Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es una par $(X, \mathcal{T})$, donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X. Esta familia $\mathcal{T}$ tiene las siguientes propiedades:

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$ (unión arbitraria[1]).

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia $\mathcal{T}$ se le llama **topología** en el conjunto X. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **abiertos** en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

□

Observación. De **(A3)** podemos concretar que si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}$, es decir, que la intersección finita de abiertos es abierto (se prueba con una inducción trivial).
En general, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ no tiene por qué ser abierto.

□

Ejemplo.

- •) **Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t[2].
- •) **Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.
- •) **Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$,
  $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.
- •) **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$,
  $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t. (por las leyes de Morgan)

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i)(\text{intersección de finitos es finito})$$
$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)(\text{unión de finitos es finito})$$

[1] Puede ser finita o infinita, numerable o no numerable

[2] A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

- **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.

- $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.

- **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t. (es un caso particular del punto incluido, $\mathcal{T}_a$).

- **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S$, $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$.

□

Observación. En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

□

Ejercicio 1. Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos $X = \{a, b\}$. Las topologías posibles son:

- Trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$

- Discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$

- Punto incluido (a): $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

- Punto incluido (b): $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

Cualquier otra topología que se pueda construir sobre este conjunto coicidirá con alguna de las anteriores.

□

Ejercicio 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$, como $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \quad \forall x \in X$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$.

$\Leftarrow$) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$. Consideramos $U \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunto cualquiera de X. Podemos expresar $U = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, donde $\{x_i\} \in X \quad \forall i \in I$. Por la propiedad **(A2)** tenemos $U \in \mathcal{T}$. Como U era un subconjunto arbitrario de X, tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

□

1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

(D1) $d(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D2) (simetría) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y, \in X$.

(D3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$

A la aplicación d la llamaremos **distancia**.

□

Ejercicio 1.1.1. Demostrar que a partir de las propiedades **(D2)**, **(D3)** y la segunda parte de **(D1)** se puede deducir la primera parte de **(D1)**, y como consecuencia se tiene $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$, tenemos:

$$0 \overset{\textbf{(D1)}(2)}{=} d(x, x) \overset{\textbf{(D3)}}{\leqslant} d(x, y) + d(y, x) \overset{\textbf{(D2)}}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow d : X \times X \to [0, \infty)$$

□

Definición 1.3. (X, d) e.m.[3] $x \in X$, $r > 0$, se definen:

- **•)** La **bola (abierta)** de centro x y radio r como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- **•)** La **bola cerrada** de centro x y radio r como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

- **•)** La **esfera** de centro x y radio r como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

□

Propiedades. De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

- **•)** $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- **•)** $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$

[3] A partir de ahora notaremos así a un espacio métrico

•) Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x, s) \subset B(x, r)$

$\square$

Ejemplo. (Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ consideramos la **distancia usual**,

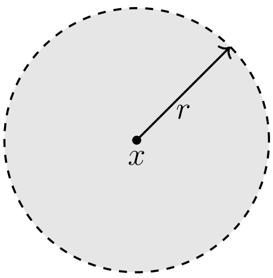
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

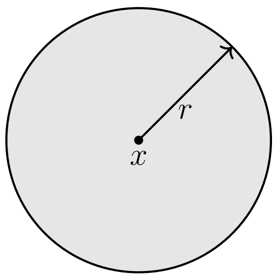
•) Si $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$,,

$$\begin{aligned} B(x, r) &= (x - r, x + r) \\ \overline{B}(x, r) &= [x - r, x + r] \\ S(x, r) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

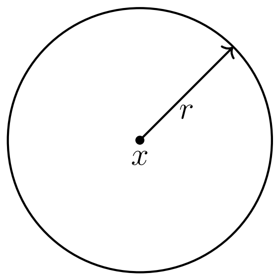
•) En $n = 2$ tenemos



$B(x, r) \equiv$ disco

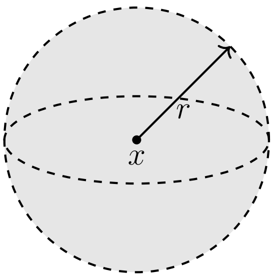


$\overline{B}(x, r) \equiv$ disco cerrado

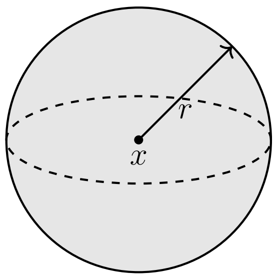


$S(x, r) \equiv$ circunferencia

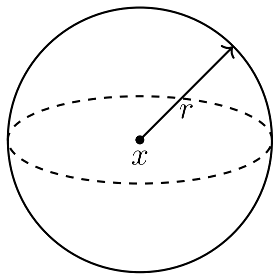
•) En $n = 3$ tenemos:



$B(x, r) \equiv$ bola



$\overline{B}(x, r) \equiv$ bola cerrada



$S(x, r) \equiv$ esfera

$\square$

Ejemplo. En un conjunto $X \neq \emptyset$, se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x,y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r > 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x,y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r \geqslant 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r < 1 \end{cases}$$

$$S(x,y) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si} \quad r = 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad r \neq 1 \end{cases}$$

□

Ejemplo.

- •) Si d es una distancia en X y $\lambda > 0$, entonces $\lambda \cdot d : X \times X \to [0, \infty)$ también es una distancia y $B_{\lambda d}(x,r) = B_d\left(x, \dfrac{r}{\lambda}\right)$.
- •) Sean d y $\tilde{d}$ distancias en X y $d \leqslant \tilde{d}$, entonces $B_d(x,r) \supseteq B_{\tilde{d}}(x,r) \;\; \forall r \in \mathbb{R}^+,\; x \in X$.

□

Definición 1.4. (X,d) e.m. Un subconjunto $U \subset X$ se dice **abierto métrico** si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U, \;\; \exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$.

□

Proposición 1.1. Si (X,d) es un espacio métrico, entonces

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ es un abierto métrico en } (X,d)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

es una topología en X que llamamos la **topología métrica** en (X,d).

Demostración. Veamos que $\mathcal{T}_d$ así definida verifica las propiedades de una topología:

(A1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}_d$ trivialmente (ya que $X \subset X$).

(A2) Sea $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$. Tendremos que ver si se verifica que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$. Para ello estudiemos los dos casos posibles:

Si $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Si $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$, entonces podemos considerar $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists r > 0 : B(x,r) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$. ¿Se verifica que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$? De nuevo veamos los casos posibles:

Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces se verifica trivialmente.

Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces podemos considerar $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : B(x,r_1) \subset U_1$ y $B(x,r_2) \subset U_2 \Rightarrow B(x, \min\{r_1,r_2\}) \subset U_1 \cap U_2$, es decir existe una bola abierta en la intersección que contiene al punto luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

□

Definición 1.5. Se llama **topología usual de** $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_u$, a la topología métrica en $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, es decir, $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U \ \ \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$.

□

Proposición 1.2. (X, d) e.m. Se cumplen:

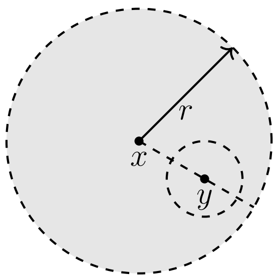
(i) Las bolas abiertas en (X, d) son abiertos.

(ii) Todo abierto no vacío en (X, d) se puede escribir como unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.

Demostración.

(i) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$B(x, r) \in \mathcal{T}_d$?

Sea $y \in B(x, r) \Rightarrow d(x, y) < r \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Para ver esta última implicación tenemos que si tomamos un $z \in B(y, \varepsilon) \Rightarrow d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B(x, r)$.



(ii) Sea $U \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall x \in U \ \ \exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, r_x) = \bigcup\limits_{x \in U} \overline{B}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$.

□

Corolario 1.2.1. En (X, d) tenemos

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

□

Ejemplo.

•) (X, d) e.m. En general, no todo abierto es una bola. Por ejemplo la unión de bolas no concéntricas.

•) No todo conjunto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es abierto. Por ejemplo $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto.

•) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos abiertos (topológicamente) son los intervalos abiertos, es decir, los del tipo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a, b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.

- •) En (X, d), en general la intersección infinita de abiertos no es abierto. Por ejemplo, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ que no es abierto.

- •) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$ (la topología asociada a la distancia discreta es la distancia discreta).

$\square$

Definición 1.6. Sean $X \neq \emptyset$ y d_1, d_2 distancias en X. Decimos que d_1 y d_2 son **equivalentes** si existen $a, b > 0$ tal que

$$a \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant b \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

$\square$

Proposición 1.3. Si d_1, d_2 son distancias en $X \neq \emptyset$ y existe $a > 0$ tal que $a \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \quad \forall x, y \in X$, entonces $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. En particular, si d_1 y d_2 son equivalentes, entonces $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, $U \neq \emptyset$, ¿$U \in \mathcal{T}_{d_2}$?
Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1} \Rightarrow \exists r > 0 : B_{d_1}(x, r) \subset U$. Como $a \cdot d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset B_{d_1}(x, r)$. Para verlo, tomamos $y \in B_{d_2}(x, a \cdot r) \Rightarrow d_2(x, y) < a \cdot r \Rightarrow a \cdot d_1(x, y) < r \Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r)$. Por tanto, $B_{d_1}(x, r) \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2} \Rightarrow T_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

$\square$

Definición 1.7. Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice **metrizable** si existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

$\square$

Ejemplo.

- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es metrizable.

- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es metrizable.

$\square$

Ejercicio 1.1.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t. metrizable, entonces cumple la condición de Hausdorff:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U, \; y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

Por ser metrizable, sabemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ donde $d : X \to [0, \infty)$ es una distancia. Por tanto, para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ tengo $d(x, y) > 0$. Puedo considerar entonces $r = \dfrac{d(x, y)}{2}$. Tengo entonces $U = B(x, r)$ y $V = B(y, r)$. Es claro que $x \in U$ y $y \in V$. Veamos que U y V son disjuntos. Tengo $U \cap V = \{z \in X : d(z, x) < r, d(z, y) < r\}$. Supongamos que este conjunto no es vacío, en cuyo caso tendría que $\exists z \in X$ tal que $d(z, x) < r$ y $d(z, y) < r$. Por tanto, $d(z, x) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$ lo cual incumple la desigualdad triangular. Llegamos a contradicción y por tanto $U \cap V = \emptyset$.

□

Ejemplo.

- $(X, \mathcal{T}_t)$ no es metrizable si $\#X > 2$ (cardinal del conjunto) ya que no verifica la condición de Hausdorff.
- $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ no es metrizable por la misma razón (ya que la intersección de cualesquiera dos abiertos va a contener a x_0).
- $(X, \mathcal{T}_{CF})$ no es metrizable si X es infinito (aplicar las leyes de morgan para la intersección).
- $(X, \mathcal{T}_{CN})$ no es metrizable si X no es numerable.
- $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$.
- La topología de Sierpinski tampoco es metrizable (ya que el único abierto que contiene a b es el total).
- La topología de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ cumple la propiedad de Hausdorff.

□

1.2. Comparación de Topologías

Definición 1.8. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X. Diremos que $\mathcal{T}_2$ es **más fina** que $\mathcal{T}_1$ o que $\mathcal{T}_1$ es **menos fina** que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y lo notamos como $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

□

Ejemplo.

- $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} \leqslant \mathcal{T}_{CN}$.
- $(X, \mathcal{T})$ e.t, entonces $\mathcal{T}_t \leqslant \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_{disc}$
- Si $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_2 \leqslant \mathcal{T}_1$, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (por doble inclusión).
- En general si tenemos dos topologías en X, no siempre son comparables. Por ejemplo la topología del punto incluido en dos puntos distintos:

  $$0, 1 \in \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$$

  Veamos que $\mathcal{T}_0 \nleq \mathcal{T}_1$, ya que $\{0\} \notin \mathcal{T}_1$, y por el mismo motivo (pero con el 1) tenemos $\mathcal{T}_1 \nleq \mathcal{T}_0$.

  Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{x_0})$ ya que $\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_u \Rightarrow \mathcal{T}_{x_0 \nleq \mathcal{T}_u}$
  Igualmente $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_u$ y $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_{x_0} \Rightarrow \mathcal{T}_u \nleq topo_{x_0}$
- En $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- (X, d), (X, d'), $d \leqslant d' \Rightarrow \mathcal{T}_d \leqslant \mathcal{T}_{d'}$.

□

1.3. Cerrados

Definición 1.9. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Diremos que un conjunto $F \subset X$ es **cerrado** en $(X, \mathcal{T})$ si $X \setminus F \in \mathcal{T}$. Denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ a la familia de todos los cerrados en $(X, \mathcal{T})$.

□

Propiedades.

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(C2) Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(C3) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$

Por inducción, de **(C3)** tenemos que la unión finita de cerrados es cerrada.

Observación.

- •) $U \in \mathcal{T} \iff X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \iff X \setminus F \in \mathcal{T}$.
- •) $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto además implica que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} = \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto nos dice que para conocer una topología basta con conocer la familia de sus cerrados.
- •) En general, puede haber conjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tenemos que $[0, 1) \notin (\mathcal{T}_u \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u})$.
- •) En $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ tenemos que $\mathcal{T}_{x_0} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{P}(X)$ y además $\mathcal{T}_{x_0} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \{\emptyset, X\}$.
- •) En general, la unión arbitraria de cerrados no es cerrado. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tomamos $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] = (0, 3)$. Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ considerando $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ que no es cerrado.

□

Ejemplo.

- •) Topología trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_t} = \mathcal{C}_t = \{\emptyset, X\}$.
- •) Topología discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{disc}} = \mathcal{C}_{disc} = \mathcal{P}(X)$.
- •) Topología del punto incluido: $x_o \in X$, $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{C}_{x_0} = \{X\} \cup \{F \subset X : x_0 \notin F\}$
- •) Topología cofinita: $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ finito }\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{CF}} = \mathcal{C}_{CF} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ finito}\}$
- •) En ocasiones no es fácil describir $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Por ejemplo en $\mathcal{T}_u$ o $\mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.

□

Ejemplo. En un espacio métrico $(X, \mathcal{T}_d)$, las bolas cerradas y las esferas son cerrados.

Demostración.

- **•)** Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$\overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}_d$? Esto es equivalente a preguntarse ¿$X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{T}_d$?

  Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x,r) \Rightarrow d(x, y > r)$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : r + \varepsilon < d(x,y) \Rightarrow B(y,\varepsilon) \cap \overline{B}(x,r) = \emptyset \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{T}_d \Rightarrow X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$

- **•)** Sea $x \in X$, $r > 0$,¿$S(x,r) \in \mathcal{C}_d$? Dado que $X \setminus S(x,r) = B(x,r) \cup (X \setminus \overline{B}(x,r)) \in \mathcal{T}_d$ (por ser unión de abiertos).

□

Ejercicio 1.3.1. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos cerrados son los de la forma $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y $[a, b]$ con $a < b$.

Sabemos que los únicos abiertos en $\mathcal{T}_u$ son los intervalos de la forma $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a, b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.
Es claro que $\mathbb{R} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
Tenemos que $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty) \in \mathcal{T}_u$, luego $(-\infty, a] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
De la misma forma, $\mathbb{R} \setminus [b, +\infty) = (-\infty, b) \in \mathcal{T}_u$, luego $[b, +\infty) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$
Finalmente $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \in \mathcal{T}_u$ por ser unión de abiertos luego $[a, b] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
Dado que ya se han estudiado todos los complementarios de los intervalos abiertos (los abiertos en la topología) no habrá más tipos de intervalos cerrados (recordemos $U \in \mathcal{T} \iff X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$)

□

Teorema 1.4. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

(C2) Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

(C3) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} = \mathcal{C}$.

Demostración. La existencia queda probada definiendo $\mathcal{T} = \{U \subset X : X \setminus U \in \mathcal{C}\}$. La unicidad es inmediata ya que si $\mathcal{C}_{\mathcal{T}'} = \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

□

1.4. Bases de topología

Definición 1.10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Una familia de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una **base** de la topología $\mathcal{T}$ si $\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists \{B_i\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.
A los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **abiertos básicos**.

□

Observación.

- •) Ni $\mathcal{B}$ ni la familia $\{B_i\}_{i \in I}$ tienen que ser finitas o numerables
- •) La forma de escribir $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ puede no ser única.
- •) $\mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}$ (trivialmente).
- •) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$ con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}'$ es también base de $\mathcal{T}$.

□

Proposición 1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ una familia de abiertos. Son equivalentes:

(i) $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

(ii) $\forall U \in \mathcal{T}, \ U \neq \emptyset \ \ \forall x \in U \ \ \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$ (si tenemos un abierto de la topología podemos encontrar para cada punto suyo un abierto básico contenido en el abierto y que contiene al punto).

Demostración.

(i)⇒(ii) Sea $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists i \in I$ tal que $x \in B_i = B_x \subset U$

(ii)⇒(i) Sea $U \in \mathcal{T}$.

- Si $U = \emptyset \Rightarrow U = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$
- Si $U \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in U \ \ \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B_x$

□

Ejemplo.

- •) Sea $(X, \mathcal{T}_d)$ un e.m. La familia $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ de todas las bolas abiertas es una base de $\mathcal{T}_d$.
- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ y se le llama **base usual**.
- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, \ a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ (por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$).

- •) En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ es la base usual. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ también es base de $\mathcal{T}_u$ (numerable).
- •) En $(X, \mathcal{T}_t)$, $\mathcal{B} = \{X\}$ es base (la única que no contiene al vacío).
- •) $(X, \mathcal{T}_d)$, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}_{disc}$. Es la más económica ya que si $\mathcal{B}'$ es base, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

  Demostración. Sea $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$, como $\mathcal{B}'$ es base podemos considerar $x \in \{x\}$ y entonces $\exists B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B \subset \{x\}$ y entonces $B = \{x\} \subset \mathcal{B}'$ $\forall x \in X \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ □

- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $x_0 \in X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \{\{x, x_0\} : x \in X\}$ es una base. Esta es la base más económica.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Sorgenfrey})$ (recordemos que $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U, \ \ \exists \varepsilon : [x, x+\varepsilon) \subset U$). $\mathcal{B} = \{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ es base. $\mathcal{B}' = \{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ no lo es (ya que tomando un intervalo de la forma $[x, x+\varepsilon)$ con $x \in \mathbb{Q}$ entonces no existe ningún elemento de $\mathcal{B}'$ que contenga a x y quede enmedio).

□

Teorema 1.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base suya. Entonces:

(B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Demostración.

(B1) Trivial

(B2) Tenemos $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ entonces, como $\mathcal{B}$ es base $\exists B_3 = B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

□

Teorema 1.7. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

(B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{B}) &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} \text{ con } U = \bigcup_{i \in I} B_i\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{U \in X : \forall x \in U \ \ \exists B = B_x \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U\} \end{aligned}$$

Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es la topología menos fina conteniendo a $\mathcal{B}$, es decir, si $(X, \mathcal{T}')$ es un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{T}'$. A esta topología se le llama la **topología generada** por $\mathcal{B}$.

Demostración. Empezaremos por probar la existencia. Para ello tendremos que ver que $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es una topología, probando que verifica las propiedades de las topologías:

(A1) $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ por la definición de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Por **(B1)**, tenemos también que $X \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

(A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$ y sea $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ por lo que $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ (si la intersección es vacía es trivial). Consideramos $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_1 \subset U$ y $x_\in B_2 \subset U_2$ por tanto $x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por **(B2)**, existe un $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$ por lo que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Con esto queda probado que es una topología. Tendremos que ver ahora que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Para ello empiezo viendo que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Por la segunda defición de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, esto es evidente. Como verifica las hipótesis del Teorema 1.7, es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Veamos ahora la unicidad. Sea $(X, \mathcal{T}')$ un e.t. con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}'$. Tendré que ver que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Sea $\emptyset \neq U \subset X \Rightarrow U \in \mathcal{T}' \iff \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in \mathcal{B} \subset U \iff U \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ ya que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}'$.

Nos queda ver que es la menos fina conteniendo a $\mathcal{B}$. Para ello, sea $(X, \mathcal{T}')$ un e.t. tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces por **(A2)** tenemos que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}'$, lo cual es equivalente a decir que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{T}'$.

□

Ejemplo.

- •) Si $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a\}\}$ no es base de ninguna topología en X (ya que no cumple **(B1)**).
- •) Si $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Esta base verifica **(B1)** pero no **(B2)** (tomando $x = b$ se ve facilmente).
- •) Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] : a < b\}$. Si tomamos dos intervalos $[0, 1] \cap [1, 2]$, su intersección es $\{1\}$ y por tanto no verifica **(B2)** (tomando $x = 1$).
- •) Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] : a \leqslant b\}$ es base de una topología, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $\mathbb{R}$. Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{disc}$.

□

Proposición 1.8. Sean $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías en X con bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Equivalen:

(i) $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

(ii) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \quad x \in B_1, \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $x \in B_2 \subset B_1$.

Demostración.

(i)⇒(ii) Sea $B \in \mathcal{B}_1$. Por (i), $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ y como $\mathcal{B}_2$ es base de $\mathcal{T}_2$, aplicando la definición de base tengo que $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $x \in B_2 \subset B_1$.

(ii)⇒ (i) Por (ii) tenemos que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$ (por el Teorema 1.7) y entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$.

□

Ejemplo.

- •) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- •) Ejercicios 1 y 2 de la relación.

□

Proposición 1.9. Sean $X \neq \emptyset$ y $S \subset \mathcal{P}(X)$, $S \neq \emptyset$, Entonces,

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \bigcap_{i \in I} S_i : I \text{ finito}, \ S_i \in S \quad \forall i \in I \right\}$$

Es base de una única topología $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\mathcal{B}(S))$ en X. A esta topología la llamaremos la **topología generada** por S y es la topología menos fina que contiene a S, es decir, si $(X, \mathcal{T}')$ es un e.t. y $S \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}(S) \leqslant \mathcal{T}'$.

Decimos que S es una **subbase** de $\mathcal{T}(S)$.

