Tema 2: Derivación e integración numérica
Segunda parte: integración numérica

Métodos Numéricos II

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2024/25

Fórmulas de integración numérica o de cuadratura

Las de tipo interpolatorio son de la forma

$$L(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) \tag{1}$$

o bien de la forma más general

$$L(f) = \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) \tag{2}$$

donde $\omega(x)$ es una función peso[1] no negativa, integrable, y tal que el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde se anula es de medida nula. La fórmula sin peso (1) puede considerarse como caso particular de (2) con $\omega(x) = 1$.

[1]Una función peso es un artilugio matemático que se utiliza en sumas, integrales o promedios para dar mayor importancia (peso) a unos elementos frente a otros en el resultado final. El resultado es una suma, integral o media *ponderada*. Se suelen usar en estadística y análisis, y tanto en dominios discretos como continuos.

Fórmulas de integración numérica o de cuadratura

Además de datos lagrangianos (valores de la función en nodos) también pueden usarse datos tipo Hermite (valor y derivada en nodos) e incluso derivadas de orden superior. Por sencillez nos centraremos en datos lagrangianos.

Los pesos α_i pueden obtenerse en las fórmulas de integración de tipo interpolatorio por varias vías.

Se describen a continuación tres:

1. integrando los polinomios de Lagrange,
2. obligando exactitud,
3. integrando el interpolante.

Obtención de fórmulas de integración numérica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f) \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R(f)$$

- **Integrando los polinomios fundamentales de Lagrange**

$$\alpha_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx \text{ o bien } \alpha_i = \int_a^b \ell_i(x)\,\omega(x)\,dx$$

Ejemplo

Vemos cada uno de los métodos para la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + R(f).$$

Obtención de fórmulas de integración numérica

- **Obligando exactitud** en $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} \int_a^b \omega(x)\,dx \\ \int_a^b x\,\omega(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n\,\omega(x)\,dx \end{pmatrix}$$

  cuya matriz de coeficientes es de Vandermonde, y por tanto la solución existe y es única $\Leftrightarrow$ los nodos usados son distintos entre sí.

- **Integrando el interpolante**.
  Si p es el interpolante de f entonces $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
  Al calcular $\displaystyle\int_a^b p(x)\,dx$ sale una combinación lineal de $p(x_i)$ cuyos coeficientes son los pesos de la fórmula.

Ejemplo (usando polinomios de Lagrange)

Para la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + R(f)$$

Los polinomios de Lagrange asociados a los nodos $\{-1, 0, 1\}$ son

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_{-1}^{1} \ell_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-x)\,dx = \frac{1}{3} \\
\alpha_1 &= \int_{-1}^{1} \ell_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}\,dx = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx = \frac{4}{3} \\
\alpha_2 &= \int_{-1}^{1} \ell_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x)\,dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

y la fórmula resulta ser

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right) + R(f)$$

Ejemplo (imponiendo exactitud)

- Exacta en 1: hacemos $f(x) \equiv 1$ y se tiene

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

- Exacta en x: hacemos $f(x) = x$ y se tiene

$$-\alpha_0 + \alpha_2 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

- Exacta en x^2: hacemos $f(x) = x^2$ y se tiene

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

Y la solución del sistema abreviado

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \text{ es } \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{3} \\ \alpha_1 = \frac{4}{3} \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ejemplo (con el polinomio de interpolación)

El polinomio de interpolación se puede obtener por la fórmula de Newton mediante la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{r|l l l}
-1 & f(-1) & & \\
 & & f(0)-f(-1) & \\
0 & f(0) & & \frac{1}{2}(f(1)-2f(0)+f(-1)) \\
 & & f(1)-f(0) & \\
1 & f(1) & &
\end{array}$$

El polinomio de interpolación es:

$$p(x) = f(-1) + (f(0) - f(-1))(x+1) + \frac{1}{2}(f(1) - 2f(0) + f(-1))x(x+1)$$

e integrando el interpolante resulta

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} p(x)\,dx &= 2f(-1) + 2(f(0) - f(-1)) + \frac{1}{3}(f(1) - 2f(0) + f(-1)) \\
&= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)
\end{aligned}$$

como cabía esperar.

