Tema 1: Resolución numérica de ecuaciones y sistemas no lineales

Métodos Numéricos II

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2024/25

Introducción

¿Qué se entiende por resolver una ecuación?

Introducción

¿Qué se entiende por resolver una ecuación?

Sabemos resolver ecuaciones lineales.

Introducción

¿Qué se entiende por resolver una ecuación?

Sabemos resolver ecuaciones lineales.

También sabemos resolver ecuaciones de segundo grado.

Introducción

¿Qué se entiende por resolver una ecuación?

Sabemos resolver ecuaciones lineales.

También sabemos resolver ecuaciones de segundo grado.

Otras ecuaciones polinómicas también se pueden resolver.

La de tercer grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ fue parcialmente resuelta por el italiano Scipione del Ferro a principios del siglo XVI, pero mantuvo su logro en secreto hasta poco antes de su muerte (1526) en que se lo revelo a su discípulo Antonio María Del Fiore. La historia es curiosa (véase `https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuacion_de_tercer_grado`) e intervienen personajes como Tartaglia, Cardano, Ferrari y, más tarde, Viète y Descartes.


Scipione del Ferro (1465-1526)


Niccolo Tartaglia (1499-1557)


Girolamo Cardano (1501-1576)


Ludovico Ferrari (1522-1565)


François Viète (1540-1603)


René Descartes (1596-1650)

Introducción

La resolución de la ecuación de cuarto grado no se hizo esperar. De hecho lo lograron los propios Cardano y Ferrari.

Introducción

La resolución de la ecuación de cuarto grado no se hizo esperar. De hecho lo lograron los propios Cardano y Ferrari.

A partir del siglo XVI los matemáticos asumieron como reto la búsqueda de fórmulas para resolver ecuaciones de quinto grado o superior. Grandes pesos pesados como Euler, Lagrange y Gauss tuvieron que reconocer su fracaso, aunque sus esfuerzos contribuyeron enormemente a profundizar en el conocimiento de muchas otras ramas de las matemáticas.

Introducción

La resolución de la ecuación de cuarto grado no se hizo esperar. De hecho lo lograron los propios Cardano y Ferrari.

A partir del siglo XVI los matemáticos asumieron como reto la búsqueda de fórmulas para resolver ecuaciones de quinto grado o superior. Grandes pesos pesados como Euler, Lagrange y Gauss tuvieron que reconocer su fracaso, aunque sus esfuerzos contribuyeron enormemente a profundizar en el conocimiento de muchas otras ramas de las matemáticas.

En 1799 Gauss no hizo sino reforzar el desafío, demostrando en su tesis doctoral (con 22 años) el Teorema Fundamental del Álgebra en el que afirma que todas las ecuaciones de grado n tienen exactamente n soluciones reales o complejas. Pero la fórmula para encontrarlas seguía resistiéndose.

Introducción

No fue sino hasta 1831, casi trescientos años después, en que el jovencísimo matemático francés Évariste Galois, la noche antes de morir en duelo (con 20 años) por un lío de faldas, dejó escritos unos apuntes que han dejado profunda huella en el mundo matemático.

Las circunstancias de su vida y su muerte son rocambolescas (véase `https://es.wikipedia.org/wiki/Evariste_Galois`).

Uno de los resultados de sus trabajos, como si fuera un corolario menor, establece que las ecuaciones polinómicas de grado 5 y superiores no son solubles por radicales, lo que en otras palabras significa que no existe la tan pretendida fórmula basada en operaciones algebráicas como suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces.

Introducción

Si la cuestión de la resolución de ecuaciones polinómicas fue zanjada de la peor forma, más aún en el espacio mucho más abierto de las ecuaciones no polinómicas.

Introducción

Si la cuestión de la resolución de ecuaciones polinómicas fue zanjada de la peor forma, más aún en el espacio mucho más abierto de las ecuaciones no polinómicas.

En suma, si por resolver se entiende despejar la incógnita aislándola en un miembro de la igualdad mientras que en el otro miembro quede una expresión computable, esto no va a ser posible en general (ejemplo $xe^x = 5$), como no lo es para ecuaciones polinómicas a partir del grado 5.

Introducción

Si la cuestión de la resolución de ecuaciones polinómicas fue zanjada de la peor forma, más aún en el espacio mucho más abierto de las ecuaciones no polinómicas.

En suma, si por resolver se entiende despejar la incógnita aislándola en un miembro de la igualdad mientras que en el otro miembro quede una expresión computable, esto no va a ser posible en general (ejemplo $xe^x = 5$), como no lo es para ecuaciones polinómicas a partir del grado 5.

En consecuencia, hay que ir más en la dirección de resolver aproximadamente, es decir, de encontrar una aproximación numérica a la solución pretendida, buscando el equilibrio entre máxima precisión numérica y mínimo esfuerzo de computación. Eso es lo que entenderemos por resolución numérica de ecuaciones.

Planteamiento general

En general, el problema es hallar las soluciones reales (s) de una ecuación de la forma:

$$f(x) = 0, \quad f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Cualquier solución s también se denomina cero o raíz de la función $f(x)$.

Planteamiento general

En general, el problema es hallar las soluciones reales (s) de una ecuación de la forma:

$$f(x) = 0, \quad f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Cualquier solución s también se denomina cero o raíz de la función $f(x)$.

El objetivo es la construcción de una sucesión $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$ de aproximaciones tales que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s,$$

donde s es solución real de la ecuación.

Planteamiento general

En general, el problema es hallar las soluciones reales (s) de una ecuación de la forma:

$$f(x) = 0, \quad f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Cualquier solución s también se denomina cero o raíz de la función $f(x)$.

El objetivo es la construcción de una sucesión $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$ de aproximaciones tales que:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = s,$$

donde s es solución real de la ecuación.

