Métodos Numéricos I

Tema 2: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Parte 3: Métodos iterativos

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2022/2023

Contenidos

Ejemplo

Consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 3x & + & 2y & = & 5 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{array}\right\}$$

que tiene como solución $(1,1)$.
Si despejamos x de la primera ecuación e y de la segunda obtenemos:

$$\left.\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3}(5-2y) \\ y & = & \frac{1}{2}(3-x) \end{array}\right\}$$

Podríamos entonces construir un método iterativo de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_{k+1} & = & \frac{1}{3}(5-2y_k) \\ y_{k+1} & = & \frac{1}{2}(3-x_k) \end{array}\right\}$$

Ejemplo

Si partimos por ejemplo de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ y usamos

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \frac{1}{3}(5-2y_k) \\ y_{k+1} & = & \frac{1}{2}(3-x_k) \end{array}\right\}$$

obtenemos:

k	x_k	y_k
1	1.66666667	1.5
2	0.66666667	0.66666667
3	1.22222222	1.16666667
4	0.88888889	0.88888889
5	1.07407407	1.05555556
6	0.96296296	0.96296296
7	1.02469136	1.01851852
8	0.98765432	0.98765432
9	1.00823045	1.00617284
10	0.99588477	0.99588477
11	1.00274348	1.00205761

Ejemplo

Podríamos también utilizar en cada iteración el valos que ya hemos calculado de x_k. Si partimos por ejemplo de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ y usamos esta idea:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \frac{1}{3}(5-2y_k) \\ y_{k+1} & = & \frac{1}{2}(3-x_{k+1}) \end{array}\right\}$$

obtenemos:

k	x_k	y_k
1	1.66666667	0.66666667
2	1.22222222	0.88888889
3	1.07407407	0.96296296
4	1.02469136	0.98765432
5	1.00823045	0.99588477
6	1.00274348	0.99862826
7	1.00091449	0.99954275
8	1.00030483	0.99984758
9	1.00010161	0.99994919
10	1.00003387	0.99998306
11	1.00001129	0.99999435

Ideas básicas

Los métodos utilizados en el ejemplo se conocen como método de Jacobi y método de Gauss-Seidel. Damos ahora algunas definiciones básicas generales.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{A}x = b$$

se transforma en otro equivalente, (de punto fijo)

$$x = \mathbf{B}x + c$$

Dado $x^{(0)}$ (arbitrario), se construye la iteración

$$x^{(k+1)} = \mathbf{B}x^{(k)} + c\,, \quad k = 0, 1, \dots\,,$$

si $x^{(k)}$ *converge*, lo hará al punto fijo de la ecuación $x = \mathbf{B}x + c$ y por tanto a la solución del problema original.

Convergencia de los métodos iterativos

Definición

Un método iterativo se dice convergente si lo es la sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}_k$ generada por el método.

Teorema

Dado el método iterativo

$$x^{(k+1)} = \mathbf{B}x^{(k)} + c\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,,$$

si existe una norma matricial tal que $\|\mathbf{B}\| < 1$ (o equivalentemente $\rho(B) < 1$), entonces el método es convergente.

Convergencia de los métodos iterativos

Demostración:

Sea s la solución del sistema, es decir, $\mathbf{A}s = b$ o equivalentemente $\mathbf{B}s + c = s$.

Entonces se cumple:

$$\begin{aligned}\|x^{(k)} - s\| &= \| \underbrace{\mathbf{B}x^{(k-1)} + c}_{x^{(k)}} - \underbrace{(\mathbf{B}s + c)}_{s} \| \\ &= \|\mathbf{B}(x^{(k-1)} - s)\| \leq \|\mathbf{B}\| \, \|x^{(k-1)} - s\|\end{aligned}$$

Si repetimos el procedimiento k veces obtenemos:

$$\|x^{(k)} - s\| \leq \|\mathbf{B}\|^k \, \|x^{(0)} - s\|$$

Por tanto, si $\|\mathbf{B}\| < 1$, la sucesión $\|\mathbf{B}\|^k$ converge a 0 y

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - s\| = 0$$

Criterio de parada

Teorema

Dado el método iterativo

$$x^{(k+1)} = \mathbf{B}x^{(k)} + c\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,,$$

si existe una norma matricial tal que $\|\mathbf{B}\| < 1$, entonces

$$\|x^{(k)} - s\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|}{1 - \|\mathbf{B}\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Demostración:

Razonando igual que en el teorema anterior:

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - s\| &\leq \|\mathbf{B}\|\, \|x^{(k-1)} - s\| = \|\mathbf{B}\|\, \|x^{(k-1)} - x^{(k)} + x^{(k)} - s\| \\ &\leq \|\mathbf{B}\| \left(\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - s\| \right) \end{aligned}$$

