Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

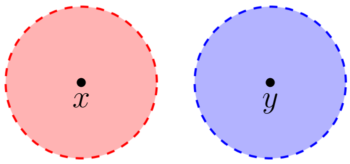
Índice general

1. Superficies compactas

1.1. Superfies topológicas

En primer lugar recordaremos algunos conceptos de Topología I para poder definir los nuevos conceptos de esta sección.

Definición 1.1. Diremos que un espacio topológico X es T2 (o de **Haussforff**, o que satisface el **segundo axioma de separación**) si $\forall x, y \in X$ existe un abierto U que contenga a x y un abierto V que contenga a y tal que $U \cap V = \emptyset$.



Definición 1.2. Decimos que un espacio topológico X es 2AN (o que cumple el **segundo axioma de numerabilidad**) si existe una base de la topología numerable.

Una vez recordados estos conceptos pasamos a las nuevas definiciones de esta sección:

Definición 1.3. Decimos que un espacio topológico X es **localmente euclídeo** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto suyo que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4. Decimos que S es una **superficie** si S es un espacio topológico tal que $\forall x \in S$ existe un abierto que contiene a x y que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Además, pediremos que S sea T2 (o Hausdorff) y 2AN (segundo axioma de numerabilidad).

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$ son superficies.

   Demostración. En el caso de $\mathbb{R}^2$ es trivial ya que para cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar el total, $\mathbb{R}^2$ que es abierto, contiene a x y es homeomorfo a sí mismo.

   En el caso de $\mathbb{S}^2$ podemos considerar para cada $x \in \mathbb{S}^2$ el conjunto $A = \mathbb{S}^2 \setminus \{-x\}$, es decir, la esfera quitándole la antípoda. Sabemos que A es abierto (ya que su complementario es $\{-x\}$ que es cerrado) y que contiene a x (ya que $0 \notin \mathbb{S}^2$). Además sabemos que A es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$ (el total). □

2. Cualquier abierto de una superficie es también una superficie. En particular, las bolas abiertas de $\mathbb{R}^2$ son también superficies.

   Demostración. Consideramos A el abierto de la superficie S y un punto cualquiera $x \in A$. Por ser S una superficie existe un abierto U que contiene a x y que es homeomorfo (por h) a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Consideramos entonces $A \cap U$ que es abierto por ser intersección de dos abiertos y que además contiene a x. Podemos considerar la restricción en el dominio del homeomorfismo h a $A \cap U$ que seguirá siendo un homeomorfismo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Como esto se verifica para todo $x \in A$ tendremos que A es una superficie. □

3. Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leqslant r\} = \overline{B}(0, r)$. Entonces X no es una superficie porque para los puntos x con $\|x\| = r$ no existe un entorno abierto que lo contenga y que sea homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

   Demostración. Tomamos un punto $x \in X$ con $\|x\| = r$. Si existiese U entorno abierto suyo homeomorfo a un abierto A de $\mathbb{R}^2$ entonces $\exists V$ entorno abierto de x contenido en U que es de la forma $V = B(x, r_0) \cap X$. Entonces V es homeomorfo a un abierto A' de $\mathbb{R}^2$ (ya que sería una restricción en el dominio del homeomorfismo entre $h : U \to A$). De esta forma tendríamos que como $V \setminus \{x\}$ es convexo debe ser simplemente conexo. Sin embargo, su imagen por homeomorfismo h será $A' \setminus \{h(x)\}$ y como $h(x)$ está en el abierto A' existe un radio $r_0' > 0$ tal que $\overline{B}(h(x), r_0') \subseteq A'$. Pero el lazo dado por la frontera de dicha bola, $Fr(\overline{B}(h(x)r_0'))$ no es homotópicamente constante en $\mathbb{R}^2 \setminus \{h(x)\}$. Por tanto este lazo no es homotópicamente constante en $A' \setminus \{h(x)\}$ por lo que $A' \setminus \{h(x)\}$ no es simplemente conexo. Esto prueba que $\overline{B}(0, r)$ no es una superficie. □

4. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son ejemplos de superficies. Esto se debe a que su recubridor universal es $\mathbb{R}^2$ luego sus aplicaciones recubridoras nos dan homeomorfismos locales desde abiertos de $\mathbb{R}^2$ en abiertos regularmente recubiertos de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Observación. Si X es un espacio topológico localmente euclídeo entonces cumple las propiedades locales de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, tiene una base de entornos numerable (es 1AN) y es localmente simplemente conexo. En particular, X ha de tener recubridor universal.