Demostración. Tendremos que comprobar **(B1)** y **(B2)** y que es la menos fina. □

Ejemplo.

- •) Toda base $(X, \mathcal{T})$ es subbase de $(X, \mathcal{T})$.
- •) $S = \{X\}$ es subbase de $\mathcal{T}_t$.
- •) En $\mathbb{R}$, $S = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ es subbase de $\mathcal{T}_u$.

□

1.5. Entornos

Definición 1.11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $x \in X$. Diremos que un conjunto $N \subset X$ es un **entorno** de x si $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$.

Denotamos $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : N \text{ es entorno de } x\}$ y lo llamamos **sistema de entornos** del punto x en $(X, \mathcal{T})$.

□

Ejemplo.

- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $[0, 1) \in \mathcal{N}_x$ para todo $x \in (0, 1)$, pero no es entorno de 0 ni de 1.

□

Observación.

- •) $X \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in X \Rightarrow \mathcal{N}_x \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.
- •) Si $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{N}_x$
- •) Puede ocurrir que exista $N \subset \mathcal{N}_x$ con $N \notin \mathcal{T}$.

□

Proposición 1.10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $U \subset X$. Equivalen:

(i) $U \in \mathcal{T}$.

(ii) $U \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in U$.

Demostración.

(i)⇒ (ii) Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in U$

(ii)⇒ (i) $\forall x \in U \quad \exists U_x \in \mathcal{T}$ con $x \in U_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$, $\mathcal{N}_x = \{X\} \quad \forall x \in X$.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x \in N\}$
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x_0, x \in N\}$
- •) $(X, d), \mathcal{N}_x = \{N \subset X : \exists \varepsilon > 0 \text{ con } B(x, r) \subset N\}$. En particular, $\overline{B}(x, r) \in \mathcal{N}_x$.

□

Proposición 1.11. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$. Entonces:

(N1) $\mathcal{N}_x \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

(N2) Si $N \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in N$.

(N3) Si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset N'$, entonces $N' \in \mathcal{N}_x$.

(N4) Si $N, N' \in \mathcal{N}_x$, entonces $N \cap N' \in \mathcal{N}_x$.

(N5) Si $N \in \mathcal{N}_x$, entonces $\exists N' \in \mathcal{N}_x$ con $N' \subset N$ y $N \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in N'$.

Demostración.

(N5) $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Tomamos $U = N'$ y se verifica que $x \in U \in \mathcal{N}_x$. Además $U \subset N$ y tendré que ver que $N \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$. Como $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U \overset{\textbf{(N3)}}{\Rightarrow} N \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$.

□

Proposición 1.12. (Hausdorff, 1914) Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y supongamos que tenemos $\forall x \in X$ una familia $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo **(N1)**,...,**(N5)**. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X cuyos sistemas de entornos $\mathcal{N}_x$ coinciden con $\mathcal{M}_x$ $\forall x \in X$ (es decir, $\mathcal{N}_x = \mathcal{M}_x \;\; \forall x \in X$).

Además, $\mathcal{T} = \{U \subset X : U \in \mathcal{M}_x \;\; \forall x \in U\} \cup \{\emptyset\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathcal{T}$ es una topología, comprobando que verifica **(A1)**, **(A2)**, **(A3)**. Esto se deja planteado como ejercicio para el lector.

Veamos que esa topología es única. Para ello supongamos que $\exists \mathcal{T}'$ con $\mathcal{N}'_x = \mathcal{M}_x (= \mathcal{N}_x)$. Tenemos que $U \in \mathcal{T}' \iff U \in \mathcal{N}'_x = \mathcal{N}_x \;\; \forall x \in U \iff U \in \mathcal{T}$.

Nos queda probar que $\mathcal{N}_x = \mathcal{M}_x \;\; \forall x \in X$. Sea $x \in X$. Veamos la doble inclusión:

$\subseteq$) $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Por la definición de $\mathcal{T}$, $U \in \mathcal{M}_x$.

$\supseteq$) Sea $N \in \mathcal{M}_x$. Tendremos que comprobar que $N \in \mathcal{N}_x$. Esto ocurrirá si $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N$. Definimos $U = \{y \in N : N \in \mathcal{M}_y\}$. Veamos que este conjunto verifica lo que buscamos. Comencemos viendo que $x \in U$. Es claro que $N \in \mathcal{M}_x$ (por hipótesis) y además, por **(N2)** tenemos que $x \in N$, luego $x \in U$. Veamos ahora que $U \subset N$, lo cual es claro por la definición de U. Por último tendré que ver que $U \in \mathcal{T}$ lo cual equivale a ver que $U \in \mathcal{M}_y$ $\forall y \in U$. Para ello tomo $y \in U$. Tendremos que ver que $U \in \mathcal{M}_y$. Como $y \in U \Rightarrow y \in N \in \mathcal{M}_y \overset{\textbf{(N5)}}{\Rightarrow} \exists N' \in \mathcal{M}_y$ con $N' \subset N$ y $N \in \mathcal{M}_z \;\; \forall z \in N' \overset{\textbf{(N2)}}{\Rightarrow} y \in N' \subset U \overset{\textbf{(N3)}}{\Rightarrow} U \in \mathcal{M}_y$.

□

1.5.1. Bases de Entornos

Definición 1.12. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. y $x \in X$,. Entonces una **base de entornos** de x en $\mathcal{T}$ es una familia de entornos, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que $\forall N \in \mathcal{N}_x \;\; \exists V \in \mathcal{B}_x$ con $x \in V \subset N$.

A los elementos de $\mathcal{B}_x$ se les llama **entornos básicos**.

□

Observación.

- •) Si $\mathcal{B}_x$ es b.d.e[4]. entonces $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : \exists V \in \mathcal{B}_x \text{ con } V \subset N\}$.
- •) $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$.
- •) $\mathcal{N}_x$ es una b.d.e. de x.
- •) $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \mathcal{T} = \{U \subset \mathcal{T} : x \in U\}$ es también una b.d.e. de x.

[4]Notaremos así a las bases de entornos

- •) Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}\cap\mathcal{N}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una b.d.e. de x

  Demostración. Sea $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U \subset N$. □

- •) En general, no todo entoorno de un punto es unión de entornos básico. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $x = 0$, $\mathcal{B}_x = \{(a, b) : a < x < b\}$ es una b.d.e. de x. Tomamos $[-1, 1) \in \mathcal{N}_x$ (es entorno de $x = 0$) pero no es unión de elementos de $\mathcal{B}_x$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_u)$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{X\}$ es la única b.d.e de x posible.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es una b.d.e de x (la más "económica").
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{\{x, x_0\}\}$ es b.d.e de x (la más "económica").
- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ es una b.d.e de x. $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k \text{ par}\}$ también son bases de entornos de x (cada una más económica que la anterior).

□

Proposición 1.13. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $\mathcal{B}_x$ una b.d.e. de x $\forall x \in X$ y $U \subset X$. Equivalen:

(i) $U \in \mathcal{T}$.

(ii) $\forall x \in U$ $\exists V = V_x \in \mathcal{B}_x$ con $V_x \subset U$.

Demostración.

(i) ⇒ (ii) Como $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{N}_x$ $\forall x \in U$. Por tanto, $\forall x \in U$, $\exists V_x \in \mathcal{B}_x$ con $V_x \subset U$.

(ii) ⇒ (i) Por la hipótesis tenemos que $U \in \mathcal{N}_x$ $\forall x \in U$ por lo que $U \in \mathcal{T}$ (por la Proposición 1.11)

□

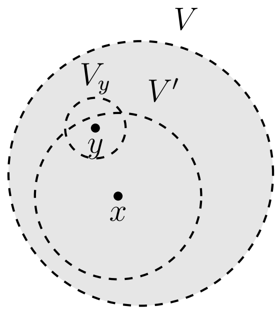
Proposición 1.14. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y $\mathcal{B}_x$ una b.d.e de x $\forall x \in X$. Entonces:

(V1) $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$.

(V2) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.

(V3) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces $\exists V_3 \in \mathcal{B}_x$ con $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. (En general, la intersección de dos abiertos básicos no tiene por qué ser abierto básico pero sí contener a uno).

(V4) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $\exists V' \in \mathcal{B}_x$ con $V' \subset V$ tal que $\forall y \in V'$ $\exists V_y \in \mathcal{B}_y$ con $V_y \subset V$.



Demostración.

(V4) $V \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$, entonces, por **(N5)** $\exists N' \in \mathcal{N}_x$ con $N' \subset V$ tal que $V \in \mathcal{N}_y$ $\forall y \in N'$. Como $\mathcal{B}_x$ es b.d.e, $\exists V' \in \mathcal{B}_x$ con $V' \subset N' \subset V$.

Sea $y \in V' \subset N' \Rightarrow V \in \mathcal{N}_y$. Como $\mathcal{B}_y$ es b.d.e, $\exists V_y \in \mathcal{B}_y$ con $V_y \subset V$.

□

Proposición 1.15. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y supongamos que $\forall x \in X$ tenemos una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo **(V1)**, ..., **(V4)**. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{B}_x$ es b.d.e de x en $(X, \mathcal{T})$ $\forall x \in X$.

Además, $\mathcal{T}$ es la única topología con $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : \exists V = V_x \in \mathcal{B}_x \text{ con } V_x \subset N\}$ $\forall x \in X$.

Demostración. Tengo que comprobar que $\mathcal{N}_x$ cumplen **(N1)**,..., **(N5)** usando que $\mathcal{B}_x$ cumplen **(V1)**, ..., **(V4)**. La demostración se deja propuesta como ejercicio para el lector. □

Ejercicio 1.5.1. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y $\mathcal{B}_x$ b.d.e de x en $(X, \mathcal{T})$ $\forall x \in X$. Si V es entorno de x en $\mathcal{T}'$ $\forall V \in \mathcal{B}_x$, entonces $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$.

□

1.6. Puntos adherentes. Clausura

Definición 1.13. Sean $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X$, $x \in X$. Diremos que x es **adherente** de A si $A \cap N \neq \emptyset$ $\forall N \in \mathcal{N}_x$, es decir, si cada entorno del punto interseca al conjunto. Esto no implica que $x \in A$. Podemos distinguir dos tipos:

- **•)** Decimos que un punto adherente x es de **acumulación** de A si $A \cap (N \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ $\forall N \in \mathcal{N}_x$ (Esto no implica que $x \in A$).

- **•)** Decimos que un punto adherente x es **aislado** de A si existe un entorno $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $A \cap N = \{x\}$ (Esto sí implica que $x \in A$).

□

Proposición 1.16. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X, x \in X$. Equivalen:

(i) x es adherente a A.

(ii) $A \cap U \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$.

(iii) $A \cap B \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, donde $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

(iv) $A \cap V \neq \emptyset \quad \forall V \in \mathcal{B}_x$ con $\mathcal{B}_x$ base de entornos de x.

Demostración.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset V$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U \subset V$. Por hipótesis, $B \cap A \neq \emptyset$, por lo que $V \cap A \neq \emptyset$

(iv)$\Rightarrow$(i) Sea $N \in \mathcal{N}_x$. Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x, entonces $\exists V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subset N$. Por hipótesis, $A \cap V \neq \emptyset \Rightarrow A \cap N \neq \emptyset$ por lo que x es adherente a A.

$\square$

Observación. Los puntos de acumulación y los puntos aislados admiten una caracterización análoga.

$\square$

Definición 1.14. Sea $(X, \mathcal{T})$, $A \subset X$. Se define la **adherencia** (**clausura** o **cierre**) de A como $\overline{A} = cl(A) = \{x \in X : x \text{ es adherente de } A\}$.

$\square$

Ejemplo.

- •) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- •) $A \subset \overline{A}$. Para verlo puedo tomar $x \in A, N \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in N \Rightarrow x \in N \cap A \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A}$.
- •) $\overline{X} = X$.
- •) Sea (X, d) e.m. y tomamos $A \subset X, x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$.

$\square$

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$

- •) $A = (0,1) \Rightarrow \overline{A} = [0,1]$ y todos los puntos son de acumulación.
- •) $A = (0,1) \cup \{2\} \Rightarrow [0,1] \cup \{2\}$. Además x es de acumulación $\forall x \in [0,1]$ y $x = 2$ es aislado (ya que puedo considerar $N = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \mathcal{N}_2$ y $N \cap A = \{2\}$).

$\square$

Proposición 1.17. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $A \subset X$. Entonces:

(i) $\overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(ii) Si $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y $A \subset C$, entonces $\overline{A} \subset C$, es decir, la adherencia es el cerrado más pequeño que contiene a A.

(iii) $A = \overline{A} \iff A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

Demostración.

(i) Supongamos que $\overline{A} = X$. Entonces $\overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Supongamos ahora el caso $\overline{A} \neq X \Rightarrow X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. Tendré que ver si $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$. Para ello tomo $x \in X \setminus \overline{A}$ y como $x \notin \overline{A}$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$, $U \cap A = \emptyset$, luego $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Esto quiere decir que $x \in U \in X \setminus \overline{A}$ y entonces $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in X \setminus \overline{A}$ por lo que $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$

(ii) (Por reducción al absurdo) Supongamos $\overline{A} \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$ y considero $x \in \overline{A} \cap (X \setminus C)$, entonces, como $(X \setminus C) \in \mathcal{T}$ tengo $x \in (X \setminus C) \in \mathcal{T}$ y como $x \in \overline{A}$, entonces $(X \setminus C) \cap A \neq \emptyset$, pero como teníamos que $A \subset C$ llegamos a contradicción

(iii) $\Rightarrow$) $A = \overline{A} \overset{(i)}{\Rightarrow} A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

$\Leftarrow$) Tengo que $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y $A \subset A$ (trivialmente) $\overset{(ii)}{\Rightarrow} \overline{A} \subset A$ y como $A \subset \overline{A}$ (por lo visto anteriormente), se da la doble inclusión y tenemos que $A = \overline{A}$.

□

Ejemplo. (Ejercicio 23 de la Relación 1)

a) $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$, $\#A \geqslant 2 \Rightarrow \overline{A} = X$ ya que $X \cap A = A \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

b) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X \Rightarrow \overline{A} = A$ ya que $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \quad \forall A \subset X$. Además, todos los puntos son aislados ya que $\forall x \in \overline{A} \quad \exists \{x\} \in \mathcal{N}_x$, $A \cap \{x\} = \{x\}$.

c) $(X, \mathcal{T}_{CF})$, $A \subset X$ infinito, entonces $\overline{A} = A$ (ya que al ser A finito es cerrado). Además, todos los puntos serán aislados, ya que $\forall a \in A$ puedo considerar $U = (X \setminus A) \cup \{a\} \in \mathcal{N}_a$ y $U \cap A = \{a\}$.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (una base de $\mathcal{T}_S$ es $\{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$).

$A = (0,1] \Rightarrow \overline{A} = [0,1]$. Además x es de acumulación $\forall x \in [0,1)$ y $x = 1$ es aislado.

$A = (0,1) \Rightarrow \overline{A} = [0,1)$ (ya que puedo considerar $N = [1,2) \in \mathcal{N}_1$ y $N \cap A = \emptyset$ luego $1 \notin \overline{A}$).

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$. Esto no es cierto en todo espacio métrico.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\overline{(a,b)} = [a,b] = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b)}$. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

□

Definición 1.15. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X$, A se dice **denso** si $\overline{A} = X$. El espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice **separable** si $\exists A \subset X$ denso y numerable.

$\square$

Ejemplo.

•) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es separable $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^n$.

•) $A \subset X$ denso $\iff$ $A \cap B \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B}$ con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$.

$\square$

Proposición 1.18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A, B \subset X$. Entonces:

(i) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(ii) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (la otra inclusión no se verifica en general, por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, los conjuntos $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$)

Demostración.

(i) $\overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ luego $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(ii) $A \subset B \subset \overline{B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) $\subset$) $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\supset$)
$$\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

(iv)
$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \subset \overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ A \cap B \subset B \subset \overline{B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

$\square$

1.7. Interior

Definición 1.16. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t, $A \subset X$, $x \in X$ se dice **interior** de A si $A \in \mathcal{N}_x$. Denotamos $A^\circ = int(A) = \{x \in A : x \text{ es interior de } A\}$ y lo llamamos **interior** de A.

$\square$

Ejemplo.

•) $X^\circ = X$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

•) $(X, \mathcal{T}_d)$, $x \in A^\circ \iff \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $A = (0,1)$, $B = [0,1) \cup \{2\} \Rightarrow A^\circ = A$, $B^\circ = A$

Propiedades. $(X, \mathcal{T})$ un e.t, $A \subset X$. Entonces:

(i) $A^\circ \subset A$ y $A^\circ \in \mathcal{T}$.

(ii) Si $U \subset \mathcal{T}$ y $U \subset A$, entonces $U \subset A^\circ$ (A° es el mayor abierto contenido en A).

(iii) $A \in \mathcal{T} \iff A = A^\circ$.

Demostración.

(i) $A^\circ \subset A$ trivial porque $A \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in A^\circ$. $x \in A^\circ$, tendremos que ver que $A^\circ \in \mathcal{N}_x$. Sabemos que $A \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$, $U \subset A$. TEndremos que ver entonces si $U \subset A^\circ$. Como $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$ y como $U \subset A$, entonces $A \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$ luego tenemos que $U \in A^\circ$

(ii) $U \in \mathcal{T}$, $U \subset A$ y podemos comprobar que $U \subset A^\circ$ (Igual que antes).

(iii) $\Rightarrow$) $A \in \mathcal{T}$, $A \subset A$, luego por (ii) $A \subset A^\circ$ y por (i) $A = A^\circ$.

$\Leftarrow$) Por (i), $A = A^\circ \in \mathcal{T}$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$, $A \neq X \Rightarrow A^\circ = \emptyset$.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X \Rightarrow A^\circ = A$.
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $A \subset X \Rightarrow A^\circ = \begin{cases} A & \text{si} \quad x_0 \in A \\ \emptyset & \text{si} \quad x_0 \notin A \end{cases}$
- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $(\overline{B}(x,r))^\circ = B(x,r) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Esto no es cierto en cualquier espacio métrico.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $[a,b]^\circ = (a,b) = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)^\circ$.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ$.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Sorgenfrey})$, $[0,1)^\circ = [0,1) = [0,1]^\circ$, $(0,1]^\circ = (0,1)$.

□

Proposición 1.19. Sea $(X, \mathcal{T})$, $A \subset X$. Se tienen:

(i) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(ii) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Demostración.

(i) $\subset$) $A \subset \overline{A} \Rightarrow X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A \Rightarrow X \setminus \overline{A} \subset (X \setminus A)^\circ$.

$\supset$) Sabemos que $(X\setminus A)^\circ \subset X\setminus A \Rightarrow A \subset X\setminus(X\setminus A)^\circ$ y como $X\setminus(X\setminus A)^\circ \in \mathcal{C}_\mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \subset X \setminus (X \setminus A)^\circ \Rightarrow (X \setminus A)^\circ \subset X \setminus \overline{A}$.

(ii) $A = X \setminus A \Rightarrow X \setminus \overline{(X \setminus A)} = A^\circ \Rightarrow \overline{A \setminus A} = X \setminus A^\circ$.

□

Definición 1.17. Sea $(X, \mathcal{T})$, $A \subset X$, se llama **exterior** de A al conjunto $A^e = ext(A) = (X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.

□

1.8. Frontera

Definición 1.18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X$, $x \in X$. Se dice que x es **frontera** de A si $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Se denomina **frontera** de A al conjunto $\partial A = fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \{x \in X : x \text{ es frontera de } A\}$.

□

Proposición 1.20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t, $A \subset X$. Se tienen:

(i) $\partial A = \overline{A}\setminus A^\circ$. Esto se ve sabiendo que $\partial A = \overline{A}\cap(\overline{X \setminus A}) = \overline{A}\setminus(X\setminus A^\circ) = \overline{A}\setminus A^\circ$.

(ii) $\partial A \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ (ya que es intersección de 2 conjuntos cerrados).

(iii) $\partial A = \partial(X \setminus A)$. Esto es porque $\partial(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A}$.

(iv) $\overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A$ (unión disjunta). Esto es porque $\overline{A} = A^\circ \sqcup (\overline{A} \setminus A^\circ)$.

(v) $A^\circ = A \setminus \partial A$.

(vi) $X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup A^e$.

(vii) $A \in \mathcal{C}_\mathcal{T} \iff \partial A \subset A$. (trivial con definiciones)

(viii) $A \in \mathcal{T} \iff \partial A = \emptyset$.

(ix) $A \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{C}_\mathcal{T}) \iff \partial A = \emptyset$.

(x) $\partial(A \cup B) \subset (\partial A \cup \partial B)$

□

Ejemplo.

- $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X \Rightarrow \partial A = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad A \in \{X, \emptyset\} \\ X & \text{si} \quad A \notin \{X, \emptyset\} \end{cases}$
- $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X \Rightarrow \partial A = \emptyset$.
- $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $A \subset X \Rightarrow \partial A = \begin{cases} X \setminus A & \text{si} \quad x_0 \in A \\ A & \text{si} \quad x_0 \notin A \end{cases}$
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\partial B(x,r) = \partial \overline{B}(x,r) = S(x,r)$.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\partial[a,b] = \{a,b\} = \partial(a,b) = \partial[a,b) = \partial(a,b]$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

□

1.9. Topología inducida. Subespacio topológico

Proposición 1.21. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ un conjunto. Entonces el conjunto

$$\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{|A} = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{P}(A)$$

es una topología en A por lo que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un e.t.

Demostración. Para demostrarlo tendremos que ver que $\mathcal{T}_A$ es una topología, es decir que verifica las propiedades:

(A1) Sabemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$ y como $\emptyset \cap A = \emptyset$ entonces $\emptyset \in \mathcal{T}_A$. Análogamente, $X \in \mathcal{T}$ y $X \cap A = A$ por lo que $A \in \mathcal{T}_A$.

