

# Tema 13

## Singularidades

Del mismo modo que la fórmula de Cauchy para una circunferencia nos permitió obtener el desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa, la versión general de la fórmula da lugar a desarrollos o métodos de aproximación más generales, entre los que vamos a estudiar el más sencillo, que se conoce como *desarrollo en serie de Laurent*.

Estas series de Laurent permiten construir explícitamente todas las funciones holomorfas en un *anillo*, es decir, el dominio comprendido entre dos circunferencias concéntricas, admitiendo los casos extremos en que el radio interior es nulo, el exterior es infinito, o ambas cosas. Así aumentamos, de forma muy notable, la familia de los abiertos del plano para los que podemos dar una descripción explícita de todas las funciones holomorfas en cada uno de ellos. Hasta ahora, esto sólo sabíamos hacerlo para el plano y para un disco abierto.

Además, el desarrollo en serie de Laurent facilita el estudio de las posibles *singularidades* de una función holomorfa. Se trata de clasificar con detalle los diferentes comportamientos que puede presentar en un punto, una función que sea holomorfa en un entorno reducido del mismo.

### 13.1. Series de Laurent

Dado  $a \in \mathbb{C}$ , una **serie de Laurent** centrada en  $a$ , es una serie de funciones  $\sum_{n \geq 0} f_n$ , en la que, para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , la función  $f_n : \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  viene dada, para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ , por

$$f_0(z) = c_0 \quad \text{y} \quad f_n(z) = c_n (z - a)^n + c_{-n} (z - a)^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

donde, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , el coeficiente  $c_k \in \mathbb{C}$  es constante.

Por tanto, los datos que determinan una serie de Laurent son: el punto  $a \in \mathbb{C}$  en el que está centrada, el coeficiente  $c_0 \in \mathbb{C}$  que da lugar al término constante de la serie, y dos sucesiones de coeficientes  $\{c_n\}$  y  $\{c_{-n}\}$ , que son sucesiones arbitrarias de números complejos. La segunda marca la diferencia con las series de potencias: si  $c_{-n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la serie de Laurent anterior es una serie de potencias, salvo que habríamos excluido sin motivo el punto  $a$ .

Podemos decir que, pasar de las series de potencias a las de Laurent es admitir potencias cuyos exponentes son enteros negativos. Observemos la serie de Laurent recién definida como sucesión de funciones, es decir, veamos cómo son las sumas parciales. Si para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escribimos  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$ , es claro que, para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$S_{n+1}(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k (z-a)^k + c_{-k} (z-a)^{-k}) = \sum_{k=-n}^n c_k (z-a)^k$$

Esta expresión refuerza la idea intuitiva de que estamos intentando sumar, ordenadas de cierta forma, todas las potencias enteras de la función  $z \mapsto z-a$ , afectada cada una de ellas por su correspondiente coeficiente. Vemos que las sumas parciales de una serie de Laurent, centrada en  $a \in \mathbb{C}$ , son funciones racionales cuyos denominadores sólo pueden anularse en el punto  $a$ .

Resaltando la similitud con las series de potencias, la serie de Laurent definida en (1) se denota por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n \quad (2)$$

y cuando dicha serie converge en un punto  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ , su suma se denota por

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k (z-a)^k$$

Esto es sólo una notación sugerente, debe quedar claro que una serie de Laurent no es más que un tipo particular de serie de funciones, y su suma, cuando converge, se define exactamente igual que la de cualquier otra serie de funciones.

## 13.2. Convergencia de una serie de Laurent

Para no tener que hacer demasiadas distinciones de casos, convenimos en todo lo que sigue que la desigualdad  $\rho < \infty$  se verifica para todo  $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ . Por ejemplo, con este convenio, podemos decir que el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial, centrada en  $a$  y con radio de convergencia  $R$ , es siempre  $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ , puesto que cuando  $R = \infty$ , tenemos simplemente  $D(a, \infty) = \mathbb{C}$ . Así pues, nuestro convenio evita distinguir los dos casos que se pueden presentar al estudiar una serie de potencias no trivial.

Pues bien, al estudiar la convergencia de una serie de Laurent encontraremos igualmente las no triviales, cuyo dominio de convergencia será la región contenida entre dos circunferencias concéntricas, pero admitiendo los casos extremos, es decir, el radio interior puede anularse y el radio exterior puede ser infinito. Todos los dominios de este tipo reciben el nombre de anillos abiertos. Así pues, el **anillo abierto** de centro  $a \in \mathbb{C}$  y radios  $r$  y  $R$ , con  $0 \leq r < R \leq \infty$ , es el dominio definido por

$$A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

Por supuesto, la situación más natural se presenta cuando  $0 < r < R < \infty$  y  $A(a; r, R)$  es el dominio comprendido entre dos circunferencias, pero resaltemos los casos extremos, con el convenio que acabamos de hacer:

- Para  $R \in \mathbb{R}^+$  es claro que  $A(a; 0, R) = D(a, R) \setminus \{a\}$
- Para  $r \in \mathbb{R}^+$  se tiene  $A(a; r, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r)$
- Finalmente, es claro que  $A(a; 0, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ .

Pasamos a estudiar la convergencia de la serie de Laurent que aparece en (2), definida más explícitamente en (1). Ello se reduce en gran medida a estudiar dos series de potencias, salvo que en una de ellas hacemos un cambio de variable. Concretamente, podemos escribir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n = \sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} (g_n + h_n) \quad (3)$$

donde  $g_0 = f_0$ ,  $h_0 = 0$  y, para cualesquiera  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , hemos definido

$$g_n(z) = c_n (z - a)^n \quad \text{y} \quad h_n(z) = \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \quad (4)$$

Esto nos lleva a estudiar, por una parte, la serie  $\sum_{n \geq 0} g_n$ , que es una serie de potencias, y por otra, la serie  $\sum_{n \geq 1} h_n$ , que se obtiene a partir de  $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$  al hacer  $w = 1/(z - a)$ .

Denotemos pues por  $R^+$  y  $R^-$  a los radios de convergencia de las series  $\sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$  y  $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$  respectivamente, así que  $R^+, R^- \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ . Diremos que  $R^+$  y  $R^-$  son los **radios de convergencia** de nuestra serie de Laurent. Vienen determinados por ella y podemos calcularlos mediante la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R^+ = \frac{1}{\limsup \left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}} \quad \text{y} \quad R^- = \frac{1}{\limsup \left\{ \sqrt[n]{|c_{-n}|} \right\}}$$

entendiendo que el límite superior de una sucesión de números reales no mayorada es  $\infty$ , así como que  $1/\infty = 0$  y  $1/0 = \infty$ , convenios que también mantendremos en todo lo que sigue. Para cualquier serie de Laurent con la que estemos trabajando, denotaremos siempre por  $R^+$  y  $R^-$  a sus radios de convergencia, recién definidos.

Se adivina claramente que la condición natural para asegurarse la convergencia de nuestra serie de Laurent en un punto  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$  es que se tenga por una parte  $|z - a| < R^+$ , y por otra  $\frac{1}{|z - a|} < R^-$ , lo que claramente equivale a  $\frac{1}{R^-} < |z - a|$ . Esto motiva las definiciones que siguen.

Diremos que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$  es una **serie de Laurent no trivial**, cuando  $\frac{1}{R^-} < R^+$ , lo que en particular implica que  $R^- > 0$  y  $R^+ > 0$ . Entonces diremos también que  $A(a; 1/R^-, R^+)$  es el **anillo de convergencia** de la serie. El siguiente resultado muestra que este anillo hace el mismo papel que tenía el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial. De paso vemos que las series de Laurent nos dan un método muy efectivo para construir funciones holomorfas en anillos arbitrarios.

- Sea  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$  una serie de Laurent no trivial y sea  $\Omega$  su anillo de convergencia. Entonces la serie converge absolutamente en  $\Omega$  y uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\Omega$ . Por tanto, su suma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

es una función holomorfa en  $\Omega$ . De hecho, las series  $\sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$  y  $\sum_{n \geq 1} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$  de la misma forma y se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \quad \forall z \in \Omega$$

La demostración es bien sencilla. Escribimos la serie de Laurent como en (3) donde  $g_0 = f_0$ ,  $h_0 = 0$  y las sucesiones  $\{g_n\}$ ,  $\{h_n\}$  vienen dadas por (4). Recordamos que  $R^+$  y  $R^-$  son los radios de convergencia de las series de potencias  $\sum_{n \geq 0} g_n$  y  $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$  respectivamente, con lo que  $\Omega = A(a; 1/R^-, R^+)$ .

Si  $K$  es compacto y  $K \subset \Omega$ , como  $K \subset D(a, R^+)$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ . Por otra parte, el conjunto  $H = \{1/(z - a) : z \in K\}$ , es compacto, por ser la imagen de  $K$  por una función continua, y verifica que  $H \subset D(a, R^-)$ , luego la serie  $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$  converge absoluta y uniformemente en  $H$ . Esto implica claramente que la serie  $\sum_{n \geq 1} h_n$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ . Como  $|f_n(z)| \leq |g_n(z)| + |h_n(z)|$  para cualesquiera  $z \in K$  y  $n \in \mathbb{N}$ , concluimos que la serie de Laurent  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge absoluta y uniformemente en  $K$ . Esto es válido para todo conjunto compacto  $K \subset \Omega$ , y en particular la serie converge absolutamente en  $\Omega$ . Además, hemos comprobado que su suma verifica:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \quad \forall z \in \Omega$$

Puesto que  $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . ■

### 13.3. Desarrollo de Laurent

El principal interés de la construcción anterior estriba en que, recíprocamente, toda función holomorfa en un anillo arbitrario puede expresarse como suma de una serie de Laurent, como enseguida veremos. Tenemos así una descripción explícita de todas las funciones holomorfas en un anillo, igual que el desarrollo en serie de Taylor nos permitió describir todas las funciones enteras, o todas las funciones holomorfas en un disco abierto.