El procedimiento para obtener cada término de la sucesión viene dirigido por un algoritmo o método numérico.

Planteamiento general

En general, el problema es hallar las soluciones reales (s) de una ecuación de la forma:

$$f(x) = 0, \quad f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Cualquier solución s también se denomina cero o raíz de la función $f(x)$.

El objetivo es la construcción de una sucesión $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$ de aproximaciones tales que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s,$$

donde s es solución real de la ecuación.

El procedimiento para obtener cada término de la sucesión viene dirigido por un algoritmo o método numérico.

Por lo general cada término se calcula a partir del anterior o de los anteriores, por lo que el primer término de la sucesión x_0 debe ser suministrado por algún medio externo al método.

En tal caso x_0 recibe el nombre de aproximación inicial o también semilla.

Multiplicidad de raíces

Definición: multiplicidad de raíces

- Se dice que s es una raíz o cero de $f(x) = 0$ con multiplicidad $m \geq 1$ $(m \in \mathbb{N})$ si existe una función $q(x)$ continua en un entorno de s tal que

$$f(x) = (x - s)^m q(x) \quad q(s) \neq 0.$$

Multiplicidad de raíces

Definición: multiplicidad de raíces

- Se dice que s es una raíz o cero de $f(x)=0$ con multiplicidad $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{N}$) si existe una función $q(x)$ continua en un entorno de s tal que
$$f(x)=(x-s)^m q(x) \quad q(s) \neq 0.$$

- Para funciones suficientemente derivables, una raíz real s de $f(x)=0$ tiene multiplicidad $m \geq 1$ si
$$f'(s)=f''(s)=\cdots=f^{(m-1)}(s)=0, \quad f^{(m)}(s) \neq 0.$$

Multiplicidad de raíces

Definición: multiplicidad de raíces

- Se dice que s es una raíz o cero de $f(x) = 0$ con multiplicidad $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{N}$) si existe una función $q(x)$ continua en un entorno de s tal que
$$f(x) = (x - s)^m q(x) \quad q(s) \neq 0.$$

- Para funciones suficientemente derivables, una raíz real s de $f(x) = 0$ tiene multiplicidad $m \geq 1$ si
$$f'(s) = f''(s) = \cdots = f^{(m-1)}(s) = 0, \quad f^{(m)}(s) \neq 0.$$

- Una raíz con $m = 1$ se llama simple, con $m = 2$ doble y en general con $m \geq 2$ múltiple.

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

2. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión real que converge al valor s.

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

2. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión real que converge al valor s.
    - Diremos que converge con orden al menos p si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente a cero con orden p y tal que $|x_n - s| \leq \varepsilon_n,\ n \geq n_0$.

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

2. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión real que converge al valor s.
   - Diremos que converge con orden al menos p si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente a cero con orden p y tal que $|x_n - s| \leq \varepsilon_n,\ n \geq n_0$.
   - Diremos que el orden de convergencia es exactamente p si la sucesión de errores absolutos $\{|x_n - s|\}_{n\geq 0}$ converge hacia cero con orden p, i.e.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

2. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión real que converge al valor s.
   - Diremos que converge con orden al menos p si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente a cero con orden p y tal que $|x_n - s| \leq \varepsilon_n,\ n \geq n_0$.
   - Diremos que el orden de convergencia es exactamente p si la sucesión de errores absolutos $\{|x_n - s|\}_{n\geq 0}$ converge hacia cero con orden p, i.e.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

- La constante C se conoce como constante asintótica del error.

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

2. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión real que converge al valor s.
   - Diremos que converge con orden al menos p si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente a cero con orden p y tal que $|x_n - s| \leq \varepsilon_n,\ n \geq n_0$.
   - Diremos que el orden de convergencia es exactamente p si la sucesión de errores absolutos $\{|x_n - s|\}_{n\geq 0}$ converge hacia cero con orden p, i.e.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

- La constante C se conoce como constante asintótica del error.
- El caso $p = 1$ se conoce como orden lineal o convergencia lineal.

Definición: orden de convergencia

1. Diremos que una sucesión positiva $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente hacia cero tiene orden de convergencia $p \geq 1$ si existe una constante $C > 0$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$
2. Sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión real que converge al valor s.
   - Diremos que converge con orden al menos p si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 0}$ convergente a cero con orden p y tal que $|x_n - s| \leq \varepsilon_n,\ n \geq n_0$.
   - Diremos que el orden de convergencia es exactamente p si la sucesión de errores absolutos $\{|x_n - s|\}_{n\geq 0}$ converge hacia cero con orden p, i.e.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^p} = C \quad (\text{con } C < 1 \text{ en el caso } p = 1).$$

- La constante C se conoce como constante asintótica del error.
- El caso $p = 1$ se conoce como orden lineal o convergencia lineal.
- El caso $p = 2$, orden cuadrático o convergencia cuadrática.

Interpretación práctica del orden de convergencia

Si la convergencia es lineal, al avanzar un término en la sucesión se gana a largo plazo un número fijo de cifras de precisión, que depende de la constante asintótica del error.

Ejemplo

La sucesión $\{x_n = 1 + 10^{-n}\}$ tiende linealmente a 1 con $C = 0.1$.

Interpretación práctica del orden de convergencia

Si la convergencia es lineal, al avanzar un término en la sucesión se gana a largo plazo un número fijo de cifras de precisión, que depende de la constante asintótica del error.

Ejemplo

La sucesión $\{x_n = 1 + 10^{-n}\}$ tiende linealmente a 1 con $C = 0.1$.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 1.1 \\
x_2 &= 1.01 \\
x_3 &= 1.001 \\
x_4 &= 1.0001 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Interpretación práctica del orden de convergencia

Si la convergencia es lineal, al avanzar un término en la sucesión se gana a largo plazo un número fijo de cifras de precisión, que depende de la constante asintótica del error.

