



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

1. Espacios Recubridores	5
1.1. Levantamiento de aplicaciones	5
1.2. Transformación de recubridores	13
1.3. Existencia de espacios recubridores	25

1. Espacios Recubridores

Observación. A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

1.1. Levantamiento de aplicaciones

Observación. Vamos a tener en cuenta que si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

Demostración. Si O es abierto y A es una componente arcoconexa de O , entonces dado $a \in A$, como X es localmente arcoconexo tendremos que existe un U entorno arcoconexo de a tal que $U \subseteq O$. Como A es el mayor arcoconexo en O que contiene al punto a tendremos que $U \subseteq A$, luego A es abierto. \square

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$ y un punto $b_0 \in B$. Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto O que contiene a b_0 . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de O que contiene a b_0 podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

Lema 1.1 (Unicidad del levantamiento). Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $f_1, f_2 : X \rightarrow R$ continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, entonces $f_1 = f_2$.

Demostración. Para la demostración solo se necesita que X sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow f_1, f_2 & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f=p \circ f_1 = p \circ f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como X es conexo y tenemos que $Y \neq \emptyset$, ya que por hipótesis $x_0 \in Y$, si probamos que Y es abierto y cerrado tendremos que $Y = X$, es decir, $f_1 = f_2$.

Veamos que Y es abierto. Para ello tomamos $y \in Y$, es decir, un punto y tal que $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos el punto $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$. Sea O abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a b , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos de R y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto A_{i_0} donde se encuentra $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$. Veamos que $\forall x \in V$ se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$. Como $x \in V$ tendremos que $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$ por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \xrightarrow{(*)} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en $(*)$ hemos usado que $p|_{A_i}$ es inyectiva. Tenemos finalmente que Y es abierto.

Veamos ahora que Y es cerrado. Para ello demostramos que $X \setminus Y$ es abierto. Tomamos $y \in X \setminus Y$ y vemos que existe un V abierto que contiene al punto y y tal que $V \subseteq X \setminus Y$. Sea $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ y de nuevo tomamos O regularmente recubierto que contiene a b . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos $f_1(y) \in A_{i_1}$ y $f_2(y) \in A_{i_2}$ y además se verificará que $A_{i_1} \neq A_{i_2}$ ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$, donde se tiene que $y \in V$. Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada $x \in V$ se tendrá que $f_1(x) \neq f_2(x)$ ya que $f_1(x) \in A_{i_1}$ y $f_2(x) \in A_{i_2}$. Esto nos dice que $V \subseteq X \setminus Y$, luego Y es cerrado. \square

Teorema 1.2 (Teorema de monodromía). Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$. El homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo. En particular, $\pi_1(R, r_0)$ es isomorfo a $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que p_* es inyectiva si y solo si $\ker(p_*)$ es trivial. Tomamos α lazo basado en r_0 tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además $[p \circ \alpha] = p_*([\alpha])$ tenemos que existe una homotopía por lazos de ε_{b_0} en $p \circ \alpha$. Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en R de $\hat{\varepsilon}_{b_0}$ y $\widehat{p \circ \alpha}$ (empezando en r_0). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

Observación. Recordemos que dados dos subgrupos H_1, H_2 de un grupo G se dice que H_1 y H_2 son conjugados si existe un $g \in G$ tal que

$$H_2 = g^{-1}H_1g$$

Corolario 1.2.1. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$. Elegimos un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$ tal que

$$\alpha(0) = r_1$$

$$\alpha(1) = r_2$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular, $p_*(\pi_1(R, r_1))$ y $p_*(\pi_1(R, r_2))$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que $p \circ \alpha$ es un lazo basado en b_0 por lo que $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$. Además,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, r_2) & \xrightarrow{isom.} & \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] & \longmapsto & [\alpha * \beta * \tilde{\alpha}] \end{array}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\tilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \tilde{\alpha}] = [\widehat{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

Corolario 1.2.2. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p^{-1}(b_0)$. Sea H un subgrupo conjugado de $p_*(\pi_1(R, r_1))$ en $\pi_1(B, b_0)$. Entonces existe un punto $r_2 \in R$ tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que $p(r_1) = b_0$ y que $p_*(\pi_1(R, r_1))$ es conju-
gado con H en $\pi_1(B, b_0)$, es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con $g \in \pi_1(B, b_0)$, esto es, $g = [\gamma]$. Consideramos $\hat{\gamma}$ el levantamiento de γ a R con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos $r_2 = \hat{\gamma}(1)$ al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$, una aplicación
continua $f : X \rightarrow B$, $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento $\hat{f} : X \rightarrow R$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$.
2. $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento \hat{f} de f con
 $\hat{f}(x_0) = r_0$ es único.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$ por lo que tenemos esta implicación simple-
mente desarrollando la composición.

