Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Introducción. Conexión por arcos

0.1. Conexión

Notación. Notaremos por e.t al espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ o diremos X es un e.t.

Definición 0.1. Se dice que un e.t X es no conexo si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Proposición 0.1. Dado un e.t. X equivalen las siguientes afirmaciones:

(i) X es conexo.

(ii) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.

(iii) Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son el vacío y el total.

Teorema 0.2. El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).

Teorema 0.3. La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t. X es también conexa.

Teorema 0.4. Si A es un subconjunto del e.t. X y A es conexo, entonces dado B con $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces se tiene que B también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.

Teorema 0.5. Dados dos espacios topológicos X, Y se cumple que $X \times Y$ es conexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son conexos.

Teorema 0.6. Los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).

Definición 0.2. Dados un e.t. X y un punto x_0 se define la componente conexa de x_0 es X como el mayor conexo de X que contiene a x_0

Teorema 0.7. Las componentes conexas de un e.t. X forman una partición de X es conjuntos conexos maximales y cerrados.

0.2. Conexión por arcos

Definición 0.3. Un **arco** (o camino) en un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to X$. Si además $\alpha(0) = \alpha(1)$ diremos que α es un lazo.

Diremos que un arco $\alpha : [0,1] \to X$ une x con y si se verifica que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si α es un arco, diremos que está basado en x (o su punto base es x) si $\alpha(0) = x = \alpha(1)$.

Denotaremos por

$$\Omega(X; x, y) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y\}$$

al **conjunto de arcos** que unen x con y. Denotaremos además por

$$\Omega(X; x) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$$

al **conjunto de lazos** basados en x.

Ejemplo.

1. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

   es un lazo basado en x_0 al que llamaremos **arco constante**. De hecho, si X tiene la topología discreta, entonces los únicos arcos que hay en X son los arcos constantes.

   Demostración. Si X tiene la topología discreta, entonces como α es continua $\alpha^{-1}(\{x_0\})$ será abierto y cerrado y por tanto $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, X\}$ por ser X conexo. □

2. Sean $x, y, z \in X$, $\alpha : [0,1] \to X$ un arco uniendo x con y y $\beta : [0,1] \to X$ un arco uniendo y con z. Buscaremos ahora un arco formado a partir de estos dos de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta : [0,1] \to X : (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

   Entonces $\alpha * \beta$ es continua ya que $(\alpha * \beta)_{|_{[0,1/2]}}$ y $(\alpha * \beta)_{|_{[1/2,1]}}$ lo son y para $t = 1/2$ se tiene que

$$\alpha\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

   con $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ cerrados. Aplicando el lema de pegado[1] tenemos que $\alpha * \beta$ es continua.

[1] visto en Topología I

3. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un arco uniendo x con y, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

es un arco que une y con x.

Definición 0.4. Decimos que un e.t. X es **arcoconexo** (o **conexo por arcos**) si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un arco en X que une el punto x con el punto y.

Si X es un e.t. y $A \subset X$, diremos que A es arcoconexo si A es arcoconexo con la topología de inducida de X.

Teorema 0.8. Todo espacio topológico arcoconexo es conexo.

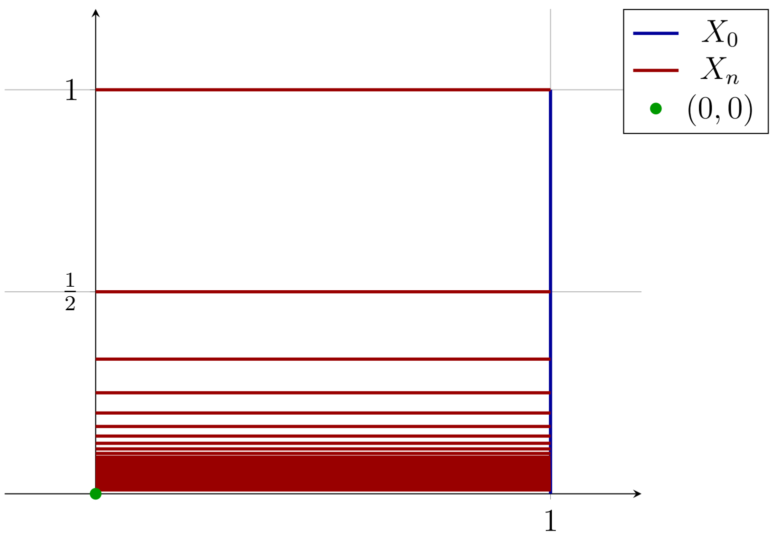
Demostración. Dado $x_0 \in X$ fijo y otro punto $x \in X$ cualquiera, sabemos que existe $\alpha : [0,1] \to X$ un arco tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x$. En particular, como el intervalo $[0,1]$ es conexo y α es continua, entonces se tiene que $\alpha([0,1])$ es conexo y podremos escribir