(A2) Sea $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_A$. Tendremos que comprobar que $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}_A$. Para ello sabemos que para cada $i \in I$ se verifica que $O_i = U_i \cap A$ donde $U_i \in \mathcal{T}$. Tenemos entonces

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = (\overbrace{\bigcup_{i \in I} U_i}^{\in \mathcal{T}}) \cap A \in \mathcal{T}_A$$

(A3) Sean $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_A$, tendremos que ver que $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_A$. Para ello sabemos que

$$O_1 = U_1 \cap A \qquad O_2 = U_2 \cap A \qquad U_1, U_2 \in \mathcal{T}$$

Por tanto, $O_1 \cap O_2 = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = (U_1 \cap U_2) \in A \in \mathcal{T}_A$ ya que $(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{T}$.

□

Definición 1.19. Diremos que $\mathcal{T}_A$ es la **topología inducida** por $\mathcal{T}$ sobre A, y que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un **subespacio topológico** de $(X, \mathcal{T})$. De un conjunto $O \in \mathcal{T}_A$ diremos que es **abierto** en A.

□

Observación.

- •) Sea $O \subset A$, entonces $O \in \mathcal{T} A \iff \exists U \in \mathcal{T}$ con $O = U \cap A$.
- •) Sea $O \subset A$, entonces $O \in \mathcal{T} \Rightarrow O \in \mathcal{T}_A$ (ya que $O = O \cap A$). El recíproco no es cierto ya que no todo abierto de un subespacio tiene que ser abierto en el espacio. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ consideramos $A = [0, 3)$, entonces $[0, 1) \in \mathcal{T}_A$ pero $[0, 1) \notin \mathcal{T}_u$ (podemos considerar $[0, 1) = (-1, 1) \cap A$).

□

Proposición 1.22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$. Se tienen:

(i) $C \subset A$ es cerrado en A ($C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_A}$) $\iff \exists C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ con $C = C' \cap A$.

(ii) $N \subset A$ es entorno de a en A ($N \in \mathcal{N}_a^{\mathcal{T}_A}$) $\iff \exists N' \in \mathcal{N}_a^{\mathcal{T}}$ con $N = N' \cap A$.

(iii) Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_A$.

(iv) Si $\mathcal{B}_a$ es b.d.e. de a en $(X, \mathcal{T})$, entonces $(\mathcal{B}_A)_a = \{V \cap A : V \in \mathcal{B}_a\}$ es b.d.e. de a en $(A, \mathcal{T}_A)$.

(v) $E \subset A \Rightarrow \overline{E}^A = \overline{E} \cap A$.

(vi) $E \subset A \Rightarrow E^{\circ A} \supset E^\circ \cap A$. La otra inclusión no es cierta en general. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ consideramos $A = [0, 2)$ y $E = [0, 1)$. Entonces tenemos que $E^{\circ A} = E$ pero $E^\circ \cap A = (0, 1)$.

(vii) $E \subset A \Rightarrow fr_A(E) \subset fr(E) \cap A$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$) $C \subset A$ cerrado en $A \Rightarrow A \setminus C \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $A \setminus C = U \cap A \Rightarrow C = A \setminus (A \cap A) = A \cap (X \setminus U)$, donde $X \setminus U$ es cerrado por lo que puedo tomar $C' = X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y se tiene lo buscado.

$\Leftarrow$) Sea $C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Tendremos que ver que $C = C' \cap A$ es cerrado en A, lo cual equivale a ver que $A \setminus C \in \mathcal{T}_A$. Tenemos que $A \setminus C = A \setminus (C' \cap A) = A \cap (X \setminus C') \in \mathcal{T}_A$, ya que $X \setminus C'$ es abierto en $\mathcal{T}$.

(ii) $\Rightarrow$) Sea N un entorno de a en A. Entonces existe un $U \in \mathcal{T}_A$ con $a \in U \subset N$ lo cual implica que $\exists U' \in \mathcal{T}$ con $U = U' \cap A$. Tomamos $N' = U' \cup N \in \mathcal{N}_a$. Tenemos que $N' \cap A = (U' \cup N) \cap A = (U' \cap A) \cup (N \cap A) = U$.

(iii) Para ver que se verifica tendremos que probar la doble inclusión:

$\supset$) $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{T}_A$ y se verifica.

$\subset$) Sea $O \in \mathcal{T}A$, $x \in O$. Entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in O = U \cap A$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U \Rightarrow x \in (B \cap A) \subset (U \cap A) = O$.

(iv) Análogo a (iii).

(v) De nuevo tendremos que ver la doble inclusión:

$\subset$) $E \subset (\overline{E} \cap A) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_A} \Rightarrow \overline{E}^A \subset (\overline{E} \cap A)$, ya que $\overline{E} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

$\supset$) Sea $a \in \overline{E} \cap A$ y N un entorno de a en A. Tendremos que ver si $N \cap N = \emptyset$. Para ello sabemos que $\exists N \in \mathcal{N}_a$ con $N = N' \cap A$ por lo que $N \cap E = N' \cap A \cap E = N' \cap E \neq \emptyset \Rightarrow a \in \overline{E}^A$.

$\square$

Ejemplo.

•) $(X, \mathcal{T}_t)$, $\emptyset \neq A \subset X$, $\mathcal{T}_{t_A} = \{\emptyset, A\} = \mathcal{T}_t$.

•) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X$, $\mathcal{T}_{disc_A} = \mathcal{T}_{disc}$.

- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{T}_{u_\mathbb{Z}} = \mathcal{T}_{disc}$, $\{p\} = (p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z}$. $\mathcal{T}_{u_\mathbb{N}} = \mathcal{T}_{disc}$.

- •) Ejercicio $\emptyset \neq A' \subset A \subset X$, $(\mathcal{T}_A)_{A'} = \mathcal{T}_{A'}$.

- •) $(X, \mathcal{T}_d)$, $\emptyset \neq A \subset X \Rightarrow d_A : A \times A \to [0, +\infty)$ tal que $(x, y) \mapsto d_A(x, y) = d(x, y)$. Entonces d_A es una distancia en A y $(A, \mathcal{T}_{d_A})$ es un espacio topológico y $\mathcal{T}_{d_A} = (\mathcal{T}_d)_A$. Todo subespacio de un e.t. metrizable es metrizable.

- •) $(X, \mathcal{T}_d)$, $\emptyset \neq A \subset X$ finito $\Rightarrow (\mathcal{T}_d)_A = \mathcal{T}_{disc}$ (ya que $\exists \varepsilon > 0 : d(x, y) > \varepsilon \;\; \forall x \neq y$ y tomando $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$ se verifica).

□

Definición 1.20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$, decimos que A es **discreto** si $\mathcal{T}_A$ es la topología discreta en A.

□

Definición 1.21. Una propiedad topológica se dice **hereditaria** si al cumplirla un e.t $(X, \mathcal{T})$ también la cumplen todos su subespacios, es decir, si $(X, \mathcal{T})$ cumple $P \Rightarrow (A, \mathcal{T}_A)$ cumple $P \;\; \forall A \subset X, A \neq \emptyset$.

□

Ejemplo.

- •) "Ser metrizable" es una propiedad hereditaria.

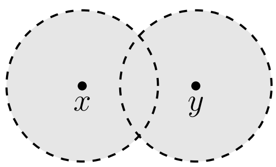
- •) "Tener la topología discreta" es hereditario (trivialmente).

□

1.10. Axiomas de separación

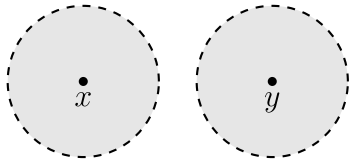
Definición 1.22. Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice:

- •) **(T1)** (o de **Fréchet**, o que satisface el **primer axioma de separación**) si $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$ con $y \notin V$, $x \notin W$.



  Esta definición se podría hacer análogamente con abiertos, abiertos básicos o entornos básicos.

- •) **(T2)** (o de **Haussforff**, o que satisface el **segundo axioma de separación**) si $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$ tal que $V \cap W = \emptyset$.



De nuevo esta definición se podría hacer con abiertos, abiertos básicos o entornos básicos.

□

Observación.

•) T2 ⇒ T1. Esto es claro ya que si un e.t $(X, \mathcal{T})$ es T2, entonces para $x, y \in X$, $x \neq y$ podemos encontrar $V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$ tal que $V \cap W = \emptyset$. En particular tenemos que $y \notin V$ y $x \notin W$ y por tanto es T1. El recíproco no es cierto (T2 es una propiedad más restrictiva que T1).

□

Proposición 1.23. T1 y T2 son propiedades hereditarias.

Demostración.

T1) Supongamos $(X, \mathcal{T})$ un e.t. T1 y $\emptyset \neq A \subset X$. Tendré que ver que $(X, \mathcal{T}_A)$ es T1. Sean $a, a' \in A$ con $a \neq a'$. Como $(X, \mathcal{T})$ es T1 tenemos que $\exists V \in \mathcal{N}_a$, $W \in \mathcal{N}_{a'}$, con $a \notin W$ y $a' \notin V$. Defino $V' = V \cap A \in \mathcal{N}_a^A$ y $W' = W \cap A \in \mathcal{N}_{a'}^A$ y tengo que $a \notin W'$ y $a' \notin V'$ por lo que $(X, \mathcal{T}_A)$ es T1.

T2) Supongamos $(X, \mathcal{T})$ un e.t. T2 y $\emptyset \neq A \subset X$. Tendré que ver que $(X, \mathcal{T}_A)$ es T2. Sean $a, a' \in A$ con $a \neq a'$. Como $(X, \mathcal{T})$ es T2 tenemos que $\exists V \in \mathcal{N}_a$, $W \in \mathcal{N}_{a'}$, con $V \cap W = \emptyset$. Defino $V' = V \cap A \in \mathcal{N}_a^A$ y $W' = W \cap A \in \mathcal{N}_{a'}^A$ y tengo que $V' \cap W' = (V \cap W) \cap A = \emptyset$ y tenemos lo buscado.

□

Ejemplo.

•) $(X, \mathcal{T}_t)$, con $\#X > 2$, no es T1 (ya que el único entorno de cualquier punto es X). (por ser no es ni T0, aunque este concepto no se va a trabajar en esta asignatura).

•) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es T2 (y por tanto T1). Para verlo puedo tomar $x \neq y$ y tengo $\{x\} \in \mathcal{N}_x$, $\{y\} \in \mathcal{N}_y$ y $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

•) $(X, \mathcal{T}_u)$ es T2 (ya se vio anteriormente) y por tanto T1.

•) Si X es un conjunto infinito, entonces $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es T1, pero no T2. Comprobémoslo:

T1) $x \neq y$, $x, y \in X$. Cojo $V = X \setminus \{y\} \in \mathcal{T}_{CF}$ y además $V \in \mathcal{N}_x$ con $y \notin V$. Repetimos el proceso para x y llegamos a lo mismo.

T2) (por reducción al absurdo) Supongamos $x \neq y$ y que existen $V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$ con $V \cap W = \emptyset$. Entonces $X \setminus (V \cap W) = X = (X \setminus V) \cup (X \setminus W)$ que es finito por ser unión de conjuntos finitos, pero X es infinito por lo que llegamos a contradicción.

$\square$

Proposición 1.24. (Caracterización de T1) Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ es T1 $\iff$ $\{x\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ $\forall x \in X$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos $(X, \mathcal{T})$ un e.t. T1, $x \in X$, tendré que ver que $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Veámoslo por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que $\exists y \in X$, $y \in \overline{\{x\}}$ y $y \neq x \Rightarrow x \in N \quad \forall N \in \mathcal{N}_y$. Esto contradice que $(X, \mathcal{T})$ sea T1.

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tomo $V = X \setminus \{y\} \in \mathcal{T}$ (por hipótesis, al ser complementario de cerrado). Además como $x \in V$, tenemos $V \in \mathcal{N}_x$ y además $y \notin V$. Repetimos este razonamiento para y y tenemos que $(S, \mathcal{T})$ es T1.

$\square$

Ejercicio 1.10.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. T2 y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente, entonces tiene un único límite.

$\square$

1.11. Axiomas de numerabilidad

Definición 1.23. Diremos que un e.t $(X, \mathcal{T})$ es

- **(1AN)** (o que cumple el **primer axioma de numerabilidad**) si todo punto de x tiene una base de entornos numerable.
- **(2AN)** (o que cumple el **segundo axioma de numerabilidad**) si existe una base de $\mathcal{T}$ numerable.

$\square$

Observación.

- $2AN \Rightarrow 1AN$ ya que si $\mathcal{B}$ es base numerable y $x \in X$ entonces $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una b.d.e de x numerable.
- Si $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una b.d.e de $x \in X$, entonces definiendo $W_n = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$, tenemos que $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es b.d.e de x y $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \ldots$. Es decir, para todo espacio 1AN podemos encontrar una base de entornos numerable y encajada.
- Las propiedades 1AN y 2AN son propiedades hereditarias.

Demostración.

2AN) Supongamos $(X, \mathcal{T})$ 2AN y sea $(A, \mathcal{T}_A)$ con $\emptyset \neq A \subset X$. Sabemos que existe $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$ numerable $\Rightarrow \mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_A$ y numerable.

1AN)

□

Ejemplo.

- •) Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t. y $\mathcal{T}$ es numerable, entonces $(X, \mathcal{T})$ es 2AN. En particular, $(X, \mathcal{T})$ es 2AN.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es 1AN ya que $\{\{x\}\}$ es b.d.e de x en $\mathcal{T}$. Si además X es numerable, entonces tengo que $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de $\mathcal{T}$ por lo que es 2AN. (es una condición suficiente y necesaria ya que dicha base es la más fina).
- •) $(X, \mathcal{T}_{CF})$, si X es numerable entonces tiene una cantidad numerable de subconjuntos finitos por lo que con esta condición, $\mathcal{T}_{CF}$ es numerable y por tanto 2AN (luego también 1AN). Si X no es nuerable, entonces no es 1AN (luego tampoco 2AN).

  Demostración. Veamos que si X no es numerable entonces no es 1AN. Hagámoslo por reducción al absurdo. Supongamos $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ b.d.e. de x. Entonces podemos escribir $V_n = X \setminus C_n$ con C_n finito. Entonces $C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es numerable y además $C \subset X$. Por tanto, $X \setminus C$ no es vacío y además tiene infinitos elementos por lo que puedo tomar un $y \in X \setminus C$ con $y \neq x$ y consideramos $X \setminus \{y\}$ que es abierto en $\mathcal{T}_{CF}$. Como $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es b.d.e. de x, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ con $x \in V_n \subset X \setminus \{y\} \Rightarrow \{y\} \subset C_n$ y llegammos a contradicción (ya que $V_n = X \setminus C_n$). □

- •) si X no es numerable, entonces $(X, \mathcal{T}_{CF})$ no es 1AN (misma demostración que el apartado anterior pero con finito en lugar de numerable) y por tanto tampoco es 2AN.
- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es 2AN (y 1AN). Esto es porque $\mathcal{B}\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ y es numerable.

□

Ejemplo. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la topología de Sorgenfrey

- •) Es 1AN: $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es b.d.e. de x.
- •) No es 2AN: para verlo tomo $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}_S$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x, x+1) \in \mathcal{T}_S$ y $x \in [x, x+1)$. Como $\mathcal{B}$ es base, entonces $\exists B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subset [x, x+1)$ y entonces x es el mínimo de $\mathcal{B}_x$. Esto quiere decir que $B_x \neq B_y$ para todo $x \neq y$. Entonces la familia $\{B_x : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}$ no es numerable por lo que $\mathcal{B}$ no es numerable.

Proposición 1.25. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. 2AN y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$, entonces existe una base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{T}$ con $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ con $\mathcal{B}'$ numerable. Es decir, de toda base puedo extraer una base numerable.

Esta proposición se usa para probar que un e.t. no es 2AN (utilizando el contrarrecíproco):

- **•)** $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ no es 2AN. $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_S$. Hagámoslo por reducción al absurdo. Si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ es 2AN, entonces $\exists \mathcal{B}' = \{[a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ base de $\mathcal{T}_S$. Entonces el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus A$, $x \in [x, x + 1) \in \mathcal{T}_S \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x \in [a_n, b_n) \subset [x, x + 1) \Rightarrow a_n = x$ y llegamos a contradicción.

$\square$

Proposición 1.26. Si $(X, \mathcal{T})$ es 2AN, entonces de todo recubrimiento[5] por abiertos[6] de X se puede extraer un subrecubrimiento numerable, es decir,

$$\text{si } X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ con } U_i \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I \Rightarrow \exists J \subset I \text{ numerable tal que } X = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

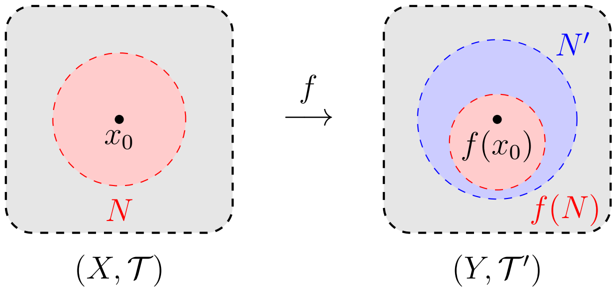
$\square$

[5]Un recubimiento de un conjunto X es una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, es decir, es como una partición de X pero cuyos elementos no tienen por qué ser disjuntos 2 a 2.

[6]Un recubrimiento por abiertos de un e.t. $(X, \mathcal{T})$ es un recubrimiento cuyos elementos son abiertos en la topología, es decir, una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que $U_i \in \mathcal{T} \ \ \forall i \in I$ y $\bigcup_{i \in I} U_i = X$

2. Aplicaciones entre Espacios Topológicos

Definición 2.1. Dados $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t., diremos que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ (que notaremos como $f : X \to Y$ cuando estén claros los e.t.) es **continua** en un punto $x_0 \in X$ si $\forall N' \in \mathcal{N}'_{f(x_0)}$ existe un entorno $N \in \mathcal{N}_{x_0}$ con $f(N) \subset N'$.



Equivalentemente, $\forall N' \in \mathcal{N}'_{f(x_0)}$ se tiene que $f^{-1}(N') \in \mathcal{N}_{x_0}$. Es decir, la imagen inversa por f de todo entorno de $f(x_0)$ en el espacio topológico $\mathcal{T}'$ es entorno de x_0 en el espacio topológico $\mathcal{T}$.

$\square$

Observación. La definición se puede reformular usando abiertos, abiertos básicos o entornos básicos. La demostración queda planteada como ejercicio para el lector.

$\square$

Definición 2.2. Dados $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t., $\emptyset \neq A \subset X$. Diremos que $f : X \to Y$ es **continua en** A si es continua en x, $\forall x \in A$. Diremos que f es **continua** si es continua en X.

$\square$

Proposición 2.1. Dados $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t., $f : X \to Y$. Entonces son equivalentes:

(i) f es continua.

(ii) $f^{-1}(U') \in \mathcal{T} \;\; \forall U' \in \mathcal{T}$ (f trae abiertos en abiertos).

(iii) $f^{-1}(B') \in \mathcal{T} \;\; \forall B' \in \mathcal{B}'$, donde $\mathcal{B}'$ es base de $\mathcal{T}'$.

(iv) $f^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \;\; \forall C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$ (f trae cerrados en cerrados).

(v) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X$.

Demostración.

(i)⇒(ii)) Supongamos que f es continua. Tomamos $U' \in \mathcal{T}'$ y tendremos que verificar que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Sea $x \in f^{-1}(U')$, entonces tendré que ver que $f^{-1}(U') \in \mathcal{N}_x$. Sabemos que $f(x) \in U' \subset \mathcal{N}_{f(x)}$. Como f es continua, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$, $x \in U$, $f(U) \subset U' \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}(U')$. Como $U \in \mathcal{T}$, tenemos que $f^{-1}(U') \in \mathcal{N}_x$. Como esto sucede para un x arbitrario tendremos que se verifica.

(ii)⇒(iii)) Esta implicación es trivial ya que todo abierto básico es en particular abierto en la topología.

(iii)⇒(iv)) Sea $C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$, $C' \subset Y$. Tendré que ver que $f^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, lo cual es equivalente a ver que $X \setminus f^{-1}(C') \in \mathcal{T}$. Sabemos que $X \setminus f^{-1}(C') = f^{-1}(Y \setminus C')$ y $Y \setminus C' \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}'$ es base de $\mathcal{T}'$, tenemos que $Y \setminus C' = \bigcup\limits_{i \in I} B_i'$ con $B_i' \in \mathcal{B}'$ $\forall i \in I$. Entonces tenemos que $f^{-1}(Y \setminus C') = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i \in I} B_i'\right) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(B_i') \in \mathcal{T}$ por ser unión de abiertos.

(iv)⇒(v)) Sea $\emptyset \neq A \subset X$, como $\overline{f(A)} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$, por (iv) tenemos que $f^{-1}(\overline{f(A)}) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Además, $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Entonces $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Al aplicar f tenemos que $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) = \overline{f(A)}$.

(v)⇒(iv)) Sea $C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$ y tendremos que ver que $f^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Para ello veré que coincide con su adherencia, es decir, que $\overline{f^{-1}(C')} = f^{-1}(C')$. Como la inclusión $\overline{f^{-1}(C')} \supset f^{-1}(C')$ es clara tendré que ver solo la otra incusión. Sea $A = f^{-1}(C')$, por (v) tenemos que $f(\overline{f^{-1}(C')}) \subset \overline{f(f^{-1}(C'))} \subset \overline{C'} = C'$. Aplicando f^{-1} tenemos que $f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C')})) \subset f^{-1}(C')$ y como $f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C')})) = \overline{f^{-1}(C')}$ tenemos lo buscado.

(iv)⇒(i)) Sea $x \in X$ arbitrario. Tendré que ver que f es continua en x. Sea $U' \in \mathcal{T}'$ con $f(x) \in U'$. Tendré que ver que existe un $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$ y $f(U) \subset U'$. Tomo $Y \setminus (U') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$ y por (iv) tenemos que $f^{-1}(Y \setminus U') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y $f^{-1}(Y \setminus U') = X \setminus f^{-1}(U')$ por lo que $x \in f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Como $f(f^{-1}(U')) \subset U'$ puedo denotar $U = f^{-1}(U')$ y tenemos de nuevo lo buscado.

