



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

VARIABLE COMPLEJA I

Resumen

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

1. Tema 3

Teorema 1.1. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{F}(A)$. Como $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos considerar las funciones $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$ definidas, para todo $(x, y) \in A$ por

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad y \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La función f es derivable en el punto z_0 .
2. Las funciones u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0) verificando que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones de Cauchy-Riemann**.

Caso de que se cumplan 1. y 2., se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2. Tema 4

Teorema 2.1 (Test de Weierstrass). Sea $\sum_{n \geq 0} f_n$ una serie de funciones complejas definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, y sea $B \subset A$. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe una constante $M_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall z \in B$$

Si la serie de números reales $\sum_{n \geq 0} M_n$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en B .

Lema 2.2 (Lema de Abel). Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, supongamos que la sucesión $\{|\alpha_n| \rho^n\}$ está mayorada. Entonces la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} \alpha_n (z-a)^n$ converge absolutamente en el disco abierto $D(a, \rho)$ y uniformemente en cada compacto K que esté contenido en dicho disco.

Proposición 2.3 (Fórmula de Cauchy-Hadamard). Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$

1. Si la sucesión $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\}$ no está mayorada, entonces $R = 0$.
2. Si $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \rightarrow 0$, entonces $R = \infty$.
3. En otro caso se tiene: $R = \frac{1}{\limsup \{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\}}$

Corolario 2.3.1. Supongamos que $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$.

1. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \rightarrow \infty$, entonces $R = 0$.
2. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \rightarrow 0$, entonces $R = \infty$.
3. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^+$, entonces $R = 1/\lambda$.

3. Tema 6

Teorema 3.1 (Caracterización de la existencia de primitiva). *Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*
2. *Para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.*

4. Tema 7

Teorema 4.1 (Teorema local de Cauchy). *Si Ω es un dominio estrellado, entonces toda función admite una primitiva en Ω , es decir, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Equivalentemente se tiene*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado γ en Ω .

Proposición 4.2 (Fórmula de Cauchy). Sean Ω un abierto de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \forall z \in D(a, r)$$

5. Tema 8

Teorema 5.1 (Desarrollo en serie de Taylor). Si Ω es un abierto no vacío de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω y, en particular, f es indefinidamente derivable en Ω . Además:

1. Si $\Omega = \mathbb{C}$, para todo $a \in \mathbb{C}$, la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$ tiene radio de convergencia infinito y se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ y para cada $a \in \Omega$ tomamos $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad \forall z \in D(a, R_a)$$

Proposición 5.2 (Teorema de Cauchy para las derivadas). Sean Ω un abierto de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw \quad \forall z \in D(a, r), \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 5.3 (Teorema de extensión de Riemann). Sean Ω un abierto de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.
2. f tiene límite en el punto z_0 .
3. Existen $\delta, M > 0$ tales que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$ que verifique $0 < |z - z_0| < \delta$.
4. $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

6. Tema 9

Proposición 6.1 (Desigualdades de Cauchy). Sean Ω un abierto de \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, sea $M(f, a, r) = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(a, r)\}$. Se tiene entonces:

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{M(f, a, r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 6.2 (Teorema de Liouville). Toda función entera y acotada es constante. De hecho, la imagen de cualquier función entera no constante es un conjunto denso en \mathbb{C} , es decir, para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que $\overline{\text{Im}(f)} = \mathbb{C}$.

Teorema 6.3 (Teorema fundamental de Álgebra). El cuerpo \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, es decir, si P es un polinomio con coeficientes complejos, no constante, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.

Proposición 6.4 (Principio de identidad para funciones holomorfas). Sea Ω un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si A es un subconjunto de Ω tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, y $A' \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces f y g son idénticas: $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

7. Tema 10

Teorema 7.1 (Teorema de convergencia de Weierstrass). Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{C} y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, en particular:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ de las k -ésimas derivadas, converge a la derivada k -ésima $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω , en particular:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) \quad \forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$$

Este resultado también se puede usar para series

Teorema 7.2 (Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro). Sea γ un camino, Ω un abierto del plano y $\Phi : \gamma^* \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que, para cada $w \in \gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\Phi_w(z) = \Phi(w, z)$ para todo $z \in \Omega$, es holomorfa en Ω . Entonces, definiendo

$$f(z) = \int_{\gamma} \Phi(w, z) dw \quad \forall z \in \Omega$$

se obtiene una función holomorfa: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \Omega$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en \mathbb{C} , es continua y se verifica que

$$f^{(k)}(z) = \int_{\gamma} \Phi_w^{(k)}(z) dw = \int_{\gamma} \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(w, z) dw \quad \forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$$

8. Tema 11

Proposición 8.1 (Propiedad de la media). Sea Γ un abierto de \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Teorema 8.2 (Principio del módulo máximo). Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D(a, \delta)$. Entonces f es constante.

Teorema 8.3 (Principio del módulo mínimo). Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$ es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \geq |f(a)|$ para todo $z \in D(a, \delta)$. Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante.