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X} \alpha_x([0,1]) \in X \Rightarrow X = \bigcup_{x\in X} \alpha_x\{[0,1]\}$$

y además $x_0 \in \bigcap\limits_{x\in X} \alpha_x\{[0,1]\}$ por lo que X es conexo (por el lema del peine). $\square$

Ejemplo. Veamos que la otra implicación no es cierta en general. Para ello consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{1\} \times [0,1] \qquad \text{y} \qquad X_n = [0,1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}, \; n \in \mathbb{N}$$



Llamamos $X = \{(0,0)\} \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n \right)$ y queremos ver que X es conexo pero no es arcoconexo.

Si tomamos la segunda parte de esta unión, es decir,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$$

tenemos que Y es es conexo porque es unión de los X_n que son todos conexos y que intersecan con X_0. Entonces, como $Y \subset X \subset \overline{Y}$ tenemos que X es conexo. Veamos sin embargo que X no es arcoconexo.

Para ello vamos a demostrar que si $\alpha : [0,1] \to X : \alpha$ es continua con $\alpha(0) = (0,0)$, entonces $\alpha(t) = (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$.

Podemos escribir la curva como $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Como $\alpha(0) = (0,0)$, si tomamos $((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ un abierto que contiene al origen, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha([0,\varepsilon)) \subseteq ((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ por ser α continua. Como $y(t)$ es continua y se tiene que $y([0,\varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left(\bigcup_{n>2} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$. Por el teorema del valor intermedio tenemos que $y([0,\varepsilon)) = \{0\}$ por lo que $\alpha([0,\varepsilon)) = \{(0,0)\}$. De esta forma hemos probado que no hay ningún arco que conecte $(0,0)$ con un punto distinto (el único arco es el constante).

Teorema 0.9. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces A es arcoconexo.

Demostración. Como A es estrellado existe un $x_0 \in A$ tal que para cualquier $x \in A$, el segmento que los une, $(1-t)x + tx_0 \in A$ para todo $t \in [0,1]$ y entonces $\alpha(t) = (1-t)x + tx_0$ es una curva continua uniendo x con x_0. Dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$ es una curva continua que une x con y. □

Corolario 0.9.1. Cualquier conjunto A de $\mathbb{R}^n$ convexo es arcoconexo. Por ejemplo, las bolas abiertas o las bolas cerradas de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 0.9.2. En $\mathbb{R}$ coinciden los conjuntos conexos y arcoconexos (son solo los intervalos).

Teorema 0.10. La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

Demostración. Dados $x, y \in f(X)$, entonces existen $x_0, y_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x$ y $f(y_0) = y$. Por ser X arcoconexo, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = y_0$. Entonces tenemos que $f \circ \alpha : [0,1] \to f(X)$ es continua y $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = x$ y $(f \circ \alpha)(1) = f(y_0) = y$ y tenemos demostrado el resultado que buscábamos. □

Teorema 0.11. Sean X un e.t y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de arcoconexos de X. Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entones $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

Observación. Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión. Por ejemplo, si en un e.t. X se tiene que $A \subseteq X$ es arcoconexo podría ocurrir que si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, se diera que B no sea arcoconexo (como en el ejemplo anterior).