(2) \Rightarrow (1) Empezamos definiendo \hat{f} :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado $x \in X$ elegimos α_x un arco en X que una x_0 con x . Entonces $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es un arco en B que une $b_0 = f(x_0)$ con $f(x)$. Consideramos ahora $\widehat{f \circ \alpha_x}$ el único arco en R tal que $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$ y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que \hat{f} está bien definida, es decir, que no depende del arco α_x elegido. Tomamos otro arco β_x en X tal que $\beta_x(0) = x_0$ y $\beta_x(1) = x$ y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos $\gamma = \alpha_x * \beta_x$ que es un lazo en X con base en x_0 . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \beta_x)$$

es un lazo con base en b_0 . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco δ con base en r_0 tal que $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$. Sea $\widehat{f \circ \gamma}$ el único levantamiento de $f \circ \gamma$ que comienza en r_0 . Tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico por arcos con $p \circ \delta$. Como p_* es inyectiva tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico con δ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widetilde{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es el levantamiento de $f \circ \alpha_x$ empezando en r_0 y ω es el levantamiento de $\widetilde{f \circ \beta_x}$ comenzando en $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$. Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widetilde{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta_x} \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de $\hat{f}(x)$ está bien hecha.

Veamos ahora que $p \circ \hat{f} = f$. Para ello, dado $x \in X$ tenemos que ver que $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$. Veamos quién es $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ \widehat{f \circ \alpha_x})(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que $\hat{f}(x_0) = r_0$ ya que para x_0 podemos elegir ε_{x_0} verificándose que $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$ luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que \hat{f} es continua.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B\end{array}$$

Comenzamos tomando un punto $x \in X$ y vemos que \hat{f} es continua en x . Sea U un entorno de $\hat{f}(x)$. Tomamos O abierto arcoconexo de $f(x)$ que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homeomorfismo}\end{aligned}$$

Como $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$ tenemos que existe un único $i_0 \in I$ tal que $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$. Podemos suponer que $A_{i_0} \subseteq U$ (si no fuese así consideraríamos $U \cap A_{i_0}$). Como f es continua, existe un abierto V que contiene a x tal que $f(V) \subseteq O$. Podemos suponer que V es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de V que contenga a x).

Si probamos que $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$ tendríamos que \hat{f} es continua en x . Para verlo consideramos un punto $y \in V$ y tomamos un arco γ dentro de V que una x con y . Tenemos entonces que $\alpha_x * \gamma$ es un arco que une x_0 con y . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = f \circ \widehat{(\alpha_x * \gamma)}(1) = (f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}(1)$$

donde $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ es la única curva que se proyecta por p en $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ y comienza en r_0 . Es decir, $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$ se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{f \circ \gamma}$$

donde $\widehat{f \circ \gamma}$ es el levantamiento de $f \circ \gamma$ pero comenzando en el punto $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$.

$$Im(\gamma) \subseteq V \Rightarrow Im(f \circ \gamma) \subseteq O \Rightarrow \widehat{f \circ \gamma} \subseteq A_{i_0}$$

ya que $p|_{A_{i_0}}$ es un homeomorfismo por lo que llegamos finalmente a

$$\hat{f}(y) = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)(1) = \widehat{f \circ \gamma}(1) \in A_{i_0}$$

□

Observación. Una consecuencia inmediata es que si X es simplemente conexo, toda $X : X \rightarrow B$ continua se puede levantar.

