Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales I

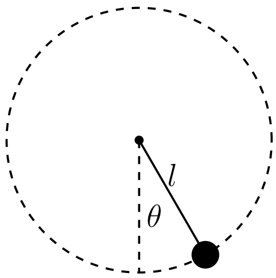
Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

0. Introducción

La mayoría de ecuaciones diferenciales han sido planteadas por campos como la física. Veamos el caso de un péndulo:



Las condiciones que definen el péndulo son $g > 0$, ya que se encuentra en la Tierra, l que es la longitud del péndulo y θ que es el ángulo con respecto a la vertical.
La ecuación que define el ángulo a lo largo del tiempo es la siguiente:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\operatorname{sen}(\theta(t)) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden (ya que aparece una segunda derivada). En ella tenemos que t es la variable independiente y θ es la incógnita o variable dependiente (que es una función).
Si estudiamos las soluciones de esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
&\theta(t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \text{ es una solución (trivialmente)}\\
&\theta(t) = \pi,\ t \in \mathbb{R} \text{ es también solución}\\
&\theta(t) = 2n\pi,\ \theta(t) = n\pi,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \text{ son infinitas soluciones}
\end{aligned}$$

De esta forma podemos ver que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones.

Definición 0.1. Podemos definir una **ecuación diferencial de primer orden** como la relación funcional dada por

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

donde t es la **variable independiente** y $x = x(t)$ es la **variable independiente** o **incógnita**.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial dada por

$$x(t) + x'(t)^2 = 1$$

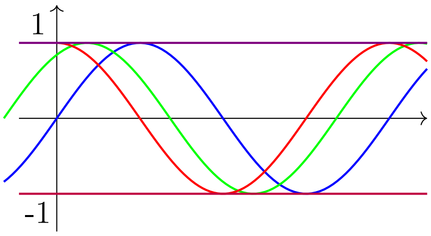
Podemos definir[1] $\Phi = \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1$, o equivalentemente[2]

$$\begin{aligned}
\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\
(t, x, y) &\mapsto \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1
\end{aligned}$$

[1] Notación física

[2] Notación moderna (matemática)

Estudiemos las soluciones a esta ecuación:



- $x(t) = \text{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = -1$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \text{sen}(t + c)$, $t \in \mathbb{R}$ $\forall c \in \mathbb{R}$ (familia uniparamétrica).

Podemos construir otra solución uniendo las ya dadas como por ejemplo

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable y por tanto solución a la ecuación.

Típicamente estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden en **forma normal**, es decir, ecuaciones que se pueden escribir como

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Esto es una subfamilia de las ecuaciones previamente descritas.

Ejemplo.

a) $x'(t) = 7x(t)$

$$\Phi(t, x, y) = y - 7x$$
$$f(t, x) = 7x$$

Algunas de las soluciones son $x(t) = 0$ (trivial), $x(t) = e^{7t}$ y $x(t) = c \cdot e^{7t}$, $\; c, t \in \mathbb{R}$

b) $x`(t) = 7t$

$$\Phi(t, x, y) = y - 7t$$
$$f(t, x) = 7t$$

Algunas de las soluciones son de la forma $x(t) = \frac{7t^2}{2} + c$, $c, t \in \mathbb{R}$ (realmente es una integral).

Ejemplo.

a) $x`(t) = \text{sen}(t)$. Sus soluciones son de la forma $x(t) = \cos(t) + c$, $c, t \in \mathbb{R}$

b) $x`(t) = \text{sen}(x(t))$. No es tan simple calcular las soluciones (aunque $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ es solución).

Definición 0.2. Una función diferencial va a venir dada por un

$$\begin{aligned} \Phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto \Phi(t, x, y) \text{ (continua)} \end{aligned}$$

donde el conjunto D es un abierto de $\mathbb{R}^3$ conexo llamado **dominio**.
Una **solución** de una ecuación diferencial, $\Phi(t, x(t), x`(t)) = 0$ será una función de la forma

$$\begin{aligned} x : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

donde I es un intervalo abierto y x tiene las siguientes propiedades:

(i) $x(t)$ es derivable en I.

(ii) $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$

(iii) $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

Ejemplo.

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}, \qquad x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

¿Es $t(x)$ una solución de la ecuación dada?

$$\Phi(t, x, y) = y - \frac{1}{x} \qquad D = \mathbb{R}\times]0, \infty[\times\mathbb{R} \qquad I =]19, \infty[$$

Tomamos así D porque hay que quitar la discontinuidad que se produce en el plano $\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y además tiene que ser conexo ($\mathbb{R}^3$ sin un plano no es conexo).
I es el mayor intervalo abierto de $\mathbb{R}$ en el que $x(t)$ es derivable.
Además, se verifica que $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$ y

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t - 38}} = \frac{1}{x(t)}$$

Por lo que se verifica que es solución

A partir de ahora la notación que utilizaremos para expresar ecuaciones diferenciales será

$$\Phi(t, x, x') = 0 \text{ en lugar de } \Phi(x, x(t), x'(t))$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} x' &= 3x \qquad (\iff x'(t) = 3x(t)) \\ x(t) &= c \cdot e^{3t} \end{aligned}$$

En general, tenemos que

$$x = \lambda x \quad \text{tiene por solución} \quad x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

$$x' = \lambda t \quad \text{tiene por solución} \quad x(t) = \frac{\lambda t^2}{2} + c$$