Ejemplo

Probamos la fórmula con varias funciones distintas:

$f(x)$	$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ exacto	aproximado
e^x	2.350402387287603	2.362053756543496
x^2	0.666666666666667	0.666666666666667
x^4	0.4	0.666666666666667
$\cos x$	1.682941969615793	1.693534870578760
$\log(5+x)$	3.205379370888768	3.205268493361449
$(x^2+1)^{-1}$	1.570796326794897	1.666666666666667

Ejercicio

Repetir los cálculos del ejemplo anterior para obtener una fórmula del tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,(1-x^2)\,dx = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1) + R(f).$$

Error en las fórmulas de integración

En toda fórmula de tipo interpolatorio el error será

$$R(f) = L(f) - L(p) = L(E)$$

siendo p el interpolante y $E = f - p$ el error de interpolación.

Usando la expresión del error de la fórmula de Newton se tiene

$$R(f) = \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x]\,\Pi(x)\,\omega(x)\,dx$$

donde $\Pi(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.

Error en las fórmulas de integración

Para facilitar una expresión del error más práctica se usa el

Teorema (del valor medio integral generalizado)

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $g(x)$ es integrable y no cambia de signo en $[a,b]$, entonces existe $\mu \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\mu)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Entonces, si $\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f[x_0,\dots,x_n,x]\,\Pi(x)\,\omega(x)\,dx \\ &= f[x_0,\dots,x_n,\mu]\int_a^b \Pi(x)\,\omega(x)\,dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \Pi(x)\,\omega(x)\,dx \end{aligned}$$

siempre que f sea suficientemente derivable. Pero los nodos x_i suelen estar dentro del intervalo $[a,b]$ y por tanto $\Pi(x)$ cambia de signo en $[a,b]$.

Por ejemplo, si $n = 2$ y $\{x_0, x_1, x_2\} = \{a, x_1, b\}$ con $a < x_1 < b$, entonces $\Pi(x) = (x - a)(x - x_1)(x - b)$ cambia de signo en x_1 y no podemos aplicar el teorema del valor medio integral para sacar $f[a, x_1, b, x]$ fuera del integrando.

Pero teniendo en cuenta que

$$f[a, x_1, x_1, b, x] = \frac{f[a, x_1, b, x] - f[a, x_1, x_1, b]}{x - x_1}$$

se podría escribir

$$f[a, x_1, b, x] = f[a, x_1, x_1, b] + f[a, x_1, x_1, b, x](x - x_1)$$

con lo que

$$\begin{aligned} R(f) = \cdots = & f[a, x_1, x_1, b] \int_a^b \Pi(x)\,\omega(x)\,dx \\ & + \int_a^b f[a, x_1, x_1, b, x](x - x_1)\Pi(x)\,\omega(x)\,dx \end{aligned}$$

y se puede aplicar el teorema en el segundo sumando puesto que $(x - x_1)\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$.

En general, para cada $x_i \in]a,b[$ en donde $\Pi(x)$ cambia de signo, podemos partir de

$$f[\ldots,x_i,x_i,\ldots,x] = \frac{f[\ldots,x_i,\ldots,x] - f[\ldots,x_i,x_i,\ldots]}{x - x_i},$$

para poner

$$f[\ldots,x_i,\ldots,x] = f[\ldots,x_i,x_i,\ldots] + f[\ldots,x_i,x_i,\ldots,x](x - x_i)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} L(f[\ldots,x_i,\ldots,x]\Pi) &= f[\ldots,x_i,x_i,\ldots]L(\Pi) \\ &+ L(f[\ldots,x_i,x_i,\ldots,x](x - x_i)\Pi) \end{aligned}$$

en donde se ha eliminado un cambio de signo.

Ejemplo

Veamos el cálculo del error para la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) + R(f)$$

De la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación se tiene que el error de interpolación es

$$E(f) = f[-1,0,1,x](x+1)(x-0)(x-1),$$

luego el error de la fórmula de integración será

$$R(f) = \int_{-1}^{1} f[-1,0,1,x](x+1)(x-0)(x-1)\,dx$$

en el que no se puede aplicar directamente el teorema el valor medio integral porque el factor $(x-0)$ provoca un cambio de signo en $\Pi(x) = (x+1)(x-0)(x-1)$ en el intervalo $[-1,1]$.

