La topología usual de \mathbb{R}^n | 7 |
| 1.2. Comparación de Topologías | 12 |
| 1.3. Cerrados | 13 |
| 1.4. Bases de topología | 15 |

1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es una par (X, \mathcal{T}) , donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X . Esta familia \mathcal{T} tiene las siguientes propiedades:

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ (unión arbitraria¹).

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia \mathcal{T} se le llama **topología** en el conjunto X . A los elementos de \mathcal{T} se les llama **abiertos** en el espacio topológico (X, \mathcal{T}) . □

Observación. De (A3) podemos concretar que si $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{T}$, es decir, que la intersección finita de abiertos es abierto (se prueba con una inducción trivial).

En general, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ no tiene por qué ser abierto. □

Ejemplo.

-) **Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t.²
-) **Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.
-) **Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$,
 $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.
-) **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$,
 $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t. (por las leyes de Morgan)

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \text{ (intersección de finitos es finito)}$$

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) \text{ (unión de finitos es finito)}$$

¹Puede ser finita o infinita, numerable o no numerable

²A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

-) **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.
-) \mathbb{R} , $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, $\Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.
-) **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t.
-) **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, \mathcal{T}_S , $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$. (es un caso particular del punto incluido, \mathcal{T}_a).

□

Observación. En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

□

Ejercicio 1. Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos $X = \{a, b\}$. Las topologías posibles son:

-) Trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$
-) Discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$
-) Punto incluido (a): $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$
-) Punto incluido (b): $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

Cualquier otra topología que se pueda construir sobre este conjunto coicidirá con alguna de las anteriores.

□

Ejercicio 2. Sea (X, \mathcal{T}) e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \ \forall x \in X$.

\Rightarrow) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$, como $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \ \forall x \in X$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$.

\Leftarrow) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{T} \ \forall x \in X$. Consideramos $U \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunto cualquiera de X . Podemos expresar $U = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, donde $\{x_i\} \in X \ \forall i \in I$. Por la propiedad **(A2)** tenemos $U \in \mathcal{T}$. Como U era un subconjunto arbitrario de X , tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

□

1.1. Topología métrica. La topología usual de \mathbb{R}^n

Definición 1.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- (D1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
 (D2) (simetría) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$.
 (D3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

A la aplicación d la llamaremos **distancia**.

□

Ejercicio 1.1.1. Demostrar que a partir de las propiedades (D2), (D3) y la segunda parte de (D1) se puede deducir la primera parte de (D1), y como consecuencia se tiene $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$, tenemos:

$$0 \stackrel{(D1)(2)}{=} d(x, x) \stackrel{(D3)}{\leq} d(x, y) + d(y, x) \stackrel{(D2)}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geq 0 \Rightarrow d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

□

Definición 1.3. (X, d) e.m.³ $x \in X$, $r > 0$, se definen:

- La **bola (abierto)** de centro x y radio r como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- La **bola cerrada** de centro x y radio r como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \subset X$$

- La **esfera** de centro x y radio r como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

□

Propiedades. De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

- $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$

³A partir de ahora notaremos así a un espacio métrico

-) Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x, s) \subset B(x, r)$

□

Ejemplo. (Espacio euclídeo \mathbb{R}^n) En \mathbb{R}^n consideramos la **distancia usual**,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico (\mathbb{R}^n, d) lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

-) Si $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$,

$$B(x, r) = (x - r, x + r)$$

$$\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$$

$$S(x, r) = \{x - r, x + r\}$$

-) En $n = 2$ tenemos



$B(x, r) \equiv \text{disco}$



$\overline{B}(x, r) \equiv \text{disco cerrado}$



$S(x, r) \equiv \text{circunferencia}$

-) En $n = 3$ tenemos:



$B(x, r) \equiv \text{bola}$



$\overline{B}(x, r) \equiv \text{bola cerrada}$



$S(x, r) \equiv \text{esfera}$

□

Ejemplo. En un conjunto $X \neq \emptyset$, se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x, y) = \begin{cases} X & \text{si } r > 1 \\ \{x\} & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x, y) = \begin{cases} X & \text{si } r \geq 1 \\ \{x\} & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

$$S(x, y) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si } r = 1 \\ \emptyset & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

□

Ejemplo.

-) Si d es una distancia en X y $\lambda > 0$, entonces $\lambda \cdot d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ también es una distancia y $B_{\lambda d}(x, r) = B_d\left(x, \frac{r}{\lambda}\right)$.
-) Sean d y \tilde{d} distancias en X y $d \leq \tilde{d}$, entonces $B_d(x, r) \supseteq B_{\tilde{d}}(x, r)$.

