# Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

# Topología I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

# Índice general

# 1. Espacios Topológicos

**Definición 1.1.** Un **espacio topológico** es una par $(X, \mathcal{T})$, donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de $X$. Esta familia $\mathcal{T}$ tiene las siguientes propiedades:

**(A1)** $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

**(A2)** Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$ (unión arbitraria[1]).

**(A3)** Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia $\mathcal{T}$ se le llama **topología** en el conjunto $X$. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **abiertos** en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

□

*Observación.* De **(A3)** podemos concretar que si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}$, es decir, que la intersección finita de abiertos es abierto (se prueba con una inducción trivial).
En general, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ no tiene por qué ser abierto.

□

**Ejemplo.**

- **Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t[2].

- **Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.

- **Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$,
  $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.

- **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$,
  $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t. (por las leyes de Morgan)

$$X \setminus \left( \bigcup_{i\in I} U_i \right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) (\text{intersección de finitos es finito})$$
$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) (\text{unión de finitos es finito})$$

[1] Puede ser finita o infinita, numerable o no numerable

[2] A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

- •) **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.

- •) $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.

- •) **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t.

- •) **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S$, $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \;\; \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$. (es un caso particular del punto incluido, $\mathcal{T}_a$).

□

*Observación.* En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

□

**Ejercicio 1.** Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos $X = \{a, b\}$. Las topologías posibles son:

- •) Trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$

- •) Discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$

- •) Punto incluido (a): $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

- •) Punto incluido (b): $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

Cualquier otra topología que se pueda construir sobre este conjunto coicidirá con alguna de las anteriores.

□

**Ejercicio 2.** Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \;\; \forall x \in X$.

- ⇒) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$, como $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \;\; \forall x \in X$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$.

- ⇐) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{T} \;\; \forall x \in X$. Consideramos $U \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunto cualquiera de $X$. Podemos expresar $U = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, donde $\{x_i\} \in X \;\; \forall i \in I$. Por la propiedad **(A2)** tenemos $U \in \mathcal{T}$. Como $U$ era un subconjunto arbitrario de $X$, tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

□

## 1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.2.** Un **espacio métrico** es un par $(X, d)$ donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

**(D1)** $d(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

**(D2)** (simetría) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y, \in X$.

**(D3)** (desigualdad triangular) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$

A la aplicación $d$ la llamaremos **distancia**.

□

**Ejercicio 1.1.1.** Demostrar que a partir de las propiedades **(D2)**, **(D3)** y la segunda parte de **(D1)** se puede deducir la primera parte de **(D1)**, y como consecuencia se tiene $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$, tenemos:

$$0 \overset{\textbf{(D1)}(2)}{=} d(x, x) \overset{\textbf{(D3)}}{\leqslant} d(x, y) + d(y, x) \overset{\textbf{(D2)}}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow d : X \times X \to [0, \infty)$$

□

**Definición 1.3.** $(X, d)$ e.m.[3] $x \in X$, $r > 0$, se definen:

- **•)** La **bola (abierta)** de centro $x$ y radio $r$ como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- **•)** La **bola cerrada** de centro $x$ y radio $r$ como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

- **•)** La **esfera** de centro $x$ y radio $r$ como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

□

**Propiedades.** De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

- **•)** $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- **•)** $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$

[3] A partir de ahora notaremos así a un espacio métrico

•) Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x, x) \subset B(x, r)$

$\square$

**Ejemplo.** (Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ consideramos la **distancia usual**,

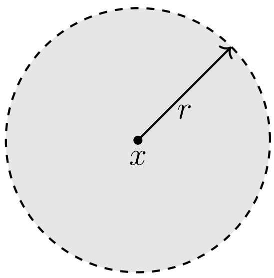
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

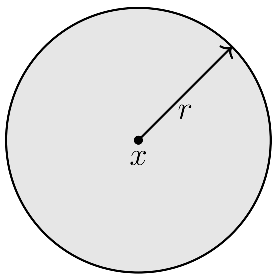
•) Si $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$,,

$$\begin{aligned} B(x, r) &= (x - r, x + r) \\ \overline{B}(x, r) &= [x - r, x + r] \\ S(x, r) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