□

Observación. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es una aplicación continua, entonces

$$f^{-1}((a,b)), f^{-1}((-\infty, b)), f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{T}$$

y además

$$f^{-1}([a,b]), f^{-1}((-\infty, b]), f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$$

La utilidad de esta observación es poder ver si un conjunto es abierto viendo si existe una aplicación continua que lleve un abierto de la topología en dicho conjunto. Análogamente se puede usar para cerrados.

□

Ejemplo.

•) $f : (X, d) \to (Y, d')$ continua entre espacios métricos

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ tal que si } d(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(B(x_0, \delta)) \subset B'(f(x_0), \varepsilon).$$

□

Observación.

•) Cuanto más abiertos hay en $\mathcal{T}$ y menos en $\mathcal{T}'$ se puede decir que es "más fácil" que f sea continua. Por ejemplo, las aplicaciones

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_t)$$
$$f : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (Y, \mathcal{T}')$$

son continuas siempre.

•) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es constante, es decir, $f(x) = y_0 \in Y \quad \forall x \in X$, entonces para todo $U' \in \mathcal{T}$ se tiene

$$f^{-1}(U') = \begin{cases} X & \text{si} \quad y_0 \in U' \\ \emptyset & \text{si} \quad y_0 \notin U \end{cases}$$

y por tanto f es continua ya que $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

•) $Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es continua $\iff \mathcal{T}' \leqslant \mathcal{T}$. Por ejemplo,

$$Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$$

no es continua pero

$$Id_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$$

sí lo es.

•) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ son aplicaciones continuas, entonces $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es continua.

Demostración. Sea $U'' \in \mathcal{T}''$, $(g \circ f)^{-1}(U'') = f^{-1}(g^{-1}(U'')) \in \mathcal{T}$. □

•) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua y $\emptyset \neq A \subset X$, entonces

$$\begin{aligned} f|_A : (A, \mathcal{T}_A) &\to (Y, \mathcal{T}') \text{ es continua} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es decir, la restricción en el dominio de una función continua sigue siendo continua.

Demostración. Sea $U' \in \mathcal{T}'$, entonces

$$(f|_A)^{-1}(U') = \{x \in A : f(x) \in U\} = f^{-1}(U') \cap A \in \mathcal{T}_A$$

ya que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. □

•) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua, $\emptyset \neq A' \subset Y$ con $f(X) \subset A'$, entonces

$$\begin{aligned} f^{A'} : (X, \mathcal{T}) &\to (A', \mathcal{T}'_{A'}) \text{ es continua} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es decir, la restricción en el codominio de una función continua sigue siendo continua.

Demostración. Sea $O' \in \mathcal{T}'_{A'}$, entonces $\exists U' \in \mathcal{T}'$ tal que $O' = U' \cap A \Rightarrow (f^{A'})^{-1}(O') = (f^{A'})^{-1}(U' \cap A') = f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ ya que f es continua y U' es abierto en $\mathcal{T}'$.

□

Lema 2.2. (Lema de pegado) Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t. y sea $\{A_i\}_{i \in I} \subset X$ una familia de subconjuntos no vacía de X y $\{f_i : A_i \to Y\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones tales que

(i) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$.

(ii) $f_i = f_j$ en $A_i \cap A_j \quad \forall i, j \in I$ con $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

(iii) $f_i : (A_i, \mathcal{T}_{A_i}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua $\forall i \in I$.

(iv) Satisface alguna de las siguientes condiciones:

•) $A_i \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I$.

•) $A_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \quad \forall i \in I$ con I finito.

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} f : (X, \mathcal{T}) &\to (Y, \mathcal{T}') \\ x &\mapsto f_i(x) \text{ si } x \in A_i \end{aligned}$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Es claro que la aplicación f está bien definida por las condiciones (i) y (ii). Tendremos que ver su continuidad. Tendremos que distinguir dos casos según la condición (iv). Lo demostraremos para el segundo caso y el otro será análogo y se deja propuesto como ejercicio para el lector:

Supongamos I es finito y $A_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \quad \forall i \in I$. Sea $C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$, tendremos que ver que $f^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Tenemos que $f^{-1}(C') = X \cap f^{-1}(C') \overset{(i)}{=} \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i \right) \cap f^{-1}(C') = \bigcup\limits_{i \in I} (A_i \cap f^{-1}(C')) = \bigcup\limits_{i \in I} \{x \in A_i : f_i(x) \in C'\} = \bigcup\limits_{i \in I} f_i^{-1}(C')$. Como $f_i^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{A_i}}$ y además $A_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow f_i^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces por (iv) tenemos que $\bigcup\limits_{i \in I} f_i^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

□

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) = f_1(x) & \text{si} \quad x \in (-\infty, 0] = A_1 \\ x^2(x-1) = f_2(x) & \text{si} \quad x \in [0,1] = A_2 \\ -\ln(x) = f_3(x) & \text{si} \quad x \in [1, +\infty) = A_3 \end{cases}$$

Entonces $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es continua.

□

2.1. Aplicaciones abiertas y cerradas

Definición 2.3. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diremos que es

- **abierta** si lleva abiertos de $\mathcal{T}$ en abiertos de $\mathcal{T}'$, es decir,

$$f(U) \in \mathcal{T}', \quad \forall U \in \mathcal{T}$$

- **cerrada** si lleva cerrados de $\mathcal{T}$ en cerrados de $\mathcal{T}'$, es decir,

$$f(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}, \quad \forall C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$$

□

Observación. Ser continua, abierta y cerrada son propiedades independientes (se puede ser una sin ser ninguna de las otras dos).

□

Proposición 2.3. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T})$ es una aplicación, entonces equivalen:

(i) f es abierta.

(ii) $f(B) \in \mathcal{T}' \quad \forall B \in \mathcal{B}$ con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$.

(iii) Si $x \in X$, $N \in \mathcal{N}_x$, entonces $f(N) \in \mathcal{N}'_{f(x)}$.

(iv) Si $A \subset X$, entonces $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$.

Demostración.

(i)⇒(ii)) Trivial.

(ii)⇒(iii)) Trivial.

(iii)⇒(iv)) Sea $x \in A^\circ$, tendremos que ver que $f(x) \in (f(A))^\circ$. Como $x \in A^\circ$, entonces $A \in \mathcal{N}_x$ y por (iii) tenemos que $f(A) \in \mathcal{N}'_{f(x)}$ por lo que $f(x) \in (f(A))^\circ$.

(iv)⇒(i)) $U \in \mathcal{T}$ por lo que $U = U^\circ$. Entonces $f(U) = f(U^\circ)$ y por (iv) tenemos que $f(U^\circ) \subset (f(U))^\circ$ y como la otra inclusión se da siempre tenemos que $f(U) = (f(U))^\circ \in \mathcal{T}$.

□

Proposición 2.4. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T})$ es una aplicación, entonces equivalen:

(i) f es cerrada.

(ii) $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) \quad \forall A \subset X$.

Demostración.

(i)⇒(ii)) $\overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow f(A) \subset f(\overline{A}) \Rightarrow \overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})}$ y como f es cerrada, tenemos que $\overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$ y por tanto $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

(ii)⇒(i)) $\overline{C} = C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, por (ii) tenemos que $\overline{f(C)} \subset f(\overline{C}) = f(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$.

□

Ejemplo.

- Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es "más fácil" que sea abierta y/o cerrada cuanto menos abiertos haya en $\mathcal{T}$ y más en $\mathcal{T}'$ (no es riguroso pero es una buena intuición). Por ejemplo, $f(X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_{disc})$ es abierta y cerrada. La aplicación $f : (X, \mathcal{T}_t) \to (Y, \mathcal{T})$ es abierta si y solo si $f(X) \in \mathcal{T}'$ y es cerrada si y solo si $f(X) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$.

- $Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es abierta si y solo si $T \leqslant \mathcal{T}'$ y es cerrada si y solo si $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$ (lo cual es equivalente a que sea abierta).

- Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es constante, con $f(x) = y_0 \in Y \quad \forall x \in X$, entonces f es abierta si y solo si $\{y_0\} \in \mathcal{T}'$ y es cerrada si y solo si $\{y_0\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$. En particular, $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ constante es continua, cerrada pero no es abierta.

- Sean $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$, entonces si f y g son abiertas, entonces $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es abierta ya que $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \in \mathcal{T}''$. Análogamente, si f y g son cerradas, entonces la composición $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es cerrada.

- Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta y $\emptyset \neq A \subset X$, entonces si A es abierto se tiene que $f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta. Análogamente, si A es cerrado se tiene que $f|_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ es cerrada.

  Demostración. Supongamos que f es abierta y $A \in \mathcal{T}$ y tendremos que ver que $f|_A$ es abierta. Sea $O \in \mathcal{T}_A$ tendremos que ver que $f|_A(O) \in \mathcal{T}'$. Como $O \in \mathcal{T}_A$ tenemos que $O \in \mathcal{T} \Rightarrow f(O) \in \mathcal{T}'$. Como $f(O) = f|_A(O)$ tenemos que $f|_A(O) \in \mathcal{T}'$ y lo tenemos.

  La demostración para cerrado es análoga y se deja como ejercicio para el lector. □

- Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es abierta y $\emptyset \neq A' \subset Y$ con $f(X) \subset A'$, entonces $f^{A'} : (X, \mathcal{T}) \to (A', \mathcal{T}'_{A'})$ es abierta. Igualmente si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es cerrada y $\emptyset \neq A' \subset Y$ con $f(X) \subset A'$, entonces $f^{A'} : (X, \mathcal{T}) \to (A', \mathcal{T}'_{A'})$ es cerrada.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{A'}(U) = f(U) \in \mathcal{T}$ y $f(U) = f(U) \cap A' \in \mathcal{T}'_{A'}$ por lo que lleva abiertos en abiertos y tenemos lo buscado.

La demostración para cerrados es análoga y se deja como ejercicio para el lector.

□

Observación. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación biyectiva, entonces equivalen:

(i) $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ es continua.

(ii) f es abierta.

(iii) f es cerrada.

2.2. Homeomorfismos

Definición 2.4. Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diremos que es un **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y su inversa, f^{-1} es continua.
Si existe un homeomorfismo entre dos e.t. $(X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ diremos que $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son **homeomorfos** y escribiremos $(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{T}')$.

□

Teorema 2.5. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación. Equivalen:

(i) f es un homeomorfismo.

(ii) f es biyectiva, continua y abierta.

(iii) f es biyectiva, continua y cerrada.

Demostración. Es trivial utilizando la observación anterior.

□

Observación. f es continua y cerrada $\iff \overline{f(A)} = f(\overline{A}) \ \ \forall A \subset X$. (Esto a veces puede servir para ver que una aplicación f es un homeomorfismo).

□

Ejemplo.

•) $Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo $\iff \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

•) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ también lo será (por su definición). Es una doble implicación pero no la podemos escribir rigurosamente ya que no podemos escribir f^{-1} sin suponer que es biyectiva.

•) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ son homeomorfismos, entonces $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es un homeomorfismo (ya que la composición de biyecciones es biyectiva, la composición de abiertas es abierta y la composición de continuas es continua).

- •) Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ un homeomorfismo, $\emptyset \neq A \subset X$, $A' = f(A) \neq \emptyset$, $f(A) \subset Y$. Entonces $f_{|A}^{A'} : (A, \mathcal{T}_A) \to (A', \mathcal{T}'_{A'})$ es un homeomorfismo. La demostración se basa en que $(f_{|A}^{A'})^{-1} = f_{|A'}^{A}$ y que $f_{|A}^{A'}$ es biyectiva y continua y que $f_{|A'}^{A}$ es continua.

□

Observación. En el conjunto de todos los espacios topológicos, "ser homeomorfo" es una relación de equivalencia (ya que en los ejemplos anteriores hemos visto que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

□

Ejemplo. (Clásicos)

- •) Cualesquiera dos intervalos abiertos en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son homeomorfos con la topología inducida.

  Demostración. Veamos en primer lugar que $(a, b) \cong (0, 1)$, con $a < b$. Definimos

$$\begin{aligned} f : (a, b) &\to (0, 1) \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

  Esta aplicación es biyectiva ya que tiene inversa:

$$f^{-1}(x) = x(b-a) + a$$

  Se puede ver que es su inversa ya que

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b-a) + a \\ &= x - a + a = x \\ (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = f(x(b-a)+a) = \frac{x(b-a)+a-a}{b-a} = \frac{x(b-a)}{b-a} = x \end{aligned}$$

  Además, tanto f como f^{-1} son continuas (podemos usar la intuición del análisis ya que estamos en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$) por lo que tenemos que f es un homeomorfismo.

  Veamos también que $(0, 1) \cong (1, +\infty)$. Para ello definimos $f(x) = \frac{1}{x}$ que es claramente biyectiva, continua y su inversa (que es la propia f) es continua.

  Además, $(1, +\infty) \cong (0, +\infty)$ con $f(x) = x - 1$ claramente un homeomorfismo.

  Finalmente llegamos a lo siguiente:

$$(0, +\infty) \cong \begin{cases} (a, +\infty) & \text{con} \quad f(x) = x + a \\ (-\infty, b) & \text{con} \quad f(x) = -x + b \\ \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) & \text{con} \quad f(x) = \ln(x) \end{cases}$$

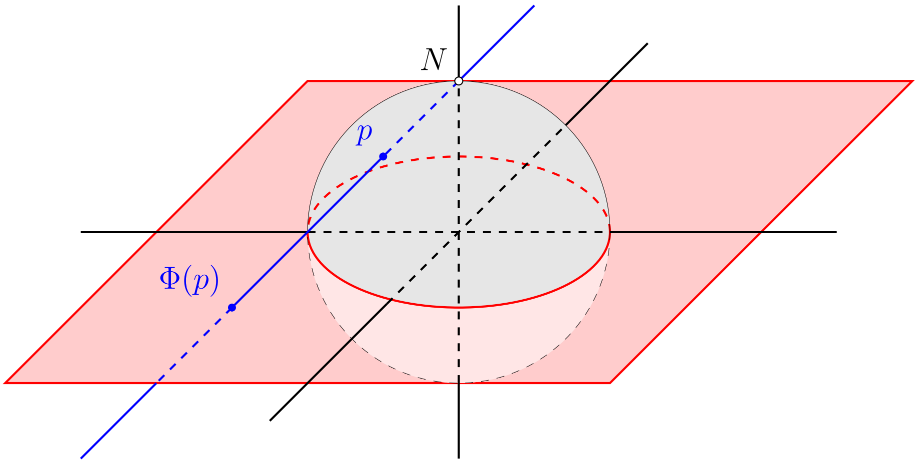
□

- **•)** En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $[a,b] \cong [0,1]$ $\forall a < b$ pero $[a,b] \ncong [c, +\infty)$ (lo demostraremos en el Tema 3).

- **•)** **Proyección estereográfica:** Esta proyección (para $n = 3$) prueba que una esfera a la que se le quita un punto es homeomorfa a un plano. Para ello podemos trazar la recta que va desde el polo norte de la esfera (el punto que le falta a la esfera) hacia cualquier punto p de la esfera y hallar la intersección de dicha recta con el plano que resulta de fijar la última coordenada a 0. Dicha intersección será $\Phi(p)$ y repitiendo esto con todos los puntos obtenemos el plano con última coordenada 0. Veámoslo analíticamente:

  Sea $\mathbb{S}^n = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\} = S((0, \dots, 0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ el polo norte. Podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$



  Su inversa es

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1) \end{aligned}$$

  Tenemos que la aplicación

$$\Phi : (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \mathcal{T}_{|\mathbb{S}^n \setminus \{S\}}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$$

  es un homeomorfismo ya que, como estamos en la topología usual podemos usar la intuición del análisis y ver que tanto Φ como Φ^{-1} son continuas y es fácil ver que $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_{\mathbb{S}^n \setminus \{N\}}$.

  Esta proyección se usa para hacer mapas de la Tierra, y por eso se producen deformaciones en la representación del mapa mundi. Hay mejores proyecciones para esto. Veamos la que viene a continuación:

•) **Proyección de Mercator:** Esta proyección prueba que si se retiran 2 puntos de la esfera, el norte y el sur, la figura resultante es homeomorfa a un cilindro. Para ello se toma el punto central de la circunferencia y se proyecta una recta sobre los puntos p de la esfera sin los polos. La intersección de dicha recta con el cilindro que tiene el radio de la esfera será $\varphi(p)$ y repitiendo esto en todos los puntos de la esfera obtenemos el cilindro de radio 1.

Sea $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la misma esfera definida en el apartado anterior y $S = (0, \dots, 0, -1)$ el polo sur. Podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\} &\to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{\|x\|}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\} \\ y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) &\mapsto \frac{y}{\|y\|} \end{aligned}$$

Es fácil ver que al componer ambas aplicaciones obtenemos la identidad. Con esta aplicación tenemos

$$\varphi : (\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}, \mathcal{T}_{u_{|\mathbb{S}^n \setminus \{N,S\}}}) \to (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{u_{|\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}}})$$

es un homeomorfismo.

□

Proposición 2.6. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ un homeomorfismo. Entonces:

(i) Si $U \subset X$, entonces $U \in \mathcal{T} \iff f(U) \in \mathcal{T}'$.

(ii) Si $C \subset X$, entonces $C \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \iff f(C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'}$.

(iii) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, entonces $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T} \iff \mathcal{B}' = f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}'$.

(iv) Si $x \in X$, y $N \subset X$, entonces $N \in \mathcal{N}_x \iff f(N) \in \mathcal{N}'_{f(x)}$.

(v) Si $x \in X$, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(X)$, entonces $\mathcal{B}_x$ es b.d.e. de x en $\mathcal{T} \iff \mathcal{B}'_{f(x)} = f(\mathcal{B}_x) = \{f(V) : V \in \mathcal{B}_x\}$ es b.d.e. de $f(y)$ en $\mathcal{T}'$.

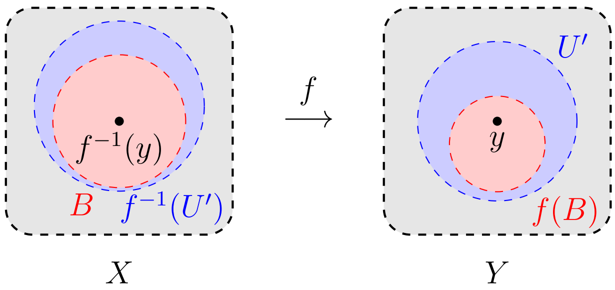
Demostración. Para las demostraciones veremos solo las implicaciones hacia la derecha ya que al ser un homeomorfismo, la implicación hacia la izquierda se basa en aplicar que f^{-1} es también un homeomorfismo.

(i) Como f es abierta se verifica.

(ii) Como f es cerrada se verifica.

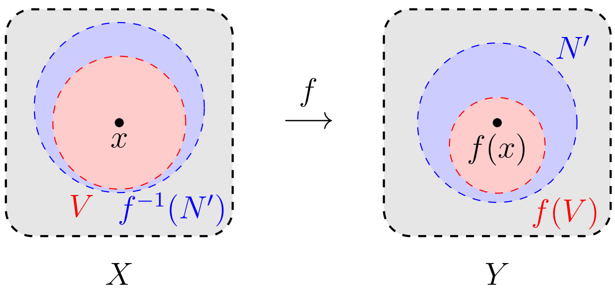
(iii) Tengo que comprobar varias cosas:

- •) $f(B) \in \mathcal{T}'$ $\forall B \in base$. Esto es cierto ya que $B \in \mathcal{T}$ y f es abierta.
- •) Sea $U' \in \mathcal{T}'$, $y \in U'$ tendré que ver que existe un abierto básico entremedias. Para ello tomo $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U')$ y como f es continua tenemos que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}$ es base tenemos que $\exists B \in \mathcal{B}$ con $f^{-1}(y) \in \mathcal{B} \subset f^{-1}(U')$ y como f es biyectiva, $y \in f(B) \subset U'$ con $f(B) \in \mathcal{B}'$.



(iv) Sea $x \in X$, $N \in \mathcal{N}_x$. Como $\mathcal{N}_x$ es entorno, $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N' \Rightarrow f(x) \in f(U) \subset f(N)$ y como f es abierta tengo que $f(U) \in \mathcal{T}'$ por lo que $f(N) \in \mathcal{N}'_{f(x)}$

(v) Sea $N' \in \mathcal{N}'_{f(x)}$. Por (iv) (la implicación hacia la izquierda) tenemos que $f^{-1}(N') \in \mathcal{N}_x$. Como tenemos una b.d.e tenemos que $\exists V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subset f^{-1}(N') \Rightarrow f(V) \subset N'$ y de nuevo por (iv) tenemos que $f(V) \in \mathcal{N}'_{f(x)}$ y tenemos lo que queríamos.



□

Definición 2.5. Una propiedad P que pueda o no tener un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice **topológica** o que es un **invariante topológico** si al cumplirlo $(X, \mathcal{T})$, también la cumplen todos los espacios topológicos homeomorfos a él, es decir:

$$(X, \mathcal{T}) \text{ cumple } P \iff (Y, \mathcal{T}') \text{ cumple } P \;\; \forall (Y, \mathcal{T}') \cong (X, \mathcal{T})$$

□

Proposición 2.7. Las propiedades **(T1)**, **(T2)**, **(1AN)**, **(2AN)** son invariantes topológicas.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector □

Ejemplo.

- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ ya que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es 2AN y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ no lo es.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF}) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ ya que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ son T2 pero $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no lo es.
- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$ ya que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$ no es 2AN.

□

Definición 2.6. Diremos que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es un **embebimiento** si $f^{f(X)} : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$ es un homeomorfismo. En ese caso, $(X, \mathcal{T}) \cong (f(X), \mathcal{T}'_{f(X)})$

□

Ejemplo.