Ejemplo. Veamos que $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ es arcoconexo. Podemos hacerlo sabiendo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, con $N = (0, \dots, 0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ que es arcoconexo por lo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es arcoconexo. Análogamente, $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ con $S = (0, \dots, 0, -1)$ es arcoconexo y podemos escribir

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

por lo que $\mathbb{S}^n$ es unión de arcoconexos con puntos en común, luego es arcoconexo.

Teorema 0.12. Sean X, Y e.t., entonces $X \times Y$ es arcoconexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son arcoconexos.

Teorema 0.13. Dado un e.t. X, se tiene que X es arcoconexo si y solo si X es conexo y todo punto $x \in X$ tiene un entorno suyo arcoconexo.

Demostración.

$\Rightarrow$) Hemos visto que si X es arcoconexo, entonces X es conexo. Además, X es entorno de cualquier punto suyo luego todo punto tiene un entorno conexo.

$\Leftarrow$) Elegimos un $x \in X$ fijo y definimos $A = \{y \in X : \exists \alpha_y$ arco uniendo x con $y\}$

Como $x \in A$ tenemos que $A \neq \emptyset$. Si probamos que A es abierto y cerrado, entonces como X es conexo tendremos que $A = X$, es decir podremos unir x con cualquier otro punto $y \in X$.

Veamos que A es abierto. Tomamos $z \in A$ y queremos demostrar que $\exists U$ entorno de z tal que $U \subseteq A$. Por hipótesis sabemos que existe un entorno U arcoconexo de z. Entonces dado $u \in U$ existe un arco α_u que une z con u. Por otro lado, como $z \in A$, entonces existe un arco β_z que une x con z. Tendremos entonces que $\beta_z * \alpha_u$ es un arco que une x con u y por defınción tendremos $u \in A$, luego $U \subseteq A$.

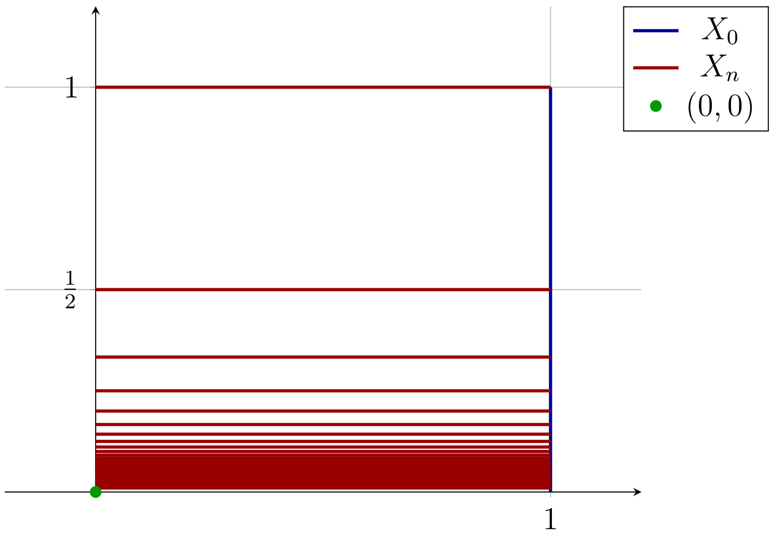
Nos queda ver que A es cerrado. Tomamos para ello $z \in \overline{A}$. Por hipótesis existe un entorno U de z arcoconexo. Por ser U entorno de z y $z \in \overline{A}$ necesariamente $U \cap A \neq \emptyset$ por lo que existe al menos un $u \in U \cap A$. Como $u \in A$ existe un arco α_u que une x con u y como $u \in U$ existe también un arco β_u que une u con z y tendríamos que $\alpha_u * \beta_u$ es un arco uniendo x con z llegando a que $z \in A$. Tendríamos $\overline{A} \subseteq A$ y como la otra inclusión se da siempre, tendremos que A coincide con su adherencia, por lo que es cerrado.

□

Definición 0.5. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$, llamamos **componente arcoconexa** de x_0 al mayor arcoconexo en X que contiene a x_0.