Criterio de parada

Demostración (cont.):

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|x^{(k)} - s\| &\leq \|\mathbf{B}\| \, \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| + \|\mathbf{B}\| \, \|x^{(k)} - s\| \\
\|x^{(k)} - s\| - \|\mathbf{B}\| \, \|x^{(k)} - s\| &\leq \|\mathbf{B}\| \, \|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| \\
(1 - \|\mathbf{B}\|) \, \|x^{(k)} - s\| &\leq \|\mathbf{B}\| \, \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|
\end{aligned}$$

Si $1 - \|\mathbf{B}\| > 0$, es decir, si $\|\mathbf{B}\| < 1$, entonces:

$$\|x^{(k)} - s\| \leq \frac{\|\mathbf{B}\|}{1 - \|\mathbf{B}\|} \, \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Métodos iterativos de descomposición

Dado el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\,x = b$ y una cierta matriz $\mathbf{Q}$ invertible, llamada matriz de descomposición, el problema se puede escribir en la forma equivalente:

$$\mathbf{A}\,x = b \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{Q} - (\mathbf{Q} - \mathbf{A}))\,x = b,$$

esto es,

$$\mathbf{Q}x = (\mathbf{Q} - \mathbf{A})x + b \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{A})x + \mathbf{Q}^{-1}b,$$

y finalmente

$$x = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})x + \mathbf{Q}^{-1}b.$$

Podemos construir un proceso iterativo mediante la fórmula

$$x^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})x^{(k)} + \mathbf{Q}^{-1}b, \qquad k \geq 0.$$

Métodos iterativos clásicos

El vector inicial $x^{(0)}$ se elige arbitrariamente. Normalmente

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\{x^{(k)}\}_k$ converge, lo hará al punto fijo de la ecuación

$$x = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})x + \mathbf{Q}^{-1}b,$$

y por tanto a la solución del sistema original.

Métodos iterativos clásicos

Los métodos iterativos se definen según la elección de la matriz **Q**.

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

entonces $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Algunos métodos iterativos clásicos

Jacobi: $\mathbf{Q} = \mathbf{D}$, es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{D} + (\mathbf{L} + \mathbf{U})$,

$$\boxed{x^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(-(\mathbf{L} + \mathbf{U})\, x^{(k)} + b)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Gauss–Seidel: $\mathbf{Q} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$, es decir, $\mathbf{A} = (\mathbf{D} + \mathbf{L}) + \mathbf{U}$,

$$\boxed{x^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U}\, x^{(k)} + b)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Relajación: $\mathbf{Q} = \omega^{-1}(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})$, es decir, en este caso se descopone la matriz $\mathbf{D}$ en dos partes quedando $\mathbf{A} = (\omega^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{L}) + \omega^{-1}(\omega - 1)\mathbf{D} + \mathbf{U}$,

$$\boxed{x^{(k+1)} = \omega(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U}x^{(k)} + b) + (1 - \omega)(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{D}x^{(k)}}$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

Métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel

Ecuaciones de los métodos:

Método de Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Método de Gauss–Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Convergencia (Jacobi y Gauss-Seidel)

Teorema

Una condición suficiente para la convergencia de los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel es

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

es decir, que **A** sea *estrictamente diagonal dominante* (e.d.d) por filas.

Puede ocurrir que el método de Gauss–Seidel sea convergente y no lo sea el de Jacobi (y al contrario también).
En general, cuando ambos métodos son convergentes, la convergencia del método de Gauss-Seidel es más rápida que la del de Jacobi.

Demostración

Llamemos $\mathbf{B}_J$ a la matriz del método de Jacobi

$$\mathbf{B}_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2,n}}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Puesto que **A** es EDD, entonces $\|\mathbf{B}_J\|_\infty < 1$ y el método converge.

Llamemos $\mathbf{B}_G$ a la matriz del método de Gauss-Seidel, sean x, y tales que $\|x\|_\infty = 1, \quad y = \mathbf{B}_G x$.
Vamos a probar por inducción que $\|y\|_\infty \leqslant C = \|\mathbf{B}_J\|_\infty < 1$:

$$|y_1| \leqslant \frac{1}{|a_{1,1}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1,j}||x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1,j}|}{|a_{1,1}|} \leqslant C$$

Supongamos cierto hasta $k-1$

$$|y_k| \leqslant \frac{1}{|a_{k,k}|} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |a_{k,j}||y_j| + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{k,j}||x_j| \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{|a_{k,k}|} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |a_{k,j}| C + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{k,j}| \|x\|_\infty \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{|a_{k,k}|} \sum_{j \neq k} |a_{k,j}| \leqslant C.$$

Por tanto $\|y\|_\infty \leqslant C$ y $\|\mathbf{B}_G\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{B}_G\, x\|_\infty \leqslant C$.

