Examen Ordinaria 22-23

1. Sea A el grupo abeliano $\left\langle x,y,z;\ \begin{array}{c} 10x+12y+4z=0 \\ 8x+11y+6z=0 \\ 4x+6y+8z=0 \end{array} \right\rangle$. Indique las descomposiciones Cíclica Primaria y Cíclica de A, así como su orden y el rango de su parte libre. Clasifique, indicando sus descomposiciones Cíclicas Primaria y Cíclicas todos los grupos abelianos del mismo orden que A.

$$M=\begin{pmatrix}10&8&4\\12&11&3\\4&6&8\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}12&11&3\\10&8&6\\4&6&8\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}11&12&3\\8&10&6\\6&4&8\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}-1&4&-13\\8&10&6\\6&4&8\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-4&13\\8&10&6\\6&4&8\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-4&13\\0&42&-98\\0&28&-70\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&42&98\\0&28&70\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&-42\\0&28&70\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&14&42\\0&28&70\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&14&42\\0&0&-14\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&14&0\\0&0&14\end{pmatrix}$$

Concluimos, por tanto, que $A\cong\mathbb{Z}_{14}\oplus\mathbb{Z}_{14}$, obteniendo así su descomposición cíclica. En cuanto a su descomposición cíclica primaria tenemos que $A\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_7$.

El rango de su parte libre será *número de generadores* $-$ *rango de* $M=3-3=0$. Finalmente $|A|=14\cdot 14=196$.

Tenmos que $196=2^2\cdot 7^2$, por tanto existen $\mathscr{P}(2)\cdot\mathscr{P}(2)=2\cdot 2=4$ grupos abelianos de orden 196:

DCP	**DC**
$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_{14}\oplus\mathbb{Z}_{14}$
$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{49}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{98}$
$\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7\oplus\mathbb{Z}_{28}$
$\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_{49}$	$\mathbb{Z}_{196}$

2. Sea $G = \langle (1234) \rangle \leq S_5$.

a) Calcula el número de conjugados de (1234) y demuestra que G no es normal en S_5.

b) Demuestra que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

c) Construye un 2-subgrupo de Sylow de S_5 que contenga a G.

Los conjugados de (1234) son las permutaciones de S_5 de tipo 4, es decir los ciclos de longitud 4. Calculamos el número de ciclos de longitud 4 en S_5:

$$\frac{V_5^4}{4} = \frac{5!}{4 \cdot 1} = 30$$

Como $|G| = |(1234)| = 4 < 30$, G no contiene a todos los conjugados de (1234) y por tanto, $G \ntrianglelefteq S_5$.

Como $|S_5| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, los 2-subgrupos de Sylow serán los subgrupos de S_5 de orden 8. Como $|G| = 4 \neq 8$, concluimos que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

Para construir un subgrupo de orden 8, construiremos D_4, con $\rho = (1234)$. Para elegir τ imponemos que:

$$\tau\rho = \rho^{-1}\tau \Rightarrow \tau(1234)\tau^{-1} = (1234)^{-1} = (4321) \Rightarrow (\tau(1)\tau(2)\tau(3)\tau(4)) = (4321)$$

Por tanto podemos elegir como $\tau = (14)(23)$, obteniendo así un grupo con 8 elementos $Q = \langle (1234), (14)(23) \rangle$, que obviamente contiene a G.

3. Sea G un grupo de orden 125.

a) Sea x un elemento de G con orden 25, y sea $K = \langle x \rangle$. Prueba que K es normal.

b) Sea y un elemento de G que no está en K y que tiene orden 5. Sea ahora $H = \langle y \rangle$. Prueba que $G = K \rtimes H$.

c) Prueba que ${}^y x = x^6$ es una acción de grupos de H en K.

d) Si se cumple $yxy^{-1} = x^6$ demuestra que $\langle a, b; a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$ es una presentación de G.

Calculamos el índice de K:
$$[G : K] = \frac{|G|}{|K|} = 5$$
y como 5 es el menor primo que divide a $|G|$ concluimos que K es normal.

Se debe tener que $K \cap H = 1$, ya que como $\varphi(5) = 4$, cualquier elemento de H distinto de 1 es un generador de H. Por tanto, si $y^i \in K$, se tendrá que $\langle y \rangle \subset K$, pero $y \notin K$, y concluimos que $K \cap H = 1$.

