



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

1. Espacios Recubridores	5
1.1. Levantamiento de aplicaciones	5
1.2. Transformación de recubridores	13
1.3. Existencia de espacios recubridores	25

1. Espacios Recubridores

Observación. A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

1.1. Levantamiento de aplicaciones

Observación. Vamos a tener en cuenta que si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

Demostración. Si O es abierto y A es una componente arcoconexa de O , entonces dado $a \in A$, como X es localmente arcoconexo tendremos que existe un U entorno arcoconexo de a tal que $U \subseteq O$. Como A es el mayor arcoconexo en O que contiene al punto a tendremos que $U \subseteq A$, luego A es abierto. \square

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$ y un punto $b_0 \in B$. Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto O que contiene a b_0 . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de O que contiene a b_0 podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

Lema 1.1 (Unicidad del levantamiento). Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $f_1, f_2 : X \rightarrow R$ continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, entonces $f_1 = f_2$.

Demostración. Para la demostración solo se necesita que X sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow^{f_1, f_2} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f=p \circ f_1 = p \circ f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como X es conexo y tenemos que $Y \neq \emptyset$, ya que por hipótesis $x_0 \in Y$, si probamos que Y es abierto y cerrado tendremos que $Y = X$, es decir, $f_1 = f_2$.

Veamos que Y es abierto. Para ello tomamos $y \in Y$, es decir, un punto y tal que $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos el punto $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$. Sea O abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a b , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos de R y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto A_{i_0} donde se encuentra $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$. Veamos que $\forall x \in V$ se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$. Como $x \in V$ tendremos que $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$ por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \xrightarrow{(*)} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en $(*)$ hemos usado que $p|_{A_i}$ es inyectiva. Tenemos finalmente que Y es abierto.

Veamos ahora que Y es cerrado. Para ello demostramos que $X \setminus Y$ es abierto. Tomamos $y \in X \setminus Y$ y vemos que existe un V abierto que contiene al punto y y tal que $V \subseteq X \setminus Y$. Sea $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ y de nuevo tomamos O regularmente recubierto que contiene a b . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos $f_1(y) \in A_{i_1}$ y $f_2(y) \in A_{i_2}$ y además se verificará que $A_{i_1} \neq A_{i_2}$ ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$, donde se tiene que $y \in V$. Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada $x \in V$ se tendrá que $f_1(x) \neq f_2(x)$ ya que $f_1(x) \in A_{i_1}$ y $f_2(x) \in A_{i_2}$. Esto nos dice que $V \subseteq X \setminus Y$, luego Y es cerrado. \square

Teorema 1.2 (Teorema de monodromía). Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$. El homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo. En particular, $\pi_1(R, r_0)$ es isomorfo a $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que p_* es inyectiva si y solo si $\ker(p_*)$ es trivial. Tomamos α lazo basado en r_0 tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además $[p \circ \alpha] = p_*([\alpha])$ tenemos que existe una homotopía por lazos de ε_{b_0} en $p \circ \alpha$. Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en R de $\hat{\varepsilon}_{b_0}$ y $\widehat{p \circ \alpha}$ (empezando en r_0). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

Observación. Recordemos que dados dos subgrupos H_1, H_2 de un grupo G se dice que H_1 y H_2 son conjugados si existe un $g \in G$ tal que

$$H_2 = g^{-1}H_1g$$

Corolario 1.2.1. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$. Elegimos un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$ tal que

$$\alpha(0) = r_1$$

$$\alpha(1) = r_2$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular, $p_*(\pi_1(R, r_1))$ y $p_*(\pi_1(R, r_2))$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que $p \circ \alpha$ es un lazo basado en b_0 por lo que $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$. Además,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, r_2) & \xrightarrow{isom.} & \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] & \longmapsto & [\alpha * \beta * \tilde{\alpha}] \end{array}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\tilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \tilde{\alpha}] = [\widetilde{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

Corolario 1.2.2. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p^{-1}(b_0)$. Sea H un subgrupo conjugado de $p_*(\pi_1(R, r_1))$ en $\pi_1(B, b_0)$. Entonces existe un punto $r_2 \in R$ tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que $p(r_1) = b_0$ y que $p_*(\pi_1(R, r_1))$ es conju-
gado con H en $\pi_1(B, b_0)$, es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con $g \in \pi_1(B, b_0)$, esto es, $g = [\gamma]$. Consideramos $\hat{\gamma}$ el levantamiento de γ a R con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos $r_2 = \hat{\gamma}(1)$ al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$, una aplicación
continua $f : X \rightarrow B$, $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento $\hat{f} : X \rightarrow R$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$.
2. $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento \hat{f} de f con
 $\hat{f}(x_0) = r_0$ es único.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$ por lo que tenemos esta implicación simple-
mente desarrollando la composición.

