



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

ANÁLISIS FUNCIONAL

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

0.1. Espacios de Hilbert	8
0.2. Espacios Duales	12
0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert	13

Repaso

Definición 0.1 (Espacio normado). E un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que E es un **espacio normado**. Podemos definir además una función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$ a la que llamaremos **distancia**.

Decimos que un espacio E es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente. Si E es un espacio normado completo, entonces $(E, \|\cdot\|)$ es un **espacio de Banach**.

Definición 0.2 (Espacio prehilbertiano). Sea H es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo $x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z) \\(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha(x, y) + \beta(x, z)\end{aligned}$$

2. **Simétrica:** $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:** $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:** $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Las dos últimas propiedades se pueden resumir en $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio prehilbertiano**.

Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ que es claramente una norma.

Si $\|\cdot\|$ es completa, diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo. Los siguientes espacios son de Banach:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, donde $|x| = |(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$. Además es de Hilbert ya que $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ es un producto escalar.
3. Dado¹ $A \subset \mathbb{R}^N$ tomamos $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada en } A\}$. Podemos definir una norma en este espacio como

$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

4. Tomamos $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en K denotado por $\mathcal{C}(K)$ y el espacio $(K, (\cdot, \cdot))$, donde

$$(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$$

es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos

$$\|f\| = \left(\int_K f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

Ejemplo (El espacio del punto 4 No es de Hilbert). Veámoslo con un contraejemplo. Tomamos $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y podemos definir $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que f_n^2 viene dada por la siguiente gráfica:



De esta forma tenemos que

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x) dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$$

y vemos que

$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \rightarrow 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \rightarrow 1 \end{cases}$$

Con esto tenemos que la sucesión $\{f_n\} \rightarrow 0$ en $(\mathcal{L}([0, 1]), (\cdot, \cdot))$ (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

¹la b de \mathcal{C}_b viene de *bounded* (acotado en inglés)

Ejemplo. Consideramos $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$ con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

Ejemplo. Sea $1 \leq p < \infty$. Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de p de la siguiente forma²:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < \infty \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |g|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ con $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p}$ ($x, y = \sum_{i=1}^N x_i y_i$).
2. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_{\infty})$ con $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, N\}$
3. Sea $p = \infty$. Tenemos

$$L^{\infty} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma³:

$$\sup_{\Omega} |f| = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

²donde asumimos que $1/\infty = 0$

³a.e. viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

En algunos libros se denota por *ess sup*.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \sup_{\Omega} |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup_{\Omega} |f|$ es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con $p = \infty$, $p' = 1$ nos dice que para $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$ es una norma en H .

Ejemplo. Consideramos $1 \leq p < \infty$ y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$$

entonces $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar $x \in \mathcal{L}^p$, $y \in \mathcal{L}^{p'}$ y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \quad \text{y} \quad \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|x\|_{\mathcal{L}^p} \|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para $p = 2$ tenemos que $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert. Para $p = \infty$ podemos definir $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$ y con $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Banach.

Ejemplo. Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$ y es un subespacio de \mathcal{L}^∞ .
2. Podemos tomar otro subespacio de este, $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$ que de nuevo es un subespacio de \mathcal{L}^∞ .

0.1. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un par $(H, (\cdot, \cdot))$ donde H es un espacio vectorial y (\cdot, \cdot) es una función bilineal simétrica y definida positiva.

Proposición 0.1. Si H es prehilbertiano entonces se tiene:

1. Se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H$$

2. Se verifica la desigualdad del paralelogramo

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad \forall u, v \in H$$

Teorema 0.2 (Teorema de la Proyección). Supongamos que H es un espacio Hilbertiano y $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H \exists! u \in K$ tal que $\|f - u\| = \text{dist}(f, K)$. Además, dicho u está caracterizado por:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Notaremos a dicho u por $P_K f$ y **diremos que es la proyección de f sobre K**

Demostración. En primer lugar tendremos que ver que $d(f, K) = \inf\{\|f - v\| : v \in K\}$ existe y se alcanza. Al ser un ínfimo de cantidades positivas sabemos que existe y nos quedará ver que se alcanza.