□

Definición 1.4. (X, d) e.m. Un subconjunto $U \subset X$ se dice **abierto métrico** si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U, \exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

□

Proposición 1.1. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ es un abierto métrico en } (X, d)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

es una topología en X que llamamos la **topología métrica** en (X, d) .

Demostración. Veamos que \mathcal{T}_d así definida verifica las propiedades de una topología:

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$ trivialmente (ya que $X \subset X$).

(A2) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$. Tendremos que ver si se verifica que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$. Para ello estudiemos los dos casos posibles:

Si $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Si $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$, entonces podemos considerar $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$. ¿Se verifica que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$? De nuevo veamos los casos posibles:

Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces se verifica trivialmente.

Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces podemos considerar $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : B(x, r_1) \subset U_1$ y $B(x, r_2) \subset U_2 \Rightarrow B(x, \min\{r_1, r_2\}) \subset U_1 \cap U_2$, es decir existe una bola abierta en la intersección que contiene al punto luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

□

Definición 1.5. Se llama **topología usual de \mathbb{R}^n** , \mathcal{T}_u , a la topología métrica en \mathbb{R}^n con la distancia usual, es decir, $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$.

□

Proposición 1.2. (X, d) e.m. Se cumplen:

- (i) Las bolas abiertas en (X, d) son abiertos.
- (ii) Todo abierto no vacío en (X, d) se puede escribir como unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.

Demostración.

- (i) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿ $B(x, r) \in \mathcal{T}_d$?

Sea $y \in B(x, r) \Rightarrow d(x, y) < r \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$.
Para ver esta última implicación tenemos que si tomamos un $z \in B(y, \varepsilon) \Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B(x, r)$.



- (ii) Sea $U \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x) = \bigcup_{x \in U} \overline{B}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$.

□

Corolario 1.2.1. En (X, d) tenemos

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

□

Ejemplo.

- (X, d) e.m. En general, no todo abierto es una bola. Por ejemplo la unión de bolas no concéntricas.
- No todo conjunto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es abierto. Por ejemplo $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto.
- En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos abiertos (topológicamente) son los intervalos abiertos, es decir, los del tipo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a, b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.

-) En (X, d) , en general la intersección infinita de abiertos no es abierto. Por ejemplo, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ que no es abierto.
-) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$ (la topología asociada a la distancia discreta es la distancia discreta).

□

Definición 1.6. Sean $X \neq \emptyset$ y d_1, d_2 distancias en X . Decimos que d_1 y d_2 son **equivalentes** si existen $a, b > 0$ tal que

$$a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

□

Proposición 1.3. Si d_1, d_2 son distancias en $X \neq \emptyset$ y existe $a > 0$ tal que $a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \quad \forall x, y \in X$, entonces $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. En particular, si d_1 y d_2 son equivalentes, entonces $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, $U \neq \emptyset$, ¿ $U \in \mathcal{T}_{d_2}$?

Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1} \Rightarrow \exists r > 0 : B_{d_1}(x, r) \subset U$. Como $a \cdot d_1 \leq d_2 \Rightarrow B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset B_{d_1}(x, r)$. Para verlo, tomamos $y \in B_{d_2}(x, a \cdot r) \Rightarrow d_2(x, y) < a \cdot r \Rightarrow a \cdot d_1(x, y) < r \Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r)$. Por tanto, $B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2} \Rightarrow \mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

□

Definición 1.7. Un e.t. (X, \mathcal{T}) se dice **metrizable** si existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

□

Ejemplo.

-) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es metrizable.
-) (X, \mathcal{T}_{disc}) es metrizable.

□

Ejercicio 1.1.2. Si (X, \mathcal{T}) es un e.t. metrizable, entonces cumple la condición de Hausdorff:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U, y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

Por ser metrizable, sabemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ donde $d : X \rightarrow [0, \infty)$ es una distancia. Por tanto, para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ tengo $d(x, y) > 0$. Puedo considerar entonces $r = \frac{d(x, y)}{2}$. Tengo entonces $U = B(x, r)$ y $V = B(y, r)$. Es claro que $x \in U$ y $y \in V$. Veamos que U y V son disjuntos. Tengo $U \cap V = \{z \in X : d(z, x) < r, d(z, y) < r\}$. Supongamos que este conjunto no es vacío, en cuyo caso tendría que $\exists z \in X$ tal que $d(z, x) < r$ y $d(z, y) < r$. Por tanto, $d(z, x) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$ lo cual incumple la desigualdad triangular. Llegamos a contradicción y por tanto $U \cap V = \emptyset$.

□

Ejemplo.