**Desarrollo en serie de Laurent.** Sea  $\Omega = A(a; r, R)$  un anillo abierto arbitrario y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Entonces existe una única serie de Laurent no trivial  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$ , cuyo anillo de convergencia contiene a  $\Omega$ , que verifica:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n \quad \forall z \in \Omega \quad (5)$$

De hecho, para cualquier  $\rho \in \mathbb{R}^+$  que verifique  $r < \rho < R$ , se tiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, \rho)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

**Demostración.** Empezamos viendo que las integrales de (6) no dependen del  $\rho \in ]r, R[$  que usemos. Sean  $\rho_1, \rho_2 \in ]r, R[$  y consideremos el ciclo  $\Gamma = C_2 - C_1$ , donde  $C_1 = C(a, \rho_1)$  y  $C_2 = C(a, \rho_2)$ , que verifica  $\Gamma^* \subset \Omega$  y es nul-homólogo con respecto a  $\Omega$ . En efecto, si  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  se tendrá, o bien  $|w - a| \leq r$ , en cuyo caso,  $\text{Ind}_{C_1}(w) = \text{Ind}_{C_2}(w) = 1$ , o bien  $|w - a| \geq R$ , con lo que  $\text{Ind}_{C_1}(w) = \text{Ind}_{C_2}(w) = 0$ ; en ambos casos,  $\text{Ind}_{\Gamma}(w) = 0$ . Fijado  $n \in \mathbb{Z}$ , la función  $w \mapsto \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}}$  es holomorfa en  $\Omega$ , luego la forma general del teorema de Cauchy nos dice que

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw = \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  podemos por tanto definir sin ambigüedad  $c_n$  mediante la igualdad (6) y considerar la serie de Laurent  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$ , para comprobar que verifica (5). Denotamos como siempre por  $R^+$  y  $R^-$  a los radios de convergencia de esta serie de Laurent.

Fijamos  $z \in \Omega$  y usamos el mismo ciclo  $\Gamma$ , pero con  $r < \rho_1 < |z - a| < \rho_2 < R$ , de forma que  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$ . La versión general de la fórmula de Cauchy nos da:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (7)$$

Dos desarrollos en serie del integrando nos llevarán al resultado deseado.

Con la circunferencia  $C_2$  trabajamos igual que hicimos para el desarrollo de Taylor. Para  $w \in C_2^*$  tenemos  $|w - a| = \rho_2 > |z - a|$ , lo que nos permite escribir:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)/(w - a)}{1 - ((z - a)/(w - a))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} (z - a)^n \quad \forall w \in C_2^*$$

y esta serie converge uniformemente en  $C_2^*$ . En efecto, si  $M_2 = \max \{ |f(w)| : w \in C_2^* \}$ , tenemos claramente

$$\left| \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} (z - a)^n \right| \leq \frac{M_2}{\rho_2} \left( \frac{|z - a|}{\rho_2} \right)^n \quad \forall w \in C_2^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Esta serie geométrica converge, porque  $|z - a| < \rho_2$ , y basta aplicar el test de Weierstrass.

La continuidad de la integral curvilínea nos da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right) (z - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \end{aligned} \quad (8)$$

donde hemos usado (6) con  $\rho = \rho_2$ .

El razonamiento anterior prueba que la serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$  converge en el punto  $z$  fijado, luego  $R^+ \geq |z - a|$ . Pero esto es válido para todo  $z \in \Omega$ , luego  $R^+ \geq R$ .

Volviendo al punto  $z \in \Omega$  fijado, para  $w \in C_1^*$  tenemos ahora  $|w - a| = \rho_1 < |z - a|$ , lo que nos permite escribir:

$$-\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)/(z - a)}{1 - ((w - a)/(z - a))} = \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(w - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \quad \forall w \in C_1^*$$

y comprobamos que esta serie converge uniformemente en  $C_1^*$ . En efecto, escribiendo ahora  $M_1 = \max \{ |f(w)| : w \in C_1^* \}$ , tenemos

$$\left| f(w) \frac{(w - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M_1}{|z - a|} \left( \frac{\rho_1}{|z - a|} \right)^n \quad \forall w \in C_1^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

La serie geométrica converge, porque  $|z - a| > \rho_1$ , y basta aplicar el test de Weierstrass.

La continuidad de la integral curvilínea, usando (6) con  $\rho = \rho_1$ , nos da:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(w) (w - a)^n dw \right) \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w - a)^{-n+1}} dw \right) \frac{1}{(z - a)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \end{aligned} \quad (9)$$

El razonamiento anterior prueba que la serie de potencias  $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$  converge en el punto  $w = \frac{1}{z-a}$ , luego  $R^- \geq \frac{1}{|z-a|}$ , o lo que es lo mismo  $\frac{1}{R^-} \leq |z-a|$ . Como esto es válido para todo  $z \in \Omega$ , se tendrá  $\frac{1}{R^-} \leq r$ . Junto con la desigualdad  $R^+ \geq R$  probada anteriormente, vemos que el anillo de convergencia de la serie de Laurent contiene a  $\Omega$ :

$$\Omega = A(a; r, R) \subset A(a; 1/R^-, R^+)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (8) y (9), de (7) deducimos la igualdad (5):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

Sólo queda probar la unicidad del desarrollo obtenido. Supongamos por tanto que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

donde  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n (z-a)^n$  es otra serie de Laurent no trivial, cuyo anillo de convergencia contiene a  $\Omega$ . Para mayor claridad del razonamiento denotemos por  $\{S_n\}$  a esta nueva serie. Fijado  $p \in \mathbb{Z}$  debemos probar que  $\alpha_p = c_p$ .