- •) f homeomorfismo $\Rightarrow$ f embebimiento. El recíproco no es cierto.
- •) Si $n, k \in \mathbb{N}$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) &\to (\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{T}_u) \\ x &\mapsto f(x) = (x, 0) \end{aligned}$$

es un embebimiento con $f(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \times \{0\}\}$.

Para verlo tendremos que tomar la aplicación

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{R}^n \times \{0\}} : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) &\to (\mathbb{R}^n \times \{0\}, \mathcal{T}_{u_{|\mathbb{R}^n \times \{0\}}}) \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

y tenemos además

$$\begin{aligned} (f^{\mathbb{R}^n \times \{0\}})^{-1} : (\mathbb{R}^n \times \{0\}, \mathcal{T}_{u_{|\mathbb{R}^n \times \{0\}}}) &\to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u) \\ (x, 0) &\mapsto x \end{aligned}$$

y es fácil ver que $(f^{\mathbb{R}^n \times \{0\}})$ es un homeomorfismo y por tanto f un embebimiento.

□

2.3. Topología Producto

En esta sección estudiaremos cómo a partir de dos e.t. $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ podemos buscar una topología en el espacio $X \times Y$ a partir de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$. Para ello, teniendo $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ podemos tomar el conjunto $\{U \times U' : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$ pero vemos que no cumple la propiedad **(A2)** por lo que no podremos construir así una topología. Sin embargo, sí podemos considerar que dicho conjunto sea una base de la topología producto.

Proposición 2.8. El conjunto

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} = \{U \times U' : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$$

es base de una única topología en $X \times Y$ que se denota $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ y se llama **topología producto** de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.
Al e.t. $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ lo llamaremos **espacio topológico producto** de $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$.

Demostración. Para ver que esto es cierto tendremos que comprobar que cumple las condiciones del Teorema 1.6:

(B1) $X \times Y \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} \Rightarrow \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}} B = X \times Y$.

(B2) $U_1 \times U_1', U_2 \times U_2' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$. Tenemos que $(U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') = (U_1 \cap U_2) \times (U_1' \times U_2') \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$. ya que $(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{T}$ y $(U_1' \cap U_2') \in \mathcal{T}'$.

y ya lo tenemos probado.

□

Observación.

- **•)** Si $W \subset X \times Y$, entonces son equivalentes:
  - (i) $W \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.
  - (ii) $\forall (x,y) \in W \quad \exists U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'$ con $(x,y) \in U \times U' \subset W$.
  - (iii) $\forall (x,y) \in W \quad \exists U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'$ con $x \in U, y \in U', U \times U' \subset W$.
  - (iv) $W = \bigcup\limits_{i\in I}(U_i \times U_i')$ con $U_i \in \mathcal{T}, U_i' \in \mathcal{T}' \quad \forall i \in I$.
- **•)** En $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$, todo producto de abiertos es abierto (básico) pero el recíproco no es cierto ya que hay abiertos en el producto que no son producto de abiertos. Es decir, que la topología $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ hay más abiertos en general que los básicos, o equivalentemente, $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \setminus \mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} \neq \emptyset$.

Proposición 2.9. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ dos e.t. Entonces:

(i) Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{B}'$ es base de $\mathcal{T}'$, entonces

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \times \mathcal{B}' = \{B \times B' : B \in \mathcal{B}, B' \in \mathcal{B}'\}$$

es base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

(ii) Si $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ b.d.e. de x en $(X, \mathcal{T})$ y $y \in Y$, $\mathcal{B}_y'$ b.d.e. de y en $(Y, \mathcal{T}')$, entonces

$$\tilde{\mathcal{B}}_{(x,y)} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_y' = \{V \times V' : V \in \mathcal{B}_x, V' \in \mathcal{B}_y'\}$$

es b.d.e. de (x,y) en $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$.

Demostración.

(i) $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \times \mathcal{B}' \subset \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Sea $W \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ y $(x,y) \in W$. Tendremos que ver que existe un elemento $B \times B' \in \tilde{\mathcal{B}}$ con $(x,y) \in B \times B' \subset W$. Como $\mathcal{B}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$ es base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'$ con $(x,y) \in U \times U' \subset W$. Como además $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ con bases tenemos que $\exists B \in \mathcal{B}, B' \in \mathcal{B}'$ con $x \in \mathcal{B} \subset U, y \in N' \subset U \Rightarrow$ $(x,y) \in B \times B' \subset U \times U' \subset W$ y lo tenemos.

(ii) La demostración es análoga a la anterior y se deja planteada como ejercicio para el lector.

□

Corolario 2.9.1. $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T})$ e.t.

(i) Si $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{T}')$ son 1AN, entonces $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es 1AN.

(ii) Si $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{T}')$ son 2AN, entonces $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es 2AN.

□

Ejemplo.

- $\emptyset \neq A \subset X$, $\emptyset \neq A' \subset Y$ tenemos que $(\mathcal{T},\mathcal{T}')_{|A\times A'} = \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}'_{A'}$ (es fácil de comprobar).
- $\mathcal{T}_t \times \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t$.
- $\mathcal{T}_{disc} \times \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_{disc}$.
- $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathcal{T}_u^n \times \mathcal{T}_u^m) = (\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{T}_u^{n+m})$.
  $B_\infty^n(x,\varepsilon) \times B_\infty^m(y,\varepsilon) = B_\infty^{n+m}((x,y),\varepsilon)$.

□

Observación. Sean $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ dos e.t., $C \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$, $C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}'} \Rightarrow C \times C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$.

Demostración. En efecto,

$$(X \times Y) \setminus (C \times C') = \{(x,y) \in X \times Y : (x,y \notin C \times C')\} = ((X \setminus C \times Y)) \cup (X \times (T \setminus C'))$$

y como $((X \setminus C \times Y)), (X \times (T \setminus C')) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$, entonces la unión de abiertos en la topología producto es abierto.

□

Cabe destacar que el recíproco no es cierto, es decir, no todo cerrado en $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es producto de cerrados. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$, $([0,1] \times [0,1]) \cup ([1,2] \times [1,2])$.

□

Definición 2.7. Sean X, Y dos conjuntos no vacíos, se definen las **proyecciones**

$$\begin{aligned} \pi_X : X \times Y &\to X \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_Y : X \times Y &\to Y \\ (x,y) &\mapsto y \end{aligned}$$

Son sobreyectivas

$\square$

Proposición 2.10. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ e.t., entonces $\pi_X : (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ y $\pi_Y : (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$ son continuas y abiertas.

Demostración. Veamos en primer lugar que π_X es continua. Sea $U \in \mathcal{T}$ tendré que ver que $\pi_X^{-1}(U) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Tenemos que $\pi_X^{-1}(U) = \{(x, y \in X \times Y : x \in U)\} = U \times Y \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

Veamos ahora que es abierta. Para ello consideramos $\mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'} = \{U \times U' : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$ base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Sea $U \times U' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'}$, entonces $\pi_X(U \times U') = U \in \mathcal{T}$.

$\square$

Ejercicio 2.3.1. En general, las proyecciones no son cerradas.

$\square$

Proposición 2.11. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t., entonces $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ es la topología menos fina en $X \times Y$ que hace que las proyecciones sean continuas. Es decir, si $\tilde{\mathcal{T}}$ es una topología en $X \times Y$ tal que $\pi_X : (X \times Y, \tilde{\mathcal{T}}) \to (X, \mathcal{T})$ y $\pi_Y : (X \times Y, \tilde{\mathcal{T}}) \to (Y, \mathcal{T}')$ son continuas, entonces $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \leqslant \tilde{\mathcal{T}}$.

Demostración. Supongamos $\tilde{\mathcal{T}}$ y sea $U \times U' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'} \Rightarrow U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'$. Tendremos que comprobar que $U \times U' \in \tilde{\mathcal{T}}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} U \times U' &= \{(x, y) \in X \times Y : x \in U, y \in U'\} \\ &= \{(x, y) \in X \times Y : x \in U\} \cap \{(x, y) \in X \times Y : y \in U'\} \\ &= (U \times Y) \cap (X \times U') = \pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(U') \end{aligned}$$

Como π_X y π_Y son continuas, tenemos que $\pi_X^{-1}(U) \in \tilde{\mathcal{T}}$ y $\pi_Y^{-1}(U') \in \tilde{\mathcal{T}}$ por lo que su intersección también está en $\tilde{\mathcal{T}}$ y por tanto $U \times U' \in \tilde{\mathcal{T}}$.

$\square$

Proposición 2.12. (Placas del producto)
Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t., $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} (X \times \{y_0\}, (\mathcal{T} \times \mathcal{T}')|_{X \times \{y_0\}}) &\cong (X, \mathcal{T}) \\ (\{x_0\} \times Y, (\mathcal{T} \times \mathcal{T}')|_{\{x_0\} \times Y}) &\cong (Y, \mathcal{T}') \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\pi_{X_{|X \times \{y_0\}}}$ y tenemos

$$\begin{aligned} (X \times \{y_0\}, (\mathcal{T} \times \mathcal{T}')_{X \times \{y_0\}}) &\to (X, \mathcal{T}) \\ (x, y_0) &\mapsto x \end{aligned}$$

Para ver que es un homeomorfismo tendremos que ver que es biyectiva (que es claro ya que su inversa sería la aplicación que lleva x al par (x, y_0)), continua (que es claro por ser la restricción de una aplicación continua) y abierta. Veamos entonces que es abierta.
Sea $\mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'} = \{U \times U' : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$ base de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Consideramos $\mathcal{B} = \{(U \times U') \cap (X \times \{y_0\}) : U \in \mathcal{T}, U' \in \mathcal{T}'\}$ que es base del subespacio. Tenemos entonces:

$$A = (U \times U') \cap (x \times \{y_0\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad y_0 \notin U' \\ U \times \{y_0\} & \text{si} \quad y_0 \in U' \end{cases}$$

Tenemos que

$$\pi_{X_{|X \times \{y_0\}}}(A) = \pi_X(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad y_0 \notin U' \\ U & \text{si} \quad y_0 \in U' \end{cases}$$

Por lo que $\pi_{X_{|X \times \{y_0\}}}(A) \in \mathcal{T}$ y ya tenemos que es abierta y por tanto un homeomorfismo. □

Proposición 2.13. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ dos e.t., entonces

(i) $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es 1AN $\iff$ $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son 1AN.

(ii) $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es 2AN $\iff$ $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son 2AN.

(iii) $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es T1 $\iff$ $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son T1.

(iv) $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es T2 $\iff$ $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son T2.

(v) $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es metrizable $\iff$ $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ son metrizables.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ cumple P, entonces $(X \times \{y_0\}, (\mathcal{T} \times \mathcal{T}')_{X \times \{x_0\}})$ cumple P y como P es un invariante topológico, entonces $(X, \mathcal{T})$ que es homeomorfo a dicho espacio también la cumple. Análogamente obtengo que $(Y, \mathcal{T}')$ también verifica P (considerando el subespacio $(\{x_0\} \times Y, (\mathcal{T} \times \mathcal{T}')_{\{x_0\} \times Y})$).

$\Leftarrow$) (i) Hecho en clase.

(ii) Hecho en clase

(iii) Es análoga que (iv)

(iv) Sean $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ con $(x, y) \neq (x', y')$ y supongamos que $x \neq x'$ (esto no quita generalidad ya que en caso de que $x = x'$, entonces necesariamente $y \neq y'$ y se razonaría de forma simétrica). Como X es T2, entonces existen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ con $x \in U_1$, $x' \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow$ $(x, y) \in U_1 \times Y \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ y $(x', y') \in U_2 \times Y \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ por lo que tenemos que $(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y = \emptyset \times Y = \emptyset$ y lo tenemos.

(v) Es un ejercicio de análisis I. Se hace de la siguiente forma. Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{d'}$ y podemos definir

$$\begin{aligned} \tilde{d} : (X \times Y) &\to [0, +\infty] \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto d(x, x') + d'(y, y') \end{aligned}$$

Solo quedaría comprobar que $\tilde{d}$ es una distancia en $X \times Y$ (que no es materia de esta asignatura) y comprobar que $\mathcal{T}_{\tilde{d}} = \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$.

□

Definición 2.8. Sea $f : Z \to X \times Y$ una aplicación, escribimos $f = (f_X, f_Y)$ donde

$$f_X = \pi_X \circ f : Z \to X$$
$$f_Y = \pi_Y \circ f : Z \to Y$$

A estas aplicaciones las llamaremos **aplicaciones componentes** de f. Tenemos entonces $f(z) = (f_X(z), f_Y(z)) \in (X \times Y)$.

□

Proposición 2.14. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(Z, \mathcal{T}'')$ e.t. Si $f : (Z, \mathcal{T}'') \to (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es una aplicación, entonces:

$$f \text{ es continua} \iff \begin{array}{l} f_X = \pi_X \circ f : (Z, \mathcal{T}'') \to (X, \mathcal{T}) \\ f_Y = \pi_Y \circ f : (Z, \mathcal{T}'') \to (Y, \mathcal{T}') \end{array} \text{ son continuas}$$

Es decir, la función f es continua si y solo si lo es en cada una de sus componentes.

Demostración.

$\Leftarrow$) Trivial por ser composición de aplicaciones continuas.

$\Rightarrow$) Sea $U \times U' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}'} \subset \mathcal{T} \times \mathcal{T}'$. Tendremos que ver que $f^{-1}(U \times U') \in \mathcal{T}''$. Veamos cuál es la imagen inversa. Tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times U') = \{z \in Z : f(z) \in (U \times U')\} = \{z \in Z : f_X(z) \in U, f_Y(z) \in U'\} = \\ = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(U') \in \mathcal{T}'' \end{aligned}$$

por ser intersección de abiertos en $\mathcal{T}''$.

□

Definición 2.9. Sean $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \neq \emptyset$, $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ aplicaciones, se define la **aplicación producto** de f_1 y f_2 como

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

Proposición 2.15. Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$, (Y_i, T_i') e.t. para $i = 1, 2$ y $f_i(X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y_i, \mathcal{T}_i')$ funciones entre e.t. para $i = 1, 2$. Consideramos la aplicación producto $f_1 \times f_2 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \to (Y_1 \times Y_2, \mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2')$. Entonces

(i) $f_1 \times f_2$ es continua $\iff$ f_1 y f_2 son continuas.

(ii) $f_1 \times f_2$ es abierta $\iff$ f_1 y f_2 son abiertas.

(iii) $f_1 \times f_2$ es homeomorfismo $\iff$ f_1 y f_2 son homeomorfismos.

Demostración.

(i) Sea $U_1' \times U_2' \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2'} \Rightarrow (f_1 \times f_2)^{-1}(U_1' \times U_2') = f_1^{-1}(U_1') \times f_2^{-1}(U_2')$

$\Rightarrow$) $f_1^{-1}(U_1') \times f_2^{-1}(U_2') \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Como la proyección π_{X_1} es abierta, $\pi_{X_1}(f_1^{-1}(U_1') \times f_2^{-1}(U_2')) = f_1^{-1}(U_1')$

$\Leftarrow$) Trivial

(ii) $(f_1 \times f_2)(U_1 \times U_2) = f_1(U_1) \times f_2(U_2)$.

(iii) $(f_1 \times f_2)^{-1} = f_1^{-1} \times f_2^{-1}$

□

Corolario 2.15.1. Si $(X_i, \mathcal{T}_i) \cong (Y_i, \mathcal{T}_i')$ con $i = 1, 2$, entonces:

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \cong (Y_1 \times T_2, \mathcal{T}_1' \times \mathcal{T}_2')$$

□

Definición 2.10. (Productos finitos) Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$ e.t. para $i = 1, \dots, n$ con $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \mathcal{T}_i \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

Entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n}$ es base de una única topología $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ en $X_1, \dots, X_n$. Al espacio topológico $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_n)$ lo llamaremos **espacio topológico producto** de $(X_i, \mathcal{T}_i)$

□

Observación. Todos los resultados vistos para $n = 2$ son ciertos para cualquier $n \geqslant 2$.

□

Definición 2.11. (Topología inicial) Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto, $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una familia de e.t. y $\mathcal{F} = \{f_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones. Se llama **topología inicial** en X para la familia $\mathcal{F}$ a la única topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ que tiene por subbase a

$$\emptyset \neq S = \{f^{-1}(U_i) : U_i \in X_i, i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$$

Esta topología es la menos fina que hace que todas las aplicaciones f_i sean continuas.

□

Proposición 2.16. Con esta notación:

(i) $f_i : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua $\forall i \in I$.

(ii) Si $\mathcal{T}$ es una topología en X y $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ es continua $\forall i \in I$, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \leqslant \mathcal{T}$

(iii) Si $f : (Z, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$, entonces f es continua $\iff$ $(f_i \circ f)(Z, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua $\forall i \in I$

Demostración.

(i) Trivial

(ii) Trivial

(iii) Se deja planteada como ejercicio para el lector

□

Ejemplo.

- Si $(X, \mathcal{T})$, $Y, \mathcal{T}'$ son e.t. y $\mathcal{F} = \{\pi_X : X \times Y \to X, \pi_Y : X \times Y \to Y\}$, entonces $(X \times Y, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}) = (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$

- Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\emptyset \neq A \subset X$, $\mathcal{F} = \{i_A : A \to X\}$ (donde i_A es la aplicación inclusión de A), entonces $(A, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}) = (A, \mathcal{T}_A)$ (ya que $i_A^{-1}(U) = U \cap A$).

2.4. Identificaciones y topología cociente

Teorema 2.17. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $Y \neq \emptyset$ un conjunto y la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to Y$, entonces la familia

$$\mathcal{T}_f = \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

es una topología en Y que llamamos **topología final** para la aplicación f. Además,

(i) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua.

(ii) Si $\mathcal{T}'$ es una topología en Y con $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, entonces $\mathcal{T}' \leqslant \mathcal{T}_f$

Esto quiere decir que la topología final es la topología más fina que hace que la aplicación f sea continua.

Demostración. Veamos en primer lugar que efectivamente $\mathcal{T}_f$ es una topología en X

(A1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_f$. $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow Y \in \mathcal{T}_f$

(A2) Sea $\{U_i'\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_f$. Queremos ver que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i' \in \mathcal{T}_f$.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i'\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i') \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i' \in \mathcal{T}_f$$

(A3) Sean $U_1', U_2' \in \mathcal{T}_f$ tendremos que ver que $U_1' \cap U_2' \in \mathcal{T}_f$.

$$f^{-1}(U_1' \cap U_2) = f^{-1}(U_1') \cap f^{-1}(U_2') \in \mathcal{T}$$

por ser intersección de abiertos en $\mathcal{T}$.

Veamos ahora que verifica las 2 propiedades que menciona el teorema:

(i) Trivial (por la definición de $\mathcal{T}_f$)

(ii) Sea $U' \in \mathcal{T}$ veamos que entonces $U' \in \mathcal{T}_f$. Por ser f continua tenemos que $f^{-1}(U') \in \mathcal{T} \Rightarrow U' \in \mathcal{T}_f$ y lo tenemos probado.

$\square$

Ejemplo.

- •) $Id_X : (X, \mathcal{T}) \to X$. $\mathcal{T}_{Id_X} = \{U \in X : Id_X^{-1}(U) \in \mathcal{T}\} = \{U \in X : U \in \mathcal{T}\}$
- •) $f : (X, \mathcal{T}) \to Y$ constante, es decir, $f(x) = y_0 \in Y \ \ \forall x \in X$. Entonces tenemos que $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_{disc}$ ya que

$$\mathcal{T}_f = \{U' \subset Y : f^{-1}(U') \in \mathcal{T}\} = \mathcal{P}(Y)$$

Esto se debe a que

$$f^{-1}(U') = \begin{cases} X & \text{si} \quad y_0 \in U' \\ \emptyset & \text{si} \quad y_0 \notin U' \end{cases}$$

- •) Consideramos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : ([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]}) &\to Y = \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in (1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\mathcal{T}_f = \{U' \subset \{0,1\} : f^{-1}(U') \in \mathcal{T}_u|_{[0,1]}\} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\}$$

Veamos por qué $\{0\} \in \mathcal{T}_f$ pero $\{1\} \notin \mathcal{T}_f$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) = (1/2, 1] \in \mathcal{T}_u|_{[0,1]} &\Rightarrow \{0\} \in \mathcal{T}_f \\ f^{-1}(\{1\}) = [0, 1/2] \notin \mathcal{T}_u|_{[0,1]} &\Rightarrow \{1\} \notin \mathcal{T}_f \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.18. Sea $f : (X, Y) \to Y$ una aplicación. Entonces:

(i) Una aplicación $g : (Y, \mathcal{T}_f) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es continua si y solo si $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es continua.

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{T}) \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ (Y, \mathcal{T}_f) \arrow[r, "g"'] & (Z, \mathcal{T}'') \end{tikzcd}$$

(ii) $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_f} = \{C' \subset Y : f^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}\}$

Demostración.

(i) $\Rightarrow$) Por ser $g \circ f$ composición de continuas.

$\Leftarrow$) Sea $U'' \in \mathcal{T}''$, tendremos que ver que $g^{-1}(U'') \in \mathcal{T}_f$.

$$f^{-1}(g^{-1}(U'')) \stackrel{*}{=} (g \circ f)^{-1}(U'') \in \mathcal{T} \Rightarrow g^{-1}(U'') \in \mathcal{T}_f$$

Donde en $*$ hemos tenido en cuenta que $g \circ f$ es continua. Por tanto tenemos que g es continua.

(ii) Sea $C' \subset Y$, $C' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_f} \iff Y \setminus C' \in \mathcal{T}_f \iff f^{-1}(Y \setminus C') \in \mathcal{T} \iff f^{-1}(C') \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$

□

Definición 2.12. Una aplicación $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una **identificación** si p es sobreyectiva y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_p$.

□

Observación.

- •) Toda identificación es continua.
- •) Si $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación y $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ es otra aplicación con $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_p$, entonces g es continua $\iff g \circ p : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$ es continua.

Ejemplo.