Ejemplo. Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{aligned}$$

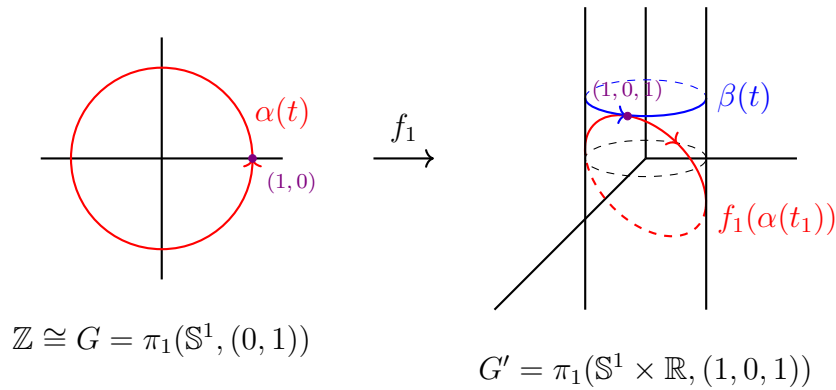
y las aplicaciones $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x, y, x) \\ f_2(x, y) &= (-2xy, x^2 - y^2, x^2) \end{aligned}$$

Nos preguntamos si existen levantamientos de f_1 y f_2 , es decir si existen los \hat{f}_1, \hat{f}_2 que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & \nearrow \hat{f}_1, \hat{f}_2 & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_1, f_2} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{array}$$

Con la siguiente gráfica



podemos ver que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ está generado por $[\alpha]$ donde

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

y $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))$ está generado por $[\beta]$ done

$$\beta(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1)$$

Además es fácil ver en la misma gráfica que

$$\begin{aligned} f_{1*}([\alpha]) &= [f_1 \circ \alpha] = [\beta] \\ f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) = \{[\beta]^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y además

$$\begin{aligned} (p \circ \beta)(t) &= (\cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), 2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), 1) = \\ &= (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t), 1) = (\beta * \beta)(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_*([\beta]) &= [p \circ \beta] = [\beta]^2 \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Sabemos por el teorema visto que existe un $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$ si y solo si se tiene que

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como tenemos que

$$\begin{aligned} f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\beta]^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2m} : m \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

no se dará la inclusión

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \not\subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

y tenemos que no existe $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$. Si tomamos otro punto r_1 cualquiera tal que $p(r_1) = (1, 0, 1)$ (r_1 colo podría ser el $(-1, 0, 1)$) entonces sabemos por un corolario anterior que

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, r_1)) \text{ es conjugado de } p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como el grupo total es abeliano, entonces estos dos grupos son idénticos.

Veamos qué ocurre con f_2 . En este caso tenemos que

$$f_2(1, 0) = (1, 0, 1)$$

Además, $[\alpha]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ y $[\gamma]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (0, 1, 1))$ donde

$$\gamma(t) = \left(\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), 1 \right)$$

Queremos calcular $f_2 \circ \alpha$:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ \alpha)(t) &= (-2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (-\sin(4\pi t), -\cos(4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (\sin(-4\pi t), \cos(-4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \cos^2(2\pi t) \right) \end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$f_{2*}([\alpha]) = [f_2 \circ \alpha] = [\gamma * \gamma] = [\gamma]^2$$

por lo que

$$\begin{aligned} f_{2*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\gamma]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= p_*\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \right) \end{aligned}$$

y tenemos finalmente que existe el levantamiento \hat{f}_2 con $\hat{f}_2(1, 0) = (0, 1, 1)$

1.2. Transformación de recubridores

Vamos a tratar en lo que queda de tema de clasificar los espacios recubridores de un espacio topológico B dado. Comenzamos estableciendo para ello una nomenclatura clásica.

Notación. Diremos que (R, p) es un recubridor de B si $p : R \rightarrow B$ es una aplicación recubridora.

Definición 1.1. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos espacios recubridores de un mismo e.t. base B ,

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

1. Un **homomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es una aplicación continua $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$. Dicha aplicación hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\hat{f}=\phi} & R_2 \\ & \searrow f=p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

O equivalentemente ϕ es un levantamiento de la aplicación continua p_1 usando la aplicación recubridora p_2 .

2. Un **isomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es un homeomorfismo $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$.
3. Un isomorfismo ϕ de (R_1, p_1) en sí mismo se le llama **automorfismo de recubridores**. Al conjunto de todos los automorfismos lo notaremos por $\mathcal{A}(R_1, p_1)$.

Observación.

1. Si (R, p) es un recubridor de un espacio base B y $\phi : \hat{R} \rightarrow R$ es un homeomorfismo, entonces $(\hat{R}, p \circ \phi)$ es un recubridor de B . Se puede ver fácilmente con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\phi} & R \\ & \searrow p \circ \phi & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

recordando que la composición de una aplicación recubridora con un homeomorfismo es también una aplicación recubridora (visto en las propiedades de las aplicaciones recubridoras). Además, ϕ de $(\hat{R}, p \circ \phi)$ en (R, p) es un isomorfismo de recubridores. De hecho, de la definición se deduce que todo isomorfismo de recubridores es de la forma anterior.