Ejemplo

La sucesión $\{x_n = 1 + 10^{-n}\}$ tiende linealmente a 1 con $C = 0.1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.1 \\ x_2 &= 1.01 \\ x_3 &= 1.001 \\ x_4 &= 1.0001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En cada término se gana un dígito con respecto al anterior.

Ejemplo

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-2n}\right\}$ tiende linealmente a 1

Ejemplo

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-2n}\right\}$ tiende linealmente a 1 con $C = 0.01$.

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 2 \\ x_1 & = & 1.01 \\ x_2 & = & 1.0001 \\ x_3 & = & 1.000001 \\ x_4 & = & 1.00000001 \\ & \vdots & \end{array}$$

Ejemplo

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-2n}\right\}$ tiende linealmente a 1 con $C = 0.01$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.01 \\ x_2 &= 1.0001 \\ x_3 &= 1.000001 \\ x_4 &= 1.00000001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En cada término se ganan dos dígitos con respecto al anterior.

Ejemplo

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-2n}\right\}$ tiende linealmente a 1 con $C = 0.01$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.01 \\ x_2 &= 1.0001 \\ x_3 &= 1.000001 \\ x_4 &= 1.00000001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En cada término se ganan dos dígitos con respecto al anterior.

Ejercicio

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-\frac{n}{2}}\right\}$ tiende linealmente a 1. Cada dos términos se gana un dígito (demuéstrese y encuéntrese el valor de C).

Cuando la convergencia es cuadrática, si avanzamos un término en la sucesión, se duplica a largo plazo el número de cifras de precisión.

Ejemplo

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-2^n}\right\}$ tiende cuadráticamente a 1

Cuando la convergencia es cuadrática, si avanzamos un término en la sucesión, se duplica a largo plazo el número de cifras de precisión.

Ejemplo

La sucesión $\left\{x_n = 1 + 10^{-2^n}\right\}$ tiende cuadráticamente a 1 con $C = 1$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.1 \\ x_1 &= 1.01 \\ x_2 &= 1.0001 \\ x_3 &= 1.00000001 \\ x_4 &= 1.0000000000000001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En cada término se duplica la cantidad de dígitos de precisión con respecto al anterior.

Si la convergencia es cúbica, avanzando en la sucesión un término se triplica a largo plazo el número de cifras de precisión.

Si la convergencia es cúbica, avanzando en la sucesión un término se triplica a largo plazo el número de cifras de precisión.

Ejercicio

Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta que si $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C$ entonces a la larga se tiene $\varepsilon_{n+1} \approx C\varepsilon_n^p$.

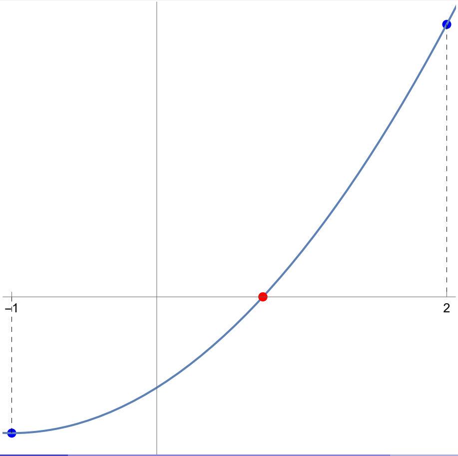
p	C	a la larga se gana...
1	0.1	un dígito en cada nuevo término
1	0.01	dos dígitos en cada nuevo término
1	10^{-d}	d dígitos en cada nuevo término
1		un dígito cada dos nuevos términos
1		un dígito cada m nuevos términos
1		d dígitos cada m nuevos términos
1	$\frac{1}{2}$	
1	k	
2	1	
3	1	
2	10^{-2}	
2	100	

Métodos elementales: bisección

Este método se basa en el teorema de Bolzano.

Teorema de Bolzano

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe al menos un cero de $f(x)$ en $]a, b[$; es decir, existe $s \in]a, b[$ tal que $f(s) = 0$.



Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

De esta forma construye una sucesión de intervalos encajados

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

todos cumpliendo las condiciones del teorema de Bolzano.

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

De esta forma construye una sucesión de intervalos encajados

$$[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \cdots$$

todos cumpliendo las condiciones del teorema de Bolzano.

Para cada $n = 0, 1, \ldots$

- se toma $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$;

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

De esta forma construye una sucesión de intervalos encajados

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

todos cumpliendo las condiciones del teorema de Bolzano.

Para cada $n = 0, 1, \ldots$

- se toma $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$;
- si $f(m_n) = 0$ entonces $s = m_n$ y el algoritmo termina;

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

De esta forma construye una sucesión de intervalos encajados

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

todos cumpliendo las condiciones del teorema de Bolzano.

Para cada $n = 0, 1, \ldots$

- se toma $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$;
- si $f(m_n) = 0$ entonces $s = m_n$ y el algoritmo termina;
- si $f(a_n)f(m_n) < 0$, nuevo intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$;

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

De esta forma construye una sucesión de intervalos encajados

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

todos cumpliendo las condiciones del teorema de Bolzano.

Para cada $n = 0, 1, \ldots$

- se toma $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$;
- si $f(m_n) = 0$ entonces $s = m_n$ y el algoritmo termina;
- si $f(a_n)f(m_n) < 0$, nuevo intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$;
- si $f(a_n)f(m_n) > 0$, nuevo intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$;

Método de bisección

El método de bisección se basa en aproximar s por el centro del intervalo $m = \frac{a+b}{2}$.

Después divide el intervalo en dos mitades y se repite en la mitad que siga cumpliendo las condiciones de Bolzano.