Definición 1.5. Sea S una superficie[1] y D un abierto dentro de S. Decimos que D es un **disco regular** en S si existe un abierto D' tal que $D \subsetneq D'$ y un homeomorfismo $h : D' \to \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} = B((0,0), 1)$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < r\} = B((0,0), r)$ con $0 < r < 1$.

Ejemplo.

[1] siempre se entiende que es una superficie topológica

1. Consideramos en $\mathbb{S}^2$:

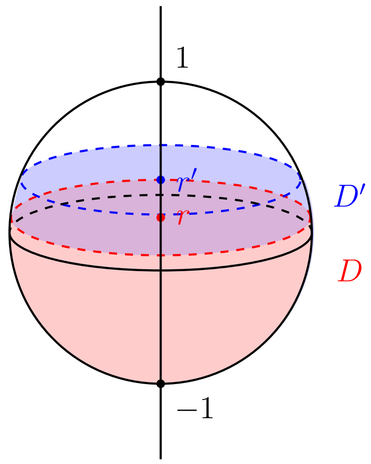
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z < r\} \text{ con } -1 < r < 1$$

En efecto es un disco regular.

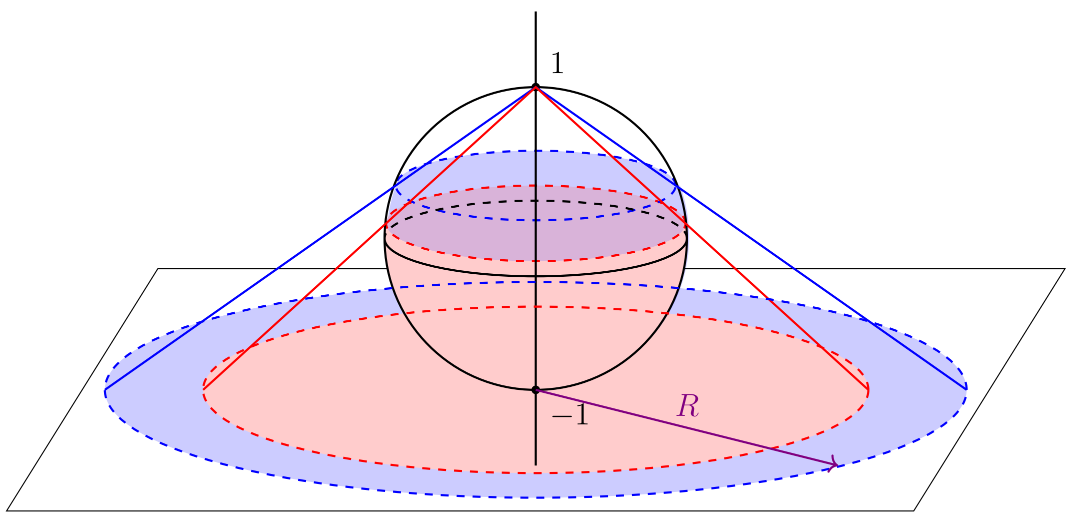
Demostración. Como $-1 < r < 1$ tenemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $r + \varepsilon < 1$. Podemos fijar dicho ε y consideramos el siguiente conjunto

$$D' = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z < r + \varepsilon = r'\} \text{ con } -1 < r' < 1$$

En efecto tendremos que para cualquier punto $(x,y,z) \in D$ se tiene que $z < r < r'$ luego $(x,y,z) \in D'$. Además podemos considerar un punto $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$ tal que $z = r$ y tendremos que dicho punto está en $D' \setminus D$. Podemos concluir que $D \subsetneq D'$.



Buscamos ahora un homeomorfismo $h : D' \to \mathbb{D}$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$. Pensamos en la proyección estereográfica desde el polo norte, $h : D' \to \mathbb{R}^2$. Gráficamente lo podemos ver de la siguiente forma:



□

y llegamos a que existe un radio $R > 0$ tal que podemos definir una nueva aplicación

$$\begin{array}{rccl} h' : & D' & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{R}h(x,y,z) \end{array}$$

que será un homeomorfismo (por serlo h). Además, es fácil ver que $h'(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$.