- •) $Id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es identificación $\iff \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
- •) $p : \chi_{[0,1/2)} : ([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_f = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\})$ es identificación pero no es abierta ni cerrada.

$$p([0, 1/4)) = \{1\} \notin \mathcal{T}_f \text{ pero } [0, 1/4) \in \mathcal{T}_u|_{[0,1]}$$
$$p([3/4, 1]) = \{0\} \notin \mathcal{C}_{\mathcal{T}_p} \text{ pero } [3/4, 1] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u\text{-}[0,1]}$$

□

Proposición 2.19. Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, sobreyectiva y abierta, o continua, sobreyectiva y cerrada, entonces f es una identificación.

Demostración. Por hipótesis tenemos que f es sobreyectiva y queremos ver que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_f$. Como f es continua tenemos que $\mathcal{T}' \leqslant \mathcal{T}_f$. Supongamos que f es abierta y querremos ver la otra inclusión. Sea $U' \in \mathcal{T}_f$, entonces tenemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Por ser f abierta tenemos que $f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$ y ya tenemos probada la doble inclusión.

□

Observación. Una identificación puede no ser abierta ni cerrada.

□

Ejemplo. $\pi_X(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ es una identificación

□

Corolario 2.19.1. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (T, \mathcal{T})$ una aplicación. Entonces f es un homeomorfismo si y solo si f es una identificación inyectiva.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si f es un homeomorfismo entonces por definición es inyectiva, sobreyectiva, continua y abierta por lo que es una identificación inyectiva.

$\Leftarrow$) Si f es una identificación inyectiva entonces, por definición es biyectiva, continua y $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$. Veamos que además es abierta. Para ello consideramos $U \in \mathcal{T}$ y tenemos que $f(U) \in \mathcal{T}_f \iff f^{-1}(f(U)) \in \mathcal{T}$ lo cual se verifica por ser sobreyectiva. Como $f(U) \in \mathcal{T}_f$, entonces f es abierta y por tanto es un homeomorfismo.

□

Definición 2.13. Si $p : X \to Y$ es una aplicación y $A \subset X$, diremos que A es **p-saturado** si $p^{-1}(p(A)) = A$, esto es, $p^{-1}(p(A)) \subset A$ (la otra inclusión siempre se da).

□

Proposición 2.20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., Y un conjunto y $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Entonces

(i) $\mathcal{T}_p = \{p(U) : U \in \mathcal{T} \text{ con } U \text{ p-saturado}\}$

(ii) $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_p} = \{p(C) : C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \text{ con } C \text{ p-saturado}\}$

Demostración.

(i) Veámoslo por doble inclusión:

$\subseteq$) Sea $U' \in \mathcal{T}_p$, entonces $p^{-1}(U') \in \mathcal{T}$. Si tomo $U = p^{-1}(U')$ tendremos que ver que U es p-saturado. Tenemos que $p^{-1}(p(U)) = p^{-1}(p(p^{-1}(U'))) = p^{-1}(U') = U$ y lo tenemos.

$\supseteq$) Sea $U \in \mathcal{T}$ con $p^{-1}(p(U)) = U$ tendremos que ver que $p(U) \in \mathcal{T}_p$. Por ser U p-saturado tenemos que $p^{-1}(p(U)) = U \in \mathcal{T} \in \mathcal{T}$.

(ii) Se deja planteada como ejercicio para el lector.

□

Corolario 2.20.1. Si $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación sobreyectiva, entonces equivalen:

(i) p es una identificación.

(ii) $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_p = \{p(U) : U \in \mathcal{T} \text{ p-saturado}\}$.

(iii) $\mathcal{C}_{\mathcal{T}'} = \mathcal{C}_{\mathcal{T}_p} = \{p(C) : C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \text{ p-saturado}\}$.

□

Proposición 2.21. Sean $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ y $p' : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ aplicaciones y consideramos su composición $p' \circ p : (X, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}'')$. Entonces:

(i) p, p' identificaciones $\Rightarrow p' \circ p$ identificación.

(i) p, p' continuas y $p' \circ p$ identificación $\Rightarrow p'$ identificación.

(iii) p identificación $\Rightarrow$ (p' identificación $\iff$ $p' \circ p$ identificación).

Demostración. La demostración se deja planteada como ejercicio para el lector.

□

Corolario 2.21.1. Si $p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua y admite una inversa continua por la derecha, es decir, $\exists f : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ continua y tal que $p \circ f = Id_Y$, entonces p es una identificación.

Demostración. Como $p \circ f = Id_Y$ es un homeomorfismo, en particular es una identificación y como f y p son continuas, por la proposición anterior sabemos que p es una identificación.

□

Definición 2.14. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y sea R una relación de equivalencia en X con la proyección dada por

$$\begin{aligned} p : X &\to X/R \\ x &\mapsto [x] = \{x' \in X : xRx'\} \end{aligned}$$

Llamaremos **topología cociente** y la notaremos por $\mathcal{T}/R$ a la topología final en X/R asociada a p, esto es $\mathcal{T}/R = \mathcal{T}_p$. Al espacio topológico $(X/R, \mathcal{T}/R)$ se le llama **espacio topológico cociente** de $(X, \mathcal{T})$ por la relación de equivalencia R.

□

Propiedades. En esta situación, $p : (X, \mathcal{T}) \to (X/R, \mathcal{T}/R)$ es una identifiación, luego:

(i) p es continua y $\mathcal{T}/R$ es la topología más fina que hace a p continua.

(ii) $f : (X/R, \mathcal{T}/R) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua $\iff$ $f \circ p : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua.

(iii) $\mathcal{T}/R = \{\tilde{U} \subset X/R : p^{-1}(\tilde{U}) \in \mathcal{T}\} = \{p(U) : U \in \mathcal{T} \text{ p-saturado}\}$.

(iv) $\mathcal{C}_{\mathcal{T}/R} = \{\tilde{C} \subset X/R : p^{-1}(\tilde{C}) \in \mathcal{C}_\mathcal{T}\} = \{p(C) : C \in \mathcal{C}_\mathcal{T} \text{ p-saturado}\}$.

(v) $A \subset X$ es p-saturado $\iff$ $p^{-1}(p(A)) = A$ $\iff$ $p(a) = [a] \subset A \quad \forall a \in A$ $\iff$ $x \in A \quad \forall x \in X$ tal que $\exists a \in A$ con xRa.

□

Definición 2.15. Si $f : X \to Y$ es una aplicación y R es una relación de equivalencia en X con proyección $p : X \to X/R$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/R \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

Se dice que f es **compatible** con R si $f(x) = f(x')\ \ \forall x, x' \in X$ con xRx'. En este caso, la aplicación f **baja al cociente** como una aplicación bien definida, es decir, que hace que el diagrama sea conmutativo. Se le suele notar por $\tilde{f} : X/R \to Y$ tal que $\tilde{f}([x]_R) = f(x)$ con $\tilde{f} \circ p = f$.

□

Corolario 2.21.2. Con topologías $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(X/R, \mathcal{T}/R)$, entonces

(i) $\tilde{f}$ es continua $\iff$ f es continua.

(ii) $\tilde{f}$ es una identificación $\iff$ f es una identificación.

□

Definición 2.16. Si $f : X \to Y$ es una aplicación y R es una relación de equivalencia en X con proyección $p : X \to X/R$ y S una relación de equivalencia en Y con proyección $q : Y \to Y/S$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_R"'] & Y \arrow[d, "p_S"] \\ X/R \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & Y/S \end{tikzcd}$$

Se dice que f es **compatible** con R y S si $f(x)Sf(x')\ \ \forall x, x' \in X$ con xRx'. En este caso, la aplicación f **baja a los cocientes** como una aplicación bien definida Se nota por $\tilde{f} : X/R \to Y/S$ tal que $\tilde{f}([x]_R) = [f(x)]_S$ con $\tilde{f} \circ p = q \circ f$.

□

Corolario 2.21.3. Con topologías $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ y $(X/R, \mathcal{T}/R)$ y $(Y/S, \mathcal{T}'/S)$, entonces

(i) f es continua $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ es continua.

(ii) f es una identificación $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ es una identificación.

□

Definición 2.17. Si $f : X \to Y$ una aplicación, se induce una relación de equivalencia R_f en X dada por

$$xR_f x' \iff f(x) = f(x')$$

Además, f baja al cociente como una aplicación inyectiva

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X/R_f &\to Y \\ \tilde{f}([x]_{R_f}) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

□

Proposición 2.22. La aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación si y solo si $\tilde{f} : (X/R_f, \mathcal{T}/R_f) \to (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_f"'] & Y \\ X/R \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

En este caso, $(X/R_f, \mathcal{T}/R_f) \cong (Y, \mathcal{T}')$.

Demostración.

$\Leftarrow$) $\tilde{f}$ homeomorfismo $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ identificación y como además p_f es identificación, tenemos que $f = \tilde{f} \circ p_f$ es una identificación y lo tenemos.

$\Rightarrow$) f y p_f son identificaciones por lo que $f = \tilde{f} \circ p_f$ es identificación y como además $\tilde{f}$ es inyectiva tenemos que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo.

□

Observación.

- Salvo homeomorfismo, toda identificación es una proyección al cociente.
- Para encontrar un homeomorfismo $(X/R, \mathcal{T}/R) \to (Y, \mathcal{T}')$ “basta”[1] encontrar una identificación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ con $R_f = R$.

□

Ejemplo. (Cociente por un subconjunto) Sean $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y un subespacio $\emptyset \neq A \subset X$. Se define la relación de equivalencia R_A en X como

$$xR_A x' \iff \left\{ \begin{array}{c} x = x' \\ o \\ \{x, x'\} \subseteq A \end{array} \right.$$

Se denota $(X/A, \mathcal{T}/A) \equiv (X/R_A, \mathcal{T}/R_A)$.

[1]no siempre es fácil

Si el conjunto A es abierto, entonces la proyección $p_A : (X, \mathcal{T}) \to (X/A, \mathcal{T}/A)$ es abierta. Si A es cerrado, entonces la proyección $p_A : (X, \mathcal{T}) \to (X/A, \mathcal{T}/A)$ es cerrada. Veamos por qué esto es cierto:

Para ello tomo $B \subset X$. Sabemos que

$$p_A^{-1}(p_A(B)) = \begin{cases} B & \text{si} \quad B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & \text{si} \quad B \cap A \neq \emptyset \end{cases}$$

Si A es abierta entonces tenemos que $p_A^{-1}(p_A(B)) \in \mathcal{T} \quad \forall B \in \mathcal{T}$. Si A es cerrada entonces tenemos que $p_A^{-1}(p_A(B)) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \quad \forall B \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

□

Ejemplo. Consideramos la topología $([0,1], \mathcal{T}_u)$ y el conjunto $A = \{0,1\}$ que induce la relación R_A. Podemos ver intuitivamente que esta relación identifica el 0 con el 1 y al resto de puntos los deja igual. Podemos considerar $([0,1]/\{0,1\}, \mathcal{T}_u|_{[0,1]}/\{0,1\})$. De nuevo intuitivamente podemos considerar que cogemos el intervalo $[0,1]$ y lo unimos por los extremos creando una circunferencia. Podemos intuir que

$$([0,1]/\{0,1\}, \mathcal{T}_u|_{[0,1]}/\{0,1\}) \cong (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$$

(en la próxima sesión se verá la formalización de este homeomorfismo).

□

Ejemplo. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la bola unidad cerrada $(\overline{\mathbb{B}}(0,1), \mathcal{T}_u)$ y considero $A = \mathbb{S}^1$. Tenemos entonces $(\overline{\mathbb{B}}(0,1)/\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\overline{\mathbb{B}}(0,1)/\mathbb{S}^1}) \cong (\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_u)$.

□

Ejemplo. Consideramos $([0,1] \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Definimos la relación de equivalencia R como

$$(x,y)R(x',y') \iff (x,y) = (x',y') o \begin{cases} y = y' \\ \{x, x'\} = \{0,1\} \end{cases}$$

□

Ejemplo. Consideramos $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ e.t y la proyección $\pi_X : (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ que es una identificación (ya visto en clase). Consideramos también $R_{\pi_X} : (X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}') \to (X \times Y/R_{\pi_X}, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'/R_{\pi_X})$ dada por

$$(x,y)R_{\pi_X}(x',y') \iff x = x'$$

Esto identifica todas las rectas verticales de un plano en un punto por lo que tenemos que $(X \times Y/R_{\pi_X}, \mathcal{T} \times \mathcal{T}'/R_{\pi_X}) \cong (X, \mathcal{T})$.

□

Lema 2.23. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado en $\mathcal{T}_u$ y acotado y una aplicación $f : (A, \mathcal{T}_u|_A) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_u)$ continua, entonces f es cerrada.

□

Ejemplo. Consideramos el intervalo $[0, 1]$ y la relación $R_{\{0,1\}}$ dada por

$$xR_{\{0,1\}}y \iff \left\{ \begin{array}{c} x = y \\ o \\ \{x, y\} = \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Tenemos que encontrar una identificación $f : ([0, 1], \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ y tal que $R_f = R_{\{0,1\}}$.

Podemos definir

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{aligned}$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

- •) f es continua.
- •) f es sobreyectiva.
- •) f es cerrada (por el lema anterior).

Por tanto es una identificación y además tenemos que $\tilde{f} : ([0, 1]/R_f, \mathcal{T}_u/R_f) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$. Nos queda comprobar que $R_f = R_{\{0,1\}}$. Para ello sabemos que $xR_fx' \iff f(x) = f(x') \iff x = x$ o $\{x, x'\} = \{0, 1\}$ y tenemos la igualdad buscada (ya que coinciden en su definición).
Este ejemplo se llama circunferencia como cociente del $[0, 1]$.

□

Ejemplo. ($\mathbb{S}^1$ como cociente de $\mathbb{R}$) Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) &\to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u) \\ f(t) &\mapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{aligned}$$

Intuitivamente podemos ver que f "enrolla" $[a, a + 1)$ en $\mathbb{S}^1$. Esta aplicación tiene las siguientes propiedades:

- •) f es continua.
- •) f es sobreyectiva.
- •) f es abierta. Para verlo consideramos $\mathcal{B} = \{(a, b); a < b, b - a \leqslant 1/2\}$ base de $\mathcal{T}_u$. Tengo que ver si $f((a, b)) \subset \mathbb{S}^1$ es abierto en $\mathcal{T}_u$. Sabemos por la restricción que se ha dado entre la distancia entre a y b que el ángulo entre $f(a)$ y $f(b)$ es menor que π y además $f(a, b)$ será el arco de la circunferencia que quede entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces tengo que $f((a, b)) = U \cap \mathbb{S}^1$ con U el cono abierto en $\mathbb{R}^2$ con vértice $(0, 0)$ y lado las rectas que pasan por $f(a)$ y $f(b)$ respectivamente.

Por tanto f es una identificación y tengo que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo. Tenemos

$$xR_fx' \iff f(x) = f(x') \iff \left\{ \begin{array}{l} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi x') \\ \operatorname{sen}(2\pi x) = \operatorname{sen}(2\pi x') \end{array} \right. \iff x - x' \in \mathbb{Z}$$

□

Ejemplo. (El cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ como cociente de $[0,1]\times\mathbb{R}$) Este ejemplo es el desarrollo de un ejemplo de la sesión anterior y teníamos

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ o \\ y=y', \{x,x'\}=\{0,1\} \end{cases}$$

Queremos ver que $([0,1]\times\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R) \cong (\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

En primer lugar sabemos que $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$.

Buscamos una identificación $g : ([0,1]\times\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R) \to (\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ con $R_f = R$.

$$g(x,y) = (\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x), y)$$

Y tenemos que $g = f\times Id_{\mathbb{R}}$, donde f es la identificación del ejemplo anterior y como es un producto de identificaciones es una identificación.

Nos queda ver que $R_g = R$. Por definición sabemos que

$$(x,y)R_g(x',y') \iff g(x,y)=g(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ o \\ y=y', \{x,x'\}=\{0,1\} \end{cases}$$

Y tenemos lo buscado y por tanto $([0,1]\times\mathbb{R}/R_g, \mathcal{T}_u/R_g) \cong (\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

□

Ejercicio 2.4.1. (El cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ como cociente de $\mathbb{R}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$)
Consideramos la siguiente relación de equivalencia:

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ o \\ y=y', x-x'\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Se deja planteado como ejercicio (está muy relacionado con los ejemplos anteriores).

□

Ejercicio 2.4.2. (El cilindro acotado como cociente de $[0,1]\times[0,1]$)
Podemos escribir el cilindro como $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$

□

Ejemplo. (La cinta de Möbius)
Se define la cinta de Möbius finita como el cociente de $([0,1]\times[0,1], \mathcal{T}_u)$ con la relación de equivalencia R dada por

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ o \\ \{x,x'\}=\{0,1\}, y=1-y' \end{cases}$$

La cinta de Möbius infinita se define como el cociente $([0,1]\times\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u)$ donde R está dada por

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ o \\ \{x,x'\}=\{0,1\}, y=-y' \end{cases}$$

□

Ejemplo. (Toro)
Se define el toro como $([0,1]\times[0,1]/R, \mathcal{T}_u/R)$ donde R viene dada por

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ o \\ \{x,x'\}=\{0,1\}, y=y' \\ o \\ x=x', \{y,y'\}=\{0,1\} \\ o \\ (x,y),(x',y')\subset\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \end{cases}$$

Notaremos el toro como $\mathbb{T}\cong(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u\times\mathcal{T}_u)$. Considero

$$\begin{aligned} g : [0,1]\times[0,1] &\to \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \\ (x,y) &\mapsto (\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x), cos(2\pi y), \mathrm{sen}(2\pi y)) \end{aligned}$$

Geométricamente se define el toro como

$$X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$$

Podemos definir

$$\begin{aligned} h : [0,1]\times[0,1] &\to X \\ (t,s) &\mapsto (\cos(2\pi t(cos(2\pi s)+2)), -sen(2\pi)(cos(2\pi s)+2), \mathrm{sen}(2\pi s)) \end{aligned}$$

□

Ejemplo. (El espacio proyectivo (real))
Se define el **espacio proyectivo** de dimensión $n\geqslant 1$ como el espacio cociente

$$\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/R, \mathcal{T}_u/R)$$

donde R es la relación de equivalencia dada por

$$xRy \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ con } \lambda x=y \text{ donde } x,y\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$$

Veamos algunas consecuencias de esta definición:

•) $\mathbb{RP}^n\cong(\mathbb{S}^n/S, \mathcal{T}_u/S)$ con $xSx' \iff x=\pm x'$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_R"'] \arrow[dr, "g\circ p_S"] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "p_S"] \\ \mathbb{RP}^n=\mathbb{R}^{n+1}/R \arrow[r, dashed, "\tilde{g}"'] & \mathbb{S}^n/S \end{tikzcd}$$

Para ello podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

A partir de aquí tenemos 2 formas de comprobar si estos espacios son homeomorfos.

- La que se trabajó en los ejemplos anteriores
- Comprobando que g es compatible con R y S y viendo que $\tilde{g}$ es un homeomorfismo.

Veamos esta segunda forma de hacerlo:

Supongamos $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Entonces tenemos

$$xRy \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ con } x = \lambda y$$

Veamos que entonces $g(x)Sg(y)$

$$g(x) = \frac{x}{\|x\|} = \frac{\lambda y}{\|\lambda y\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \frac{y}{\|y\|} = \lambda|\lambda| \cdot g(y) = \pm g(y) < \iff g(x)Sg(y)$$

Y tenemos entonces que $\exists \tilde{g} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^n/S$ continua y con $g \circ p_R = p_S \circ g$. Me queda ver que $\tilde{g}$ es un homeomorfismo.

Para ello buscaremos una inversa de $\tilde{g}$ que sea continua. Consideremos la aplicación inclusión dada por

$$\begin{aligned} i : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Que verifica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_S"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p_R"] \\ \mathbb{S}^n/S \arrow[r, dashed, "\tilde{i}"'] & \mathbb{R}^{n+1}/R = \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

Esta aplicación es claramente continua. Veamos que $\tilde{i}$ es inversa de $\tilde{g}$ y que es compatible con R y S. Tenemos lo siguiente para $x, x' \in \mathbb{S}^n$

$$xSx' \iff x' = \pm x \iff xRx'$$

por lo que $\exists \tilde{i} : \mathbb{S}^n/S \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/R$ continua. Veamos que efectivamente es inversa de $\tilde{g}$.

Sea $[x]_R \in \mathbb{RP}^n$. Entonces

$$\tilde{i}(\tilde{g}([x]_R)) = \tilde{i}([g(x)]_S) = \tilde{i}\left(\left[\frac{x}{\|x\|}\right]_S\right) = \left[\frac{x}{\|x\|}\right]_R = [x]_R$$

Consideramos ahora $[x]_S \in \mathbb{S}^n/S$. Ahora tenemos

$$\tilde{g}(\tilde{i}([x]_S)) = \tilde{g}([i(x)]_R) = \tilde{g}([x]_R) = [g(x)]_S = \left[\frac{x}{\|x\|}\right]_S \overset{*}{=} [x]_S$$

Donde en $*$ hemos aplicado que $[x]_S \in \mathbb{S}^n/S$ y por tanto $\|x\| = 1$.
Finalmente tenemos que $\tilde{g}$ es un homeomorfismo y por tanto $\mathbb{RP}^n \cong (\mathbb{S}^n/S, \mathcal{T}_u/S)$.

•) $\mathbb{RP}^n \cong (\overline{\mathbb{B}}^n/R', \mathcal{T}_u/R')$ con R' dada por

$$xR'y \iff \begin{cases} x = y \\ o \\ x = y, \|x\| = 1 \end{cases}$$

Sabemos que $\mathbb{RP}^n \cong (\mathbb{S}^n/S, \mathcal{T}_u/S)$ con S dada por

$$xSx' \iff x = \pm x'$$

Veamos que efectivamente se da el homemorfismo $\mathbb{RP}^n \cong (\overline{B}^n/R', \mathcal{T}_u/R')$.
Para verlo podemos considerar la aplicación $f(x) = (x, \sqrt{1 - \|x\|})$ que es claramente continua, cerrada (por el lema ya que $\mathbb{B}^n$ es cerrado y acotado).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{R'}"'] \arrow[dr, "p_S \circ f"] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "p_S"] \\
\mathbb{B}^n/R' \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & \mathbb{S}^n/S
\end{tikzcd}$$

Queremos ver ahora que $p_S \circ f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^n/S$ es una identificación. Sabemos que es continua y sobreyectiva. Veamos que es también cerrada.