(2) \Rightarrow (1) Empezamos definiendo \hat{f} :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado $x \in X$ elegimos α_x un arco en X que una x_0 con x . Entonces $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es un arco en B que une $b_0 = f(x_0)$ con $f(x)$. Consideramos ahora $\widehat{f \circ \alpha_x}$ el único arco en R tal que $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$ y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que \hat{f} está bien definida, es decir, que no depende del arco α_x elegido. Tomamos otro arco β_x en X tal que $\beta_x(0) = x_0$ y $\beta_x(1) = x$ y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos $\gamma = \alpha_x * \beta_x$ que es un lazo en X con base en x_0 . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \beta_x)$$

es un lazo con base en b_0 . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco δ con base en r_0 tal que $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$. Sea $\widehat{f \circ \gamma}$ el único levantamiento de $f \circ \gamma$ que comienza en r_0 . Tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico por arcos con $p \circ \delta$. Como p_* es inyectiva tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico con δ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widetilde{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es el levantamiento de $f \circ \alpha_x$ empezando en r_0 y ω es el levantamiento de $\widetilde{f \circ \beta_x}$ comenzando en $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$. Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widetilde{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta_x} \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de $\hat{f}(x)$ está bien hecha.

Veamos ahora que $p \circ \hat{f} = f$. Para ello, dado $x \in X$ tenemos que ver que $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$. Veamos quién es $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ \widehat{f \circ \alpha_x})(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que $\hat{f}(x_0) = r_0$ ya que para x_0 podemos elegir ε_{x_0} verificándose que $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$ luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que \hat{f} es continua.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B\end{array}$$

Comenzamos tomando un punto $x \in X$ y vemos que \hat{f} es continua en x . Sea U un entorno de $\hat{f}(x)$. Tomamos O abierto arcoconexo de $f(x)$ que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homeomorfismo}\end{aligned}$$

Como $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$ tenemos que existe un único $i_0 \in I$ tal que $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$. Podemos suponer que $A_{i_0} \subseteq U$ (si no fuese así consideraríamos $U \cap A_{i_0}$). Como f es continua, existe un abierto V que contiene a x tal que $f(V) \subseteq O$. Podemos suponer que V es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de V que contenga a x).

Si probamos que $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$ tendríamos que \hat{f} es continua en x . Para verlo consideramos un punto $y \in V$ y tomamos un arco γ dentro de V que una x con y . Tenemos entonces que $\alpha_x * \gamma$ es un arco que une x_0 con y . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = f \circ \widehat{(\alpha_x * \gamma)}(1) = (f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}(1)$$

donde $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ es la única curva que se proyecta por p en $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ y comienza en r_0 . Es decir, $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{f \circ \gamma}$$

donde $\widehat{f \circ \gamma}$ es el levantamiento de $f \circ \gamma$ pero comenzando en el punto $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$.

$$Im(\gamma) \subseteq V \Rightarrow Im(f \circ \gamma) \subseteq O \Rightarrow \widehat{f \circ \gamma} \subseteq A_{i_0}$$

ya que $p|_{A_{i_0}}$ es un homeomorfismo por lo que llegamos finalmente a

$$\hat{f}(y) = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)(1) = \widehat{f \circ \gamma}(1) \in A_{i_0}$$

□

Observación. Una consecuencia inmediata es que si X es simplemente conexo, toda $X : X \rightarrow B$ continua se puede levantar.

Ejemplo. Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{aligned}$$

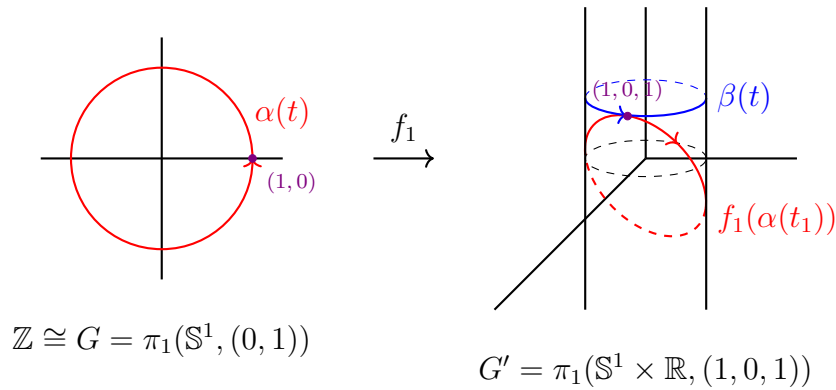
y las aplicaciones $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x, y, x) \\ f_2(x, y) &= (-2xy, x^2 - y^2, x^2) \end{aligned}$$