De esta forma construye una sucesión de intervalos encajados

$$[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \cdots$$

todos cumpliendo las condiciones del teorema de Bolzano.

Para cada $n = 0, 1, \ldots$

- se toma $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$;
- si $f(m_n) = 0$ entonces $s = m_n$ y el algoritmo termina;
- si $f(a_n)f(m_n) < 0$, nuevo intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$;
- si $f(a_n)f(m_n) > 0$, nuevo intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$;

Se sigue hasta que se cumpla un criterio de parada y se toma $s \approx m_n$.

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s \in]a, b[$ de $f(x)$;

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s \in]a, b[$ de $f(x)$;
- La sucesión de errores $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$;

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s \in]a,b[$ de $f(x)$;
- La sucesión de errores $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$;
- El orden de convergencia de $\{m_n\}_{n\geq 0}$ es, al menos, lineal $(p=1)$.

Demostración:

1. Si $\ell_n = b_n - a_n$ entonces es fácil ver que $\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$,

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s \in]a, b[$ de $f(x)$;
- La sucesión de errores $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$;
- El orden de convergencia de $\{m_n\}_{n\geq 0}$ es, al menos, lineal $(p = 1)$.

Demostración:

1. Si $\ell_n = b_n - a_n$ entonces es fácil ver que $\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s\in]a,b[$ de $f(x)$;
- La sucesión de errores $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$;
- El orden de convergencia de $\{m_n\}_{n\geq 0}$ es, al menos, lineal $(p=1)$.

Demostración:

1. Si $\ell_n = b_n - a_n$ entonces es fácil ver que $\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = s' \in]a,b[$.
   Además se puede probar que s' es un cero de f.

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s \in]a, b[$ de $f(x)$;
- La sucesión de errores $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$;
- El orden de convergencia de $\{m_n\}_{n\geq 0}$ es, al menos, lineal $(p = 1)$.

Demostración:

1. Si $\ell_n = b_n - a_n$ entonces es fácil ver que $\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = s' \in]a, b[$.
   Además se puede probar que s' es un cero de f.
2. Los errores sucesivos cumplen $|e_n| = |m_n - s| < \frac{\ell_n}{2} \Rightarrow |e_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Método de bisección

Propiedades del método de bisección

- La sucesión $\{m_n\}_{n\geq 0}$ construida por el método de bisección, converge hacia un cero $s \in]a, b[$ de $f(x)$;
- La sucesión de errores $\{e_n = m_n - s\}_{n\geq 0}$ cumple $|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$;
- El orden de convergencia de $\{m_n\}_{n\geq 0}$ es, al menos, lineal $(p = 1)$.

Demostración:

1. Si $\ell_n = b_n - a_n$ entonces es fácil ver que $\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{\ell_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = s' \in]a, b[$.
   Además se puede probar que s' es un cero de f.
2. Los errores sucesivos cumplen $|e_n| = |m_n - s| < \frac{\ell_n}{2} \Rightarrow |e_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$.
3. La sucesión $\{\ell_n\}$ converge a cero linealmente con constante asintótica del error $C = \frac{1}{2}$ y acota a la sucesión $\{e_n\}$, luego ésta última converge a cero al menos linealmente.

Método de bisección a $x^3 + x - 3 = 0$ en $[1, 2]$. Criterio de parada $|e_n| \leq 10^{-6}$

n	a	b	m	$f(m)$	err
0	1.00000000	2.00000000	1.50000000	1.88e+00	5.00e-01
1	1.00000000	1.50000000	1.25000000	2.03e-01	2.50e-01
2	1.00000000	1.25000000	1.12500000	-4.51e-01	1.25e-01
3	1.12500000	1.25000000	1.18750000	-1.38e-01	6.25e-02
4	1.18750000	1.25000000	1.21875000	2.90e-02	3.12e-02
5	1.18750000	1.21875000	1.20312500	-5.53e-02	1.56e-02
6	1.20312500	1.21875000	1.21093750	-1.34e-02	7.81e-03
7	1.21093750	1.21875000	1.21484375	7.77e-03	3.91e-03
8	1.21093750	1.21484375	1.21289062	-2.82e-03	1.95e-03
9	1.21289062	1.21484375	1.21386719	2.47e-03	9.77e-04
10	1.21289062	1.21386719	1.21337891	-1.77e-04	4.88e-04
11	1.21337891	1.21386719	1.21362305	1.15e-03	2.44e-04
12	1.21337891	1.21362305	1.21350098	4.84e-04	1.22e-04
13	1.21337891	1.21350098	1.21343994	1.53e-04	6.10e-05
14	1.21337891	1.21343994	1.21340942	-1.21e-05	3.05e-05
15	1.21340942	1.21343994	1.21342468	7.05e-05	1.53e-05
16	1.21340942	1.21342468	1.21341705	2.92e-05	7.63e-06
17	1.21340942	1.21341705	1.21341324	8.54e-06	3.81e-06
18	1.21340942	1.21341324	1.21341133	-1.80e-06	1.91e-06
19	1.21341133	1.21341324	1.21341228	3.37e-06	9.54e-07

Cálculo previo del número de iteraciones necesarias

El método de bisección permite calcular previamente el número de iteraciones necesarias para obtener la solución con error inferior a uno dado.

Cálculo previo del número de iteraciones necesarias

El método de bisección permite calcular previamente el número de iteraciones necesarias para obtener la solución con error inferior a uno dado.

Si se parte del intervalo $[a, b]$ y se desea la solución con error inferior a ε, entonces podemos imponer

$$|e_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

de donde

$$2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1 = \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} - 1$$

Cálculo previo del número de iteraciones necesarias

El método de bisección permite calcular previamente el número de iteraciones necesarias para obtener la solución con error inferior a uno dado.