Desarrollamos la diferencia dividida

$$f[-1,0,0,1,x] = \frac{f[-1,0,1,x] - f[-1,0,0,1]}{x-0}$$

para poner

$$f[-1,0,1,x] = f[-1,0,0,1] + f[-1,0,0,1,x](x-0)$$

y sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned}
R(f) = &\int_{-1}^{1} f[-1,0,0,1](x+1)(x-0)(x-1)\,dx \\
&+ \int_{-1}^{1} f[-1,0,0,1,x](x+1)(x-0)^2(x-1)\,dx \\
=&f[-1,0,0,1]\int_{-1}^{1}(x+1)(x-0)(x-1)\,dx \\
&+ f[-1,0,0,1,\mu]\int_{-1}^{1}(x+1)(x-0)^2(x-1)\,dx \\
=&0 + \frac{f^{iv}(\xi)}{4!}\left(-\frac{4}{15}\right) \;=\; -\frac{f^{iv}(\xi)}{90}.
\end{aligned}$$

Con esto, la versión final de la fórmula es

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) - \frac{f^{iv}(\xi)}{90}.$$

Nota: En los casos en que hay dos nodos o más en el interior del intervalo de integración, el cálculo del error se suele complicar, resultando una expresión que involucra derivadas de varios órdenes. En algunos casos particulares existen otras técnicas para la obtención de una expresión más cómoda del error.

Fórmulas simples usuales

En lo que sigue se supondrá f suficientemente derivable y $\xi \in [a, b]$.

Fórmula de	$\int_a^b f(x)\,dx \approx$	$R(f)$	Exacta
Rectángulo izquierda	$(b-a)f(a)$	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$	$\mathbb{P}_0$
Rectángulo derecha	$(b-a)f(b)$	$-\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$	$\mathbb{P}_0$
Punto medio	$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$	$\mathbb{P}_1$ (*)
Trapecio	$\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$	$\mathbb{P}_1$
Simpson[2]	$\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{iv}(\xi)$	$\mathbb{P}_3$ (*)

***** El grado real de exactitud de la fórmula es superior al que le corresponde por ser de tipo interpolatorio.

Fórmulas simples usuales

Vemos cómo se deducen algunas de ellas.

- **Fórmula del rectángulo izquierda:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha_0 f(a) + R(f)$$

Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_0 \Rightarrow$ exacta en $f \equiv 1$.

$$\int_a^b dx = \alpha_0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 = b - a$$

El error es

$$R(f) = \int_a^b f[a,x](x-a)\,dx = f[a,\mu]\int_a^b (x-a)\,dx = f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2}$$

luego la fórmula del rectángulo izquierda queda como

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi).$$

- **Punto medio:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha_0 f(m) + R(f) \quad \text{con} \quad m = \frac{a+b}{2}$$

Exacta en $\mathbb{P}_0$:
$$\int_a^b dx = \alpha_0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 = b - a$$

El error es
$$R(f) = \int_a^b f[m,x](x-m)\,dx$$

donde el cambio de signo en m obliga a desdoblar:

$$f[m,x] = f[m,m] + f[m,m,x](x-m)$$

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f[m,m](x-m)\,dx + \int_a^b f[m,m,x](x-m)^2\,dx \\ &= 0 + f[m,m,\mu]\int_a^b (x-m)^2\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\,\frac{(b-a)^3}{12} \end{aligned}$$

luego la fórmula del punto medio queda como

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(m) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

- **Trapecio:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b) + R(f)$$

Exacta en $1, x \;\Rightarrow\; \alpha_0 + \alpha_1 = b - a,\ \alpha_0 a + \alpha_1 b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.
El sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{tiene la solución} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{b-a}{2} \\ \alpha_1 = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

El error es

$$R(f) = \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)\,dx = -\frac{f''(\xi)}{2}\frac{(b-a)^3}{6}$$

luego la fórmula del trapecio queda como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

- **Simpson.**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(m) + \alpha_2 f(b) + R(f) \quad \text{con} \quad m = \frac{a+b}{2}$$

Exacta en $1, x, x^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & m & b \\ a^2 & m^2 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \end{pmatrix} \quad \text{tiene la solución} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{6}(b-a) \\ \alpha_1 = \frac{4}{6}(b-a) \\ \alpha_2 = \frac{1}{6}(b-a) \end{cases}$$

pero es muy laborioso de resolver de forma manual debido a la presencia de variables a y b en las expresiones.