Nos preguntamos si existen levantamientos de f_1 y f_2 , es decir si existen los \hat{f}_1, \hat{f}_2 que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & \nearrow \hat{f}_1, \hat{f}_2 & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_1, f_2} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{array}$$

Con la siguiente gráfica



podemos ver que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ está generado por $[\alpha]$ donde

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

y $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))$ está generado por $[\beta]$ done

$$\beta(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1)$$

Además es fácil ver en la misma gráfica que

$$\begin{aligned} f_{1*}([\alpha]) &= [f_1 \circ \alpha] = [\beta] \\ f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) = \{[\beta]^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y además

$$\begin{aligned} (p \circ \beta)(t) &= (\cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), 2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), 1) = \\ &= (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t), 1) = (\beta * \beta)(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_*([\beta]) &= [p \circ \beta] = [\beta]^2 \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Sabemos por el teorema visto que existe un $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$ si y solo si se tiene que

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como tenemos que

$$\begin{aligned} f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\beta]^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2m} : m \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

no se dará la inclusión

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \not\subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

y tenemos que no existe $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$. Si tomamos otro punto r_1 cualquiera tal que $p(r_1) = (1, 0, 1)$ (r_1 colo podría ser el $(-1, 0, 1)$) entonces sabemos por un corolario anterior que

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, r_1)) \text{ es conjugado de } p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como el grupo total es abeliano, entonces estos dos grupos son idénticos.

Veamos qué ocurre con f_2 . En este caso tenemos que

$$f_2(1, 0) = (1, 0, 1)$$

Además, $[\alpha]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ y $[\gamma]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (0, 1, 1))$ donde

$$\gamma(t) = \left(\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), 1 \right)$$

Queremos calcular $f_2 \circ \alpha$:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ \alpha)(t) &= (-2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (-\sin(4\pi t), -\cos(4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (\sin(-4\pi t), \cos(-4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \cos^2(2\pi t) \right) \end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$f_{2*}([\alpha]) = [f_2 \circ \alpha] = [\gamma * \gamma] = [\gamma]^2$$

por lo que

$$\begin{aligned} f_{2*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\gamma]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= p_*\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \right) \end{aligned}$$

y tenemos finalmente que existe el levantamiento \hat{f}_2 con $\hat{f}_2(1, 0) = (0, 1, 1)$

1.2. Transformación de recubridores

Vamos a tratar en lo que queda de tema de clasificar los espacios recubridores de un espacio topológico B dado. Comenzamos estableciendo para ello una nomenclatura clásica.

Notación. Diremos que (R, p) es un recubridor de B si $p : R \rightarrow B$ es una aplicación recubridora.

Definición 1.1. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos espacios recubridores de un mismo e.t. base B ,

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

1. Un **homomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es una aplicación continua $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$. Dicha aplicación hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\hat{f}=\phi} & R_2 \\ & \searrow f=p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

O equivalentemente ϕ es un levantamiento de la aplicación continua p_1 usando la aplicación recubridora p_2 .

2. Un **isomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es un homeomorfismo $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$.
3. Un isomorfismo ϕ de (R_1, p_1) en sí mismo se le llama **automorfismo de recubridores**. Al conjunto de todos los automorfismos lo notaremos por $\mathcal{A}(R_1, p_1)$.

Observación.

1. Si (R, p) es un recubridor de un espacio base B y $\phi : \hat{R} \rightarrow R$ es un homeomorfismo, entonces $(\hat{R}, p \circ \phi)$ es un recubridor de B . Se puede ver fácilmente con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\phi} & R \\ & \searrow p \circ \phi & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

recordando que la composición de una aplicación recubridora con un homeomorfismo es también una aplicación recubridora (visto en las propiedades de las aplicaciones recubridoras). Además, ϕ de $(\hat{R}, p \circ \phi)$ en (R, p) es un isomorfismo de recubridores. De hecho, de la definición se deduce que todo isomorfismo de recubridores es de la forma anterior.