2. Consideramos la esfera sin el polo norte $D = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ en $\mathbb{S}^2$. En este caso tendremos que no es un disco regular ya que el único abierto D' que contiene estrictamente a D es el total $D' = \mathbb{S}^2$ que sabemos que no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

3. $\mathbb{D}_r = B((0,0),r) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un disco regular en $\mathbb{R}^2$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Sin embargo, $\mathbb{D}_r$ no es regular en $S = \mathbb{D}_r$.

4. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el siguiente conjunto

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geqslant 0\}$$

Entonces D no puede ser un disco regular.

Demostración. Si existiese un D' que contiene a D y contenido en $\mathbb{R}^2$ con $h : D' \to \mathbb{D}$ homeomorfismo tal que $h(D) = \mathbb{D}_r$ podemos tomar su restricción $h_{|D'\setminus D} : D' \setminus D \to \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r$ que seguirá siendo un homeomorfismo. Tenemos además que $D \subsetneq D \subseteq \mathbb{R}^2$ luego $D' \setminus D \subseteq \{(x,0) : x \geqslant 0\}$. Entonces tendremos que $(D' \setminus D) \setminus \{(x,0)\}$ no es convexo pero $h((D' \setminus D) \setminus \{(x,0)\}) = (\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r) \setminus \{(h(x,0))\}$ es conexo por lo que no pueden ser homeomorfos y llegamos a contradicción. □

Lema 1.1. *Sea p_0 un punto de una superficie S. Dado un entorno U de p_0 existe D disco regular que contiene a p_0 y está contenido en U. En particular, los discos regulares forman una base de la topología.*

Demostración. Como S es una superficie, entonces para p_0 existe un abierto V que contiene a p_0 y un homeomorfismo

$$\varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^2$$

sobre $\varphi(V)$ que ha de ser abierto de $\mathbb{R}^2$. Ya que $\varphi(U \cap V)$ es un entorno de $\varphi(p_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tenemos que existe un $R_0 > 0$ tal que

$$B(\varphi(p_0), R_0) \subseteq \varphi(U \cap V)$$

Tomamos

$$D = \varphi^{-1}\left(B\left(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2}\right)\right)$$
$$D' = \varphi^{-1}(B(\varphi(p_0), R_0))$$

Componiendo φ con una transformación afín podemos llevar las bolas $B\left(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2}\right)$ y $B(\varphi(p_0), R_0)$ a $\mathbb{D}_{1/2}$ y $\mathbb{D}$ respectivamente. □

Definición 1.6. Sean S_1 y S_2 dos superficies conexas y disjuntas. Tomamos $D_1 \subseteq S_1$ y $D_2 \subseteq S_2$ discos regulares y consideramos un homeomorfismo $h : Fr(D_1) \to Fr(D_2)$. Sobre el espacio topológico $X = (S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2)$ consideramos la relación de equivalencia R dada por

$$x_1 R x_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{z, h(z)\} \text{ con } z \in Fr(D_1) \end{cases}$$

Denotamos por $S_1 \# S_2$ al espacio topológico cociente de X bajo la relación de equivalencia R y lo llamaremos **suma conexa** de S_1 con S_2.

Teorema 1.2. El espacio topológico $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa que, salvo homeomorfismo, no depende de los discos D_1 y D_2 regulares ni del homeomorfismo h entre sus fronteras.

Observación.

1. $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.
2. Si S_1 es una superficie cualquiera y S_2 es la esfera $\mathbb{S}^2$, entonces
$$S_1 \# S_2 = S_1 \# \mathbb{S}^2 \cong S_1$$
3. Si tenemos n toros ($n \geqslant 2$) podemos definir
$$\mathbb{T}_n \equiv \text{suma conexa de los } n \text{ toros}$$
que recibe el nombre de **n-toro** o **esfera con n asas**.
4. La suma conexa de n planos proyectivos la llamaremos[2] n **plano proyectivo**, $\mathbb{RP}^2_n$.

[2]no confundir con $\mathbb{RP}^n$