Teorema

Si **A** es simétrica y definida positiva entonces el método de Gauss-Seidel es convergente.

Nota 1

Si se aplica al sistema de partida una transformación elemental tan simple como intercambiar de posición dos ecuaciones y se usa el mismo método iterativo con los dos sistemas, uno puede converger y otro no.
La idea es que este tipo de transformación elemental no solo puede modificar claramente el hecho de que la matriz de coeficientes sea estrictamente diagonalmente dominante (que es una condición suficiente para la convergencia de Jacobi y Gauss-Seidel) sino que además puede cambiar el radio espectral.

Nota 2

El número de operaciones que hay que realizar para pasar de una iteración a la siguiente en los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel es de N^2 para un sistema de N ecuaciones $\mathrm{y} N$ incógnitas. Por tanto, si N es grande, requiere en principio menos operaciones que los directos. Además, y a diferencia de estos últimos, se aprovecha la estructura de la matriz de coeficientes cuando es dispersa, tal y como ocurre con los sistemas que surgen en problemas de análisis de estructuras o de elementos finitos.

Los métodos de relajación

Los métodos de relajación se basan en la descomposición

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \left(\frac{\omega - 1}{\omega} + \frac{1}{\omega}\right)\mathbf{D} + \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \frac{1}{\omega}\mathbf{D} + \frac{\omega - 1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{U}$$

Que da lugar a la iteración

$$x^{(k+1)} = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{\omega}\mathbf{D}\right)^{-1}\left(b - \left(\frac{\omega - 1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{U}\right)x^{(k)}\right)$$

Los métodos de relajación

Para obtener las ecuaciones de los métodos observamos que la matriz **A** se descompone como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}a_{1,1}+\frac{\omega-1}{\omega}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \frac{1}{\omega}a_{2,2}+\frac{\omega-1}{\omega}a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \frac{1}{\omega}a_{n,n}+\frac{\omega-1}{\omega}a_{n,n} \end{pmatrix},$$

Los métodos de relajación

Ecuaciones de los métodos

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-\omega) x_i^{(k)}$$

equivalentemente podemos calcular en dos etapas

$$\bar{x}_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \bar{x}_i^{(k)} + (1-\omega) x_i^{(k)}$$

- Si $\omega = 1$ se tiene el de Gauss–Seidel
- Si $\omega < 1$, el método se llama de *subrelajación*
- Si $\omega > 1$, el método se llama de *sobrerrelajación*

Convergencia de los métodos de relajación

Teorema 1

El el método de relajación sólo puede ser convergente si $0 < \omega < 2$.

Demostración

Llamemos $\mathbf{B}_\omega$ a la matriz del método de relajación

$$\mathbf{B}_\omega = -\left(\mathbf{L} + \frac{1}{\omega}\mathbf{D}\right)^{-1}\left(\frac{\omega - 1}{\omega}\mathbf{D} + \mathbf{U}\right)$$

Puesto que ambas matrices son triangulares

$$\det(\mathbf{B}_\omega) = (-1)^n \omega^n \det(\mathbf{D})^{-1}\left(\frac{\omega - 1}{\omega}\right)^n \det(\mathbf{D}) = (1 - \omega)^n.$$

Ahora, como el determinante de una matriz es (salvo el signo) el producto de sus valores propios, se tiene

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |1 - \omega|^n\,.$$

Convergencia de los métodos de relajación

Podemos deducir que

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |1-\omega|^n \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{B}_\omega) \geqslant |1-\omega|,$$

pues si

$$\rho(\mathbf{B}_\omega) < |1-\omega| \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \rho(\mathbf{B}_\omega)^n < |1-\omega|^n.$$

De este modo

$$\rho(\mathbf{B}_\omega) < 1 \Rightarrow |1-\omega| < 1 \Rightarrow 0 < \omega < 2.$$

Teorema 2

Si **A** es *estrictamente diagonal dominante* (e.d.d) por filas y $0 < \omega \leq 1$, el método de relajación es convergente.

Ejemplo

Escriba las ecuaciones de los métodos de Jacobi, Gauss–Seidel y relajación para el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & + & 3y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & y & - & 5z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Haga un estudio completo de la convergencia de los métodos.

Bibliografía

- Los apuntes de este tema están basados en los apuntes del profesor Miguel Piñar del Departamento de Matemática Aplicada.
- D. Kincaid, W. Cheney, Análisis Numérico: Las Matemáticas del Cálculo Científico. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Numerical mathematics, second edition, Texts in Applied Mathematics 37 Springer-Verlag, Berlin, 2007. `https://link.springer.com/book/10.1007/b98885`