2. Si ϕ_1 de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) es un homomorfismo de recubridores y ϕ_2 es otro desde (R_2, p_2) en (R_3, p_3) , entonces $\phi_2 \circ \phi_1$ es un homomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_3, p_3) . Tendríamos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_1} & R_2 & \xrightarrow{\phi_2} & R_3 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p_3 & \\ & & B & & \end{array}$$

3. Si ϕ es un isomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) , entonces ϕ^{-1} es un isomorfismo de recubridores desde (R_2, p_2) en (R_1, p_1) .

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \\ R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_2 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

4. $\mathcal{A}(R, p)$ es un grupo con la composición.

Corolario 1.3.1. Sean ϕ_1, ϕ_2 dos homomorfismos de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Entonces se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2 \iff \exists r_1 \in R_1 : \phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$$

En particular, si ϕ es un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo, entonces

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = r$$

Demostración. Estamos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_2} & R_2 \\ & \searrow \phi_1 \swarrow & \\ & B & \end{array} \quad \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}$$

Veamos la doble implicación de la primera mitad del corolario

- \Rightarrow) Es trivial que si $\phi_1 = \phi_2$ entonces $\forall r \in R_1$ se tiene que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$.
- \Leftarrow) Supongamos que $\exists r_1 \in R_1$ tal que $\phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$. Entonces, como ϕ_1 y ϕ_2 son levantamientos de p_1 , por el teorema de unicidad del levantamiento tenemos que $\phi_1 = \phi_2$.

Para probar la segunda parte del corolario aplicaremos lo ya probado tomando $\phi_1 = \phi$ un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo y $\phi_2 = Id_R$.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{Id_R} & R \\ & \searrow \phi \swarrow & \\ & B & \end{array} \quad \begin{array}{c} p \\ p \end{array}$$

Entonces tendríamos que

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = Id_R(r) = r$$

□

Corolario 1.3.2. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de B , $b_0 \in B$ y $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Entonces:

1. Existe un homomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Existe un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Veamos cada punto por separado.

1. Estamos en la siguiente situación (donde se ha puesto la equivalencia con la notación que usamos para el teorema de existencia del levantamiento)

$$\begin{array}{ccc} X = R_1 & \xrightarrow{\phi \stackrel{?}{=} \hat{f}} & R_2 = R \\ & \searrow f=p_1 \swarrow & \\ & B & \end{array} \quad \begin{array}{c} p_2=p \end{array}$$

Entonces por el teorema de existencia del levantamiento tenemos que existe ϕ levantamiento de p_1 con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Veamos la doble inclusión. En primer lugar denotamos por ϕ al isomorfismo y a su inversa la llamaremos φ . Esta aplicación verifica que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1} \quad \phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

y además es también un isomorfismo (por lo que en particular es un homomorfismo). Estaríamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 & \xrightarrow{\varphi} & R_1 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p^1 & \\ & & B & & \end{array}$$

donde ϕ y φ son homomorfismos. Por hipótesis tenemos que $\exists r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ tales que $\phi(r_1) = r_2$. Si componemos esta igualdad por la izquierda con φ tenemos

$$(\varphi \circ \phi)(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow Id_{R_1}(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow r_1 = \varphi(r_2)$$

Por tanto aplicando el primer punto del corolario a ϕ (es un homomorfismo con $\phi(r_1) = r_2$) tenemos que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

y aplicando lo mismo de nuevo a φ (es un homomorfismo con $\varphi(r_2) = r_1$) tenemos que

$$p_{2*}(\pi_2(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

□

Teorema 1.4. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de un e.t. B . Entonces existe un isomorfismo entre ambos recubridores si y solo si dado $b_0 \in B$, $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$ con $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$ tales que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Estamos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

Veamos la doble implicación

\Rightarrow) Supongamos primero que existe ϕ isomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Tomamos $b_0 \in B$ y elegimos $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ cualquiera (que existe porque p_1 es sobreyectiva). Elegimos $r_2 = \phi(r_1)$ y entonces como $p_2 \circ \phi = p_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) &= (p_2 \circ \phi)_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \\ &= p_{2*}(\phi_*(\pi_1(R_1, r_1))) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \end{aligned}$$

ya que como ϕ es un homomorfismo tenemos que $\phi_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \pi_1(R_2, \phi(r_1))$.

\Leftarrow) Está probada aplicando el corolario anterior.