Teorema 0.14. Las componentes arcoconexas de un e.t. X forman una partición de X en subconjuntos arcoconexos de X maximales.

Ejemplo. En el ejemplo que ya se trabajó se puede ver que el conjunto X que era



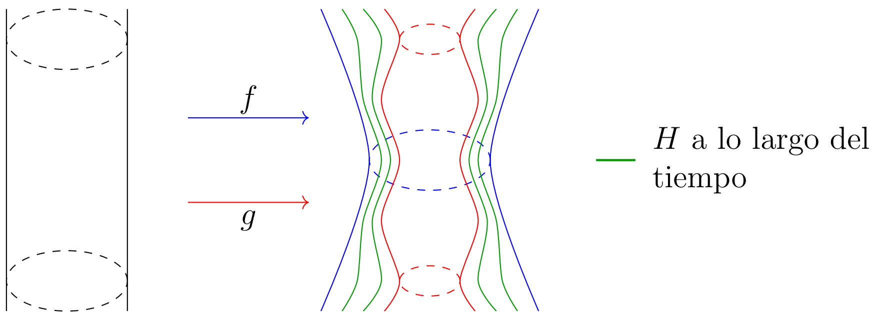
tiene dos componentes arcoconexas: $\{(0,0)\}$, $\bigcup\limits_{u\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n$

1. El grupo fundamental

1.1. Homotopía por arcos

Definición 1.1. Sean X e Y dos espacios topologicos y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f es **homotópica** a g si existe $H : X \times [0,1] \to Y$ continua tal que

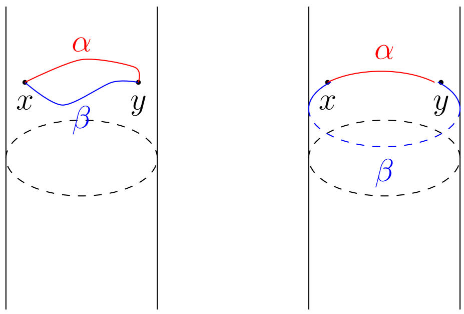
$$H(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$



Definición 1.2. Dados X e.t., $x, y \in X$ y dos arcos $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$, decimos que α, β son **homotópicos por arcos** si existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \alpha(s) \quad \text{y} \quad H(s,1) = \beta(x) \qquad \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) &= x \quad \text{y} \quad H(1,t) = y \qquad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Lema 1.1. Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en $\Omega(X; x, y)$.



Equivalentes No equivalentes

Demostración.

(i) Dado $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ queremos ver que α es homotópica por arcos con α. Para ello tenemos

$$\begin{array}{rl} H(s,t) = \alpha(s) & H(s,0) = \alpha(s) = H(s,1) \\ H(0,t) = \alpha(0) = x & H(1,t) = \alpha(1) = y \end{array}$$

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ tales que existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) & \text{y} & H(s,1) = \beta(x) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x & \text{y} & H(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Queremos ver que existe un $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} \tilde{H}(s,0) = \beta(s) & \text{y} & \tilde{H}(s,1) = \alpha(x) & \forall s \in [0,1] \\ \tilde{H}(0,t) = x & \text{y} & \tilde{H}(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Tomando $\tilde{H}(s,t) := H(s, 1-t)$ cumple claramente con lo que buscamos.

(iii) Dado $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x, y)$ y $H_1, H_2 : [0,1] \times [0,1] \to X$ continuas tales que

$$\begin{array}{cc} H_1(s,0) = \alpha(s) & H_2(s,0) = \beta(s) \\ H_1(s,1) = \beta(s) & H_2(s,1) = \gamma(s) \\ H_1(0,t) = x & H_2(0,t) = x \\ H_1(1,t) = x & H_2(1,t) = y \end{array}$$

Queremos ver que existe un $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{array}{rl} H(s,t) = \alpha(s) & H(s,0) = \alpha(s) = H(s,1) \\ H(0,t) = \alpha(0) = x & H(1,t) = \alpha(1) = y \end{array}$$

Para ello consideramos

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H_2(s, 2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Y con el lema de pegado es fácil ver que es continua y que satisface las condiciones que buscábamos.