Teorema 8.4 (Teorema de la función inversa global). Sea U un dominio y $f \in \mathcal{H}(U)$ una función inyectiva. Entonces $V = f(U)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in U$$

9. Tema 12

Teorema 9.1 (Forma general del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy). *Sea Ω un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω , nul-homólogo con respecto a Ω . Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene:*

$$1. \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

$$2. \int_{\Gamma} f(w)dw = 0$$

10. Tema 13

Teorema 10.1 (Desarrollo en serie de Laurent). Sea $\Gamma = A(a; r, R)$ un anillo abierto arbitrario y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces existe una única serie de Laurent no trivial $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - a)^n$, cuyo anillo de convergencia contiene a Ω , que verifica:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

De hecho, para cualquier $\rho \in \mathbb{R}^+$ que verifique $r < \rho < R$, se tiene;

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Proposición 10.2 (Caracterización de los puntos regulares). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. a es un punto regular de f .
2. $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$.
4. f tiene límite en a : $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w \in \mathbb{C}$.
5. Existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$.
6. $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$

Proposición 10.3 (Caracterización de los polos teniendo en cuenta su orden). Dado $k \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. a es un polo de orden k de f .
2. $c_{-k} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n > k$.
3. $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$.
4. Existe una función $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\psi(a) \neq 0$ tal que:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - a)^k} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

Proposición 10.4 (Caracterización de los polos). La función f tiene un polo en a si y solo si diverge en a .

Teorema 10.5 (Teorema de Casorati). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La función f tiene una singularidad esencial en el punto a

2. Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$ con $D(a, \delta) \subset \Omega$, el conjunto $f(D(a, \delta) \setminus \{a\})$ es denso en \mathbb{C} .
3. Para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{z_n\} \rightarrow a$ y $\{f(z_n)\} \rightarrow w$. También existe una sucesión $\{u_n\}$ de puntos de $\Omega \setminus \{a\}$ tal que $\{u_n\} \rightarrow a$ y $\{f(u_n)\} \rightarrow \infty$.

Corolario 10.5.1. Si g es una función entera no polinómica, entonces $\exists \{z_n\} \rightarrow \infty$ donde $z_n \in \mathbb{C} \setminus D(z, \delta)$, $\delta > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $g(z_n) \rightarrow z \in \mathbb{C}$ o $g(z_n) \rightarrow \infty$.

11. Tema 14

Teorema 11.1 (Teorema de los residuos). Sea Ω un abierto del plano, A un subconjunto de Ω tal que $A' \cap \Omega = \emptyset$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$. Sea Γ un ciclo en $\Gamma \setminus A$, nul-homólogo con respecto a Ω . Entonces, el conjunto $\{a \in A : \text{Ind}_{\Gamma}(a) \neq 0\}$ es finito y se verifica que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}_{\Gamma}(a) \text{Res}(f(z), a)$$

Teorema 11.2 (Teorema de l'Hôpital para funciones holomorfas). Sean $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f, g \in \mathcal{H}(D(a, R))$. Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$ y que g no es idénticamente nula. Entonces existe un $\delta \in]0, R[$, tal que $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$. Además, se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:

1. $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C}$.
2. $\frac{f(z)}{g(z)} \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow a$) y $\frac{f'(z)}{g'(z)} \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow a$).

12. Ejercicios tutoria

Ejercicio 12.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{x^2 - 5x + 6} dx \quad f(z) = \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 - 5z + 6} \quad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{2, 3\})$$

Fijamos $R > 3$ y $\varepsilon > 0$ tal que $2 + \varepsilon < 3 - \varepsilon$ y $3 + \varepsilon < R$.

Por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^{2-\varepsilon} f(x) dx + \int_{2+\varepsilon}^{3-\varepsilon} f(x) dx + \int_{3+\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{\sigma_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\xi_\varepsilon} f(z) dz$$

Tomando límite con $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_\varepsilon} f(z) dz - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\xi_\varepsilon} f(z) dz$$

Proposición 12.1. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ abierto, a un polo de orden 1 de f , $\gamma_\varepsilon : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $(\alpha < \beta)$. Tenemos que $\gamma_\varepsilon(t) = a + \varepsilon e^{it}$ es la circunferencia de centro a y radio ε . Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}(f(z), a)$$

Demostración. f tiene un polo en a . Entonces $\exists \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $\psi(a) \neq 0$ y $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)}$ $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$.

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\psi(z)}{(z-a)} dz = \int_\alpha^\beta \frac{\psi(a + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it} - \varepsilon} i \varepsilon e^{it} dt = \int_\alpha^\beta \frac{\psi(a + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_\alpha^\beta \psi(a + \varepsilon e^{it}) dt &= \lim_{z \rightarrow a} i(\beta - \alpha) \psi(z) = \lim_{z \rightarrow a} i(\beta - \alpha) f(z)(z - a) = \\ &= i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}(f(z), a) \end{aligned}$$

□

f no es entera pol. Entonces existe sucesión $\{w_n\}$ de $\mathbb{C} \setminus D(0, n)$ tal que $\{w_n\} \rightarrow \infty$ $\{f(w_n)\} \rightarrow 0$. Existe una sucesión $\{g(v_n)\}$ tal que $g(v_n) = w_n$. Entonces $\{f(g(v_n))\} \rightarrow 0$.

A es denso en $X \iff \overline{A} = X$