- (X, \mathcal{T}_t) no es metrizable si $\#X > 2$ (cardinal del conjunto) ya que no verifica la condición de Hausdorff.
- (X, \mathcal{T}_{x_0}) no es metrizable por la misma razón (ya que la intersección de cualesquiera dos abiertos va a contener a x_0).
- (X, \mathcal{T}_{CF}) no es metrizable si X es infinito (aplicar las leyes de Morgan para la intersección).
- (X, \mathcal{T}_{CN}) no es metrizable si X no es numerable.
- $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$.
- La topología de Sierpinski tampoco es metrizable (ya que el único abierto que contiene a b es el total).
- La topología de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ cumple la propiedad de Hausdorff.

□

1.2. Comparación de Topologías

Definición 1.8. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dos topologías en X . Diremos que \mathcal{T}_2 es **más fina** que \mathcal{T}_1 o que \mathcal{T}_1 es **menos fina** que \mathcal{T}_2 si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y lo notamos como $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.

□

Ejemplo.

- $X \neq \emptyset, \mathcal{T}_{CF} \leq \mathcal{T}_{CN}$.
- (X, \mathcal{T}) e.t., entonces $\mathcal{T}_t \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_{disc}$
- Si $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}_1$, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (por doble inclusión).
- En general si tenemos dos topologías en X , no siempre son comparables. Por ejemplo la topología del punto incluida en dos puntos distintos:

$$0, 1 \in \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$$

Veamos que $\mathcal{T}_0 \not\leq \mathcal{T}_1$, ya que $\{0\} \notin \mathcal{T}_1$, y por el mismo motivo (pero con el 1) tenemos $\mathcal{T}_1 \not\leq \mathcal{T}_0$.

Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{x_0})$ ya que $\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}, \{x_0\} \notin \mathcal{T}_u \Rightarrow \mathcal{T}_{x_0} \not\leq \mathcal{T}_u$. Igualmente $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_u$ y $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_{x_0} \Rightarrow \mathcal{T}_u \not\leq \mathcal{T}_{x_0}$.

- En $\mathbb{R}, \mathcal{T}_u \leq \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- $(X, d), (X, d'), d \leq d' \Rightarrow \mathcal{T}_d \leq \mathcal{T}_{d'}$.

□

1.3. Cerrados

Definición 1.9. Sea (X, \mathcal{T}) un e.t. Diremos que un conjunto $F \subset X$ es **cerrado** en (X, \mathcal{T}) si $X \setminus F \in \mathcal{T}$. Denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ a la familia de todos los cerrados en (X, \mathcal{T}) . □

Propiedades.

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(C2) Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(C3) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Por inducción, de (C3) tenemos que la unión finita de cerrados es cerrada.

Observación.

-) $U \in \mathcal{T} \iff X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}, F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \iff X \setminus F \in \mathcal{T}$.
-) $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} \supseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto además implica que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} = \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto nos dice que para conocer una topología basta con conocer la familia de sus cerrados.
-) En general, puede haber conjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tenemos que $[0, 1) \notin \mathcal{T}_u \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
-) En (X, \mathcal{T}_{x_0}) tenemos que $\mathcal{T}_{x_0} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{P}(X)$ y además $\mathcal{T}_{x_0} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \{\emptyset, X\}$.
-) En general, la unión arbitraria de cerrados no es cerrado. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tomamos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}] = (0, 3)$. Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ considerando $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ que no es cerrado. □

Ejemplo.

-) Topología trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_t} = \mathcal{C}_t = \{\emptyset, X\}$.
-) Topología discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{disc}} = \mathcal{C}_{disc} = \mathcal{P}(X)$.
-) Topología del punto incluido: $x_0 \in X, \mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{C}_{x_0} = \{X\} \cup \{F \subset X : x_0 \notin F\}$.
-) Topología cofinita: $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ finito}\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{CF}} = \mathcal{C}_{CF} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ finito}\}$.
-) En ocasiones no es fácil describir $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Por ejemplo en \mathcal{T}_u o $\mathcal{T}_{Sorgenfrey}$. □

Ejemplo. En un espacio métrico (X, \mathcal{T}_d) , las bolas cerradas y las esferas son cerrados.

Demostración.

-) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿ $\overline{B}(x, r) \in \mathcal{C}_d$? Esto es equivalente a preguntarse ¿ $X \setminus \overline{B}(x, r) \in \mathcal{T}_d$?

Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x, r) \Rightarrow d(x, y) > r$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : r + \varepsilon < d(x, y) \Rightarrow B(y, \varepsilon) \cap \overline{B}(x, r) = \emptyset \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}(x, r) \in \mathcal{T}_d \Rightarrow X \setminus \overline{B}(x, r) \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$

-) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿ $S(x, r) \in \mathcal{C}_d$? Dado que $X \setminus S(x, r) = B(x, r) \cup (X \setminus \overline{B}(x, r)) \in \mathcal{T}_d$ (por ser unión de abiertos).