Proposición 0.1. Dada $x(t)$ solución de $x' = \lambda x$ definida en un intervalo abierto I, existe $c \in \mathbb{R}$ de forma que $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$, $\forall t \in I$.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución. Consideramos la aplicación $e^{-\lambda t} \cdot x(t)$ que es derivable por ser producto de funciones derivables y tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}x(t)\right) = -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t}x`(t) \overset{(*)}{=} -\lambda e^{-\lambda t}x(t) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda x(t) = 0$$

donde en $(*)$ he aplicado que $x' = \lambda x$ por ser solución. Al anularse la derivada de una función de clase $C^1(I)$, necesariamente tenemos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-\lambda t}x(t) = c$ $\forall t \in I$.
Con esta expresión, dado que la exponencial no se anula para ningún valor del dominio podemos dividir entre ella y obtenemos

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

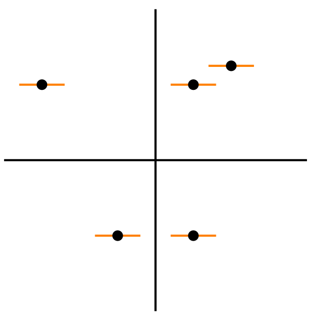
□

0.1. Interpretación geométrica de una ecuación diferencial

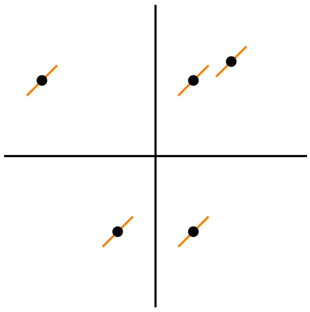
Sea $x' = f(x,t)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ una función continua. Podemos interpretar este valor $f(t,x)$ como la pendiente de una recta que pasa por (t,x). A partir de esta función podemos construir los que se conoce como un **campo de direcciones** que es una regla que a cada punto del plano le asigna una dirección. Tenmos que $x'(t) = f(t,x(t))$ por lo que esta es la pendiente del campo de direcciones y por la interpretación geométrica de la derivada tenemos que este valor es la pendiente de la recta tangente en $(t,x(t))$ a la curva $x = x(t)$. Las soluciones de la ecuación diferencial son curvas que se mueven de forma tangente al campo de direcciones (se podría decir que lo "peinan").

Ejemplo.

1. $x' = 0$. Las soluciones de esta ecuación diferencial son las de la familia uniparamétrica $x(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$.



2. $x' = 1$. Las soluciones serán de la forma $x(t) = t+c$, $t, c \in \mathbb{R}$. Ahora $f(t,x) = 1$.



3. $x' = x$. En general, $x(t) = ce^t$, $c, t \in \mathbb{R}$

4. $x' = t^2 + x^2$. Con las funciones elementales básicas no vamos a encontrar una solución, sin embargo el campo de direcciones nos permite hacernos una idea de como son estas funciones (no elementales)(No podemos definir el movimiento mediante una fórmula sino con la ley que lo describe).

$\square$

Teorema 0.2. Teorema de la función implícita:
Sea $F : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, donde G es abierto y $F \in C^1(G)$. Si existe un punto $(t_0, x_o) \in G$ con $F(t_0, x_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$, entonces existe una función x definida en un cierto intervalo abierto I, $x : I \to \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$, $x \in C^1(I)$ de manera que $(x, x(t)) \in G \quad \forall t \in I$ y tal que $F(t, x(t)) = 0 \quad \forall t \in I$.

$\square$

Regla de derivación:

$$\frac{d}{ds}[F(t(s), x(s))] = \frac{\partial F}{\partial t}(t(s), x(s))t'(s) + \frac{\partial F}{\partial x}(t(s), x(s))x'(s)$$

Aplicando esto tenemos que si $F(t, x(t)) = 0$, $t \in I$, entonces su derivada implícita será:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t))x'(t) = 0$$

Esto es una ecuación diferencial de primer orden pero no está en forma normal. Por el teorema de la función implícita sé que $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \neq 0$ y por tanto se puede expresar en forma normal (despejando $x'(t)$).

0.2. Construcción de una Ecuación Diferencial (de primer orden) a partir de una familia uniparamétrica de funciones

Los candidatos a solución serían $F(t,x,c) = 0$ donde c es un parámetro y x es una función dependiente de t. Aplicando derivación implícita tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t),c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t),c)x'(t) = 0$$

Eliminando el parámetro c obtengo $\Phi(t,x,x') = 0$.

Ejemplo. $\frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - sen(t) = c$

$$F(t,x,c) = \frac{1}{c}e^{cx} - x^2 - sen(t) - c$$

Derivando esta función (calculando la derivada implícita) obtenemos

$$e^{cx}x' - 2x'x - \cos(t) = 0$$

Eliminamos ahora el parámetro c:

$$e^{cx} = \frac{2xx' + \cos(t)}{x'}$$

$$\frac{x}{\ln\left(\frac{2xx'+cos(t)}{x'}\right)} \cdot \frac{2xx' + \cos(t)}{x'} - x^2 - \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2xx' + \cos(t)}{x'}\right) = 0$$

□

Ejemplo. $x^2 + t^2 = 0$.

$$2xx' + 2t = 0$$

y obtenemos la ecuación $x' = \frac{-t}{x}$