Por definición de ínfimo tenemos que

$$\exists \{v_n\} \subset K \text{ tal que } \|f - v_n\| \rightarrow d$$

Aplicando la desigualdad del paralelogramo para $u = f - v_n$ y $v = f - v_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f - v_n + f - v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{f - v_n - (f - v_m)}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) \\ \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) \\ \frac{\|v_m - v_n\|^2}{4} &= \frac{1}{2} (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \\ \|v_m - v_n\|^2 &= 2 (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4 \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \end{aligned}$$

Como K es convexo y $v_n, v_m \in K$ tendremos que $d \frac{v_n + v_m}{2} \in K$ y además $\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d$ por lo que tenemos

$$\|v_m - v_n\|^2 = 2 (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4d^2$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos que $\|f - v_n\| \rightarrow d$ y $\|f - v_m\| \rightarrow d$ por lo que el término de la derecha tenderá a 0 cuando $n, m \rightarrow \infty$. Esto significa que la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy.

Como H es de Hilbert, en particular es completo por lo que sabemos que $\{v_n\} \rightarrow u$ en $(H, (\cdot, \cdot))$.

Como además $\{v_n\} \subset K$ y K es cerrado, el límite $u \in K$. Tendremos que

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = \|f - u\|$$

Y tendremos probada la existencia de u .

Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la segunda parte del teorema, es decir

$$\left. \begin{array}{l} u \in K \\ \|f - u\| = \text{dist}(f, K) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

Veamos las dos implicaciones:

\Rightarrow) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f - u\| \leq \|f - v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w . Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0, 1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1 - t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f - u\|^2 \leq \|f - (1 - t)u - tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned} \|f - (1 - t)u - tw\|^2 &= (f - (1 - t)u - tw, f - (1 - t)u - tw) = \\ &= \|f - u\|^2 + t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leq t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leq t\|w - u\|^2 - 2(f - u, w - u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leq -2(f - u, w - u) \Rightarrow (f - u, w - u) \leq 0$$

Se deja como ejercicio demostrar la otra implicación y la unicidad de u . □

Proposición 0.3. La aplicación dada por

$$\begin{aligned} P_K : H &\rightarrow H \\ f &\mapsto P_K f \end{aligned}$$

es Lipschitziana, es decir, $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$ para todo $f_1, f_2 \in H$.

Demostración. Tomamos $f_1, f_2 \in H$ y consideramos $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$ y tenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, v - u_1) &\leq 0 \quad \forall v \in K \\ (f_2 - u_2, v - u_2) &\leq 0 \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, u_2 - u_1) &\leq 0 \\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Aprovechando la bilinealidad tenemos que

$$(f_2 - u_2, u_2 - u_1) \geq 0 \Rightarrow ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) \leq 0$$

Y además

$$\begin{aligned} ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) &= ((f_1 - f_2) - (u_1 - u_2), u_2 - u_1) = \\ &= (f_1 - f_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \end{aligned}$$

Y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\|^2 &= (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq -(f_1 - f_2, u_2 - u_1) \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \|u_2 - u_1\| \Rightarrow \|u_2 - u_1\| \leq \|f_1 - f_2\| \end{aligned}$$

□

Corolario 0.3.1 (Proyección ortogonal). Sea H un espacio de Hilbert y $\emptyset \neq M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces se tiene que

$$\forall f \in H \quad \exists u \in M \text{ tal que } \|f - u\| = \text{dist}(f, M)$$

Además, $u = P_M f$ está caracterizado por

-) $u \in M$
-) $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$

Y se tiene que $P_M : H \rightarrow H$ es lineal.

Demostración. Comencemos con la primera parte del corolario. Sabemos que $u \in K$ y $(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M$ del teorema de la proyección. Tendremos que probar la equivalencia entre esto y $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$ cuando M es un subespacio vectorial. Veamos ambas implicaciones:

\Leftarrow) Evidente por ser M un espacio vectorial.

\Rightarrow) Tenemos que $(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M$. Tomamos ahora $v \in M$, $t \neq 0$ y como M es un subespacio vectorial, entonces $\frac{v}{t} \in M$ por lo que

$$(f - u, \frac{v}{t} - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, t \neq 0$$

Hagamos una distinción de casos:

$$\begin{cases} \text{Si } t > 0 & \Rightarrow (f - u, v - tu) \leq 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ \text{Si } t < 0 & \Rightarrow (f - u, v - tu) \geq 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Tomando límite cuando t tiende a 0

$$\begin{cases} (f - u, v) \leq 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ (f - u, v) \geq 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Y por tanto $(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

La demostración de que P_M es lineal se deja como ejercicio.