Para ello tomamos $C \subset \mathbb{S}^n$ cerrado. Tenemos que $p_S^{-1}(p_S(C)) = C \cup (-C) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^n}}$ donde $(-C) = \{x \in \mathbb{S}^n : -x \in C\}$.

Por tanto tenemos que $\exists \tilde{f} : (\mathbb{B}^n/R_{p_s \circ f}, \mathcal{T}_u/R_{p_s \circ f}) \to (\mathbb{S}^n/S, \mathcal{T}_u/S) \cong \mathbb{RP}^n$.

Solo nos queda ver que $R_{p_S \circ f} = R'$. Para ello tomamos $x, y \in \overline{B}^n$ y tenemos

$$xR_{p_S \circ f}y \iff (p_S \circ f)(x) = (p_S \circ f)(y) \iff [(x, \sqrt{1 - \|x\|})]_S = [(y, \sqrt{1 - \|y\|})]_S \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ o \\ x = -y, \|x\| = 1 \end{cases} \iff xR'y$$

Y ya lo tenemos.

□

Ejemplo. (La esfera $\mathbb{S}^2$ como cociente)

•) $(\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_u) \cong (\overline{\mathbb{B}^2}/R, \mathcal{T}_u/R)$ donde R es la relación dada por

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y) = (x',y') o \\ (x,y) = (x',-y') \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

•) $(\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_u) \cong ([0,1] \times [0,1]/R, \mathcal{T}_u/R)$ donde R es la relación dada por

$$(x,y)R(x',y') \iff \begin{cases} (x,y) = (x',y') o \\ \{(x,y),(x',y')\} = \{(t,0),(0,t)\} \quad t \in [0,1] \\ o \\ \{(x,y),(x',y')\} = \{(t,1),(1,t)\} \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

La demostración de estos ejemplos se deja como ejercicio

□

3. Conexión y Compacidad

3.1. Conexión

Una primera intuición nos puede decir que un conjunto es conexo si todos sus puntos están conectados. Por ejemplo el e.t. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ parece que es conexo mientras que otro espacio como el $([0,1] \cup \{2\}, \mathcal{T}_u)$ está hecho de varios "trozos" y por tanto no parece ser conexo. Incluso cambiando la topología puede ser que este segundo espacio fuese conexo (es por esto que no nos tenemos que dejar llevar siempre por la intuición).

Definición 3.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t.

- •) Una **separación** de $(X, \mathcal{T})$ es una pareja de abiertos $\{U, V\} \subset \mathcal{T}$ que verifican $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$.

  Se llama **separación trivial** a $\{X, \emptyset\}$.

- •) $(X, \mathcal{T})$ es **conexo** si su única separación es la trivial, es decir si $U, V \in \mathcal{T}$ con $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.

- •) $(X, \mathcal{T})$ es **disconexo** si no es conexo, es decir, si existen $U, V \in \mathcal{T}$ con $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$ de forma que $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$.

- •) Un subconjunto $A \subset X$ no vacío se dice **conexo** en $(X, \mathcal{T})$ si $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo y **disconexo** en caso contrario.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$ es conexo siempre.

- •) Si $\#X = 1$ y consideramos $(X, \mathcal{T})$, entonces es conexo.

- •) Si $\#X \geqslant 2 \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{disc})$ es disconexo. Para verlo podemos tomar $U \in \mathcal{T}_{disc}$ con $U \notin \{\emptyset, X\}$ y entonces tenemos $X \setminus U \in \mathcal{T}_{disc}$ y además $X \setminus U \neq\notin \{X, \emptyset\}$ y tenemos que $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y $U \cup (X \setminus U) = X$.

- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ es conexo (si $U, V \in \mathcal{T}_{x_0}$ no vacíos, entonces $x_0 \in (U \cap V) \neq \emptyset$).

- •) Si $\#X = \infty \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es conexo. Para verlo supongamos que existen $U, V \in \mathcal{T}_{CF} \setminus \{\emptyset\}$ con $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $X \setminus U$, $X \setminus V$ son finitos y entonces $(X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ es finito pero $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V) = X$ que no es finito y por tanto llegamos a contradición.

- •) $(\{0,1\}, \mathcal{T}_u|_{\{0,1\}})$ es disconexo ya que $\{\{0\},\{1\}\}$ es una separación.
- •) $(\{0,1\}, \mathcal{T})$ con $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\}$ es conexo.
- •) $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{1\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ es disconexo en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$.
- •) $[0,1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ es disconexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$
- •) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es disconexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.
- •) $\mathbb{Z}$ es disconexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

□

Teorema 3.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t, entonces equivalem:

(i) $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

(ii) Si $A \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}})$, entonces $A \in \{\emptyset, X\}$.

(iii) $(X, \mathcal{T})$ cumple la **propiedad de los valores intermedios**[1], es decir, si $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua y $a < b \in f(X)$, entonces $[a,b] \in f(X)$.

(iv) Si $g : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ es continua, entonces g es constante

Demostración.

(i)⇒(ii)) $A \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{T} \Rightarrow \{A, (X \setminus A)\}$ es una separación de $(X, \mathcal{T})$. Por (i) tenemos que $\{A, (X \setminus A)\} = \{X, \emptyset\}$ por lo que $A \in \{\emptyset, X\}$.

(ii)⇒(iii)) Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua. Veamos que verifica la propiedad de los valores intermedios. Hagamos una distinción de casos:

- •) Si f es constante, entonces cumple trivialmente PVI.
- •) Si f no es constante podemos considerar $a < b \in f(X)$ y tendremos que ver que $[a,b] \subset f(X)$. Supongamos que no, es decir, que $\exists c \in (a,b)$ con $c \notin f(X)$. Definimos $A = f^{-1}((-\infty, c)) = f^{-1}((-\infty, c])$ y como f es continua tenemos que $A \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}})$ por lo que por (ii) sabemos que $A \in \{\emptyset, X\}$. Sin embargo, sabemos que $a \in f(X)$ y $a < c$ por lo que $A \neq \emptyset$. Además, $b \in f(X)$ pero $f^{-1}(b) \notin A$ por lo que $A \neq X$ y llegamos a contradicción.

(iii)⇒(iv)) Sea $g : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Sabemos que $\mathcal{T}_{disc}|_{\{0,1\}} = \mathcal{T}_u|_{\{0,1\}}$ y entonces podemos considerar la composición con la inclusión $i \circ g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es continua. Por (iii) sabemos que $(i \circ g)(X) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Además, $(i \circ g)(X) = g(X) \subset \{0,1\}$ y es un intervalo (con la observación que viene a continuación). Esto implica que $g(X) = \{0\}$ o $g(X) = \{1\}$ lo cual implica que g es constante.

[1] A partir de ahora lo notaremos por PVI

(iv)⇒(i)) Sea $\{U, V\}$ una separación de $(X, \mathcal{T})$. Veamos que $\{U, V\} = \{X, \emptyset\}$. Para ello considero la aplicación $g : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{disc})$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Y tenemos que es continua ya que $g^{-1}(\{0\}) = U \in \mathcal{T}$ y $g^{-1}(\{1\}) = V \in \mathcal{T}$. Por (iv) tenemos que $g = cte$ y por tanto, $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$ y como es una separación tenemos que $\{U, V\} = \{\emptyset, X\}$ y tenemos que $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

□

Observación. Consideraremos que $[a, a] = \{a\}$ y lo llamaremos intervalo (a pesar de no ser estrictamente un intervalo según su definición formal). Con esto podríamos traducir el apartado (iii) del teorema anterior en que $f(X)$ sea un intervalo.

□

Corolario 3.1.1. (Teorema de Bolzano)
Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo, $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es continua y $\exists x, y \in X$ con $f(x) < 0 < f(y)$, entonces $\exists z \in X$ con $f(z) = 0$. Esto es por cumplir la PVI.

□

Corolario 3.1.2. Si $(X, \mathcal{T})$ conexo y $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua con $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in X$, entonces $f > 0$ o $f < 0$ en todo X.

□

Corolario 3.1.3. Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, entonces A es conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \iff A$ es unitario o A es un intervalo.

Demostración.

⇐) Si A es unitario es conexo. Si A es un intervalo, entonces $(A, \mathcal{T}_u|_A)$ cumple la PVI[2] y por el teorema tenemos que A es conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

⇒) Supongamos que A es conexo y que no es ni unitario ni un intervalo. Por tanto existen $a < c < b$ tales que $a, b \in A$ pero $c \notin A$. Consideramos $U = (-\infty, c) \cap A$, $V = (c, +\infty) \cap A$ y tenemos que $\{U, V\}$ es una separación de $(A, \mathcal{T}_u|_A)$ que no es trivial ya que $a \in U$ y $b \in V$ por lo que $(A, \mathcal{T}_u|_A)$ es disconexo y llegamos a contradicción.

□

Observación. La conexión no es una propiedad hereditaria.

□

Corolario 3.1.4. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo en $(Y, \mathcal{T}')$.

Si f es además sobreyectiva, entonces $(Y, \mathcal{T}')$ es conexo.

[2] la estudiada en la asignatura de Cálculo I

Demostración. Tenemos que comprobar que $(f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ es conexo. Para ello consideramos $g : (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua y tendremos que ver que $g = cte$. Tomamos $g \circ f^{f(X)} : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ que es continua (por ser composición de continuas) y además, por hipótesis tenemos que $(X, \mathcal{T})$ es conexo por lo que $g \circ f^{f(X)}$ es constante y por tanto g es constante y por el teorema anterior tenemos lo buscado.

□

Corolario 3.1.5.

(i) La conexión es un invariante topológico.

(ii) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una identificación y $(X, \mathcal{T})$ es conexo, entonces $(Y, \mathcal{T}')$ es conexo.

(iii) Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y R es una relación de equivalencia en X, entonces $(X/R, \mathcal{T}/R)$ es conexo.

(iv) $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$ es conexo.

(v) $[a,b], [a,b), (a,b]$ y (a,b) no son homeomorfos en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$

(vi) $(\mathbb{R} \setminus \{x\}, \mathcal{T}_u)$ no es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

(vi) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$.

Demostración.

(i) Trivial.

(ii) Trivial.

(iii) Trivial.

(iv) Sabemos que $([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$ es conexo y tenemos que existe una función $f : ([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]}) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ es continua y sobreyectiva, por ejemplo, $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$.

(v) Supongamos que $[a,b) \cong (a,b)$. Entonces tenemos que existe un homeomorfismo $f : ([a,b), \mathcal{T}_u) \to ((a,b), \mathcal{T}_u)$. Pero entonces $f|_{[a,b]} : ([a,b), \mathcal{T}_u) \to ((a,b) \setminus \{f(a)\}, \mathcal{T}_u)$ sería un homeomorfismo pero llegaríamos a contradicción ya que la conexión es un invariante topológico.

(vi),(vii) Se dejan planteadas como ejercicios para el lector.

□

Teorema 3.2. (Teorema del punto fijo) Si $f : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to ([0,1], \mathcal{T}_u)$ continua, entonces $\exists x_0 \in [0,1]$ con $f(x_0) = x_0$.

Demostración. Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ con $h(x) = f(x) - x$ continua. Tenemos que $[0,1]$ es conexo luego

$$\left.\begin{array}{r} h(0) = f(0) \geqslant 0 \\ h(1) = f(1) - 1 \leqslant 0 \end{array}\right\} \overset{PVI}{\Rightarrow} 0 \in [h(1), h(0)] \subset h([0,1]) \Rightarrow \exists x_0 : h(x_0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_0) = x_0$$

□

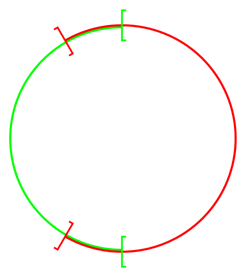
Teorema 3.3. (Teorema de la invariaza del dominio) Si $A \neq \emptyset$ es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $f : (A, \mathcal{T}|_A) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es un embebimiento, entonces $f(A)$ es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Demostración. Sabemos que $A \in \mathcal{T}_u$ y además $A \neq \emptyset$ luego podemos escribir $A = \bigcup\limits_{i\in I} I_i$ donde I_i es un itervalo abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ $\forall i \in I$, luego tenemos que $f(A) = f(\bigcup\limits_{i\in I} I_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(I_i)$. Si conseguimos ver que $f(I_i) \in \mathcal{T}_u$ $\forall i \in I$ tendremos lo buscado. Sabemos que I_i es conexo y f es continua luego $f(I_i)$ es conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y por tanto es un intervalo (no unitario porque f es inyectiva). Además, como f es un embebimiento tenemos que $f(I_i) \cong I_i$ que es un intervalo abierto por lo que $f(I_i)$ será también un intervalo abierto y entonces $f(I_i) \in \mathcal{T}_u$. Como i era arbitrario tenemos lo buscado.

□

3.1.1. Construcción de conexos

En general, la unión de conexos no es conexo. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ tenemos que $]0,1[\cup]2,3[$ no es conexo. La intersección tampoco lo será. Por ejemplo, en $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ podemos imaginar 2 abiertos que se "crucen" y su intersección no será conexa (ya que generará otros 2 abiertos que no estarán conectados) como se ve en la figura a continuación:



Proposición 3.4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conexos en $(X, \mathcal{T})$. Se tienen:

(i) Si $\exists i_o \in I$ tal que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ $\forall i \in I$, entonces se tiene que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es conexo en $(X, \mathcal{T})$.

(ii) Si $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo en $(X, \mathcal{T})$.

(iii) Si $I = \mathbb{N}$ y $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo en $(X, \mathcal{T})$.

Demostración.

(i) Sea $g : (\bigcup\limits_{i\in I} A, \mathcal{T}_u) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Entonces $\forall i \in I$ consideramos $g|_{A_i} : (A_i, \mathcal{T}_u) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{disc})$ continua. Entonces tenemos que $g|_{A_i}$ es constante. En particular, $g|_{A_{i_0}} = c_{i_0}$. Tendremos que ver que $c_i = c_{i_0}\ \ \forall i \in I$. Como $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in A_i \cap A_{i_0}$ y entonces

$$\left.\begin{array}{r} c_i = g|_{A_i}(x) = g(x) \\ c_{i_0} = g|_{A_{i_0}}(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow c_{i_0} = c_i \Rightarrow g \text{ es constante } \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ conexo}$$

(ii) Corolario de (i).

(iii) Se deja planteado como ejercicio para el lector.

□

Ejemplo.

- **•)** $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice **estrellado** si $\exists x_0 \in A$ tal que $[x, x_0]^n = \{(\lambda x_0 + (1-\lambda)x) : \lambda \in [0,1]\} \subset A\ \ \forall x \in A$, es decir, si el segmento que une cualquier punto x de A con el punto x_0 está contenido en A.

  En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ todo subconjunto estrellado es conexo, $A = \bigcup\limits_{x\in A} [x, x_0]$, con $x_0 \in \bigcap\limits_{x\in A} [x, x_0] \neq \emptyset$ y $[x, x_0]$ es conexo. En particular, todo subespacio afín de $\mathbb{R}^n$, las bolas abiertas y cerradas y los convexos de $\mathbb{R}^n$ son conexos.

- **•)** $(\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$ es conexo. Para verlo, podemos considerar $\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$ y como $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cong \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$ entonces $\mathbb{S}^n$ es unión de conexos con intersección no vacía.

- **•)** Si $n \geqslant 2$, entonces $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo, ya que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}} \left(\mathbb{S}^n \cup \left[x, \frac{x}{\|x\|}\right]\right)$.

  Además, como $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (aplicando una traslación $y \mapsto y - x$), entonces también será convexo $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

□

Corolario 3.4.1.

(i) $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n\ \ \forall n \geqslant 2$ ya que $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ es conexo pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no lo es.

(ii) $\mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{S}^n\ \ \forall n \geqslant 2$ porque $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \not\cong \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ ya que $\mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \cong \mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$.

□

Teorema 3.5. (Teorema de Borsuk-Ulam) Si $f : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ continua, entonces $\exists p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p_0) = p(-p_0)$.

Demostración. Sea $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = f(p) - f(-p)$ que es continua por serlo f. Se tiene que $h(-p) = f(-p) - f(p) = -h(p) \Rightarrow h \equiv 0$ o h toma valores negativos y negativos. En este segundo caso tendremos que $\exists p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $h(p_0) = 0 = f(p_0) - f(-p_0)$ y lo tenemos en cualquiera de los dos casos.

□

Proposición 3.6. Sea $(X,\mathcal{T})$ un e.t. y $A\subset X$ conexo. Si $B\subset X$ cumple $A\subset B\subset \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, $\overline{A}$ es conexo.

Demostración. Sea $f:(B,\mathcal{T}_B)\to(\{0,1\},\mathcal{T}_{disc})$ continua. Tendremos que ver que f es constante. Para ello, como $A\subset B$, puedo tomar $\overline{A}^B=\overline{A}\cap B=B$ por lo que A es denso en B. Por otra parte, $f(\overline{A}^B)\subset\overline{f(A)}$, y como A es conexo, $f|_A$ es continua y constante $\Rightarrow f(A)=\{0\}$ o $f(A)=\{1\}$. En cualquier caso tendremos $\overline{f(A)}=\{0\}$ o $\overline{f(A)}=\{1\}$, luego f es constante porque $f(B)\subset\overline{f(A)}$.

□

Ejemplo.

- •) Sea $(X,\mathcal{T})$ un e.t. y supongamos que existe $A\subset X$ denso y conexo, entonces $(X,\mathcal{T})$ es conexo.
- •) $f:]0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $A=G(f)=\left\{\left(x,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right):x\in]0,1]\right\}$. Entonces $A\cong]0,1]$ que es conexo. Esto quiere decir que la gráfica de una función es homeomorfa al dominio de la aplicación,

$$\begin{aligned}A&\to]0,1]\\(x,\operatorname{sen}(1/x))&\mapsto x\end{aligned}$$

  Además, $\overline{A}=A\cup[(0,1),(0,-1)]$ es conexo.

□

Proposición 3.7. Sean $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ e.t. Entonces $(X\times Y,\mathcal{T}\times\mathcal{T}')$ es conexo si y solo si $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{T}')$ son conexos.

Demostración.

- ⇒) Como las proyecciones π_X y π_Y son continuas y sobreyectivas, esta implicación es trivial.
- ⇐) Sabemos que $(X,\mathcal{T})$ es conexo. Sea $y\in Y$ tenemos que $(X\times\{y\},\mathcal{T}\times\mathcal{T}'|_{X\times\{y\}})\cong(X,\mathcal{T})$ que es conexo. Si consideramos ahora $x\in X$ y $(\{x\}\times Y,\mathcal{T}\times\mathcal{T}'|_{\{x\}\times Y})\cong(Y,\mathcal{T}')$. Con esto tenemos que

$$X\times Y=\left(\bigcup_{x\in X}\{x\}\times Y\right)\cup(X\times\{y_0\})$$

  Por lo que $X\times Y$ es unión de conexos y $(X,\{y_0\})$ tiene intersección con todos los $\{x\}\times Y$ luego $X\times Y$ es conexo.

□

Ejemplo. Los siguientes conjuntos son conexos:

- •) $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ (cilindro).
- •) $\mathbb{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ (toro).
- •) $\mathbb{RP}^n=\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/R$ (proyectivo).
- •) La cinta de Möbius.

□

3.1.2. Componentes conexas

Definición 3.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $x \in X$, se define la **componente conexa** (c.c.) de x en $(X, \mathcal{T})$ como la unión de todos los conjuntos conexos de X que contienen a x. Se le denota por $\mathcal{C}(x)$.

□

Proposición 3.8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t, $x \in X$. Entonces

(i) $\mathcal{C}(x)$ es el mayor conexo en X que contiene a x.

(ii) Las c.c. de $(X, \mathcal{T})$ determinan una partición de X, es decir que $\bigcup\limits_{x \in X} \mathbb{C}(x) = X$ y $\forall x, y \in X$ se tiene que o bien $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(y)$ o bien $\mathbb{C}(x) \cap \mathbb{C}(y) = \emptyset$.

(iii) $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo sí tiene una única c.c., es decir, $\mathbb{C}(x) = X \ \ \forall x \in X$.

(iv) Las c.c. de $(X, \mathcal{T})$ son cerrados en $(X, \mathcal{T})$ (en general no serán abiertos).

(v) Si $\emptyset \neq A \subset X$ es abierto cerrado y conexo, es decir, $A \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}})$ y conexo, entonces A es una c.c. de $(X, \mathcal{T})$ (la otra implicación no es cierta en general, en concreto que A sea abierto).

(vi) Si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, A_i conexo $\forall i \in I$, es una partición de X , es decir, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$ y $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$, entonces $\{A_i\}_{i \in I}$ con las c.c. de $(X, \mathcal{T})$ (de nuevo la otra implicación no es cierta ya que no siempre la partición tiene que ser por abiertos).

Demostración.

(i) Trivial, porque la unión de conexos con intersección no vacía es conexa.

(ii) Como $x \in \mathbb{C}(x) \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in X} \mathbb{C}(x) = X$. Veamos ahora la segunda parte. Para ello supongamos que tenemos dos componentes conexas de forma que $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, tendré que ver que entonces $\mathbb{C}(x) = (C)(y)$. Como la intersección es no vacía tengo que $x, y, \in C(x) \cup C(y)$ y es conexo por lo que $\mathbb{C}(x) \cup \mathbb{C}(y) \subset \mathbb{C}(x)$ y también $\mathbb{C}(x) \cup \mathbb{C}(y) \subset \mathbb{C}(y)$ por lo que $\mathbb{C}(x) \cup \mathbb{C}(y) \subset \mathbb{C}(x) \cap \mathbb{C}(y)$ y por tanto $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(y)$.