Fijado también  $\rho \in \mathbb{R}^+$  con  $r < \rho < R$ , escribimos  $C = C(a, \rho)$  y sabemos que  $\{S_{n+1}\}$  converge uniformemente a  $f$  en la circunferencia  $C^*$ , que es un compacto contenido en el anillo de convergencia de la serie de Laurent  $\{S_n\}$ . Observamos que, para cualesquiera  $w \in C^*$  y  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\left| \frac{S_{n+1}}{(w-a)^{p+1}} - \frac{f(w)}{(w-a)^{p+1}} \right| = \frac{1}{\rho^{p+1}} |S_{n+1}(w) - f(w)|$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{f(w)}{(w-a)^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}} \quad \forall w \in C^*$$

y esta sucesión converge uniformemente en  $C^*$ . La continuidad de la integral curvilínea nos da

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{p+1}} dw = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}} dw \quad (10)$$

y sólo queda calcular la sucesión de integrales que ha aparecido. Ello es fácil teniendo en cuenta que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$\int_C \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}} dw = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \int_C (w-a)^{k-p-1} dw$$

Si  $h \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ , la función  $w \mapsto (w-a)^h$  tiene en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  la primitiva  $w \mapsto \frac{(w-a)^{h+1}}{h+1}$ , luego su integral sobre  $C$ , un camino cerrado en  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , se anula. Por tanto,

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq |p| \implies \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S_{n+1}(w)}{(w-a)^{p+1}} dw = \frac{\alpha_p}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w-a} = \alpha_p$$

En vista de (10) concluimos que  $\alpha_p = c_p$ , para todo  $p \in \mathbb{Z}$ , como queríamos. ■

Así pues, toda función  $f$  holomorfa en un anillo  $\Omega$  de centro  $a \in \mathbb{C}$ , se expresa como suma de una única serie de Laurent centrada en  $a$ , cuyo anillo de convergencia contiene a  $\Omega$ . Esa expresión, dada por (5) y (6), se conoce como **desarrollo de Laurent de  $f$  en el anillo  $\Omega$** . En particular, nos da una sucesión de funciones racionales, cuyos denominadores sólo pueden anularse en  $a$ , que converge a  $f$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\Omega$ .

El teorema anterior generaliza el desarrollo de Taylor: si  $0 < R \leq \infty$  y  $f \in \mathcal{H}(D(a, R))$ , tenemos el desarrollo de Laurent de  $f$  en el anillo  $A(a; 0, R)$ , pero del teorema de Cauchy deducimos que  $c_{-n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego obtenemos  $f$  como suma de una serie de potencias, su serie de Taylor centrada en el punto  $a$ .

Con respecto a la unicidad del desarrollo de Laurent, conviene hacer una observación. Una función puede ser holomorfa en varios anillos disjuntos, centrados en un mismo punto  $a$ , y por tanto admitir varios desarrollos de Laurent centrados en  $a$ , que pueden no coincidir. Por ejemplo, la función  $z \mapsto (1-z)^{-1}$  tiene un desarrollo de Laurent en el anillo  $A(0; 0, 1)$ , su desarrollo de Taylor centrado en el origen, y otro desarrollo de Laurent diferente en el anillo  $A(0; 1, \infty)$ , ambos bien fáciles de calcular:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall z \in A(0; 0, 1) \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n} \quad \forall z \in A(0; 1, \infty)$$

### 13.4. Puntos regulares y singularidades

El desarrollo de Laurent nos va a permitir analizar el comportamiento en un punto  $a \in \mathbb{C}$  de una función holomorfa en un entorno reducido de  $a$ .

**Notación.** Para evitar tediosas repeticiones, fijamos la notación que usaremos en el resto de este tema:  $\Omega$  será un abierto del plano,  $a \in \Omega$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ , de modo que  $f$  no es más que una función holomorfa en un entorno reducido de  $a$ . Fijado  $R \in \mathbb{R}^+$  con  $D(a, R) \subset \Omega$ , usaremos el desarrollo de Laurent de  $f$  en el anillo  $A(a; 0, R)$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, R) \setminus \{a\} \quad (11)$$

Podríamos decir que  $f$  tiene en el punto  $a$  una *posible singularidad*. El primer objetivo será decidir si tal singularidad se presenta efectivamente.



El anillo de convergencia de la serie (11) contiene a  $D(a, R) \setminus \{a\}$ , luego  $R^+ \geq R$  y, lo que es más importante,  $\frac{1}{R^-} = 0$ , es decir,  $R^- = \infty$ . Por tanto, la serie de potencias  $\sum_{n \geq 1} c_{-n} w^n$  tiene radio de convergencia infinito, lo que nos permite definir:

$$\varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

obteniendo una función entera que se anula en el origen:  $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  y  $\varphi(0) = 0$ .