2. Si ϕ_1 de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es un homomorfismo de recubridores y ϕ_2 es otro desde (R_2, p_2) en (R_3, p_3) , entonces $\phi_2 \circ \phi_1$ es un homomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_3, p_3) . Tendríamos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_1} & R_2 & \xrightarrow{\phi_2} & R_3 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p_3 & \\ & & B & & \end{array}$$

3. Si ϕ es un isomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) , entonces ϕ^{-1} es un isomorfismo de recubridores desde (R_2, p_2) en (R_1, p_1) .

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \\ R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_2 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

4. $\mathcal{A}(R, p)$ es un grupo con la composición.

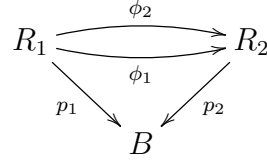
Corolario 1.3.1. Sean ϕ_1, ϕ_2 dos homomorfismos de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Entonces se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2 \iff \exists r_1 \in R_1 : \phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$$

En particular, si ϕ es un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo, entonces

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = r$$

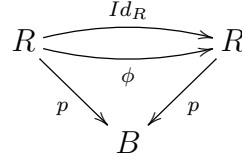
Demostración. Estamos en la siguiente situación



Veamos la doble implicación de la primera mitad del corolario

- \Rightarrow) Es trivial que si $\phi_1 = \phi_2$ entonces $\forall r \in R_1$ se tiene que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$.
- \Leftarrow) Supongamos que $\exists r_1 \in R_1$ tal que $\phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$. Entonces, como ϕ_1 y ϕ_2 son levantamientos de p_1 , por el teorema de unicidad del levantamiento tenemos que $\phi_1 = \phi_2$.

Para probar la segunda parte del corolario aplicaremos lo ya probado tomando $\phi_1 = \phi$ un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo y $\phi_2 = Id_R$.



Entonces tendríamos que

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = Id_R(r) = r$$

□

Corolario 1.3.2. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de B , $b_0 \in B$ y $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Entonces:

1. Existe un homomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

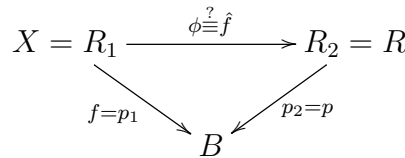
$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Existe un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Veamos cada punto por separado.

1. Estamos en la siguiente situación (donde se ha puesto la equivalencia con la notación que usamos para el teorema de existencia del levantamiento)



Entonces por el teorema de existencia del levantamiento tenemos que existe ϕ levantamiento de p_1 con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Veamos la doble inclusión. En primer lugar denotamos por ϕ al isomorfismo y a su inversa la llamaremos φ . Esta aplicación verifica que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1} \quad \phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

y además es también un isomorfismo (por lo que en particular es un homomorfismo). Estaríamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 & \xrightarrow{\varphi} & R_1 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p^1 & \\ & & B & & \end{array}$$

donde ϕ y φ son homomorfismos. Por hipótesis tenemos que $\exists r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ tales que $\phi(r_1) = r_2$. Si componemos esta igualdad por la izquierda con φ tenemos

$$(\varphi \circ \phi)(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow Id_{R_1}(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow r_1 = \varphi(r_2)$$

Por tanto aplicando el primer punto del corolario a ϕ (es un homomorfismo con $\phi(r_1) = r_2$) tenemos que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

y aplicando lo mismo de nuevo a φ (es un homomorfismo con $\varphi(r_2) = r_1$) tenemos que

$$p_{2*}(\pi_2(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

□

Teorema 1.4. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de un e.t. B . Entonces existe un isomorfismo entre ambos recubridores si y solo si dado $b_0 \in B$, $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$ con $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$ tales que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Estamos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

Veamos la doble implicación

\Rightarrow) Supongamos primero que existe ϕ isomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Tomamos $b_0 \in B$ y elegimos $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ cualquiera (que existe porque p_1 es sobreyectiva). Elegimos $r_2 = \phi(r_1)$ y entonces como $p_2 \circ \phi = p_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) &= (p_2 \circ \phi)_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \\ &= p_{2*}(\phi_*(\pi_1(R_1, r_1))) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \end{aligned}$$

ya que como ϕ es un homomorfismo tenemos que $\phi_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \pi_1(R_2, \phi(r_1))$.