Se puede simplificar haciendo un cambio temporal de variable

$$x = a + (b-a)\frac{t+1}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2}dt, \qquad x \in [a,b] \text{ si } t \in [-1,1]$$

o recíprocamente

$$t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1, \quad dt = \frac{2}{b-a}dx, \qquad t \in [-1,1] \text{ si } x \in [a,b].$$

Este cambio de variable transforma los puntos $a, m, b \in [a,b]$ en $-1, 0, 1 \in [-1,1]$ respectivamente y nos permite escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^1 f\left(a + (b-a)\frac{t+1}{2}\right)\frac{b-a}{2}\,dt$$

y si definimos

$$g(t) = \frac{b-a}{2} f\left(a + (b-a)\frac{t+1}{2}\right)$$

entonces la equivalencia queda como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^1 g(t)\,dt$$

Podemos aplicar la fórmula de cuadratura que anteriormente sirvió de ejemplo

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1) - \frac{g^{iv}(\xi)}{90}$$

y deshacer el cambio

$$\cdots = \frac{1}{3}\frac{b-a}{2}f(a) + \frac{4}{3}\frac{b-a}{2}f(m) + \frac{1}{3}f(b) - \frac{b-a}{2}\frac{f^{iv}(\eta)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

para finalmente obtener la fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b)) - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{iv}(\eta).$$

Fórmulas de Newton-Cotes

Se trata de fórmulas basadas en una distribución equiespaciada de nodos en en intervalo de integración.

Siendo $h = \dfrac{b-a}{n}$, las fórmulas de Newton-Cotes[3] son

- **Cerradas:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(a+ih) + R(f)$,
- **Abiertas:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} a_i f(a+ih) + R(f)$.

Trapecio y Simpson son las dos primeras fórmulas de Newton-Cotes cerradas y punto medio es la primera abierta.

[3] Roger Cotes $(1682 - 1716)$, matemático inglés que trabajó estrechamente con Isaac Newton.

Fórmulas de Newton-Cotes

Otras fórmulas:

- Cerrada con 4 nodos ($n = 3$, exacta en $\mathbb{P}_3$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi)$$

- Cerrada con 5 nodos ($n = 4$, exacta en $\mathbb{P}_5$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{90}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{vi}(\xi)$$

- Abierta con 2 nodos ($n = 3$, exacta en $\mathbb{P}_1$)

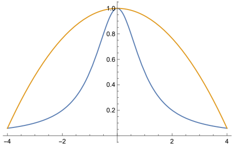
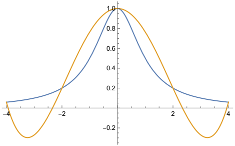
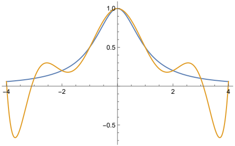
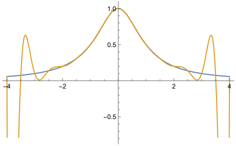
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f_1 + f_2) + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$$

La expresión del error en fórmulas que usan dos o más nodos interiores a $[a, b]$ no es fácil de obtener. Véase el libro de Isaacson y Keller "Analysis of Numerical Methods", Dover, New York, 1994.

Comportamiento asintótico de las fórmulas de Newton-Cotes

Al ir aumentando el número de nodos de la distribución, es decir, cuando $n \to \infty$, el término de error $R(f)$ podría no tender a cero.

Un ejemplo clásico (Hildebrand 1956): $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+x^2}$.

Número de nodos	aprox. integral	Gráfica
3	5.4902	
5	2.27765	
9	1.94109	
17	-0.302051	

Comportamiento asintótico de las fórmulas de Newton-Cotes

Comportamientos como éste desaconsejan el uso de fórmulas de Newton-Cotes con un elevado número de nodos. En su lugar es mucho más conveniente emplear fórmulas compuestas, que no sufren este efecto y además requieren menos esfuerzo para su diseño.