La que realmente nos interesa es la función  $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  definida por

$$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

pues con ella, el desarrollo de Laurent (11) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + h(z) \quad \forall z \in D(a, R) \setminus \{a\} \quad (12)$$

Esto nos sugiere considerar la función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(z) = f(z) - h(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \quad \text{y} \quad g(a) = c_0$$

Obviamente  $g$  es holomorfa en  $\Omega \setminus \{a\}$ , pero (12) nos da

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, R)$$

así que  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Hemos obtenido la siguiente descomposición de  $f$ :

■ *La función  $f$  se descompone, de manera única, como sigue*

$$f(z) = g(z) + h(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \quad (13)$$

donde  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  y la función  $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$  viene dada por

$$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

con  $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  y  $\varphi(0) = 0$ .

Sólo queda probar la unicidad de la descomposición, que se deduce de la unicidad del desarrollo de Laurent, como es fácil adivinar. Supongamos  $f(z) = g_1(z) + h_1(z)$  para todo  $z \in \Omega \setminus \{a\}$ , donde  $g_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$  y  $h_1(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z-a}\right)$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ , con  $\varphi_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  y  $\varphi_1(0) = 0$ .

Tenemos, por una parte, el desarrollo de Laurent (11), del que obtuvimos las funciones  $\varphi$ ,  $h$  y  $g$  que aparecieron en la descomposición (13).

Por otra parte, tenemos el desarrollo de Taylor de  $g_1$  centrado en  $a$  y el de  $\varphi_1$  centrado en el origen. Usamos para ellos una notación que indica la serie de Laurent que queremos considerar. Concretamente escribimos

$$\alpha_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{y} \quad \alpha_{-n} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual tenemos:

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, R) \quad \text{y} \quad \varphi_1(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} w^n \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

La primera serie de potencias tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$  mientras que el de la segunda es infinito. Por tanto, la serie de Laurent  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n (z-a)^n$  no es trivial,  $A(a; 0, R)$  está contenido en su anillo de convergencia y tenemos

$$f(z) = g_1(z) + \varphi_1\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

para todo  $z \in A(a; 0, R)$ .

La unicidad del desarrollo de Laurent nos dice que  $\alpha_n = c_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . En particular tenemos  $\alpha_{-n} = c_{-n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de donde deducimos que  $\varphi_1 = \varphi$ , luego  $h_1 = h$ . Pero entonces tenemos también

$$g_1(z) = f(z) - h_1(z) = f(z) - h(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

de donde concluimos claramente que  $g_1 = g$ . ■

Aprovechando la unicidad de la descomposición anterior, damos nombre a las dos sumandos que en ella aparecen. Diremos que  $g$  es la **parte regular** de  $f$  en  $a$ , aludiendo al hecho de que  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Por tanto, la posible singularidad de  $f$  en  $a$  ha de proceder de la función  $h$ . Por ello decimos que  $h$  es la **parte singular** de  $f$  en  $a$ .

Cuando  $h$  es idénticamente nula, o equivalentemente, cuando lo es la función entera  $\varphi$ , decimos que  $a$  es un **punto regular** de  $f$ , o que  $f$  tiene en  $a$  un punto regular. En caso contrario decimos que  $a$  es una **singularidad** de  $f$ , o que  $f$  tiene una singularidad en  $a$ .

En términos del desarrollo de Laurent, vemos que  $a$  es un punto regular de  $f$  si, y sólo si,  $c_{-n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si preferimos mirar a la descomposición recién probada, vemos que  $a$  es un punto regular de  $f$  si, y sólo si, dicha descomposición se reduce a  $f(z) = g(z)$  para todo  $z \in \Omega \setminus \{a\}$ . En tal caso, tenemos una función  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  que extiende a  $f$ , pero recíprocamente, si tal extensión existe, la descomposición no puede ser otra que la indicada, luego  $a$  es un punto regular de  $f$ .

Así pues, en los puntos regulares tenemos una situación que conocemos bien, gracias al teorema de extensión de Riemann. El siguiente enunciado es una revisión de dicho teorema:

**Caracterización de los puntos regulares.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $a$  es un punto regular de  $f$
- (ii)  $c_{-n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- (iii) Existe  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $f(z) = g(z)$  para todo  $z \in \Omega \setminus \{a\}$
- (iv)  $f$  tiene límite en  $a$ :  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w \in \mathbb{C}$
- (v) Existen  $M, \delta \in \mathbb{R}^+$  tales que  $D(a, \delta) \subset \Omega$  y  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$
- (vi)  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$

**Demostración.** Las equivalencias entre (i), (ii) y (iii) ya se ha comentado, se trata de tres formas de expresar la definición de punto regular. La equivalencia entre (iii), (iv), (v) y (vi) es el teorema de extensión de Riemann, tal y como se obtuvo en su momento. ■

Leído por la negativa, el teorema anterior nos da una caracterización de las singularidades, o si se quiere, describe el comportamiento de  $f$  cerca de una singularidad. Por ejemplo,  $a$  es una singularidad de  $f$  cuando  $f$  no tiene límite en  $a$ , o cuando no está acotada en ningún entorno reducido de  $a$ .

