Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es una par $(X, \mathcal{T})$, donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X.

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia $\mathcal{T}$ se le llama **topología** en el conjunto X. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **abiertos** en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

Observación. De **(A1)** podemos concretar que si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{T}$. En general, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$ no tiene por qué ser abierto.

Ejemplo.

- •) **Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t[1].
- •) **Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.
- •) **Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.
- •) **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) (\text{intersección de finitos es finito})$$
$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) (\text{unión de finitos es finito})$$

- •) **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.
- •) $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.
- •) **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t.
- •) **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S$, $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \;\; \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$. (es un caso particular del punto incluido, $\mathcal{T}_a$).

[1]A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

Observación. En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

Ejercicio 1. Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos $X = \{a, b\}$. Las topologías posibles son:

- •) Trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$
- •) Discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$
- •) Punto incluido (a): $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$
- •) Punto incluido (b): $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

■

Ejercicio 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$, como $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \quad \forall x \in X$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$.

$\Leftarrow$) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$. Consideramos $U \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunto cualquiera de X. Podemos expresar $U = \bigcup\limits_{i \in I} \{x_i\}$, donde $\{x_i\} \in X \quad \forall i \in I$. Por la propiedad **(A2)** tenemos $U \in \mathcal{T}$. Como U era un subconjunto arbitrario de X, tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

■

1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

(D1) $d(x, y) \geqslant 0 \quad \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D2) (simetría) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y, \in X$.

(D3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

A la aplicación d la llamaremos **distancia**.

Ejercicio 1.1.1. Demostrar que a partir de las propiedades **(D2)**, **(D3)** y la segunda parte de **(D1)** se puede deducir la primera parte de **(D1)**, y como consecuencia se tiene $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$, tenemos:

$$0 \overset{\textbf{(D1)}(2)}{=} d(x, x) \overset{\textbf{(D3)}}{\leqslant} d(x, y) + d(y, x) \overset{\textbf{(D2)}}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow d : X \times X \to [0, \infty)$$

■

Definición 1.3. (X, d) e.m. $x \in X$, $r > 0$, se definen:

- **•)** La **bola (abierta)** de centro x y radio r como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- **•)** La **bola cerrada** de centro x y radio r como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

- **•)** La **esfera** de centro x y radio r como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

Algunas propiedades que se deducen de la definición anterior son:

- **•)** $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- **•)** $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$
- **•)** Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x, x) \subset B(x, r)$

Ejemplo. (Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ consideramos la **distancia usual**,

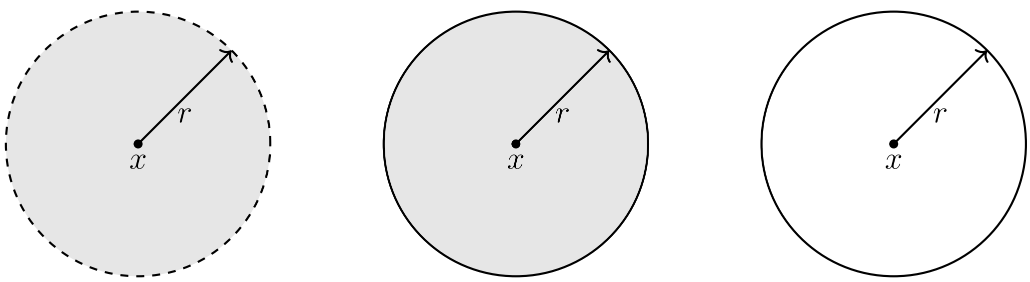
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

- **•)** Si $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$,,

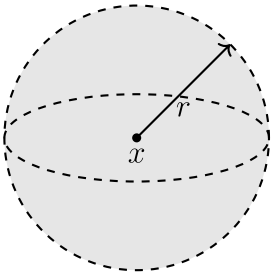
$$\begin{aligned} B(x, r) &= (x - r, x + r) \\ \overline{B}(x, r) &= [x - r, x + r] \\ S(x, r) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

- **•)** En $n = 2$ tenemos

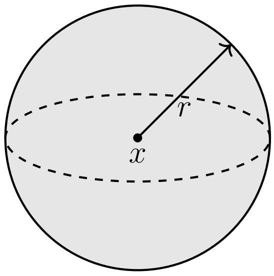


$B(x, r) \equiv$ disco $\quad$ $\overline{B}(x, r) \equiv$ disco cerrado $\quad$ $S(x, r) \equiv$ circunferencia

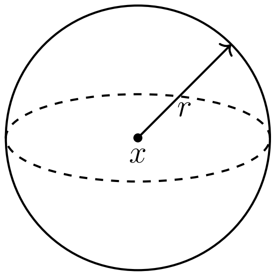
•) En $n = 3$ tenemos:



$B(x,r) \equiv$ bola



$\overline{B}(x,r) \equiv$ bola cerrada



$S(x,r) \equiv$ esfera

Ejemplo. $X \neq \emptyset$ se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x,y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r > 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x,y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r \geqslant 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r < 1 \end{cases}$$

$$S(x,y) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si} \quad r = 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad r \neq 1 \end{cases}$$

Tu escribes aq normal y te va saliendo.