□

0.2. Espacios Duales

Definición 0.3 (Dual algebraico). Sea E un espacio vectorial, llamamos **dual algebraico** al siguiente espacio:

$$E^\# = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$$

Definición 0.4 (Dual topológico). Dado $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, llamamos **dual topológico** a

$$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Observación. Si tenemos $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios normados y una aplicación $T : E \rightarrow F$ lineal. Son equivalentes:

- (i) T es continua
- (ii) T es continua en 0
- (iii) $T(B_E(0, 1))$ es un conjunto acotado de F , es decir que $\exists R > 0 : \|T(x)\|_F \leq R \quad \forall x \in E \text{ con } \|x\| < 1$
- (iv) T es acotada, es decir, $T(A)$ es acotada en F para todo $A \subset E$ que esté acotado
- (v) T es Lipschitziana.

Demostración.

(v) \Rightarrow (iv)) Trivial

(iv) \Rightarrow (iii)) Trivial

(iii) \Rightarrow (i)) Trivial

(i) \Rightarrow (ii)) Trivial

(ii) \Rightarrow (iii)) Sabemos que T es continua en 0. Luego para $\varepsilon = 1 \quad \exists \delta > 0$ tal que $\|x\|_E < \delta$ luego $\|T(x)\|_F < 1$. Tenemos que

$$\|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$$

luego $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. De esta forma tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\| \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} \right) \right\| = \frac{2}{\delta} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

(iii) \Rightarrow (vi)) Sabemos que $A \subset E$ está acotado, luego $T(A)$ también, es decir que $T(A) \subset B(0, M)$ para cierto $M > 0$. Tenemos que probar que

$$T(A) \subset T(B(0, R)) \subset B(0, M)$$

Dado $x \in A$ tal que $\|x\| \leq R$, como además es Lipschitziana tenemos que

$$\|T(x)\| \leq N\|x\| \leq N\|x\| < NR = M$$

y tenemos la inclusión que queríamos probar.

(iv) \Rightarrow (ii)) Por hipótesis tenemos que si $\|x\| < 1$ entonces $\|T(x)\| \leq R$ y queremos probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces $\|T(x)\| < \varepsilon$. Tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$ y suponiendo que $\|x\| < \delta$ tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|} \cdot 2\|x\|\right) \right\| = 2\|x\| \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right) \right\| \leq 2\|x\| R < 2\delta R = \varepsilon$$

y ya lo tenemos. □

Definición 0.5. Dado E un espacio vectorial, consideramos su dual topológico E^* y definimos la norma

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \quad \forall f \in E^*$$

Ejercicio 0.2.1. Demostrar que $\|f\|_{E^*}$ es una norma.

Ejercicio 0.2.2. Demostrar que $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ es de Banach.

Ejercicio 0.2.3. Demostrar que $\|f\|_{E^*} = \inf\{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E\}$

0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

Observación. Es elemental que si tomo $v \in H$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_v : H &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = (u, v) \end{aligned}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y $\|\varphi_v\|_{H^*} = \|v\|_H$. Además, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : H &\rightarrow H^* \\ v &\mapsto \phi_v \end{aligned}$$

que será lineal por lo que tenemos que un espacio de Hilbert y su dual topológico serán isomorfos.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. □

Teorema 0.4 (Teorema de Riesz-Fischer). Para toda $\varphi \in H^*$, se tiene que $\exists v \in H$ tal que $\varphi(u) = (u, v) \quad \forall u \in H$. Además, se tiene que $\|\varphi\|_{H^*} = \|v\|_H$

Ejercicio 0.3.1. Sea H un espacio de Hilbert, y tomamos un elemento cualquiera $y \in H$. Consideramos $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_y(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$. Entonces se tiene que f_y es lineal, y además

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|y\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in H \Rightarrow f_y \text{ acotada}$$

con lo que $\|f_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H$.

Con la definición de la norma tenemos que

$$\|f_y\|_{H^*} = \sup\{|(x, y)| : x \in H, \|x\|_H \leq 1\} \leq \|y\|_H \sup\{\|x\|_H : x \in H, \|x\|_H \leq 1\} = \|y\|_H$$

Comenzamos con el caso $y \neq 0$ y tomamos $x = \frac{y}{\|y\|_H}$ y tenemos que

$$|(x, y)| = \left| \left(\frac{y}{\|y\|_H}, y \right) \right| = \frac{1}{\|y\|_H} (y, y) = \|y\|_H$$

por lo que hemos visto que se alcanza el máximo por lo que $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. Veamos ahora qué sucede cuando $y = 0$. En este caso tendremos $f_y(x) = (x, 0)$ y por tanto se tiene directamente que $\|f_y\|_{H^*} = 0 = \|y\|_H$.