Si se parte del intervalo $[a, b]$ y se desea la solución con error inferior a ε, entonces podemos imponer

$$|e_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

de donde

$$2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1 = \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} - 1$$

Obsérvese que este cálculo no depende en absoluto de la ecuación particular, sino tan solo del intervalo inicial y el error máximo impuesto.

Cálculo previo del número de iteraciones necesarias

Ejemplo

Para una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ (seis cifras decimales) partiendo del intervalo $[1, 2]$ el número de iteraciones que lo garantizan es:

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{10^{-6}}}{\ln 2} - 1 = 18.9316 \cdots \ \Rightarrow \ \boxed{\text{n=19}}.$$

Cálculo previo del número de iteraciones necesarias

Ejemplo

Para una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ (seis cifras decimales) partiendo del intervalo $[1, 2]$ el número de iteraciones que lo garantizan es:

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{10^{-6}}}{\ln 2} - 1 = 18.9316\cdots \Rightarrow \boxed{\text{n=19}}.$$

Este cálculo previo del número de iteraciones garantiza una aproximación a la solución dentro del error requerido, pero no se descarta que alguna iteración anterior pudiera estar más cerca de s que la última obtenida. Dicho de otro modo, la sucesión de errores e_n no tiene por qué ser decreciente en valor absoluto.

Cálculo previo del número de iteraciones necesarias

Ejemplo

Para una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ (seis cifras decimales) partiendo del intervalo $[1, 2]$ el número de iteraciones que lo garantizan es:

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{10^{-6}}}{\ln 2} - 1 = 18.9316\cdots \ \Rightarrow \ \boxed{\text{n=19}}.$$

Este cálculo previo del número de iteraciones garantiza una aproximación a la solución dentro del error requerido, pero no se descarta que alguna iteración anterior pudiera estar más cerca de s que la última obtenida. Dicho de otro modo, la sucesión de errores e_n no tiene por qué ser decreciente en valor absoluto.

Como contraejemplo se puede considerar el intervalo $[0, 1]$ con la raíz $s = 0.5000001$ y una cota de error de $\varepsilon = 10^{-6}$. La garantía la darán 19 iteraciones, pero la primera de ellas ya cumple con el criterio.

Métodos de Newton-Raphson y secante

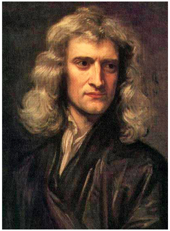
El orden de convergencia del método de bisección es lineal con constante asintótica del error $C = \frac{1}{2}$, lo que se puede interpretar como una ganancia de un dígito de precisión cada tres iteraciones aproximadamente, lo cual es muy lento. Existen métodos mucho más rápidos.

[1] Joseph Raphson (1648-1715), matemático inglés, publicó el método 46 años antes que Newton.

Métodos de Newton-Raphson y secante

El orden de convergencia del método de bisección es lineal con constante asintótica del error $C = \frac{1}{2}$, lo que se puede interpretar como una ganancia de un dígito de precisión cada tres iteraciones aproximadamente, lo cual es muy lento. Existen métodos mucho más rápidos.

Vamos a ver ahora el método de Newton-Raphson[1] o de las tangentes.



Isaac Newton
(1643-1727)

[1] Joseph Raphson (1648-1715), matemático inglés, publicó el método 46 años antes que Newton.

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson construye una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de aproximaciones a la solución:

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{aproximación incial o semilla} \\ x_{n+1} &= x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

Método de Newton-Raphson

Ejemplo

Para la ecuación $x^2 - 5 = 0$ cuya raíz positiva es $\sqrt{5}$ la iteración es
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} =$

Método de Newton-Raphson

Ejemplo

Para la ecuación $x^2 - 5 = 0$ cuya raíz positiva es $\sqrt{5}$ la iteración es $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-5}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$.
Partiendo de $x_0 = 2$ como semilla tenemos

n	x_n
1	2.250000000000000
2	2.236111111111111
3	2.236067977915804
4	2.236067977499790
5	2.236067977499790

Método de Newton-Raphson

La justificación deductiva del método de Newton-Raphson se puede hacer de forma analítica o geométrica.

Método de Newton-Raphson

La justificación deductiva del método de Newton-Raphson se puede hacer de forma analítica o geométrica.

Deducción analítica: Si f es suficientemente derivable con continuidad se puede escribir su desarrollo de Taylor en el punto x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \text{Error}$$

Método de Newton-Raphson

La justificación deductiva del método de Newton-Raphson se puede hacer de forma analítica o geométrica.

Deducción analítica: Si f es suficientemente derivable con continuidad se puede escribir su desarrollo de Taylor en el punto x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \text{Error}$$

si $x \approx x_n$ podemos despreciar el error

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

y la solución (aproximada) puede obtenerse haciendo $f(x) = 0$, de donde

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

Método de Newton-Raphson

La justificación deductiva del método de Newton-Raphson se puede hacer de forma analítica o geométrica.

Deducción analítica: Si f es suficientemente derivable con continuidad se puede escribir su desarrollo de Taylor en el punto x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \text{Error}$$

si $x \approx x_n$ podemos despreciar el error

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

y la solución (aproximada) puede obtenerse haciendo $f(x) = 0$, de donde

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

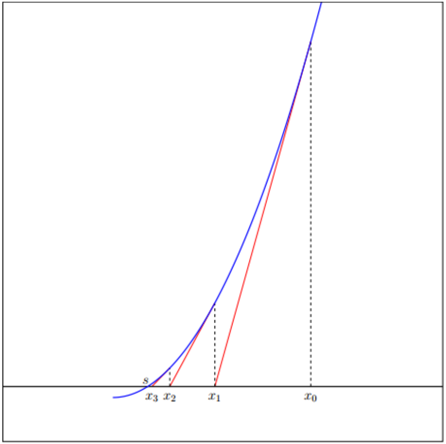
y despejando x tendríamos

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

que tomaríamos como x_{n+1}.