\Leftarrow) Está probada aplicando el corolario anterior.

□

Observación. Algunas consecuencias que podemos extraer de lo anterior son las siguientes:

Sean B un e.t. y $b_0 \in B$. Si consideramos H un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ entonces

1. Existe como mucho un recubridor (R, p) (salvo isomorfismo) cumpliendo que $\exists r \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r)) = H$.

$$\begin{array}{ccc} R & & \pi_1(R, r) \\ p \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

2. Además si H y H' son subgrupos conjugados en $\pi_1(B, b_0)$, como mucho existe un recubridor correspondiente a ambos, es decir, si (R, p) es un recubridor con $r_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r_0)) = H$, entonces también existe un $r'_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r'_0)) = H'$.

$$\begin{array}{ccccc} R & & \pi_1(R, r) & & \pi_1(R, r') \\ p \downarrow & & p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) & & H' \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

Ejemplo.

1. Consideramos $B = \mathbb{R}$ y buscamos los recubridores de \mathbb{R} . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$$

Por lo que solo hay un subgrupo $H = \{[\varepsilon_0]\}$, luego \mathbb{R} solo tiene un recubridor

$$(\mathbb{R}, p = Id_{\mathbb{R}})$$

2. En general, si B es simplemente conexo, entonces su único recubridor es él mismo (salvo isomorfismo de recubridores).

3. Consideramos ahora \mathbb{RP}^n el espacio proyectivo con $n \geq 2$. Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2, \text{ con } x_0 \in \mathbb{RP}^n \text{ cualquiera}$$

Por tanto tendríamos que los únicos posibles subgrupos de $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)$ son

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[\varepsilon_{x_0}]\} \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{S}^n, p) \text{ con } p(x) = [x] \\ H_2 &\cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} R & r_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \\ \downarrow p & \downarrow & \downarrow & \downarrow Id & \downarrow Id & \downarrow Id_* \\ \mathbb{RP}^n & x_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \end{array}$$

por lo que los únicos recubridores de \mathbb{RP}^2 son (\mathbb{S}^n, p) con $p(x) = [x]$ y $(\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$.

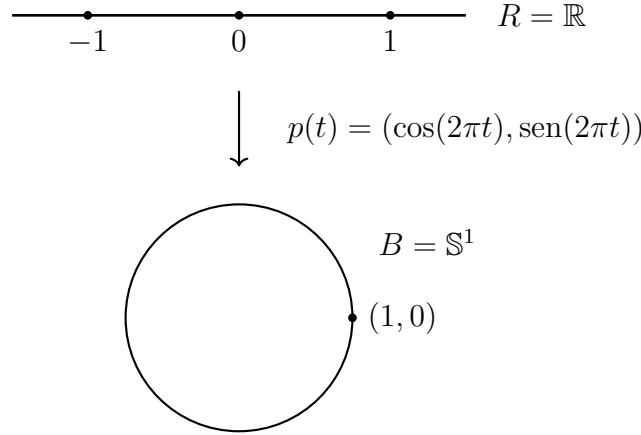
4. Consideramos $B = \mathbb{S}^1$. Recordemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Los únicos subgrupos de \mathbb{Z} son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

Recordamos el recubrimiento de \mathbb{S}^1 que estudiamos en el tema anterior:



Para este recubridor (\mathbb{R}, p) donde $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, su subgrupo asociado en $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ es H_0 .

También podemos considerar el recubridor $(\mathbb{S}^1, p_1 = Id_{\mathbb{S}^1})$ cuyo subgrupo asociado es $H_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$.