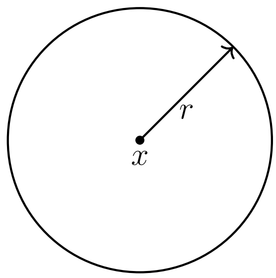
•) En $n = 2$ tenemos




$B(x, r) \equiv$ disco

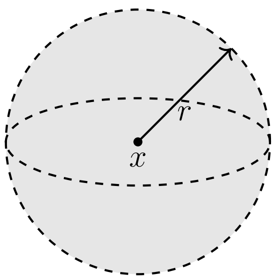



$\overline{B}(x, r) \equiv$ disco cerrado

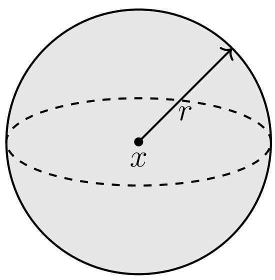



$S(x, r) \equiv$ circunferencia

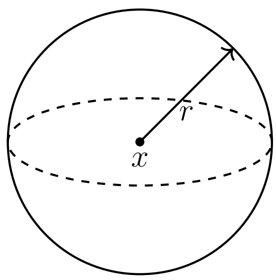
•) En $n = 3$ tenemos:




$B(x, r) \equiv$ bola




$\overline{B}(x, r) \equiv$ bola cerrada




$S(x, r) \equiv$ esfera

$\square$

**Ejemplo.** En un conjunto $X \neq \emptyset$, se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc} X & \text{si} & r>1 \\ \{x\} & \text{si} & r\leqslant 1 \end{array}\right.$$

$$\overline{B}(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc} X & \text{si} & r\geqslant 1 \\ \{x\} & \text{si} & r< 1 \end{array}\right.$$

$$S(x,y)=\left\{\begin{array}{ccc} X\setminus\{x\} & \text{si} & r=1 \\ \emptyset & \text{si} & r\neq 1 \end{array}\right.$$

$\square$

**Ejemplo.**

- •) Si $d$ es una distancia en $X$ y $\lambda>0$, entonces $\lambda\cdot d: X\times X\to[0,\infty)$ también es una distancia y $B_{\lambda d}(x,r)=B_d\left(x,\dfrac{r}{\lambda}\right)$.
- •) Sean $d$ y $\tilde{d}$ distancias en $X$ y $d\leqslant\tilde{d}$, entonces $B_d(x,r)\geqslant B_{\tilde{d}}(x,r)$.

$\square$

**Definición 1.4.** $(X,d)$ e.m. Un subconjunto $U\subset X$ se dice **abierto métrico** si $U=\emptyset$ o si $\forall x\in U,\ \ \exists r>0$ tal que $B(x,r)\subset U$.

$\square$

**Proposición 1.1.** Si $(X,d)$ es un espacio métrico, entonces

$$\mathcal{T}_d=\{U\subset X: U \text{ es un abierto métrico en } (X,d)\}\subset\mathcal{P}(X)$$

es una topología en $X$ que llamamos la **topología métrica** en $(X,d)$.

*Demostración.* Veamos que $\mathcal{T}_d$ así definida verifica las propiedades de una topología:

(A1) $\emptyset$, $X\in\mathcal{T}_d$ trivialmente (ya que $X\subset X$).

(A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{T}_d$. Tendremos que ver si se verifica que $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathcal{T}_d$. Para ello estudiemos los dos casos posibles:

Si $\bigcup\limits_{i\in I}U_i=\emptyset\Rightarrow\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathcal{T}_d$.

Si $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\neq\emptyset$, entonces podemos considerar $x\in\bigcup\limits_{i\in I}U_i\Rightarrow\exists i\in I: x\in U_i\in\mathcal{T}_d\Rightarrow\exists r>0: B(x,r)\subset U_i\subset\bigcup\limits_{i\in I}U_i\Rightarrow\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathcal{T}$.

(A3) Sean $U_1,U_2\in\mathcal{T}_d$. ¿Se verifica que $U_1\cap U_2\in\mathcal{T}_d$? De nuevo veamos los casos posibles:

Si $U_1\cap U_2=\emptyset$, entonces se verifica trivialmente.

Si $U_1\cap U_2\neq\emptyset$, entonces podemos considerar $x\in U_1\cap U_2\Rightarrow\exists r_1,r_2>0$ : $B(x,r_1)\subset U_1$ y $B(x,r_2)\subset U_2\Rightarrow B(x,\text{mín}\{r_1,r_2\})\subset U_1\cap U_2$, es decir existe una bola abierta en la intersección que contiene al punto luego $U_1\cap U_2\in\mathcal{T}_d$.