Tenemos que $K \trianglelefteq G, H \leq G, H \cap K = 1$ y por último tenemos que:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K} = |H||K| = 5 \cdot 25 = 125 = |G|$$

Concluimos que $G = K \rtimes H$.

Demostrar que ${}^y x = x^6$ es una acción de grupos de H sobre K es equivalente a demostrar que la función:

$$\begin{array}{ccc} C_5 \cong H & \longrightarrow & Aut(K) \cong Aut(C_{25}) \\ y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

con $\varphi(y)(x) = x^6$ es un homomorfismo. Utilizando el teorema de Dyck, tendremos que comprobar que $\varphi(y)^5 = Id$, lo cual efectivamente ocurre:

$$x \longmapsto x^6 \longmapsto x^{11} \longmapsto x^{16} \longmapsto x^{21} \longmapsto x$$

Sea $Q = \langle a, b; a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$ y definimos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & x \\ b & \longmapsto & y \end{array}$$

y comprobamos utilizando el teorema de Dyck que se trata de un homomorfismo:

$$x^{25} = 1, y^5 = 1, yx = x^6 y$$

Ahora demostramos que el homomorfismo recién definido es biyectivo, y pora tanto es un isomorfismo:

- El homomorfismo es **sobreyectivo**, ya que x e y generan G, ya que todo elemento es $x^i y^j$ porque $G = K \rtimes H$. Como el homomorfismo es sobreyectivo, tenemos que $|Q| \geq 125$.
- Como en Q se verifica $ba = a^6 b$, todo elemento de Q es de la forma $a^i b^j$ con $i = 0, 1, \ldots 24$ y $b = 0, 1 \ldots 4$. Por tanto, $|Q| \leq 25 \cdot 5 = 125$.
- Concluimos que $|Q| = 125$, sumado a que el homomorfismo es sobreyectivo, obtenemos que es un isomorfismo.

4. Demuestra que:

a) Ningún grupo de orden 390 es simple.

b) Ningún grupo de orden 30 es simple.

c) Todo grupo de orden 390 es resoluble.

Sea G tal que $|G| = 390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, entonces tenemos que $n_{13} \mid 30$ y $n_{13} \equiv 1 \mod 13$. Concluimos, por tanto que $n_{13} = 1$ y por tanto, G tiene un único 13-subgrupo de Sylow, y por tanto, es normal.

Como $1 < |P_{13}| < |G|$ y $P_{13} \trianglelefteq G$, tenemos que G no es un grupo simple.

Sea G tal que $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, entonces tenemos varias posibilidades: $n_5 = 1, 6$ y $n_3 = 1, 10$. Comprobamos que no se puede tener $n_5 = 6$ y $n_3 = 10$. Si se tiene $n_5 = 6$, entonces se tienen $6 \cdot 4 = 24$ elementos de orden 5 distintos (la intersección de grupos de orden 5 distintos es 1). La intersección de los 3 subgrupos de Sylow entre ellos o con los 5-subgrupos de Sylow es 1. Entonces se necesitarían otros 20 elementos de orden 3 en el grupo, sin embargo solo quedan $30 - 25 = 5$ elementos, que podrían ser de orden 3. Por tanto, concluimos que se debe tener $n_3 = 1$.

Por tanto, se deber tener que $n_3 = 1$ o $n_5 = 1$, es decir, o bien existe un 5-subgrupo de Sylow que es normal en G, o bien existe un 3-subgrupo de Sylow que es normal en G. En cualquier caso, concluimos que G no es un grupo simple.

Si $|G| = 390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, entonces sabemos que existe un grupo de orden 13 que es normal en G, el cociente viene dado por:

$$\bar{G} = G/P_{13}$$

que tiene orden 30. Un grupo de orden 30 tiene, por el apartado anterior, un subgrupo normal, que será de orden 3 o de orden 5, en ambos casos primo, y por tanto será resoluble, por ser un grupo abeliano. El cociente tendrá orden $2 \cdot 3$ u orden $2 \cdot 5$, en ambos casos, orden $p \cdot q$, y por tanto, también será resoluble.

Concluimos por tanto que $\bar{G}$ es resoluble, y por tanto, G es resoluble.