□

Observación. Algunas consecuencias que podemos extraer de lo anterior son las siguientes:

Sean B un e.t. y $b_0 \in B$. Si consideramos H un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ entonces

1. Existe como mucho un recubridor (R, p) (salvo isomorfismo) cumpliendo que $\exists r \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r)) = H$.

$$\begin{array}{ccc} R & & \pi_1(R, r) \\ p \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

2. Además si H y H' son subgrupos conjugados en $\pi_1(B, b_0)$, como mucho existe un recubridor correspondiente a ambos, es decir, si (R, p) es un recubridor con $r_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r_0)) = H$, entonces también existe un $r'_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r'_0)) = H'$.

$$\begin{array}{ccccc} R & & \pi_1(R, r) & & \pi_1(R, r') \\ p \downarrow & & p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) & & H' \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

Ejemplo.

1. Consideramos $B = \mathbb{R}$ y buscamos los recubridores de \mathbb{R} . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$$

Por lo que solo hay un subgrupo $H = \{[\varepsilon_0]\}$, luego \mathbb{R} solo tiene un recubridor

$$(\mathbb{R}, p = Id_{\mathbb{R}})$$

2. En general, si B es simplemente conexo, entonces su único recubridor es él mismo (salvo isomorfismo de recubridores).

3. Consideramos ahora \mathbb{RP}^n el espacio proyectivo con $n \geq 2$. Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2, \text{ con } x_0 \in \mathbb{RP}^n \text{ cualquiera}$$

Por tanto tendríamos que los únicos posibles subgrupos de $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)$ son

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[\varepsilon_{x_0}]\} \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{S}^n, p) \text{ con } p(x) = [x] \\ H_2 &\cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} R & r_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \\ \downarrow p & \downarrow & \downarrow & \downarrow Id & \downarrow Id & \downarrow Id_* \\ \mathbb{RP}^n & x_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \end{array}$$

por lo que los únicos recubridores de \mathbb{RP}^2 son (\mathbb{S}^n, p) con $p(x) = [x]$ y $(\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$.

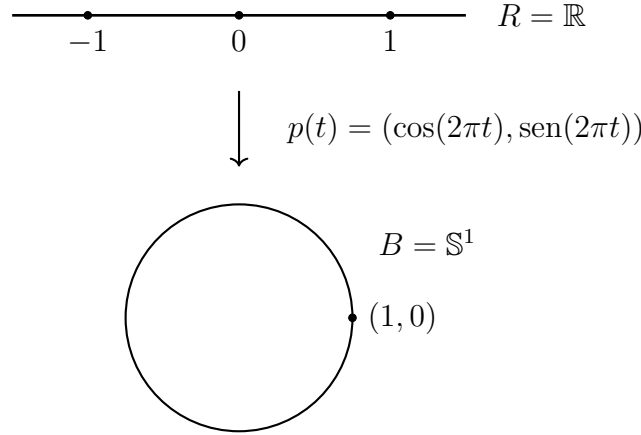
4. Consideramos $B = \mathbb{S}^1$. Recordemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Los únicos subgrupos de \mathbb{Z} son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

Recordamos el recubrimiento de \mathbb{S}^1 que estudiamos en el tema anterior:



Para este recubridor (\mathbb{R}, p) donde $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, su subgrupo asociado en $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ es H_0 .

También podemos considerar el recubridor $(\mathbb{S}^1, p_1 = Id_{\mathbb{S}^1})$ cuyo subgrupo asociado es $H_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$.

Ahora nos planteamos de nuevo que \mathbb{S}^1 es recubridor de sí mismo pero que hay más formas de recubrirse, es decir, podemos encontrar funciones recubridoras

p_k con $k \in \mathbb{Z}^+$ de forma que todas recubran a la circunferencia pero “enrollanla más”, es decir, llevando cada vuelta de $R = \mathbb{S}^1$ en k vueltas de $B = \mathbb{S}^1$. Definimos así la aplicación p_k para $k \geq 2$ (el caso $k = 1$ es la identidad que ya se ha estudiado) dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

Además tendríamos que

$$\begin{aligned} p_{k*} : \quad \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha]^k \end{aligned}$$

Llegando a que

$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) = H_k = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, los únicos recubridores de \mathbb{S}^1 son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, p) \text{ con } p(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ (\mathbb{S}^1, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta)) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5. Vamos a estudiar ahora los recubridores del cilindro de \mathbb{R}^3 , $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\alpha]^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

por lo que tenemos de nuevo que los únicos subgrupos de \mathbb{Z} son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

y además sabemos que (\mathbb{R}^2, p_0) es recubridor del cilindro con

$$\begin{aligned} p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

asociado a $H_0 = \{[\varepsilon_{(1,0,0)}]\}$.