□

**Definición 1.5.** Se llama **topología usual de** $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_u$, a la topología métrica en $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, es decir, $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U \quad \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$.

□

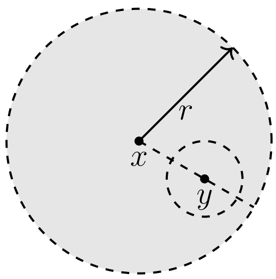
**Proposición 1.2.** $(X, d)$ e.m. Se cumplen:

(i) Las bolas abiertas en $(X, d)$ son abiertos.

(ii) Todo abierto no vacío en $(X, d)$ se puede escribir como unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.

*Demostración.*

(i) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$B(x, r) \in \mathcal{T}_d$?
Sea $y \in B(x, r) \Rightarrow d(x, y) < r \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Para ver esta última implicación tenemos que si tomamos un $z \in B(y, \varepsilon) \Rightarrow d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B(x, r)$.




(ii) Sea $U \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall x \in U \quad \exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x) = \bigcup_{x \in U} \overline{B}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$.

□

**Corolario 1.2.1.** En $(X, d)$ tenemos

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

□

**Ejemplo.**

•) $(X, d)$ e.m. En general, no todo abierto es una bola. Pir ejemplo la unión de bolas no concéntricas.

•) No todo conjunto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es abierto. Por ejemplo $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto.

•) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos abiertos (topológicamente) son los intervalos abiertos, es decir, los del tipo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $(a, b)$ con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.

- •) En $(X, d)$, en general la intersección infinita de abiertos no es abierto. Por ejemplo, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ que no es abierto.

- •) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$ (la topología asociada a la distancia discreta es la distancia discreta).

□

**Definición 1.6.** Sean $X \neq \emptyset$ y $d_1, d_2$ distancias en $X$. Decimos que $d_1$ y $d_2$ son **equivalentes** si existen $a, b > 0$ tal que

$$a \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant b \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

□

**Proposición 1.3.** Si $d_1, d_2$ son distancias en $X \neq \emptyset$ y existe $a > 0$ tal que $a \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \quad \forall x, y \in X$, entonces $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. En particular, si $d_1$ y $d_2$ son equivalentes, entonces $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

*Demostración.* Sea $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, $U \neq \emptyset$, ¿$U \in \mathcal{T}_{d_2}$?
Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1} \Rightarrow \exists r > 0 : B_{d_1}(x, r) \subset U$. Como $a \cdot d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset B_{d_1}(x, r)$. Para verlo, tomamos $y \in B_{d_2}(x, a \cdot r) \Rightarrow d_2(x, y) < a \cdot r \Rightarrow a \cdot d_1(x, y) < r \Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r)$. Por tanto, $B_{d_1}(x, r) \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2} \Rightarrow T_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

□

**Definición 1.7.** Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice **metrizable** si existe una distancia $d$ en $X$ tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

□

**Ejemplo.**

- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es metrizable.

- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es metrizable.

□

**Ejercicio 1.1.2.** Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t. metrizable, entonces cumple la condición de Hausdorff:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U,\ y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

Por ser metrizable, sabemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ donde $d : X \to [0, \infty)$ es una distancia. Por tanto, para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ tengo $d(x, y) > 0$. Puedo considerar entonces $r = \dfrac{d(x, y)}{2}$. Tengo entonces $U = B(x, r)$ y $V = B(y, r)$. Es claro que $x \in U$ y $y \in V$. Veamos que $U$ y $V$ son disjuntos. Tengo $U \cap V = \{z \in X : d(z, x) < r, d(z, y) < r\}$. Supongamos que este conjunto no es vacío, en cuyo caso tendría que $\exists z \in X$ tal que $d(z, x) < r$ y $d(z, y) < r$. Por tanto, $d(z, x) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$ lo cual incumple la desigualdad triangular. Llegamos a contradicción y por tanto $U \cap V = \emptyset$.

□

**Ejemplo.**

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$ no es metrizable si $\#X > 2$ (cardinal del conjunto) ya que no verifica la condición de Hausdorff.
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ no es metrizable por la misma razón (ya que la intersección de cualesquiera dos abiertos va a contener a $x_0$).
- •) $(X, \mathcal{T}_{CF})$ no es metrizable si $X$ es infinito (aplicar las leyes de morgan para la intersección).
- •) $(X, \mathcal{T}_{CN})$ no es metrizable si $X$ no es numerable.
- •) $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$.
- •) La topología de Sierpinski tampoco es metrizable (ya que el único abierto que contiene a $b$ es el total).
- •) La topología de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ cumple la propiedad de Hausdorff.