### 13.5. Clasificación de las singularidades

Demos algunos ejemplos de singularidades, que anticipan los dos tipos que se nos pueden presentar. En primer lugar, fijado  $k \in \mathbb{N}$ , sea

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Es claro que  $f$  diverge, luego tiene una singularidad, en el origen. El desarrollo de Laurent de  $f$  en el anillo  $\mathbb{C}^*$  es bien obvio, se tiene  $c_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k\}$  mientras que  $c_{-k} = 1$ . Vemos que  $f$  coincide con su parte singular en el origen,  $f(z) = h(z) = \varphi(1/z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ , donde la función entera  $\varphi$  viene dada por  $\varphi(w) = w^k$  para todo  $w \in \mathbb{C}$ , de modo que  $\varphi$  es una función polinómica de grado  $k$ .

Para tener un ejemplo diferente, consideremos la función  $f$  definida por

$$f(z) = e^{1/z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

De nuevo  $f$  no tiene límite, luego tiene una singularidad, en el origen, pero ahora  $f$  no diverge en el origen. Su desarrollo de Laurent en  $\mathbb{C}^*$  es claro:

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

así que  $c_0 = 1$ , mientras que  $c_n = 0$  y  $c_{-n} = 1/n!$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Esta vez la parte regular de  $f$  en el origen es constante,  $g(z) = 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , mientras la parte singular viene dada por  $h(z) = e^{1/z} - 1 = \varphi(1/z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ , donde  $\varphi(w) = e^w - 1$  para todo  $w \in \mathbb{C}$ , una función entera no polinómica.

Volviendo al caso general, las singularidades se clasifican como sigue. Recordamos que la parte singular de  $f$  en  $a$  viene dada por

$$h(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \quad \text{donde } \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } \varphi(0) = 0$$

Si  $a$  es una singularidad de  $f$ , sabemos que  $\varphi$  no es idénticamente nula. Pues bien:

- Cuando  $\varphi$  es una función polinómica, decimos que  $a$  es un **polo** de  $f$ , o bien que  $f$  tiene un polo en el punto  $a$ . El **orden** del polo es, por definición, el grado de  $\varphi$ .
- Cuando, por el contrario,  $\varphi$  es una función entera no polinómica, decimos que  $a$  es una **singularidad esencial** de  $f$ , o que  $f$  tiene una singularidad esencial en el punto  $a$ .

La utilidad de esta clasificación estriba en que, dependiendo de cuál de los dos casos se presente, habrá información relevante sobre cómo se comporta  $f$  en  $a$ , pero recíprocamente, de dicho comportamiento podemos deducir en cuál de los dos casos estamos. Por tanto, la información que vamos a obtener consistirá en: dos caracterizaciones de los polos, según esté involucrado el orden o no, y otra caracterización de las singularidades esenciales.

**Caracterización de los polos teniendo en cuenta su orden.** Dado  $k \in \mathbb{N}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $a$  es un polo de orden  $k$  de  $f$
- (ii)  $c_{-k} \neq 0$  y  $c_{-n} = 0$  para  $n > k$
- (iii)  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$
- (iv) Existe una función  $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$  con  $\psi(a) \neq 0$  tal que:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \quad (14)$$

**Demostración.** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Basta recordar que  $\varphi$  viene dada por:

$$\varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

Es evidente que  $\varphi$  es una función polinómica de grado  $k$  si, y sólo si, se cumple (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Si se cumple (ii), el desarrollo de Laurent tiene la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^k \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \quad \forall z \in D(a, R) \setminus \{a\}$$

de donde se deduce claramente que  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = c_{-k} \in \mathbb{C}^*$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Definimos  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de la única forma posible:

$$\psi(z) = (z - a)^k f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \quad \text{y} \quad \psi(a) = \alpha$$

Claramente  $\psi \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ , pero también es continua en  $a$ , luego el teorema de extensión de Riemann nos dice que  $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Es claro que  $\psi(a) \neq 0$  y que se cumple (14).

(iv)  $\Rightarrow$  (ii). Basta ver que el desarrollo de Taylor de  $\psi$  centrado en  $a$  nos da un desarrollo de Laurent de  $f$ . Concretamente, para todo  $z \in A(a; 0, R)$  se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-k} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-k} \\ &= \sum_{n=1}^k \frac{\psi^{(k-n)}(a)}{(k-n)! (z - a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z - a)^n \end{aligned}$$

La unicidad del desarrollo de Laurent nos dice que  $c_{-n} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > k$ , mientras que  $c_{-k} = \psi(a) \neq 0$ . ■

La afirmación (iii) es la más cómoda cuando queremos comprobar que  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en  $a$ . En cambio (iv) es la que mejor explica cómo se produce tal polo: aunque al definir  $f$  podríamos no haberlo observado, estamos dividiendo una función holomorfa en  $\Omega$ , que no se anula en el punto  $a$ , por la función  $z \mapsto (z - a)^k$ , y eso hace que  $a$  sea un polo de orden  $k$  de  $f$ .