Ahora nos planteamos de nuevo que \mathbb{S}^1 es recubridor de sí mismo pero que hay más formas de recubrirse, es decir, podemos encontrar funciones recubridoras

p_k con $k \in \mathbb{Z}^+$ de forma que todas recubran a la circunferencia pero “enrollanla más”, es decir, llevando cada vuelta de $R = \mathbb{S}^1$ en k vueltas de $B = \mathbb{S}^1$. Definimos así la aplicación p_k para $k \geq 2$ (el caso $k = 1$ es la identidad que ya se ha estudiado) dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

Además tendríamos que

$$\begin{aligned} p_{k*} : \quad \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha]^k \end{aligned}$$

Llegando a que

$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) = H_k = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, los únicos recubridores de \mathbb{S}^1 son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, p) \text{ con } p(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ (\mathbb{S}^1, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta)) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5. Vamos a estudiar ahora los recubridores del cilindro de \mathbb{R}^3 , $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\alpha]^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

por lo que tenemos de nuevo que los únicos subgrupos de \mathbb{Z} son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

y además sabemos que (\mathbb{R}^2, p_0) es recubridor del cilindro con

$$\begin{aligned} p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

asociado a $H_0 = \{[\varepsilon_{(1,0,0)}]\}$.

Buscamos ahora los recubridores cuyo subgrupo asociado es H_k . Con la misma idea que en el ejemplo anterior definimos la función p_k para $k \in \mathbb{Z}^+$ dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_{k*}([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) &= \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\} = H_k \end{aligned}$$

Por tanto los únicos recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, p_0) \text{ con } p_0(x, y) &= (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta), y) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

6. Veamos el caso del toro, $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

con generadores $[\alpha]$ y $[\beta]$.

Consideramos el recubridor $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ con

$$\begin{aligned} p_0 \times p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

Como $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0)) = [\varepsilon_{(0,0)}]$ tenemos que

$$(p_0 \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0))) = \{[\varepsilon_{(1,0,1,0)}]\}$$

por lo que $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ es el recubridor asociado al subgrupo trivial de $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0))$.

Consideramos ahora el cilindro como recubridor y definimos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p_k \times p_0 : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ “enrolla” el cilindro k veces. En este caso tendríamos que

$$(p_k \times p_0)(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$

y además tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\gamma]^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$$

Tenemos además que $(p_k \times p_0)(\gamma(t)) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t), 1, 0)$ de donde se deduce que

$$(p_k \times p_0)_*([\gamma]) = [(p_k \times p_0)(\gamma)] = [\alpha]^k$$

Una vez hemos calculado la imagen del generador podemos concluir que

$$(p_k \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z} \times \{0\} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Análogamente si consideramos

$$\begin{aligned} p_0 \times p_k : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, \cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

tendríamos el siguiente recubridor

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Consideramos ahora el toro como recubridor de sí mismo y definimos

$$\begin{aligned} p_k \times p_l : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(l\varphi), \sin(l\varphi)) \end{aligned}$$

Si estudiamos la imagen de los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p_k \times p_l)_*([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ (p_k \times p_l)_*([\beta]) &= [\beta]^l \end{aligned}$$

y llegamos a que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l)$ es recubridor y está asociado al subgrupo $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$. El grupo imagen sería

$$\{[\alpha]^{kn_1} * [\beta]^{ln_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

En este punto nos damos cuenta de que aún no hemos estudiado todos los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si consideramos 2 puntos de \mathbb{Z} podemos generar un subgrupo a partir de ellos, por ejemplo, para $(1, 3), (2, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos construir $\{a(1, 3) + b(2, 4) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y es un subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto también ocurre con un solo generador. Es decir, tenemos que los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que nos queda por considerar son de la forma

$$\begin{aligned} \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} &\text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} &\text{ para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pensamos ahora entonces en la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} p' : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta + y), \sin(\theta + y)) \end{aligned}$$

y nos planteamos quién sería $p'_*([\gamma])$. Aplicamos p' en un generador y tenemos

$$p'(\gamma(t)) = p(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Intuitivamente podemos llegar a ver que $p'_*([\gamma]) = [\alpha] * [\beta]$. Esto se ha hecho considerando de fondo el generador $(1, 1)$. Buscamos generalizar esta nueva aplicación recubridora para cualquier generador $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se puede construir una aplicación $p'_{(a,b)}$ para cada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p'_{(a,b)} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(a\theta), \sin(a\theta), \cos(b\theta + y), \sin(b\theta + y)) \end{aligned}$$

Aplicando $p'_{(a,b)}$ en el generador tenemos

$$p'_{(a,b)}(\gamma(t)) = p'(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t))$$

y con mucha intuición se puede llegar a que

$$(p'_{(a,b)})_*([\gamma]) = [\alpha]^a * [\beta]^b$$

Por tanto tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)})$ es recubridor del toro con subgrupo asociado $\{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\}$ para cada generador que tomemos $(a, b) \in \mathbb{Z}$.