□

## 1.2. Comparación de Topologías

**Definición 1.8.** Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dos topologías en $X$. Diremos que $\mathcal{T}_2$ es **más fina** que $\mathcal{T}_1$ o que $\mathcal{T}_1$ es **menos fina** que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y lo notamos como $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

□

**Ejemplo.**

- •) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} \leqslant \mathcal{T}_{CN}$.
- •) $(X, \mathcal{T})$ e.t, entonces $\mathcal{T}_t \leqslant \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_{disc}$
- •) Si $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_2 \leqslant \mathcal{T}_1$, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (por doble inclusión).
- •) En general si tenemos dos topologías en $X$, no siempre son comparables. Por ejemplo la topología del punto incluida en dos puntos distintos:

  $$0, 1 \in \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$$

  Veamos que $\mathcal{T}_0 \nleq \mathcal{T}_1$, ya que $\{0\} \notin \mathcal{T}_1$, y por el mismo motivo (pero con el 1) tenemos $\mathcal{T}_1 \nleq \mathcal{T}_0$.

  Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{x_0})$ ya que $\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_u \Rightarrow \mathcal{T}_{x_0 \nleq \mathcal{T}_u}$
  Igualmente $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_u$ y $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_{x_0} \Rightarrow \mathcal{T}_u \nleq topo_{x_0}$
- •) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- •) $(X, d)$, $(X, d')$, $d \leqslant d' \Rightarrow \mathcal{T}_d \leqslant \mathcal{T}_{d'}$.

□

## 1.3. Cerrados

**Definición 1.9.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Diremos que un conjunto $F \subset X$ es **cerrado** en $(X, \mathcal{T})$ si $X \subset F \in \mathcal{T}$. Denotamos por $\mathcal{C}_\mathcal{T}$ a la familia de todos los cerrados en $(X, \mathcal{T})$.

□

**Propiedades.**

**(C1)** $\emptyset, X \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.

**(C2)** Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}_\mathcal{T}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.

**(C3)** Si $F_1, F_2$" $\in \mathcal{C}_\mathcal{T}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$

Por inducción, de **(C3)** tenemos que la unión finita de cerrados es cerrada.

*Observación.*

- •) $U \in \mathcal{T} \iff X \setminus U \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$, $F \in \mathcal{C}_\mathcal{T} \iff X \setminus F \in \mathcal{T}$.
- •) $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto además implica que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} = \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto nos dice que para conocer una topología basta con conocer la familia de sus cerrados.
- •) En general, puede haber conjntos que no sean ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tenemos que $[0, 1) \notin \mathcal{T}_u \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
- •) En $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ tenemos que $\mathcal{T}_{x_0} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{P}(X)$ y además $\mathcal{T}_{x_0} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \{\emptyset, X\}$.
- •) En general, la unión arbitraria de cerrados no es cerrado. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tomamos $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] = (0, 3)$. Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ considerando $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ que no es cerrado.

□

**Ejemplo.**

- •) Topología trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_t} = \mathcal{C}_t = \{\emptyset, X\}$.
- •) Topología discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{disc}} = \mathcal{C}_{disc} = \mathcal{P}(X)$.
- •) Topología del punto incluido: $x_o \in X$, $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{C}_{x_0} = \{X\} \cup \{F \subset X : x_0 \notin F\}$
- •) Topología cofinita: $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ finito }\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{CF}} = \mathcal{C}_{CF} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ finito}\}$
- •) En ocasiones no es fácil describir $\mathcal{C}_\mathcal{T}$. Por ejemplo en $\mathcal{T}_u$ o $\mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.

□

**Ejemplo.** En un espacio métrico $(X, \mathcal{T}_d)$, las bolas cerradas y las esferas son cerrados.

*Demostración.*

- •) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$\overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}_d$? Esto es equivalente a preguntarse ¿$X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{T}_d$?

  Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x,r) \Rightarrow d(x,y > r)$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : r + \varepsilon < d(x,y) \Rightarrow B(y,\varepsilon) \cap \overline{B}(x,r) = \emptyset \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{T}_d \Rightarrow X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$

- •) Sea $x \in X$, $r > 0$,¿$S(x,r) \in \mathcal{C}_d$? Dado que $X \setminus S(x,r) = B(x,r) \cup (X \setminus \overline{B}(x,r)) \in \mathcal{T}_d$ (por ser unión de abiertos).

$\square$

**Ejercicio 1.3.1.** En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos cerrados son los de la forma $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y $[a,b]$ con $a < b$.

Sabemos que los únicos abiertos en $\mathcal{T}_u$ son los intervalos de la forma $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $(a,b)$ con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.
Es claro que $\mathbb{R} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
Tenemos que $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty) \in \mathcal{T}_u$, luego $(-\infty, a] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
De la misma forma, $\mathbb{R} \setminus [b, +\infty) = (-\infty, b) \in \mathcal{T}_u$, luego $[b, +\infty) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$
Finalmente $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \in \mathcal{T}_u$ por ser unión de abiertos luego $[a,b] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
Dado que ya han aparecido todos los tipos posibles de intervalos en $\mathbb{R}$, no habrá más intervalos cerrados que los ya mencionados (ya que cualquier otro tipo de intervalo es abierto).

$\square$

**Teorema 1.4.** Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo

**(C1)** $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

**(C2)** Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

**(C3)** Si $F_1, F_2" \in \mathcal{C}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en $X$ tal que $\mathcal{C}_\mathcal{T} = \mathcal{C}$.

*Demostración.* La existencia queda probada definiendo $\mathcal{T} = \{U \subset X : X \setminus U \in \mathcal{C}\}$.
La unicidad es inmediata ya que si $\mathcal{C}_{\mathcal{T}'} = \mathcal{C}_\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

$\square$

## 1.4. Bases de topología

**Definición 1.10.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Una familia de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una **base** de la topología $\mathcal{T}$ si $\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists \{B_i\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.
A los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **abiertos básicos**.

□

*Observación.*

- •) Ni $\mathcal{B}$ ni la familia $\{B_i\}_{i \in I}$ tienen que ser finitas o numerables
- •) La forma de escribir $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ puede no ser única.
- •) $\mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}$ (trivialmente).
- •) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$ con $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}'$ es base de $\mathcal{T}$.

□

**Proposición 1.5.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ una familia de abiertos. Son equivalentes:

(i) $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

(ii) $\forall U \in \mathcal{T}, \ U \neq \emptyset \ \ \forall x \in U \ \ \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$ (si tenemos un abierto de la topología podemos encontrar para cada punto suyo un abierto básico contenido en el abierto y que contiene al punto).

*Demostración.*

(i)⇒(ii) Sea $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists i \in I$ tal que $x \in B_i = B_x \subset U$

(ii)⇒(i) Sea $U \in \mathcal{T}$.

- Si $U = \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$
- Si $U \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in U \ \ \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_x$

□

**Ejemplo.**

- •) Sea $(X, \mathcal{T}_d)$ un e.m. La familia $base = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ de todas las bolas abiertas es una base de $\mathcal{T}_d$.
- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ y se le llama **base usual**.
- •) En $(\mathbb{R}, T_u)$, $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, \ a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ (por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$).

- •) En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ es la base usual. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ también es base de $\mathcal{T}_u$ (numerable).
- •) En $(X, \mathcal{T}_t)$, $\mathcal{B} = \{X\}$ es base (la única que no contiene al vacío).
- •) $(X, \mathcal{T}_d)$, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}_{disc}$. Es la más económica ya que si $\mathcal{B}'$ es base, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

  *Demostración.* Sea $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$, como $\mathcal{B}'$ es base podemos considerar $x \in \{x\}$ y entonces $\exists B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B \subset \{x\}$ y entonces $B = \{x\} \subset \mathcal{B}'$ $\forall x \in X \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ □

- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $x_0 \in X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \{\{x, x_0\} : x \in X\}$ es una base. Esta es la base más económica.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Sorgenfrey})$ (recordemos que $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U, \;\; \exists \varepsilon : [x, x+\varepsilon) \subset U$). $\mathcal{B} = \{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ es base. $\mathcal{B}' = \{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ no lo es (ya que tomando un intervalo de la forma $[x, x+\varepsilon)$ con $x \in \mathbb{Q}$ entonces no existe ningún elemento de $\mathcal{B}'$ que contenga a $x$ y quede enmedio).