Buscamos ahora los recubridores cuyo subgrupo asociado es H_k . Con la misma idea que en el ejemplo anterior definimos la función p_k para $k \in \mathbb{Z}^+$ dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_{k*}([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) &= \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\} = H_k \end{aligned}$$

Por tanto los únicos recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, p_0) \text{ con } p_0(x, y) &= (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta), y) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

6. Veamos el caso del toro, $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

con generadores $[\alpha]$ y $[\beta]$.

Consideramos el recubridor $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ con

$$\begin{aligned} p_0 \times p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

Como $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0)) = [\varepsilon_{(0,0)}]$ tenemos que

$$(p_0 \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0))) = \{[\varepsilon_{(1,0,1,0)}]\}$$

por lo que $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ es el recubridor asociado al subgrupo trivial de $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0))$.

Consideramos ahora el cilindro como recubridor y definimos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p_k \times p_0 : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ “enrolla” el cilindro k veces. En este caso tendríamos que

$$(p_k \times p_0)(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$

y además tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\gamma]^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$$

Tenemos además que $(p_k \times p_0)(\gamma(t)) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t), 1, 0)$ de donde se deduce que

$$(p_k \times p_0)_*([\gamma]) = [(p_k \times p_0)(\gamma)] = [\alpha]^k$$

Una vez hemos calculado la imagen del generador podemos concluir que

$$(p_k \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z} \times \{0\} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Análogamente si consideramos

$$\begin{aligned} p_0 \times p_k : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, \cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

tendríamos el siguiente recubridor

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Consideramos ahora el toro como recubridor de sí mismo y definimos

$$\begin{aligned} p_k \times p_l : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(l\varphi), \sin(l\varphi)) \end{aligned}$$

Si estudiamos la imagen de los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p_k \times p_l)_*([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ (p_k \times p_l)_*([\beta]) &= [\beta]^l \end{aligned}$$

y llegamos a que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l)$ es recubridor y está asociado al subgrupo $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$. El grupo imagen sería

$$\{[\alpha]^{kn_1} * [\beta]^{ln_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

En este punto nos damos cuenta de que aún no hemos estudiado todos los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si consideramos 2 puntos de \mathbb{Z} podemos generar un subgrupo a partir de ellos, por ejemplo, para $(1, 3), (2, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos construir $\{a(1, 3) + b(2, 4) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y es un subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esto también ocurre con un solo generador. Es decir, tenemos que los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que nos queda por considerar son de la forma

$$\begin{aligned} \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} &\text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} &\text{ para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pensamos ahora entonces en la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} p' : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta + y), \sin(\theta + y)) \end{aligned}$$

y nos planteamos quién sería $p'_*([\gamma])$. Aplicamos p' en un generador y tenemos

$$p'(\gamma(t)) = p(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Intuitivamente podemos llegar a ver que $p'_*([\gamma]) = [\alpha] * [\beta]$. Esto se ha hecho considerando de fondo el generador $(1, 1)$. Buscamos generalizar esta nueva aplicación recubridora para cualquier generador $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se puede construir una aplicación $p'_{(a,b)}$ para cada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p'_{(a,b)} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(a\theta), \sin(a\theta), \cos(b\theta + y), \sin(b\theta + y)) \end{aligned}$$

Aplicando $p'_{(a,b)}$ en el generador tenemos

$$p'_{(a,b)}(\gamma(t)) = p'(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t))$$

y con mucha intuición se puede llegar a que

$$(p'_{(a,b)})_*([\gamma]) = [\alpha]^a * [\beta]^b$$

Por tanto tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)})$ es recubridor del toro con subgrupo asociado $\{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\}$ para cada generador que tomemos $(a, b) \in \mathbb{Z}$.