□

Ejemplo.

1. Sean X un e.t. y $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas, entonces vamos a ver que f y g son homotópicas.

   Demostración. Vamos a definir la aplicación

   $$\begin{aligned} H : X \times [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

   que es continua y además verifica

   $$H(x,0) = f(x) \qquad H(x,1) = g(x)$$

   por lo que tenemos lo que buscábamos. □

En el caso particular de que $f = \alpha$ y $g = \beta$ fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro punto común, entonces la H anterior sería una homotopía por arcos.

2. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un arco y $h : [0,1] \to [0,1]$ es una aplicación continua con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, entonces $\dot{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es homotópica por arcos a $\alpha(s)$.

   Demostración. Es claro que $\dot{\alpha}$ es continua y existe una homotopía por arcos entre α y $\dot{\alpha}$ que es la siguiente

$$H(s,t) = \alpha((1-t)s + th(s))$$

   que es claramente continua y que verifica que

$$\begin{array}{rl} H(s,0) = \alpha(s) & \quad H(s,1) = \alpha(h(s)) = \dot{\alpha}(s) \\ H(0,t) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(1) & \quad H(1,t) = \alpha(1) = \dot{\alpha}(1) \end{array}$$

   □

   Intuitivamente podemos entender esto como que no importa a qué velocidad se recorra una curva para ser homotópico por arcos.

Notación. Como convenio a la clase de equivalencia de un arco α en $\Omega(X;x,y)$ lo denotaremos por $[\alpha]$.

Lema 1.2. Dados dos arcos α_1, α_2 en $\Omega(X;x,y)$ y $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X;y,z)$. Se verifica que si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, entonces $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$.

Demostración. Tenemos que

$$(\alpha_1 * \beta_1) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \beta_1(2s-1) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right.$$

$$(\alpha_2 * \beta_2) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_2(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \beta_2(2s-1) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right.$$

Además, sabemos que existen H_1, H_2 continuas tal que

$$\begin{array}{cc} H_1(s,0) = \alpha_1(s) & \quad H_2(s,0) = \beta_1(s) \\ H_1(s,1) = \beta_1(s) & \quad H_2(s,1) = \beta_2(s) \\ H_1(0,t) = x & \quad H_2(0,t) = y \\ H_1(1,t) = y & \quad H_2(1,t) = z \end{array}$$

Tomamos entonces $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ dada por

$$H(s,t) = \left\{ \begin{array}{lll} H_1(2s,t) & \text{si} & s \in [0, 1/2],\ t \in [0,1] \\ H_2(2s-1,t) & \text{si} & s \in [1/2, 1],\ t \in [0,1] \end{array} \right.$$

es continua y tenemos que

$$H(s,0) = \left\{ \begin{array}{lll} H_1(2s,0) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ H_2(2s-1,0) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1(2s) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ \beta_1(2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right. = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$

Análogamente se tiene que $H(s,1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$ con $H(0,t) = x$ y $H(1,t) = z$.

□

A partir del lema anterior podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

con $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$

Teorema 1.3. Dado X e.t., $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$ y $\gamma \in \Omega(X; z, w)$ se tiene que

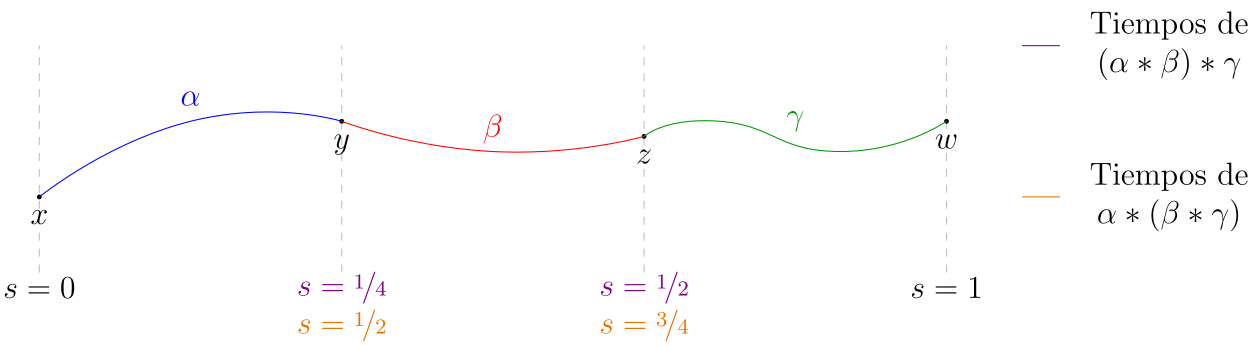
(i) $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$