Comparemos la igualdad (14) con la factorización que tendríamos si fuese  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  y de hecho  $f$  tuviese un cero de orden  $k$  en  $a$ :

$$f(z) = (z - a)^k \psi(z) \quad \forall z \in \Omega \quad \text{donde } \psi \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ y } \psi(a) \neq 0$$

Esta analogía permite muy bien entender los polos como *ceros de orden negativo*. Si olvidamos el orden, los polos se caracterizan de forma bien sencilla, que viene a reincidir en la misma interpretación intuitiva: los polos de  $f$  son los ceros de  $1/f$ , y viceversa:

**Caracterización de los polos.** La función  $f$  tiene un polo en  $a$  si, y sólo si, diverge en  $a$ .

**Demostración.** Si  $f$  tiene un polo en  $a$ , que será de orden  $k$  con  $k \in \mathbb{N}$ , la afirmación (iv) del teorema anterior nos dice que  $f$  diverge en  $a$ . Recíprocamente, supongamos que  $f(z) \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow a$ ), con lo que existe  $\delta > 0$  tal que  $D(a, \delta) \subset \Omega$  y  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$ . Podemos entonces considerar la función  $\xi : D(a, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\xi(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \forall z \in D(a, \delta) \setminus \{a\} \quad \text{y} \quad \xi(a) = 0$$

Claramente  $\xi \in \mathcal{H}(D(a, \delta) \setminus \{a\})$  y  $\xi$  es continua en  $a$ , luego usando de nuevo el teorema de extensión de Riemann, tenemos  $\xi \in \mathcal{H}(D(a, \delta))$ . Puesto que  $\xi$  no es idénticamente nula, el cero de  $\chi$  en  $a$  tendrá un orden, digamos  $k \in \mathbb{N}$ . Deducimos que

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\xi(z)}{(z - a)^k} = \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad \text{de donde} \quad \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}^*$$

y el teorema anterior nos dice que  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en el punto  $a$ . ■

Veamos finalmente la caracterización de las singularidades esenciales, debida al matemático italiano F. Casorati (1835-1890). De momento sabemos que, si  $a$  es una singularidad esencial de  $f$ , entonces  $f$  no puede estar acotada en ningún entorno reducido de  $a$ , pero tampoco diverge en  $a$ . De hecho el comportamiento de  $f$  cerca de una singularidad esencial se puede describir como *caótico*:

**Teorema de Casorati.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La función  $f$  tiene una singularidad esencial en el punto  $a$*
- (ii) *Para cada  $\delta \in \mathbb{R}^+$  con  $D(a, \delta) \subset \Omega$ , el conjunto  $f(D(a, \delta) \setminus \{a\})$  es denso en  $\mathbb{C}$*
- (iii) *Para cada  $w \in \mathbb{C}$  existe una sucesión  $\{z_n\}$  de puntos de  $\Omega \setminus \{a\}$  tal que  $\{z_n\} \rightarrow a$  y  $\{f(z_n)\} \rightarrow w$ . También existe una sucesión  $\{u_n\}$  de puntos de  $\Omega \setminus \{a\}$  tal que  $\{u_n\} \rightarrow a$  y  $\{f(u_n)\} \rightarrow \infty$*

**Demostración.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Suponiendo que no se verifica (ii), deberemos probar que tampoco se verifica (i), es decir, que  $a$  es un punto regular o un polo de  $f$ .

Sea pues  $\delta \in \mathbb{R}^+$  con  $D(a, \delta) \subset \Omega$  tal que, escribiendo para abreviar  $V = D(a, \delta) \setminus \{a\}$ , el conjunto  $f(V)$  no es denso en  $\mathbb{C}$ , es decir, existen  $w \in \mathbb{C}$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $|f(z) - w| \geq \varepsilon$  para todo  $z \in V$ . Consideramos entonces la función  $\xi \in \mathcal{H}(V)$  dada por

$$\xi(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad \forall z \in V$$

Como  $\xi$  está acotada en  $V$ , que es un entorno reducido de  $a$ , el teorema de extensión de Riemann nos dice que  $\xi$  tiene límite en el punto  $a$ :

$$\lim_{z \rightarrow a} \xi(z) = \alpha \in \mathbb{C}$$

Entonces se pueden dar dos casos:

- Si  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , tenemos  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w + (1/\alpha)$  y  $a$  es un punto regular de  $f$ .
- Si, por el contrario,  $\alpha = 0$ , es claro que  $f$  diverge en  $a$ , luego  $a$  es un polo de  $f$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , usando (ii) encontramos  $z_n, u_n \in D(a, \delta/n) \setminus \{a\}$  tales que  $|f(z_n) - w| < 1/n$  y  $|f(u_n)| > n$ . Está claro que  $\{z_n\}$  y  $\{u_n\}$  son sucesiones de puntos de  $\Omega \setminus \{a\}$  que convergen al punto  $a$ , verificando que  $\{f(z_n)\} \rightarrow w$  y  $\{f(u_n)\} \rightarrow \infty$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). De (iii) se deduce que  $f$  no tiene límite en  $a$ , luego  $a$  es una singularidad de  $f$ , pero no es un polo, pues  $f$  tampoco diverge en  $a$ , así que se cumple (i):  $a$  es una singularidad esencial de  $f$ . ■

La correspondencia de ida y vuelta entre singularidades y funciones enteras, en la que los polos se corresponden con polinomios y las singularidades esenciales con funciones enteras no polinómicas, no ha podido pasar desapercibida. Merece la pena resaltar que esta idea permite usar los resultados sobre singularidades para obtener información sobre funciones enteras.