Fórmulas compuestas

Para evitar el diseño de fórmulas con muchos nodos y su posible mal comportamiento asintótico, se divide el intervalo de integración y se aplica en cada subintervalo una fórmula simple, usualmente del mismo tipo.

Sea $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, no necesariamente uniforme aunque lo usual es que lo sea.
Ahora x_i indican los nodos de la partición y n el número de subintervalos en que se divide el intervalo $[a, b]$. No se deben confundir con los nodos de cada una de las fórmulas simples que se usen en los subintervalos, ni con su orden, relacionado con su grado de exactitud.

Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} F_i + \sum_{i=1}^{n} R_i(f)$$

donde F_i es una fórmula simple aplicada en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $R_i(f)$ su correspondiente término de error.

Fórmulas compuestas

Ejemplo

La fórmula compuesta asociada a la del rectángulo derecha para una partición uniforme con $h = x_i - x_{i-1}\ \forall i$ es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} h f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{h^2}{2} f'(\mu_i).$$

Ejercicio

Escribe la fórmula compuesta asociada a la del punto medio y a la del trapecio.

Error en las fórmulas compuestas

Por lo general para una partición uniforme de $[a, b]$ se tiene

$$R_i(f) = Cf^{(k)}(\mu_i) \qquad \mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

con C constante.

En tal caso se puede escribir, si f es de clase k,

$$R(f) = \sum_{i=1}^{n} R_i(f) = C\sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(\mu_i) = Cn\sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\mu_i)}{n} = Cnf^{(k)}(\xi)$$

con $\xi \in [a, b]$, puesto que el último sumatorio es un valor medio alcanzable por $f^{(k)}$, en virtud del teorema del valor medio para una función continua.

Error en las fórmulas compuestas

Ejemplo

Para la fórmula compuesta del rectángulo derecha

$$R(f) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{h^2}{2} f'(\mu_i) = -\frac{nh^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(\mu_i)}{n} = -\frac{(b-a)h}{2} f'(\xi).$$

Ejercicio

Estimar el error en la fórmula compuesta del punto medio y del trapecio.

Fórmulas compuestas usuales

Consideremos una partición uniforme con $h = \dfrac{b-a}{n}$ y:

$$x_i = a + ih, \qquad f_i = f(x_i),$$
$$x_{i+\frac{1}{2}} = a + (i+\tfrac{1}{2})h = x_i + \tfrac{h}{2}, \qquad f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}})$$

F. compuesta	$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \approx$	$R(f)$
Rect. izda.	$\displaystyle h\sum_{i=0}^{n-1} f_i$	$\dfrac{(b-a)h}{2} f'(\xi)$
Rect. dcha.	$\displaystyle h\sum_{i=1}^{n} f_i$	$-\dfrac{(b-a)h}{2} f'(\xi)$
Pto. medio	$\displaystyle h\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi)$
Trapecio	$\displaystyle \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f(b)\Big)$	$-\dfrac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$
Simpson	$\displaystyle \frac{h}{6}\Big(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f(b)\Big)$	$-\dfrac{(b-a)h^4}{2880} f^{iv}(\xi)$
Simpson	$\displaystyle \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2i} + f(b)\Big)$	$-\dfrac{(b-a)h^4}{180} f^{iv}(\xi)$

Fórmulas compuestas usuales

Respecto de la segunda versión de la fórmula compuesta de Simpson, en realidad es la misma pero con un cambio de notación.

Dado que en la primera versión compuesta se usan los nodos

$$\{x_0, x_{\frac{1}{2}}, x_1, x_{\frac{3}{2}}, \dots, x_{n-\frac{1}{2}}, x_n\} \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1},$$

entonces es más cómodo denominarlos como

$$\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}}\} \quad \text{con} \quad \tilde{n} = 2n,\ h = \frac{b-a}{\tilde{n}}.$$

De este modo, $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_1 = x_{\frac{1}{2}}$, $\tilde{x}_2 = x_1$ y $\tilde{x}_i = x_{\frac{i}{2}}\ i = 0, \dots, \tilde{n}$.

Una vez hecha la conversión, se quitan todas las tildes (ya no hacen falta) y se asume que n es par. Esta es la versión más extendida de la fórmula:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = & \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right) \\ & - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{iv}(\xi)\end{aligned}$$