De hecho, si tomamos un par de generadores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos definir la aplicación $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &= \\ &= (\cos(a\theta + c\varphi), \sin(a\theta + c\varphi), \cos(b\theta + d\varphi), \sin(b\theta + d\varphi)) \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}$ en los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\alpha(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(0), \sin(0)) = \\ &= (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\beta(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(1, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(0), \sin(0), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (\cos(2c\pi t), \sin(2c\pi t), \cos(2d\pi t), \sin(2d\pi t)) \end{aligned}$$

Por lo que de nuevo usando mucho la intuición (habría que demostrarlo formalmente) llegamos a que

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\alpha]) &= [\alpha]^a * [\beta]^b \\ (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\beta]) &= [\alpha]^c * [\beta]^d \end{aligned}$$

y tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})$ es recubridor del toro asociado al subgrupo $\{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ para cada par de generadores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Resumiendo, tenemos que todos los recubridores del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son

$$\begin{aligned} &(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0) \text{ asociado a } \{0\} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k \times p_0) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z} \text{ para cada } k, l \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)}) \text{ asociado a } \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}) \text{ asociado a } \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no tiene más subgrupos estos serán todos los recubridores del toro.

Hasta ahora lo que hemos visto es que para estudiar el número de recubridores de un espacio B podemos elegir un punto $b_0 \in B$ y pasar a estudiar $\pi_1(B, b_0)$ y estudiando sus subgrupos $H > \pi_1(B, b_0)$ podíamos afirmar que como mucho había un

recubridor por cada uno de ellos (o sus conjugados). Por tanto cuanto más “grande” sea el grupo fundamental, más recubridores podremos encontrar a priori.

Proposición 1.5. Sea ϕ un homomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2) . Entonces $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ es una aplicación recubridora.

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Demostración. Sabemos que ϕ es continua porque es homomorfismo. Veamos que ϕ es sobreyectiva (no es elemental). Consideramos un elemento cualquiera $r_2 \in R_2$ y queremos ver si existe un $r_1 \in R_1$ tal que $\phi(r_1) = r_2$.

Tomamos $r_0 \in R_1$ cualquiera y elegimos un arco α en R_2 que una $\phi(r_0)$ con r_2 , es decir

$$\alpha \in \Omega(R_2; \phi(r_0), r_2)$$

Si proyectamos tendremos que $p_2 \circ \alpha$ es un arco en el espacio topológico base B que une $p_2(\phi(r_0))$ con $p_2(r_2)$, es decir

$$(p_2 \circ \alpha) \in \Omega(B; p_2(\phi(r_0)), p_2(r_2))$$

Sabiendo que el diagrama de la proposición es conmutativo tenemos que $p_2(\phi(r_0)) = p_1(r_0)$. Como p_1 es aplicación recubridora, entonces tenemos que existe un único levantamiento $\widehat{p_2 \circ \alpha}$ que comienza en r_0 . Entonces tenemos que $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ es un arco en R_2 que comienza en $\phi(r_0)$. Es decir, α y $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ son dos arcos que empiezan en $\phi(r_0)$ y además

$$p_2 \circ (\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}) = p_1 \circ (\widehat{p_2 \circ \alpha}) \stackrel{def}{=} p_2 \circ \alpha$$

Por unicidad del levantamiento de p_2 tenemos que $\alpha = \phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ por lo que tenemos que

$$r_2 = \alpha(1) = \phi(\widehat{p_2 \circ \alpha}(1))$$

Nos queda demostrar que todo punto de R_2 está regularmente recubierto.

Sea $r_2 \in R_2$ fijado. Sabemos que $p_2(r_2) \in B$ y podemos elegir U abierto arcoconexo en B que contiene a $p_2(r_2)$ y que está regularmente recubierto por p_1 y por p_2 . Por la definición de regularmente recubierto tenemos que

$$\begin{cases} p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i, & A_i \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{1|A_i} : A_i \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} B_j, & B_j \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{2|B_j} : B_j \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

Observamos que

$$\phi^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \phi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = (p_2 \circ \phi)^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Alijamos un A_{i_0} y veamos que $\phi(A_{i_0})$ está completamente contenida en algún B_{j_0} . Para ello, sabemos que $\phi(A_{i_0})$ es conexo y además

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$$

Tenemos entonces que

$$\phi(A_{i_0}) = \phi(A_{i_0}) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} (\phi(A_{i_0}) \cap B_j)$$