□

Ejercicio 1.3.1. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos cerrados son los de la forma $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y $[a, b]$ con $a < b$.

Sabemos que los únicos abiertos en \mathcal{T}_u son los intervalos de la forma $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a, b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.

Es claro que $\mathbb{R} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.

Tenemos que $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty) \in \mathcal{T}_u$, luego $(-\infty, a] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.

De la misma forma, $\mathbb{R} \setminus [b, +\infty) = (-\infty, b) \in \mathcal{T}_u$, luego $[b, +\infty) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.

Finalmente $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \in \mathcal{T}_u$ por ser unión de abiertos luego $[a, b] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.

Dado que ya han aparecido todos los tipos posibles de intervalos en \mathbb{R} , no habrá más intervalos cerrados que los ya mencionados (ya que cualquier otro tipo de intervalo es abierto).

□

Teorema 1.4. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

(C2) Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

(C3) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$.

Entonces existe una única topología \mathcal{T} en X tal que $\mathcal{C}_\mathcal{T} = \mathcal{C}$.

Demostración. La existencia queda probada definiendo $\mathcal{T} = \{U \subset X : X \setminus U \in \mathcal{C}\}$. La unicidad es inmediata ya que si $\mathcal{C}_{\mathcal{T}'} = \mathcal{C}_\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

□

1.4. Bases de topología

Definición 1.10. Sea (X, \mathcal{T}) un e.t. Una familia de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una **base** de la topología \mathcal{T} si $\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists \{B_i\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.

A los elementos de \mathcal{B} se les llama **abiertos básicos**.

□

Observación.

-) Ni \mathcal{B} ni la familia $\{B_i\}_{i \in I}$ tienen que ser finitas o numerables
-) La forma de escribir $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ puede no ser única.
-) \mathcal{T} es base de \mathcal{T} (trivialmente).
-) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$ con \mathcal{B} , entonces \mathcal{B}' es base de \mathcal{T} .

□

Proposición 1.5. Sea (X, \mathcal{T}) un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ una familia de abiertos. Son equivalentes:

- (i) \mathcal{B} es base de \mathcal{T} .
- (ii) $\forall U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset \quad \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$ (si tenemos un abierto de la topología podemos encontrar para cada punto suyo un abierto básico contenido en el abierto y que contiene al punto).

Demostración.

(i) \Rightarrow (ii) Sea $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists i \in I$ tal que $x \in B_i = B_x \subset U$

(ii) \Rightarrow (i) Sea $U \in \mathcal{T}$.

- Si $U = \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$

- Si $U \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in U \quad \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_x$

□

Ejemplo.

-) Sea (X, \mathcal{T}_d) un e.m. La familia $base = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ de todas las bolas abiertas es una base de \mathcal{T}_d .
-) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a < b\}$ es base de \mathcal{T}_u y se le llama **base usual**.
-) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es base de \mathcal{T}_u (por la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R}).

- En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ es la base usual. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ también es base de \mathcal{T}_u (numerable).
- En (X, \mathcal{T}_t) , $\mathcal{B} = \{X\}$ es base (la única que no contiene al vacío).
- (X, \mathcal{T}_d) , $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{T}$ es base de \mathcal{T}_{disc} . Es la más económica ya que si \mathcal{B}' es base, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

Demostración. Sea $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$, como \mathcal{B}' es base podemos considerar $x \in \{x\}$ y entonces $\exists B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B \subset \{x\}$ y entonces $B = \{x\} \subset \mathcal{B}' \forall x \in X \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ \square

- (X, \mathcal{T}_{x_0}) , $x_0 \in X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \{\{x, x_0\} : x \in X\}$ es una base. Esta es la base más económica.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Sorgenfrey})$ (recordemos que $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U, \exists \varepsilon : [x, x + \varepsilon) \subset U$). $\mathcal{B} = \{[x, x + \varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ es base. $\mathcal{B}' = \{[x, x + \varepsilon) : x \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ no lo es (ya que tomando un intervalo de la forma $[x, x + \varepsilon)$ con $x \in \mathbb{Q}$ entonces no existe ningún elemento de \mathcal{B}' que contenga a x y quede enmedio).

\square

Teorema 1.6. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y \mathcal{B} una base suya. Entonces:

(B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Demostración.

(B1) Trivial

(B2) Tenemos $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ entonces, como \mathcal{B} es base $\exists B_3 = B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

\square