La linealidad se deja como ejercicio.

Teorema 0.5 (Teorema de representación del dual de un espacio de Hilbert de Riesz-Fréchet). Sea H un espacio de Hilbert, entonces $\forall f \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H$. Además, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Demostración. Solo tenemos que probar la primera parte, pues la segunda es consecuencia del ejercicio anterior. Para ello tomamos $f \in H^*$ y tenemos dos casuísticas:

-) Si $f = 0$, entonces puedo tomar $y = 0$ y es evidente.
-) Si $f \neq 0$, entonces tenemos que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un subespacio vectorial cerrado (imagen inversa de un cerrado por una función continua⁴ y lineal⁵). Podemos aplicar entonces el teorema de la proyección ortogonal. Sabemos que $\exists z_0 \in H \setminus M$. Llamamos $z_1 = P_M z_0 \in M$ y tenemos que $(z_0 - z_1, v) = 0$ para todo $v \in M$. Definimos ahora

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|_H}$$

y está bien definido ya que $z_0 \notin M$ y $z_1 \in M$ luego $z_0 - z_1 \neq 0$. Es claro que $\|z\| = 1$ y veamos cuánto vale (z, v) para todo $v \in M$:

$$(z, v) = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|} (z_0 - z_1, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

Veamos que $z \notin M$. Sabemos que M es un espacio vectorial y si $z_0 - z_1$ estuviera en M , entonces $z_0 \in M$ pero sabemos que $z_0 \notin M$ luego $z \notin M$ o equivalentemente $f(z) \neq 0$ (por la definición de M).

Tenemos ahora que para todo $x \in H$ tenemos que $x - \frac{f(x)}{f(z)}z \in M = \ker f$ ya que

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}f(z) = 0$$

⁴nos dice que es cerrado.

⁵nos dice que es espacio vectorial.

luego $f(x) = f\left(\frac{f(x)}{f(z)}z\right)$ lo que nos dice que

$$0 = \left(z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = (z, x) - \frac{f(x)}{f(z)} \Rightarrow f(x) = f(z)(z, x) = (x, f(z)z)$$

Por tanto, tomando $y = f(z)z$ tenemos la existencia probada. Nos queda por ver la unicidad. Para ello, supongamos que existen $y_1, y_2 \in H$ tal que $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$ para todo $x \in H$. Con esto tendríamos que $(x, y_1 - y_2) = 0$ para todo $x \in H$. Elijo $x = y_1 - y_2$ y tenemos que $0 = (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2$ por lo que finalmente $y_1 = y_2$.

□

Nos planteamos ahora qué ocurre cuando tenemos un espacio de Banach E y un subespacio $G \subset E$. Tenemos además una aplicación $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Lo que nos plantemos ahora es si existe una aplicación $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua tal que su restricción $f|_G = g$.

Que g sea continua es equivalente a decir que $|g(x)| \leq k\|x\|$ para todo $x \in G$ y queremos ver si se verifica la continuidad de f , es decir que $|f(x)| \leq k\|x\|$ para todo $x \in E$.

Ejercicio 0.3.2. Definimos $p(x) = k\|x\| \quad \forall x \in E$. Probar que se verifican las siguientes propiedades:

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in E$

Definición 0.6. Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación \leq de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva). Entonces

-) un subconjunto $Q \subset P$ es **totalmente ordenado** si para cualesquiera dos elementos $a, b \in Q$ se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$ (o ambas).
-) Si $Q \subset P$ y $x \in P$, diremos que x es **cota superior** de Q si $a \leq x$ para todo $a \in Q$.
-) Si $m \in P$, entonces diremos que m es un **elemento maximal** de P si

$$\{x \in P : m \leq x\} = \{m\}$$

es decir, no hay ningún elemento de P excepto m que esté por encima de m .

-) Diremos que P es **inductivo** si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

Lema 0.6 (Lema de Zorn). Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación de orden \leq . Entonces se tiene que si P es inductivo, entonces P tiene un elemento máximo.