(ii) $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$ y $[\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$

(iii) $[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_x]$ y $[\tilde{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$

Demostración.

(i) Desarrollemos cada expresión



$$(\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \beta(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ (\beta * \gamma)(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(2s-1)) & \text{si} \quad s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(2(2s-1)-1) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s-2) & \text{si} \quad s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s-3) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \alpha(2(2s)) & \text{si} \quad s \in [0, 1/4] \\ \beta(2(2s)-1) & \text{si} \quad s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/4] \\ \beta(4s-1) & \text{si} \quad s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Usando el ejemplo 2 anterior se tiene que $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ (realmente se están recorriendo las mismas curvas pero a distinta velocidad).

(ii) Tendremos que ver que $\alpha * \varepsilon_y$ se relaciona por una homotopía con arcos con α. Recordemos que

$$(\alpha * \varepsilon_y) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \varepsilon_y(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ y & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

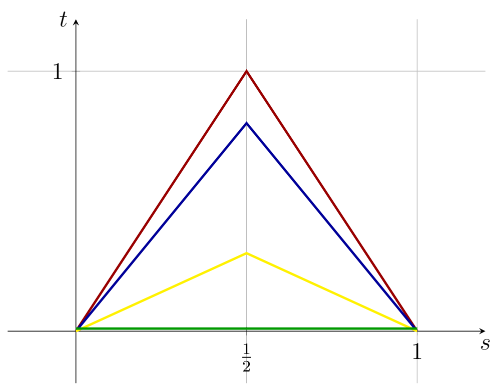
De nuevo del ejemplo 2 se tiene que son homotópicas

(iii) Tendremos que ver en este caso que $\alpha * \tilde{\alpha}$ es homotópico por arcos a ε_x. Describamos ambas curvas.

$$(\alpha * \tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2-2s) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0,1]$$

Pensamos ahora una transformación H que haga que cada vez la curva se vaya quedando más cerca de x (cada vez vuelve antes de llegar a y). Intuitivamente podríamos pensar en la siguiente gráfica, en la que vamos reduciendo la distancia desde la función roja hasta la verde



$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ 2-2s & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y podemos construir $H(s,t) = \alpha((1-t)h(s))$ que claramente es continua y verifica

$$\begin{aligned} H(s,0) = \alpha(h(s)) = (\alpha * \tilde{\alpha}(s)) \quad &\text{y} \quad H(s,1) = \alpha(0) = x = \varepsilon_x(s) \qquad \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = \alpha(0) = x \quad &\text{y} \quad H(1,t) = \alpha(0) = x \qquad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

□

1.2. El grupo fundamental

Corolario 1.3.1. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ se tiene que el conjunto de lazos en X basados en x_0 bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación $*$ forman un grupo algebraico.

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$G = \frac{\Omega(X; x_0)}{R}$$

donde R es la relación de equivalencia "ser homotópico por arcos". Veamos ahora que G tiene estructura de grupo:

1. **Propiedad asociativa.** Tendremos que ver que se verifica para cualesquiera $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in G$.

   $$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

   pero esto lo tenemos claramente del teorema anterior

2. **Existencia del elemento neutro.** Por el teorema anterior tenemos que para $x = y = x_0$ se tiene que $[\alpha] * [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\alpha]$ para cualquier $[\alpha] \in G$ luego tenemos la existencia probada.