Como puedo escribir $\phi(A_{i_0})$ como unión de abiertos y $\phi(A_{i_0})$ es conexo tenemos que $\exists j_0 \in J$ tal que

$$\phi(A_{i_0}) \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \in J \setminus \{j_0\}$$

y podemos escribir

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq B_{j_0}$$

Así, si tomamos B_{j_0} como el abierto que contiene a r_2 , entonces

$$\phi^{-1}(B_{j_0}) = \bigcup_{i \in I'} A_i$$

con $I' \subseteq I$. Además,

$$\begin{array}{ccccc} \phi|_{A_i} : & A_i & \xrightarrow{\quad} & B_{j_0} & \text{homeomorfismo} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \text{homeom.} \equiv p_1|_{A_i} & & p_2|_{B_{j_0}} \equiv \text{homeom.} & \\ & & U & & \end{array}$$

por ser composición de dos homeomorfismos □

Corolario 1.5.1. Sean (R_1, p_1) , (R_2, p_2) dos recubridores de un espacio topológico B , $b_0 \in B$, $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ u $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Si se verifica que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

entonces existe una aplicación recubridora de R_1 en R_2 que lleva el punto r_1 en el punto r_2 .

Definición 1.2. Decimos que (R, p) es un **recubridor universal** de un espacio topológico B si (R, p) es un recubridor con R simplemente conexo.

Observación. Dos recubridores universales tienen que ser necesariamente isomorfos. Es decir, son salvo un homeomorfismo, el mismo. Esto se debe a que por ser R simplemente conexo ambos tiene grupo fundamental trivial por lo que si hubiera dos tendrían que estar asociados al mismo subgrupo H y sabemos que como mucho hay uno salvo isomorfismo. Por eso se suele decir **el** recubridor universal y no **un** recubridor universal.

Observación. El adjetivo “universal” se debe a que si (R_2, p_2) también recubre al espacio topológico base B , entonces el recubridor universal también recubre a R_2 .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Ejemplo.

1. \mathbb{S}^1 es el recubridor universal de \mathbb{R} .
2. \mathbb{RP}^n es el recubridor universal de \mathbb{S}^n para $n \geq 2$
3. \mathbb{R}^2 es el recubridor universal del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
4. \mathbb{R}^2 también es el recubridor universal del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

1.3. Existencia de espacios recubridores

Definición 1.3. Sea B un espacio topológico entonces

1. Decimos que B es **localmente simplemente conexo** si todo punto $b \in B$ admite una base de entornos formada por simplemente conexos. O equivalentemente, si para cada abierto O en B y punto $b \in O$ existe un entorno U de b simplemente conexo con $U \subseteq O$.
2. Decimos que B es **semilocalmente simplemente conexo** si todo punto $b \in B$ tiene un entorno U tal que

$$(i_u)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

es trivial, donde $i_u : U \rightarrow B$ es la inclusión.

Observación.

1. Si B es localmente simplemente conexo, entonces también es semilocalmente simplemente conexo.
2. Si B es simplemente conexo entonces es semilocalmente simplemente conexo
3. Si U es un entorno de $b \in B$ tal que $(i_U)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial, entonces también es cierto que si V es entorno de b con $V \subseteq U$ se tiene que $(i_V)_* : \pi_1(V, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ es trivial.

Ejemplo.

1. Si B es un abierto de \mathbb{R}^n entonces B es localmente simplemente conexo.
2. \mathbb{S}^1 es localmente simplemente conexo ya que para cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ existe una base de entornos formada por simplemente conexos.
3. Consideramos S_n la circunferencia de \mathbb{R}^2 centrada en $(\frac{1}{n}, 0)$ y de radio $\frac{1}{n}$. Consideramos el siguiente espacio

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

El espacio topológico B no es semilocalmente simplemente conexo.

4. Tomamos el conjunto de \mathbb{R}^3

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} z = \lambda, \lambda \geq 0 \\ (x, y) = \lambda(a, b), \text{ con } (a, b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \end{array} \right\}$$

Donde S_n es una de las circunferencias del ejemplo anterior. Esto si se analiza gráficamente es fácil ver que son un montón de conos unidos con el origen y tangentes a la recta $R = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$ y que intersecan con el plano de altura 1 formando circunferencias tangentes al $(0, 0, 1)$ de la forma S_n .

Tenemos que B es simplemente conexo por ser contráctil pero no es localmente simplemente conexo.

Teorema 1.6. Sea B un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo y fijamos un punto $b_0 \in B$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para cada clase de conjugación de un subgrupo $H \leq \pi_1(B, b_0)$ existe un único recubridor (R, p) (salvo isomorfismo), y un punto $r_0 \in R$ tal que $p(r_0) = b_0$ y $H = p_*(\pi_1(R, r_0))$.
2. B tiene un recubridor universal.
3. B es semilocalmente simplemente conexo.