Método de Newton-Raphson

Deducción geométrica: x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección del eje X con la recta tangente a la curva $(x, f(x))$ en el punto $(x_n, f(x_n))$



Teorema: Convergencia global de NR

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$
4. $\max\left\{ \left| \dfrac{f(a)}{f'(a)} \right|, \left| \dfrac{f(b)}{f'(b)} \right| \right\} \leq b - a$

Entonces

Teorema: Convergencia global de NR

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$
4. $\text{máx}\left\{\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b-a$

Entonces

1. La ecuación admite una única raíz real $s \in]a,b[$.

Teorema: Convergencia global de NR

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$
4. $\text{máx}\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b - a$

Entonces

1. La ecuación admite una única raíz real $s \in]a,b[$.
2. El método de Newton-Raphson converge a s para toda aproximación inicial $x_0 \in [a,b]$.

Teorema: Convergencia global de NR

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$
4. $\max\left\{\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b - a$

Entonces

1. La ecuación admite una única raíz real $s \in]a,b[$.
2. El método de Newton-Raphson converge a s para toda aproximación inicial $x_0 \in [a,b]$.
3. El orden de convergencia del método es al menos 2.

Teorema: Convergencia global de NR

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$
4. $\max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b - a$

Entonces

1. La ecuación admite una única raíz real $s \in]a,b[$.
2. El método de Newton-Raphson converge a s para toda aproximación inicial $x_0 \in [a,b]$.
3. El orden de convergencia del método es al menos 2.

Demostración:

1. Por (1) y el Teorema de Bolzano, la función admite al menos un cero $s \in]a,b[$.

Teorema: Convergencia global de NR

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ verificando

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$
4. $\max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq b - a$

Entonces

1. La ecuación admite una única raíz real $s \in]a,b[$.
2. El método de Newton-Raphson converge a s para toda aproximación inicial $x_0 \in [a,b]$.
3. El orden de convergencia del método es al menos 2.

Demostración:

1. Por (1) y el Teorema de Bolzano, la función admite al menos un cero $s \in]a,b[$. Por (2), f es estrictamente monótona y no podrá anularse una segunda vez, luego s es único.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método.
   Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método.

   Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

   Supongamos $f' > 0,\ f'' \geq 0$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método.

   Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

   Supongamos $f' > 0$, $f'' \geq 0$. Entonces g decrece en $[a, s]$ y crece en $[s, b]$ (aunque no lo haga estrictamente).

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método.

   Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

   Supongamos $f' > 0$, $f'' \geq 0$. Entonces g decrece en $[a, s]$ y crece en $[s, b]$ (aunque no lo haga estrictamente).

   - Si $a \leq x_0 < s$ entonces

   $$s = g(s) \leq x_1 = g(x_0) \leq g(a) =$$

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método.

   Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

   Supongamos $f' > 0,\ f'' \geq 0$. Entonces g decrece en $[a, s]$ y crece en $[s, b]$ (aunque no lo haga estrictamente).

   - Si $a \leq x_0 < s$ entonces

     $$s = g(s) \leq x_1 = g(x_0) \leq g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leq a + \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq a + (b - a) = b$$

     por (4), luego $x_1 \in [s, b]$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método.

   Entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

   Supongamos $f' > 0,\ f'' \geq 0$. Entonces g decrece en $[a, s]$ y crece en $[s, b]$ (aunque no lo haga estrictamente).
   - Si $a \leq x_0 < s$ entonces

     $$s = g(s) \leq x_1 = g(x_0) \leq g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leq a + \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \leq a + (b - a) = b$$

     por (4), luego $x_1 \in [s, b]$.
   - Si $s < x_0 \leq b$ entonces

     $$s = g(s) \leq x_1 = g(x_0) \leq g(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

     luego $x_1 \in [s, b]$.
   - Si $x_0 = s$ entonces $x_1 = s$.

   En consecuencia, toda la sucesión $\{x_n\}$ estará contenida en $[s, b]$ salvo eventualmente la semilla x_0.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. (cont.) Por otro lado en $]s, b]$ ocurre que:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

   pues $f'(x) > 0$ en el intervalo y por tanto la función es creciente por lo que $f(x) > 0$ en $]s, b]$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. (cont.) Por otro lado en $]s, b]$ ocurre que:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

   pues $f'(x) > 0$ en el intervalo y por tanto la función es creciente por lo que $f(x) > 0$ en $]s, b]$.
   Tenemos, por tanto, una sucesión monótona decreciente (salvo la semilla) y acotada inferiormente.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

2. (cont.) Por otro lado en $]s, b]$ ocurre que:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$$

   pues $f'(x) > 0$ en el intervalo y por tanto la función es creciente por lo que $f(x) > 0$ en $]s, b]$.
   Tenemos, por tanto, una sucesión monótona decreciente (salvo la semilla) y acotada inferiormente. Entonces la sucesión ha de tener un límite s'. Además, s' verifica $s' = g(s')$, luego ha de ser $s' = s$.

Otras combinaciones de signos se estudian y demuestran de forma análoga.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

3. El orden de convergencia se deduce por Taylor.

$$e_{n+1} = x_{n+1} - s = x_n - s - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

3. El orden de convergencia se deduce por Taylor.

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - s = x_n - s - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= e_n + \frac{f(s) - f(x_n)}{f'(x_n)} \overset{\text{Taylor orden 2}}{=} \frac{f''(\xi_n) e_n^2}{2 f'(x_n)} \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} & f(s) = f(x_n) + f'(x_n)(s - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(s - x_n)^2 \\ \Rightarrow \quad & f(s) - f(x_n) = -f'(x_n) e_n + \frac{f''(\xi_n)}{2} e_n^2 \end{aligned}$$

con ξ_n comprendido entre s y x_n.