3. **Existencia del elemento opuesto.** De nuevo usamos el teorema anterior y nos dice que para cualquier $[\alpha] \in G$ se tiene que

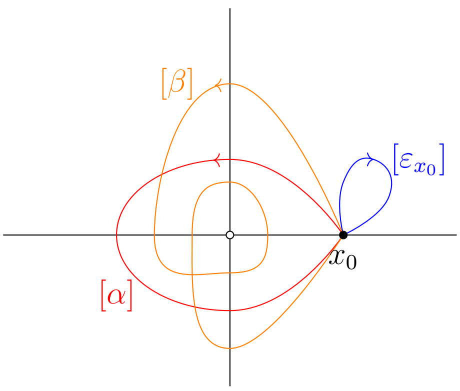
   $$[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] = [\tilde{\alpha}] * [\alpha]$$

   y se tiene directamente.

Con esto hemos probado finalmente que G es un grupo. □

Definición 1.3. Al grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamaremos el **grupo fundamental** de X en x_0 y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ y un punto cualquiera x_0.



En este espacio tenemos que $[\varepsilon_{x_0}] \neq [\alpha] \neq [\tilde{\alpha}] \neq [\beta]$. Intuitivamente podríamos intentar identificar este espacio con $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

- •) La clase $[\varepsilon_{x_0}]$ la podemos interpretar como el 0 de $\mathbb{Z}$.
- •) Identificaremos los números positivos como el número de vueltas que da cada curva al punto $(0,0)$ en sentido positivo (el que elijamos como positivo). Por ejemplo $[\alpha]$ sería $1 \in \mathbb{Z}$, $[\beta]$ sería $2 \in \mathbb{Z}$ y podríamos seguir así con todos los números enteros.
- •) Para los números negativos tomaremos los opuestos de los anteriores, es decir, las curvas recorridas en sentido contrario. Por ejemplo $[\tilde{\alpha}]$ será el $-1 \in \mathbb{Z}$, $[\tilde{\beta}]$ será el -2 y así sucesivamente.

Más adelante probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ de una forma más rigurosa.

Ejemplo. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto estrellado desde un punto x_0. Entonces $\pi_1(X; x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$, es decir, es trivial.

Demostración. Dado $\alpha(s)$ un lazo basado en x_0 dentro de X, entonces

$$H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$$

es una aplicación continua dentro[1] de X tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) = & \text{y} & H(s,1) = x_0 = \varepsilon_{x_0}(s) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x_0 & \text{y} & H(1,t) = x_0 & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

□

En particular, las bolas abiertas, las bolas cerradas, los convexos en general como $\mathbb{R}^n$ tienen grupo fundamental trivial.

Teorema 1.4. Sean x, y dos puntos de un e.t. X. Si X es arcoconexo, entonces $\pi_1(X,x)$ y $\pi_1(X,y)$ son iguales salvo isomorfismo.

Demostración. Como X es arcoconexo podemos considerar α un arco uniendo x con y y la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \pi_1(X,y) &\to \pi_1(X,x) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

que está bien definida por lo visto anteriormente sobre el operador $*$. Queremos ver ahora que F_α es un isomorfismo de grupos. Para ello comencemos por ver que F_α es un homomorfismo, es decir, que se verifica

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2])$$

Desarrollamos el segundo término de la expresión:

$$\begin{aligned} F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2]) &= ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}]) = [\alpha] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}] = \\ &= F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \end{aligned}$$

[1] aquí es donde usamos que es estrellado

y tenemos la igualdad buscada. Veamos ahora que tiene inversa considerando $F_{\tilde{\alpha}}$ que por definición es $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$ y que además verifica

$$(F_{\tilde{\alpha}} \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) = F_{\tilde{\alpha}}([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X,y)}([\gamma])$$
$$(F_{\alpha} \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) = F_{\alpha}([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\tilde{\alpha}] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X,x)}([\gamma])$$

por lo que es su inversa. Hemos encontrado por tanto un homomorfismo biyectivo, luego $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$ $\square$