De hecho, si tomamos un par de generadores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos definir la aplicación $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &= \\ &= (\cos(a\theta + c\varphi), \sin(a\theta + c\varphi), \cos(b\theta + d\varphi), \sin(b\theta + d\varphi)) \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}$ en los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\alpha(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(0), \sin(0)) = \\ &= (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\beta(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(1, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(0), \sin(0), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (\cos(2c\pi t), \sin(2c\pi t), \cos(2d\pi t), \sin(2d\pi t)) \end{aligned}$$

Por lo que de nuevo usando mucho la intuición (habría que demostrarlo formalmente) llegamos a que

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\alpha]) &= [\alpha]^a * [\beta]^b \\ (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\beta]) &= [\alpha]^c * [\beta]^d \end{aligned}$$

y tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})$ es recubridor del toro asociado al subgrupo $\{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ para cada par de generadores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Resumiendo, tenemos que todos los recubridores del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son

$$\begin{aligned} &(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0) \text{ asociado a } \{0\} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k \times p_0) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z} \text{ para cada } k, l \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)}) \text{ asociado a } \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}) \text{ asociado a } \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no tiene más subgrupos estos serán todos los recubridores del toro.

Hasta ahora lo que hemos visto es que para estudiar el número de recubridores de un espacio B podemos elegir un punto $b_0 \in B$ y pasar a estudiar $\pi_1(B, b_0)$ y estudiando sus subgrupos $H > \pi_1(B, b_0)$ podíamos afirmar que como mucho había un

recubridor por cada uno de ellos (o sus conjugados). Por tanto cuanto más “grande” sea el grupo fundamental, más recubridores podremos encontrar a priori.

Proposición 1.5. Sea ϕ un homomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Entonces $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ es una aplicación recubridora.

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Demostración. Sabemos que ϕ es continua porque es homomorfismo. Veamos que ϕ es sobreyectiva (no es elemental). Consideramos un elemento cualquiera $r_2 \in R_2$ y queremos ver si existe un $r_1 \in R_1$ tal que $\phi(r_1) = r_2$.

Tomamos $r_0 \in R_1$ cualquiera y elegimos un arco α en R_2 que una $\phi(r_0)$ con r_2 , es decir

$$\alpha \in \Omega(R_2; \phi(r_0), r_2)$$

Si proyectamos tendremos que $p_2 \circ \alpha$ es un arco en el espacio topológico base B que une $p_2(\phi(r_0))$ con $p_2(r_2)$, es decir

$$(p_2 \circ \alpha) \in \Omega(B; p_2(\phi(r_0)), p_2(r_2))$$

Sabiendo que el diagrama de la proposición es conmutativo tenemos que $p_2(\phi(r_0)) = p_1(r_0)$. Como p_1 es aplicación recubridora, entonces tenemos que existe un único levantamiento $\widehat{p_2 \circ \alpha}$ que comienza en r_0 . Entonces tenemos que $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ es un arco en R_2 que comienza en $\phi(r_0)$. Es decir, α y $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ son dos arcos que empiezan en $\phi(r_0)$ y además

$$p_2 \circ (\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}) = p_1 \circ (\widehat{p_2 \circ \alpha}) \stackrel{def}{=} p_2 \circ \alpha$$

Por unicidad del levantamiento de p_2 tenemos que $\alpha = \phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ por lo que tenemos que

$$r_2 = \alpha(1) = \phi(\widehat{p_2 \circ \alpha}(1))$$

Nos queda demostrar que todo punto de R_2 está regularmente recubierto.

Sea $r_2 \in R_2$ fijado. Sabemos que $p_2(r_2) \in B$ y podemos elegir U abierto arcoconexo en B que contiene a $p_2(r_2)$ y que está regularmente recubierto por p_1 y por p_2 . Por la definición de regularmente recubierto tenemos que

$$\begin{cases} p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i, & A_i \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{1|_{A_i}} : A_i \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} B_j, & B_j \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{2|_{B_j}} : B_j \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

Observamos que

$$\phi^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \phi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = (p_2 \circ \phi)^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Alijamos un A_{i_0} y veamos que $\phi(A_{i_0})$ está completamente contenida en algún B_{j_0} . Para ello, sabemos que $\phi(A_{i_0})$ es conexo y además

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$$

Tenemos entonces que

$$\phi(A_{i_0}) = \phi(A_{i_0}) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} (\phi(A_{i_0}) \cap B_j)$$

