



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

INFERENCIA ESTADÍSTICA

Resolución de ejercicios de clase

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice

1. Tarea del 17 de septiembre de 2025

Ejercicio 1.1. Obtener la función masa de probabilidad conjunta de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$ y la función de densidad conjunta de una m.a.s. de $X \rightsquigarrow U(a, b)$.

-) Consideramos $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$

Por definición tenemos que

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \prod_{i=1}^n P[X = x_i] \quad , (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$$

Aplicándolo al caso particular de una distribución binomial tenemos que para $x_i \in \{0, \dots, k_0\}$, $i = 1, \dots, n$

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{(k_0-x_i)} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^n k_0 - x_i} \cdot \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i}$$

-) Consideramos $X \rightsquigarrow U(a, b)$

Por definición tenemos ahora que

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \quad , (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$$

Conociendo la función de densidad de una distribución uniforme tenemos, para todo $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} = \frac{1}{(b-a)^n}$$

En otro caso tendremos $f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = 0$

Ejercicio 1.2. Dada una muestra aleatoria formada por las observaciones (3, 8, 5, 4, 5), obtener su función de distribución muestral y realizar la representación gráfica.

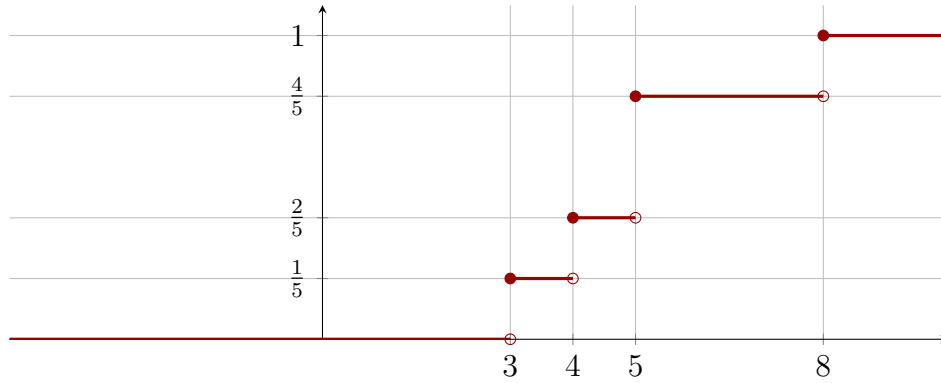
Por la definición de función de distribución muestral tenemos que

$$\begin{aligned} F_{(3,8,5,4,5)}^*(x) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 I(-\infty, x](X_i) = \\ &= \frac{1}{5} (I(-\infty, x](3) + I(-\infty, x](4) + 2I(-\infty, x](5) + I(-\infty, x](8)) \end{aligned}$$

Lo que resulta

$$F_{(3,8,5,4,5)}^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot 0 = 0 & \forall x \in (-\infty, 3) \\ \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} & \forall x \in [3, 4) \\ \frac{1}{5} \cdot (1 + 1) = \frac{2}{5} & \forall x \in [4, 5) \\ \frac{1}{5} \cdot (1 + 1 + 2) = \frac{4}{5} & \forall x \in [5, 8) \\ \frac{1}{5} \cdot (1 + 1 + 2 + 1) = \frac{5}{5} = 1 & \forall x \in [8, \infty) \end{cases}$$

Gráficamente resulta en:



2. Tarea del 19 de septiembre de 2025

Ejercicio 2.1. Obtener las distribuciones muestrales de $X(1)$ y $X(n)$ para $X \rightsquigarrow U(a, b)$

Podemos escribir $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P[X(n) \leq x] = P[X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x] = \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x] = \\ &= \prod_{i=1}^n P[X \leq x] = (P[X \leq x])^n = (F_X(x))^n \end{aligned}$$

Derivando este término tenemos

$$f_{X_{(n)}}(x) = n(F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$

Pasamos ahora a la del mínimo:

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P[X(1) \leq x] = 1 - P[X(1) > x] = 1 - P[X_1 > x, \dots, X_n > x] = 1 - \prod_{i=1}^n P[X_i > x] = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P[X > x] = 1 - (P[X > x])^n = 1 - (1 - P[X \leq x])^n = 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

Donde hemos aplicado la independencia y el hecho de que estén idénticamente distribuidas.

Derivando esto tenemos

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x)$$