Teorema 0.7 (versión analítica del teorema de Hanh-Banach). Supongamos que E es un espacio vectorial y tenemos $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se verifica

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E \\ p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal verificando

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$$

Entonces se tiene que $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal verificando

$$\begin{aligned} f(x) &\leq p(x) \quad \forall x \in E \\ f|_G &= g \end{aligned}$$

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$P = \left\{ h : D(h) \rightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h \text{ lineal, } h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \end{array} \right\}$$

y lo llamaremos **conjunto de extensiones** de g . Sabemos que $P \neq \emptyset$ ya que $g \in P$ (es una extensión de sí misma en el espacio P). Necesitamos ahora definir una relación de orden. Lo haremos de la siguiente forma

$$h_1 \leq h_2 \iff \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases} \quad \forall h_1, h_2 \in P$$

y diremos que h_2 es una **extensión** de h_1 . Se deja como ejercicio demostrar que \leq es una relación de orden.

Probemos ahora que P es inductivo. Para ello tendremos que probar que cualquier subconjunto suyo que esté totalmente ordenado tiene una cota superior. Sea $Q \subset P$ totalmente ordenado. Consideramos

$$V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$$

y definimos la aplicación

$$\begin{aligned} h_0 : V_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_0(x) = h(x) \quad \text{si } x \in D(h) \end{aligned}$$

Está bien definida como consecuencia de que el conjunto sea totalmente ordenado. Se deja como ejercicio demostrar que V_0 es un subespacio vectorial, que h_0 está bien definida, que es lineal y que $h_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in V_0$.

Con esto tengo que h_0 es una extensión de todas las $h \in Q$, es decir, $h \leq h_0$ para todo $h \in Q$ lo que nos dice que h_0 es la cota superior de Q . Con esto podemos concluir que P es inductivo.

Tenemos todas las hipótesis necesarias para aplicar el teorema de Zorn, que nos dice que $\exists f \in P$ elemento maximal de P , es decir,

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} G \subset D(f) \subset E \\ f \text{ lineal, } f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(f) \\ f|_G = g \end{cases}$$

Se deja como ejercicio demostrar que si f es maximal, entonces $D(f) = E$ (por contrarrecíproco).

Para ello supongamos que por contradicción se tuviera $D(f) \subsetneq E$ por lo que $\exists x_0 \in E \setminus D(f)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} D(f) \oplus x_0 \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x + tx_0 &\mapsto f(x) + t\alpha = \hat{f}(x + tx_0) \end{aligned}$$

Solo tendremos que ver que $\hat{f}|_{D(f)} = f$ y que $\hat{f}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$ para todo $x \in D(f)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Sabemos que Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} &\hat{f}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \quad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff \hat{f}(t_z + tx_0) \leq p(t_z + tx_0) \quad \forall z \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff t\hat{f}(z + x_0) \leq p(t(z + x_0)) = \begin{cases} tp(z + x_0) & t > 0 \\ -tp(-z - x_0) & t < 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} f(z) + \alpha = \hat{f}(z + x_0) \leq p(z + x_0) & t > 0, z \in D(f) \\ -f(z) - \alpha = -\hat{f}(z + x_0) \leq p(-z - x_0) & t < 0, z \in D(f) \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \alpha \leq -f(z) + p(z + x_0) \\ -f(z) - p(-z - x_0) \leq \alpha \end{cases} \quad \forall z \in D(f) \end{aligned}$$

Por lo que nos basta con demostrar lo siguiente

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leq \alpha \leq \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Podemos cambiar $-z$ por un $w \in D(f)$ cualquiera de la siguiente forma:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leq \alpha \leq \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Veamos que esta desigualdad se verifica. Para cualesquiera $z, w \in D(f)$

$$\begin{aligned} f(z) + f(w) &= f(z + w) \leq p(z + w) = p(z + x_0 - x_0 + w) \leq p(z + x_0) + p(w) - x_0 \Rightarrow \\ &f(w) - f(w - x_0) \leq -f(z) + p(z + x_0) \end{aligned}$$

y hemos probado que cualquier elemento del segundo conjunto es cota superior de todos los elementos del primer conjunto, lo que prueba la existencia del α probando lo buscado. \square

Observación. Sea E un espacio normado, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación no nula ($f \neq 0$) y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f lineal y continua, entonces

$$[f = \alpha] = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

es un hiperplano⁶ cerrado⁷.

Definición 0.7. Si $A, B \subset E$ es un espacio normado. Diremos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ **separa** A y B si

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Diremos que **separa estrictamente** A y B si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Teorema 0.8 (Primera forma geométrica del teorema de Hahn-Banach). Supongamos que E es un espacio normado, $A, B \subset E$ dos subconjuntos de E no vacíos, disjuntos, es decir, $A \cap B = \emptyset$, convexos y con A abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado H que separa A y B .

⁶basta con la linealidad (primer teorema de isomorfía)

⁷por ser f continua