Como puedo escribir $\phi(A_{i_0})$ como unión de abiertos y $\phi(A_{i_0})$ es conexo tenemos que $\exists j_0 \in J$ tal que

$$\phi(A_{i_0}) \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \in J \setminus \{j_0\}$$

y podemos escribir

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq B_{j_0}$$

Así, si tomamos B_{j_0} como el abierto que contiene a r_2 , entonces

$$\phi^{-1}(B_{j_0}) = \bigcup_{i \in I'} A_i$$

con $I' \subseteq I$. Además,

$$\begin{array}{ccccc} \phi|_{A_i} : & A_i & \xrightarrow{\quad} & B_{j_0} & \text{homeomorfismo} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \text{homeom.} \equiv p_1|_{A_i} & & p_2|_{B_{j_0}} \equiv \text{homeom.} & \\ & & U & & \end{array}$$

por ser composición de dos homeomorfismos □

Corolario 1.5.1. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de un espacio topológico B , $b_0 \in B$, $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ u $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Si se verifica que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

entonces existe una aplicación recubridora de R_1 en R_2 que lleva el punto r_1 en el punto r_2 .

Definición 1.2. Decimos que (R, p) es un **recubridor universal** de un espacio topológico B si (R, p) es un recubridor con R simplemente conexo.

Observación. Dos recubridores universales tienen que ser necesariamente isomorfos. Es decir, son salvo un homeomorfismo, el mismo. Esto se debe a que por ser R simplemente conexo ambos tienen grupo fundamental trivial por lo que si hubiera dos tendrían que estar asociados al mismo subgrupo H y sabemos que como mucho hay uno salvo isomorfismo. Por eso se suele decir **el** recubridor universal y no **un** recubridor universal.

Observación. El adjetivo “universal” se debe a que si (R_2, p_2) también recubre al espacio topológico base B , entonces el recubridor universal también recubre a R_2 .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Ejemplo.

1. \mathbb{S}^1 es el recubridor universal de \mathbb{R} .
2. \mathbb{RP}^n es el recubridor universal de \mathbb{S}^n para $n \geq 2$
3. \mathbb{R}^2 es el recubridor universal del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
4. \mathbb{R}^2 también es el recubridor universal del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

1.3. Existencia de espacios recubridores

Definición 1.3. Sea B un espacio topológico entonces

1. Decimos que B es **localmente simplemente conexo** si todo punto $b \in B$ admite una base de entornos formada por simplemente conexos. O equivalentemente, si para cada abierto O en B y punto $b \in O$ existe un entorno U de b simplemente conexo con $U \subseteq O$.
2. Decimos que B es **semilocalmente simplemente conexo** si todo punto $b \in B$ tiene un entorno U tal que

$$(i_u)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

es trivial, donde $i_u : U \rightarrow B$ es la inclusión.

Observación.

1. Si B es localmente simplemente conexo, entonces también es semilocalmente simplemente conexo.
2. Si B es simplemente conexo entonces es semilocalmente simplemente conexo
3. Si U es un entorno de $b \in B$ tal que $(i_U)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial, entonces también es cierto que si V es entorno de b con $V \subseteq U$ se tiene que $(i_V)_* : \pi_1(V, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial.

Ejemplo.

1. Si B es un abierto de \mathbb{R}^n entonces B es localmente simplemente conexo.
2. \mathbb{S}^1 es localmente simplemente conexo ya que para cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ existe una base de entornos formada por simplemente conexos.
3. Consideramos S_n la circunferencia de \mathbb{R}^2 centrada en $(\frac{1}{n}, 0)$ y de radio $\frac{1}{n}$. Consideramos el siguiente espacio

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

El espacio topológico B no es semilocalmente simplemente conexo.

4. Tomamos el conjunto de \mathbb{R}^3

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} z = \lambda, \lambda \geq 0 \\ (x, y) = \lambda(a, b), \text{ con } (a, b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \end{array} \right\}$$

Donde S_n es una de las circunferencias del ejemplo anterior. Esto si se analiza gráficamente es fácil ver que son un montón de conos unidos con el origen y tangentes al $(0, 0, 1)$ y que intersecan con el plano de altura 1 formando circunferencias tangentes al $(0, 0, 1)$ de la forma S_n .

Tenemos que B es simplemente conexo por ser contráctil pero no es localmente simplemente conexo.