Método de Newton-Raphson

Demostración (continuación):

3. El orden de convergencia se deduce por Taylor.

$$e_{n+1} = x_{n+1} - s = x_n - s - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= e_n + \frac{f(s) - f(x_n)}{f'(x_n)} \overset{\text{Taylor orden 2}}{=} \frac{f''(\xi_n)e_n^2}{2f'(x_n)}$$

pues

$$f(s) = f(x_n) + f'(x_n)(s - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(s - x_n)^2$$

$$\Rightarrow \quad f(s) - f(x_n) = -f'(x_n)e_n + \frac{f''(\xi_n)}{2}e_n^2$$

con ξ_n comprendido entre s y x_n.

Por tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right| > 0$ (salvo que $f''(s) = 0$). En consecuencia, la convergencia será, al menos, cuadrática con constante asintótica del error $C = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(s)}{f'(s)}\right|$.

Método de Newton-Raphson

Teorema: Relajación de condiciones del Teorema de conv. global

En ausencia de la condición 4 del Teorema anterior, este sigue siendo válido si $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Método de Newton-Raphson

Teorema: Relajación de condiciones del Teorema de conv. global

En ausencia de la condición 4 del Teorema anterior, este sigue siendo válido si $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Teorema: Convergencia local

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$ siendo I un entorno abierto de una solución s simple ($f'(s) \neq 0$), entonces existe un subintervalo centrado $I_\varepsilon =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subseteq I$ para el cual la sucesión generada por el método de Newton-Raphson converge a s con orden al menos cuadrático $\forall x_0 \in I_\varepsilon$.

Método de Newton-Raphson

Los criterios de parada usuales, dada una tolerancia $T > 0$, son:

- Absoluto: $|x_{n+1} - x_n| < T$, que depende de la magnitud de los términos.

Método de Newton-Raphson

Los criterios de parada usuales, dada una tolerancia $T > 0$, son:

- Absoluto: $|x_{n+1} - x_n| < T$, que depende de la magnitud de los términos.
- Relativo: $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < T$, que no depende de la magnitud de los términos.

Método de Newton-Raphson: raíces múltiples

Cuando la raíz buscada s no es simple, el método de NR sigue convergiendo, pero pierde el orden cuadrático de convergencia.

Método de Newton-Raphson: raíces múltiples

Cuando la raíz buscada s no es simple, el método de NR sigue convergiendo, pero pierde el orden cuadrático de convergencia.

Como ejemplo, aplicamos el método de Newton-Raphson a la ecuación

$$e^{1-x} + x - 2 = 0$$

que tiene una raíz doble en $x = 1$, con $x_0 = 0.5$ y tolerancia 10^{-6}.

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\frac{\lvert x_{n+1} - x_n \rvert}{\lvert x_{n+1} \rvert}$
0	0.50000000		
1	0.72925296	2.29e-01	3.14e-01
2	0.85852527	1.29e-01	1.51e-01
3	0.92759526	6.91e-02	7.45e-02
4	0.96336080	3.58e-02	3.71e-02
5	0.98156853	1.82e-02	1.85e-02
6	0.99075596	9.19e-03	9.27e-03
7	0.99537086	4.61e-03	4.64e-03
8	0.99768364	2.31e-03	2.32e-03
9	0.99884137	1.16e-03	1.16e-03
10	0.99942058	5.79e-04	5.80e-04
11	0.99971026	2.90e-04	2.90e-04
12	0.99985512	1.45e-04	1.45e-04
13	0.99992756	7.24e-05	7.24e-05
14	0.99996378	3.62e-05	3.62e-05
15	0.99998189	1.81e-05	1.81e-05
16	0.99999094	9.06e-06	9.06e-06
17	0.99999547	4.53e-06	4.53e-06
18	0.99999774	2.26e-06	2.26e-06
19	0.99999887	1.13e-06	1.13e-06
20	0.99999943	5.66e-07	5.66e-07

Método de Newton-Raphson: raíces múltiples

Teorema: Convergencia local para raíces múltiples

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$ siendo I un entorno abierto de una solución s de multiplicidad $m > 1$, entonces existe un subintervalo centrado $I_\varepsilon =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subseteq I$ para el cual la sucesión generada por el método de Newton-Raphson converge a s con orden lineal $(p = 1)$ y con constante asintótica del error $C = 1 - \frac{1}{m}$.

Método de Newton-Raphson: raíces múltiples

Teorema: Convergencia local para raíces múltiples

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$ siendo I un entorno abierto de una solución s de multiplicidad $m > 1$, entonces existe un subintervalo centrado $I_\varepsilon =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subseteq I$ para el cual la sucesión generada por el método de Newton-Raphson converge a s con orden lineal $(p = 1)$ y con constante asintótica del error $C = 1 - \frac{1}{m}$.

Demostración (Sugerencia): Se considera $f(x) = (x - s)^m q(x)$ con $q(s) \neq 0$.

Método de Newton-Raphson: raíces múltiples

Teorema: Convergencia local para raíces múltiples

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$ siendo I un entorno abierto de una solución s de multiplicidad $m > 1$, entonces existe un subintervalo centrado $I_\varepsilon =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subseteq I$ para el cual la sucesión generada por el método de Newton-Raphson converge a s con orden lineal $(p = 1)$ y con constante asintótica del error $C = 1 - \frac{1}{m}$.