Como ejemplo, veremos un corolario casi evidente del teorema de Casorati. Muestra que cualquier función entera no polinómica, se comporta en el infinito de forma parecida a como lo hace la exponencial compleja.

- Sea  $\psi$  una función entera no polinómica. Entonces, para todo  $r \in \mathbb{R}^+$ , el conjunto  $\{\psi(z) : z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

Consideremos la función  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$  dada por  $f(z) = \psi(1/z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ . Es claro que la parte singular de  $f$  en el origen es  $h(z) = \varphi(1/z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}^*$ , donde  $\varphi$  es la función entera dada por  $\varphi(w) = \psi(w) - \psi(0)$  para todo  $w \in \mathbb{C}$ , que verifica  $\varphi(0) = 0$ .

Como  $\psi$  no es una función polinómica,  $\varphi$  tampoco lo es, así que  $f$  tiene una singularidad esencial en el origen. Tomando  $\delta = 1/r$ , el teorema de Casorati nos dice que el conjunto  $f(D(0, \delta) \setminus \{0\})$  es denso en  $\mathbb{C}$ , pero es obvio que

$$f(D(0, \delta) \setminus \{0\}) = \{\psi(1/w) : w \in D(0, \delta) \setminus \{0\}\} = \{\psi(z) : z \in \mathbb{C}, |z| > r\} \quad \blacksquare$$

Resaltamos finalmente que, en toda la discusión sobre la posible singularidad de una función  $f$  en un punto  $a$ , es imprescindible que  $f$  sea holomorfa en un entorno reducido de  $a$ . Existe una noción más general de punto regular o singular para una función holomorfa en un abierto del plano, en la que no vamos a entrar, que puede aplicarse a cualquier punto de la frontera de dicho abierto. En ese contexto, las singularidades aquí estudiadas se denominan *singularidades aisladas*, por razones obvias.

## 13.6. Ejercicios

1. Dados  $a, b \in \mathbb{C}$  con  $0 < |a| < |b|$ , obtener el desarrollo en serie de Laurent de la función  $f$  definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$$

en cada uno de los anillos siguientes:

$$A(0; |a|, |b|), \quad A(0; |b|, \infty), \quad A(a; 0, |b-a|), \quad A(a; |b-a|, \infty)$$

2. Obtener el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$$

en los anillos  $A(1; 0, 2)$  y  $A(1; 2, \infty)$ .

3. En cada uno de los siguientes casos, clasificar las singularidades de la función  $f$  y determinar la parte singular de  $f$  en cada una de sus singularidades.

$$(a) \quad f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^n} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(b) \quad f(z) = z^n \operatorname{sen}(1/z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$$

$$(d) \quad f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{2\pi i z})} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

$$(e) \quad f(z) = z \operatorname{tg} \frac{2\pi z + \pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

4. Sea  $\Omega$  un abierto del plano,  $a \in \Omega$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ . ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en el punto  $a$  de las funciones  $f$  y  $f'$ ?
5. Sea  $\Omega$  un dominio,  $a \in \Omega$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$  tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in \Omega \setminus \{a\}$ . ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en  $a$  de las funciones  $f$  y  $1/f$ ?
6. Sea  $\Omega$  un abierto del plano,  $a \in \Omega$  y  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ . Estudiar el comportamiento en el punto  $a$  de las funciones  $f + g$  y  $fg$ , supuesto conocido el de  $f$  y  $g$ .
7. La función  $f$  es holomorfa en un entorno del punto  $a$  y otra función  $g$  tiene un polo de orden  $m$  en el punto  $f(a)$ . ¿Cómo se comporta en  $a$  la composición  $g \circ f$ ? ¿Qué ocurre si  $a$  es una singularidad esencial en de  $g$ ?
8. Sea  $U$  un entorno reducido de un punto  $a \in \mathbb{C}$  y supongamos que  $f \in \mathcal{H}(U)$  tiene un polo en  $a$ . Probar que existe  $R > 0$  tal que  $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$ .
9. Sea  $a$  una singularidad de una función  $f$ . Probar que la función  $\operatorname{Re} f$  no puede estar acotada en un entorno reducido de  $a$ .
10. Sea  $\Omega$  un abierto del plano,  $a \in \Omega$  y  $\{a_n\}$  una sucesión de puntos de  $\Omega \setminus \{a\}$  tal que  $\{a_n\} \rightarrow a$ . Consideremos el conjunto  $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ , sea  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$  y supongamos que  $f$  tiene un polo en  $a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que, para todo  $\delta \in \mathbb{R}^+$  que verifique  $D(a, \delta) \subset \Omega$ , el conjunto  $f(D(a, \delta) \setminus K)$  es denso en  $\mathbb{C}$ .