□

**Teorema 1.6.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base suya. Entonces:

**(B1)** $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

**(B2)** Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

*Demostración.*

**(B1)** Trivial

**(B2)** Tenemos $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ entonces, como $\mathcal{B}$ es base $\exists B_3 = B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

□

**Teorema 1.7.** Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

**(B1)** $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

**(B2)** Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $X$ tal que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Además,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathcal{B}) &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} \text{ con } U = \bigcup_{i \in I} B_i\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{U \in X : \forall x \in U \;\; \exists B = B_x \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U\}\end{aligned}$$

Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es la topología menos fina conteniendo a $\mathcal{B}$, es decir, si $(X, \mathcal{T}')$ es un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{T}'$. A esta topología se le llama la **topología generada** por $\mathcal{B}$.

*Demostración.* Empezaremos por probar la existencia. Para ello tendremos que ver que $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es una topología, probando que verifica las propiedades de las topologías:

(A1) $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ por la definición de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Por **(B1)**, tenemos también que $X \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

(A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$ y sea $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ por lo que $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ (si la intersección es vacía es trivial). Consideramos $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_1 \subset U$ y $x_\in B_2 \subset U_2$ por tanto $x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por **(B2)**, existe un $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$ por lo que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Con esto queda probado que es una topología. Tendremos que ver ahora que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Para ello empiezo viendo que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Por la segunda defición de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, esto es evidente. Como verifica las hipótesis del Teorema 1.7, es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Veamos ahora la unicidad. Sea $(X, \mathcal{T}')$ un e.t. con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}'$. Tendré que ver que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Sea $\emptyset \neq U \subset X \Rightarrow U \in \mathcal{T}' \iff \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in \mathcal{B} \subset U \iff U \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ ya que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}'$.

Nos queda ver que es la menos fina conteniendo a $\mathcal{B}$. Para ello, sea $(X, \mathcal{T}')$ un e.t. tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces por **(A2)** tenemos que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}'$, lo cual es equivalente a decir que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{T}'$.

□

**Ejemplo.**

- •) Si $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a\}\}$ no es base de ninguna topología en $X$ (ya que no cumple **(B1)**).
- •) Si $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Esta base verifica **(B1)** pero no **(B2)** (tomando $x = b$ se ve facilmente).
- •) Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] : a < b\}$. Si tomamos dos intervalos $[0, 1] \cap [1, 2]$, su intersección es $\{1\}$ y por tanto no verifica **(B2)** (tomando $x = 1$).
- •) Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] : a \leqslant b\}$ es base de una topología, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $\mathbb{R}$. Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{disc}$.

□

**Proposición 1.8.** Sean $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías en $X$ con bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Equivalen:

(i) $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

(ii) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \quad x \in B_1, \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $x \in B_2 \subset B_1$.

*Demostración.*

(i)⇒(ii) Sea $B \in \mathcal{B}_1$. Por (i), $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ y como $\mathcal{B}_2$ es base de $\mathcal{T}_2$, aplicando la definición de base tengo que $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $x \in B_2 \subset B_1$.

(ii)⇒ $(i)$ Por (ii) tenemos que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$ (por el Teorema 1.7) y entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$.

□

**Ejemplo.**

- •) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- •) Ejercicios 1 y 2 de la relación.

□

**Proposición 1.9.** Sean $X \neq \emptyset$ y $S \subset \mathcal{P}(X)$, $S \neq \emptyset$, Entonces,

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \bigcap_{i \in I} : I \text{ finito}, \ S_i \in S \quad \forall i \in I \right\}$$

Es base de una única topología $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\mathcal{B}(S))$ en $X$. A esta topología la llamaremos la **topología generada** por $S$ y es la topología menos fina que contiene a $S$, es decir, si $(X, \mathcal{T}')$ es un e.t. y $S \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}(S) \leqslant \mathcal{T}'$.

Decimos que $S$ es una **subbase** de $\mathcal{T}(S)$.

*Demostración.* Tendremos que comprobar **(B1)** y **(B2)** y que es la menos fina. □

**Ejemplo.**

- •) Toda base $(X, \mathcal{T})$ es subbase de $(X, \mathcal{T})$.
- •) $S = \{X\}$ es subbase de $\mathcal{T}_t$.
- •) En $\mathbb{R}$, $S = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ es subbase de $\mathcal{T}_u$.

□