Demostración (Sugerencia): Se considera $f(x) = (x - s)^m q(x)$ con $q(s) \neq 0$. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la función asociada al método. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \cdots \\ &= 1 - \frac{m(m-1)q^2(x) + 2m(x-s)q(x)q'(x) + (x-s)^2 q(x)q''(x)}{(mq(x) + (x-s)q'(x))^2} \end{aligned}$$

y por tanto $g'(s) = 1 - \dfrac{1}{m}$. Como no es cero, la convergencia no es cuadrática (lo veremos).

Método de Newton-Raphson: Recuperación de la convergencia cuadrática

Se puede conseguir de dos maneras diferentes:

1. Usando el método $x_{n+1} = g_m(x_n)$ generado por $g_m(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$. Para hacerlo es necesario conocer previamente la multiplicidad m, por lo cual el interés de esta opción es relativo.

Método de Newton-Raphson: Recuperación de la convergencia cuadrática

Se puede conseguir de dos maneras diferentes:

1. Usando el método $x_{n+1} = g_m(x_n)$ generado por $g_m(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$. Para hacerlo es necesario conocer previamente la multiplicidad m, por lo cual el interés de esta opción es relativo.

2. Aplicando Newton-Raphson a la ecuación $\mu(x) = 0$ con $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, lo que conduce al método $x_{n+1} = h(x_n)$ generado por

$$h(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}.$$

   En este segundo caso hace falta que f sea al menos de clase 2.
   Se puede demostrar que si s es raíz de f entonces también lo es de μ pero simple.

Como ejemplo, aplicamos ambos métodos a la ecuación

$$e^{1-x} + x - 2 = 0$$

que habíamos visto anteriormente. Sabemos tiene una raíz doble en $x = 1$ y que el método de NR converge muy lento empezando en $x_0 = 0.5$.

Como ejemplo, aplicamos ambos métodos a la ecuación

$$e^{1-x} + x - 2 = 0$$

que habíamos visto anteriormente. Sabemos tiene una raíz doble en $x = 1$ y que el método de NR converge muy lento empezando en $x_0 = 0.5$. Ambos métodos modificados se comparan en la siguiente tabla:

METODO DE NEWTON-RAPHSON				
n	$x_n(1)$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	$x_n(2)$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
0	0.50000000		0.50000000	
1	0.95850592	4.59e-01	1.04929971	5.49e-01
2	0.99971305	4.12e-02	1.00039848	4.89e-02
3	0.99999999	2.87e-04	1.00000003	3.98e-04
4	0.99999999	0.00e+00	0.99999998	4.59e-08

El método de la secante

Se trata de una alternativa interesante al método de Newton-Raphson cuando no se puede disponer de la derivada o bien no interesa.

El método de la secante

Se trata de una alternativa interesante al método de Newton-Raphson cuando no se puede disponer de la derivada o bien no interesa.

Se construyen las sucesivas aproximaciones como

Método de la secante

$$\begin{aligned} x_0, x_1 &= \text{aproximaciones iniciales o semillas} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

El método de la secante

Deducción analítica: Se puede obtener a partir del método de Newton Raphson sustituyendo $f'(x_n)$ por su aproximación como cociente diferencial

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

El método de la secante

Deducción analítica: Se puede obtener a partir del método de Newton Raphson sustituyendo $f'(x_n)$ por su aproximación como cociente diferencial

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Deducción geométrica: x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección del eje X con la recta secante a la curva $(x, f(x))$ en los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$.

El método de la secante

Deducción analítica: Se puede obtener a partir del método de Newton Raphson sustituyendo $f'(x_n)$ por su aproximación como cociente diferencial

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Deducción geométrica: x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección del eje X con la recta secante a la curva $(x, f(x))$ en los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$.

Observaciones:

- No se tienen en cuenta cambios de signo.
- Puede ocurrir que $f(x_n) - f(x_{n-1})$ sea cero o muy próximo, lo que puede provocar fuerte cancelación de dígitos iguales o una división por cero.

Teorema: Convergencia local para el método de la secante

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$ siendo I un entorno abierto de una solución s simple ($f'(s) \neq 0$), entonces existe un subintervalo centrado $I_\varepsilon =]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subseteq I$ para el cual la sucesión generada por el método de la Secante converge a s con orden al menos $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ (superlineal) $\forall x_0 \in I_\varepsilon$.

Teorema: Convergencia local para el método de la secante

Dada la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2(I)$ siendo I un entorno abierto de una solución s simple ($f'(s) \neq 0$), entonces existe un subintervalo centrado $I_\varepsilon =]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\subseteq I$ para el cual la sucesión generada por el método de la Secante converge a s con orden al menos $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ (superlineal) $\forall x_0 \in I_\varepsilon$.

Demostración (Sugerencia) De la fórmula de interpolación de Newton de f en los nodos x_n, x_{n-1} con término de error podemos escribir

$$f(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x](x - x_n)(x - x_{n-1})$$

y tomando $x = s$, despejando $f(x_n)$ y sustituyendo adecuadamente se obtiene

$$e_{n+1} = e_n e_{n-1} \frac{f[x_{n-1}, x_n, s]}{f[x_{n-1}, x_n]} = e_n e_{n-1} \frac{f''(\xi_{2,n})}{2f'(\xi_{1,n})}$$

de donde se puede deducir el resultado.

El método de la secante

En la siguiente tabla se muestra un ejemplo del método de la Secante aplicado a la ecuación $x^3 + x - 3 = 0$ con $x_0 = 1, x_1 = 2$ y tolerancia 10^{-6}.

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.00000000	
1	2.00000000	1.00e+00
2	1.12500000	8.75e-01
3	1.17798165	5.30e-02
4	1.21562415	3.76e-02
5	1.21335829	2.27e-03
6	1.21341158	5.33e-05
7	1.21341166	7.93e-08