(iii) Trivial.

(iv) Sea $x \in X$ y queremos ver que $\mathbb{C}$ es cerrado, es decir, que coincide con su adherencia. Para ello sabemos que $\overline{\mathbb{C}(x)}$ es conexo y además $x \in \overline{\mathbb{C}(x)}$ por lo que $\overline{\mathbb{C}(x)} \subset \mathbb{C}(x)$ y como la otra inclusión se da siempre ya lo tenemos probado.

(v) Sea $x \in A$, tendremos que ver que $A = \mathbb{C}(x)$. Sea $B \subset X$ conexo con $A \subset B$. Si esto implica que $A = B$ entonces tendré que A es una componente conexa (ya que no hay ningún conexo más grande). Para ello tenemos que

$$\left.\begin{array}{lcl} A \in \mathcal{T}, A \subset B & \Rightarrow & A \in \mathcal{T}|_B \\ A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}, A \subset B & \Rightarrow & A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}|_B} \end{array}\right\} \overset{B \text{ conexo}}{\Rightarrow} A = \emptyset \text{ o } A = B$$

Como $A \neq \emptyset$ tenemos lo buscado.

(vi) Su demostración se deja como ejercicio para el lector.

□

Observación.

- •) La relación en R dada por $xRy \iff \exists A \subset X$ conexo con $\{x,y\} \subset A$ es de equivalencia. Las clases de equivalencia de R son las c.c. de $(X, \mathcal{T})$.

- •) Si $(X, \mathcal{T})$ tiene una cantidad finita de c.c, $A_1, \dots, A_n$, entonces $A_k \in \mathcal{T} \ \ \forall k \in 1, \dots n$ ya que tenemos

$$A_i = X \setminus \left(\bigcup_{j \neq i}^{n} A_j \right)$$

Y como $A_j \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y la unión finita de cerrados es cerrada, tendríamos que $A_i \in \mathcal{T}$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ las c.c. son $\{\{x\} : x \in X\}$ (abierto, cerrado, conexo y no vacío).

- •) Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_n \in \mathbb{R}$, las c.c. de $(\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n, \mathcal{T}_u\})$ son

$$\{(-\infty, x_1), (x_n, +\infty)\} \cup \{(x_i, x_i + 1) : i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

En particular, las c.c. de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ son $\{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}$.

- •) Las c.c. de $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \mathcal{T}_u)$ son $\{(m, m+1) : m \in \mathbb{Z}\}$.

- •) Las c.c. de $(\mathbb{R} \setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}\}, \mathcal{T}_u)$ son $\{(-\infty, 0], (1, +\infty)\} \cup \{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ y $(-\infty, 0] \notin \mathcal{T}_u$ (ejemplo de que puede haber componentes conexas no abiertas).

- •) Las c.c. de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ son $\{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$ y ninguna es abierta.

- •) En $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ y consideramos $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{(0,0), \left(1, \frac{1}{n}\right)\right\}$. X es conexo por ser unión de conexos y cuya intersección es el punto $(0,0)$ por lo que no es vacía. Además, $\overline{X} = X \cup [(0,0), (1,0)] \Rightarrow Y = X \cup \{1, 0\}$ es conexo por estar en la adherencia y contener a X. Sin embargo, si consideramos $Y \setminus \{(0,0)\}$ no es conexo y sus c.c. son $\left\{ \left((0,0), \left(1, \frac{1}{n}\right)\right] : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{1, 0\}$.

□

Teorema 3.9. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua, $x \in X$ y sea $\mathcal{C}(x)$ la c.c. de X que continene a x y $\mathcal{C}'(f(x))$ a la c.c. de Y que contiene a $f(x)$. Entonces $f(\mathcal{C}(x)) \subset \mathcal{C}'(f(x))$.
Si además f es un homeomorfismo, entonces f define una biyección entre las c.c. de $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}')$ y $f|_{\mathcal{C}(x)} : (\mathcal{C}(x), \mathcal{T}|_{\mathcal{C}(x)}) \to (\mathcal{C}'(f(x)), \mathcal{T}'|_{\mathcal{C}'(f(x))})$ es un homeomorfismo.

Demostración. Empecemos probando que $f(\mathcal{C}(x)) \subset \mathcal{C}'(f(x))$. Sabemos que f es continua y $\mathcal{C}(x)$ es conexo luego $f(\mathcal{C}(x))$ es conexo y además $f(x) \in f(\mathcal{C}(x))$ por lo que tenemos que $f(\mathcal{C}(x)) \subset \mathcal{C}'(f(x))$.
Veamos la segunda parte. Como sabemos que f es un homeomorfismo sabemos que f^{-1} es continua y por tanto $f^{-1}(C'(f(x))) \subset \mathcal{C}(x)$. Si ahora aplicamos f obtenemos $\mathcal{C}'(f(x)) \subset f(\mathcal{C}(x)) \Rightarrow f(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{C}'(f(x))$ por lo que

$$f|_{\mathcal{C}(x)} : \mathcal{C}(x) \to \mathcal{C}'(f(x)) \text{ es un homeomorfismo} \quad \forall x \in X$$

□

Corolario 3.9.1. El número de c.c. de un e.t. es un invariante topológico.

□

Ejemplo.

- •) $[0,1] \times \{0,1\} \not\cong [0,1] \times \{0,1,2\}$ (ya que tienen distinto número de c.c., el primero tiene 2 y el segundo tiene 3).
- •) $[0,1] \cup \{2\} \not\cong [0,1] \cup [2,3]$ (ya que si fuesen homeomorfos, al restringir a una componente conexa tendría que tener un homeomorfismo sobre las componentes conexas y al restringir la c.c. a $\{2\}$ tendría que ser homeomorfo a alguna de las c.c. pero como solo tiene un punto no se da).
- •) $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \not\cong (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_0^+)$ (ya que si lo fueran le podría quitar el origen al primer espacio y me quedarían 4 c.c. pero de ninguna forma quitandole un punto al segundo espacio se pueden obtener 4 c.c).

Proposición 3.10. Sean $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ e.t., $x \in X$, $y \in Y$, entonces $\mathcal{C}((x,y)) = \mathcal{C}(x) \times \mathcal{C}(y)$.

Demostración. Veámoslo por doble inclusión:

- $\subset$) Sabemos que la proyección $p_X : X \times Y \to X$ es continua por lo que por el teorema anterior sabemos que $p_X(\mathcal{C}((x,y))) \subset \mathcal{C}(x)$. Si lo repetimos para p_Y obtenemos que $p_Y(\mathcal{C}((x,y))) \subset \mathcal{C}'(y)$ y por tanto $\mathcal{C}((x,y)) \subset \mathcal{C}(x) \times \mathcal{C}(y)$.
- $\supset$) Como $\mathcal{C}(x)$ y $\mathcal{C}(y)$ son conexos tenemos que $\mathcal{C}(x) \times \mathcal{C}(y)$ es conexo luego $\mathcal{C}(x) \times \mathcal{C}(y) \subset \mathcal{C}((x,y))$.

□

3.1.3. Conexión por arcos

Definición 3.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t.

- •) Un **camino** o **arco** en $(X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua

$$\alpha : ([0,1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]}) \to (X, \mathcal{T})$$

A los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se les llama **extremo inicial** y **extremo final** respectivamente y decimos que α **conecta** $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$.

- •) Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es **conexo por arcos**, **conexo por caminos** o **arcoconexo** (a.c.) si $\forall x, y \in X$, existe un arco α en X que conecta x e y.

- •) Sea $A \subset X$ un subconjunto, se dice que es **conexo por arcos** o **arcoconexo** (a.c.) si $(A, \mathcal{T}|_A)$ es a.c.

Intuitivamente podemos entender la arcoconexión como que existe una línea (camino o arco) que une cualesquiera dos puntos de un conjunto y que no se sale del conjunto.

Proposición 3.11.

- •) $(X, \mathcal{T})$ a.c. $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ conexo.

- •) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ continua y $(X, \mathcal{T})$ a.c. $\Rightarrow (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ es a.c.

- •) La arcoconexión es un invariante topológico.

- •) La unión de a.c. que intersecan a uno dado es a.c. (lema del peine para arcoconexión).

- •) $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ a.c. $\iff (X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$ son a.c.

Demostración. La demostración de esta proposición no se dará en el temario por falta de tiempo. Igualmente la demostración es muy parecida a las vistas en conexión. □

Ejemplo.

- •) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ si $n \geqslant 2$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ si $k \geqslant 2$ y los conjuntos estrellados en $\mathbb{R}^n$ son a.c.

- •) $Y = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1]\right\}$ es conexo pero no es a.c.

□

3.2. Compacidad

Definición 3.4. Seann $X \neq \emptyset$ un conjunto y $S \subset X$ un subconjunto. Se llama **recubrimiento** de S es una familia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que $S \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
Un **subrecubrimiento** $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de S con $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

□

Observación. Un recubrimiento de X cumple que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

□

Definición 3.5. Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ es **compacto** si todo recubrimiento de X por abiertos admite un subrecubrimiento finito, es decir,

$$\text{si } \mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I} \text{ con } U_i \in \mathcal{T}, \quad \forall i \in I \text{ y } \bigcup_{i\in I} U_i = X$$

$$\text{entonces } \exists i_1, \ldots, i_n \in I \text{ con } X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} = \bigcup_{j=1}^{n} U_{ij}$$

□

Ejemplo.

- •) Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t. y $\mathcal{T}$ es finito, entonces es compacto. Por ejemplo, $(X, \mathcal{T}_t)$ es compacto.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es compacto $\iff$ X es finito.

  Demostración.

  $\Rightarrow$) Supongamos que X es infinito. Entonces puedo considerar $\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in X\}$ recubrimiento de abiertos de X que no admite un subrecubrimiento finito.

  $\Leftarrow$) Es un caso particular del ejemplo anterior.

  □

- •) $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es compacto.

  Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ recubrimiento por abiertos de $X \Rightarrow U_i \in \mathcal{T}_{CF} \ \ \forall i \in I$ y $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Sea $i_0 \in I$ con $U_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow X \backslash U_{i_0} = \{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \in I$ con $x_j \in U_{i_j} \ \ \forall j = 1, \ldots, n \Rightarrow \bigcup_{j=0}^{n} U_{i_j} = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} = X$.

  □

- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es compacto.

  Demostración. $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$ que es un recubrimiento por abiertos que no admite un subrecubrimiento finito.

  □

Definición 3.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y $S \subset X$. DEcimos que S es **compacto** en $(X, \mathcal{T})$ si $(S, \mathcal{T}|_S)$ es compacto.

□

Proposición 3.12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y $S \subset X$. Equivalen:

(i) S es compacto.

(ii) Todo recubrimiento de S por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ admite un subrecubrimiento finito.

Demostración.

(i)⇒(ii)) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de S por abiertos de $(X, \mathcal{T})$, es decir, $U_i \in \mathcal{T}\ \ \forall i \in I$, $S \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \{U_i \cap S\}_{i\in I}$ con $U_i \cap S \in \mathcal{T}|_S\ \ \forall i \in I$. Como $S \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ este conjunto será S y por tanto será un recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}|_S$. Como S es compacto, entonces $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ con $\bigcup\limits_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap S) = S \Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j} \supset S \Rightarrow \{U_{i_j}\}_{j=1,\dots,n}$ es un recubrimiento de S por abiertos de $(X, \mathcal{T})$.

(ii)⇒(i)) Sea $\{U'_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}|_S$. Como $U'_i \in \mathcal{T}|_S \Rightarrow U'_i = U_i \cap S$ con $U_i \in \mathcal{T}$. Entonces $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}$. Por (ii) tengo que $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ con $S \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j} \Rightarrow S = \bigcup\limits_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap S) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U'_{i_j}$.

□

Ejemplo.

•) Si $(X, \mathcal{T})$ e.t., $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $\{x_n\} \to x$. Entonces $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}$. Sabemos que $S \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, $U_i \in \mathcal{T}$. Sea $i_0 \in I$ con $x \in U_{i_0}$ entonces, como la sucesión es convergente tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $x_n \in U_{i_0}\ \ \forall n > n_0$. Ahora, para cada $n = 1, \dots, n_0$ consideramos $i_n \in I$ con $x_n \in U_{i_n}$ y entonces $S \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} U_{i_n}$.

□

•) $(0, 1) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es compacto ya que puedo escribir

$$(0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

que son recubrimientos abiertos que no admiten un subrecubrimiento finito.

•) $\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es compacto ya que

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$$

Proposición 3.13.

(i) Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $S \subset X$ es cerrado, entonces S es compacto.

(ii) Si $(X, \mathcal{T})$ es **(T2)** y $S \subset X$ es compacto, entonces S es cerrado.

Demostración.

(i) Sea $S \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}$, es decir, $U_i \in \mathcal{T} \ \ \forall i \in I$ y $S \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Como $X \setminus S \in \mathcal{T}$, entonces $\{X \setminus S\} \cup \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}$. Como $(X, \mathcal{T})$ es compacto, entonces existen $i_1, \dots, i_n \in I$ con $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}\right) \cup (X \setminus S) = S$. Entonces $S \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}$ por lo que S es compacto.

(ii) Si $S \in \{\emptyset, X\}$, entonces $S \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y lo tenemos. Supongamos entonces que $S \notin \{\emptyset, X\}$ y queremos ver que $X \setminus S \in \mathcal{T}$. Sea $x \in X \setminus S$ y veamos que $x \in (X \setminus S)^\circ$. Si $y \in S$, como $(X, \mathcal{T})$ es T2, entonces $x \neq y$ y por tanto $\exists U_y \in \mathcal{T}$ con $y \in U_y$ y $x \in (X \setminus U_y)^\circ$. Es claro que $S \subset \bigcup\limits_{y\in S} U_y$ y como S es compacto puedo extraer un subrecubrimiento finito, es decir, $\exists y_1, \dots, y_n \in S$ con $S \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{y_j}$. Sea $U = \bigcup\limits_{j=1}^{n} (X \setminus U_{y_j})^\circ$, sabemos que $x \in U$ y además $(X \setminus U_{y_j})^\circ \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in 1, \dots, n$. Podemos escribir $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} (X \setminus \overline{U_{y_j}}) = X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \overline{U_{y_j}} \subset X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{y_j} \subset X \setminus S$.

□

Corolario 3.13.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, entonces todo compacto en $(X, \mathcal{T})$ es cerrado y acotado.

Demostración. Supongamos que d es la distancia en X con $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ y sea $S \subset X$ compacto.
Empecemos viendo que S está acotado. Sea $p \in X \Rightarrow S \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B(p, n) = X$ y además $B(p, n) \in \mathcal{T}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como S es compacto $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ con $S \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(p, n_j) = B(p, \max\{n_1, \dots, n_k\})$ y por tanto el compacto está en una bola y entonces S acotado.
Como $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, en particular es T2 y como S es compacto, entonces S cerrado.

□

Teorema 3.14. (Teorema de Heine-Borel) Todo intervalo cerrado y acotado en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es compacto.

Demostración. Sea $[a, b]$ con $a < b$ y queremos ver que es compacto. Consideramos $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a, b]$ por abiertos de $\mathcal{T}_u$. Tendremos que ver que dicho recubrimiento admite un subrecubrimiento finito.
Consideramos el siguiente conjunto:

$$L = \{x \in [a, b] : \exists n \in \mathbb{N}, \exists i_1, \dots, i_n \text{ tal que } [a, x] \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\}$$

Tendremos que ver que $b \in L$ ya que al probarlo tendremos que existe una cantidad finita tal que el intervalo $[a, b]$ está contenido en el recubrimiento finito.
Si $x \in L \Rightarrow [a, x] \subset L$ por tanto probar que $[a, b] \in L$ será equivalente a ver que $b \in L$. Utilizaremos un argumento de conexión. Si conseguimos probar lo siguiente:

(i) $L \neq \emptyset$.

(ii) $L \in \mathcal{T}_u|_{[a,b]}$.

(iii) $L \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u|_{[a,b]}}$

Entonces, como $[a.b]$ es conexo, tendremos que $L = [a, b]$. Veámoslo:

(i) Como $a \in L$ tenemos que $L \neq \emptyset$.

(ii) Veamos que L es abierto en $[a, b]$. Para ello consideramos $x \in L$ y veremos que hay un entorno de dicho punto que sigue dentro de L, es decir, que x es interior de L. Como $x \in L$ sabemos que $\exists i_1, \ldots, i_n$ con $[a, x] \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \in \mathcal{T}_u$ y por tanto es entorno de todos sus puntos. En particular será entorno de x y entonces $\exists \varepsilon > 0$ con $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \Rightarrow \left[a, x + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$ y entonces tenemos $\left[x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset L$ y entonces $x \in L^\circ$ en $[a, b]$ y ya lo tenemos probado.

(iii) Veamos que L es cerrado en $[a, b]$. Sea $x \in \overline{L}^{[a,b]} = \overline{L}$ y queremos ver que $x \in L$ para ver que L coincide con su adherencia y por tanto es cerrado. Como $[a, b]$ es 2AN, entonces $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ con $\{x_n\} \to x$.

Sabemos que $x \in [a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ por lo que $\exists i_0 \in I$ con $x \in U_{i_0} \in \mathcal{T}_u \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Como $\{x_n\} \to x$ tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $x_n \in (x-\varepsilon, x + \varepsilon) \subset U_{i_0} \quad \forall n \geqslant n_0$. Además, como $n_0 \in L$, entonces $\exists n_1, \ldots, n_k \in I$ con $[a, x_{n_0}] \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{n_j}$. Entonces puedo escribir $[a, x] = [a, x_{n_0}] \cup [x_{n_0}, x] \subset \bigcup_{j=0}^{k} U_{n_j}$ y además $[x_{n_0}, x] \subset U_{i_0}$, $[a, x_{n_0}] \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{n_j}$ por tanto $x \in L$.

Aplicando lo sabido para conexión tenemos que $L = [a, b]$.

□

Corolario 3.14.1. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Demostración.

$\Rightarrow$) Esto es cierto para todo espacio métrico.

$\Leftarrow$) Supongamos que $S \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado. Como S es acotado, $\exists a < b$ con $S \subset [a, b]$ y por el Teorema de Heine-Borel $[a, b]$ es compacto. Como S es cerrado y está dentro de un compacto, S es compacto.

□

3.2.1. Propiedades de los compactos

Proposición 3.15. Sea $(X,\mathcal{T})$ un e.t., entonces equivalen:

(i) $(X,\mathcal{T})$ es compacto.

(ii) Si $\{C_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ con $\bigcap\limits_{i\in I} C_i = \emptyset \Rightarrow \exists i_1,\dots,i_n \in I$ tal que $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_{i_j} = \emptyset$.

(iii) Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces de cada recubrimiento por abiertos básicos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Demostración.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)) Trivial.

(i)$\Rightarrow$(iii)) Trivial.

(iii)$\Rightarrow$(i)) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}$, $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} : \exists i \in I$ con $B \subset U_i\}$. Como $\mathcal{B}$ es base, $\mathcal{A}$ es un recubrimiento por abiertos básicos de X. Por (iii) tenemos que $\exists B_1,\dots,B_n \in \mathcal{A}$ con $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j = X$, pero $\bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j} = X$ y tenemos lo buscado.

□

Lema 3.16. (Lema de la subbase de Alexander)Sea $(X,\mathcal{T})$ un e.t, entonces $(X,\mathcal{T})$ compacto si y solo sí de toda subbase S de $\mathcal{T}$, entonces de cada recubrimiento por abiertos básicos de la topología generada por S, $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\mathcal{B}(S))$, se puede extraer un subrecubrimiento finito.

□

Proposición 3.17. Si $(X,\mathcal{T})$ es compacto y $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ es continua, entonces $f(X)$ es compacto en $(Y,\mathcal{T}')$. En particular, la compacidad es un invariante topológico.

Demostración. Sea $\{U_i'\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por compactos de $\mathcal{T}'$, $f(X) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i'$. Consideramos $\{f^{-1}(U_i')\}_{i\in I}$. Tenmemos $\bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} U_i') \supset f^{-1}(f(X)) = X$. Como X es compacto tenemos que $\exists i_1,\dots,i_n \in I$ con $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{ij}') \Rightarrow f(X) = f(\bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{ij}')) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} f(f^{-1}(U_{ij}')) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{ij}$. □

Ejemplo.

•) $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ es compacto. Lo podemos ver considerando la función f dada por

$$\begin{aligned} f : ([0,1],\mathcal{T}_u) &\to (\mathbb{S}^1,\mathcal{T}_u) \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{aligned}$$

que es claramente continua y además $f([0,1]) = \mathbb{S}^1$.

•) La compacidad no es una propiedad hereditaria. Para verlo podemos considerar en $\mathcal{T}_u$ el intervalo $[0,2]$ que es compacto, mientras que $]1, 1/2[$ no lo es.

□

Lema 3.18. (Lema del tubo) Sean $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ e.t. con $(Y,\mathcal{T}')$ compacto y sea $W \in \mathcal{T}\times\mathcal{T}'$ con $\{x\}\times Y \subset W$ para algún $x \in X$. Entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$ y $U \times Y \subset W$.

□

Teorema 3.19. (Teorema de Tychonoff) Sean $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ e.t., entonces $(X\times Y)$ compacto $\iff$ $(X,\mathcal{T})$ y $(Y,\mathcal{T}')$ son compactos.

Demostración.

$\Rightarrow$) Trivial porque las proyecciones son continuas.

$\Leftarrow$) Vamos a aplicar el lema del tubo. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $X\times Y$ por abiertos de $\mathcal{T}\times\mathcal{T}'$, entonces $\{x\}\times Y \subset X\times Y = \bigcup\limits_{i\in I} W_i \quad \forall x \in X$.

□

Corolario 3.19.1. El teorema anterior se puede generalizar para cualquier producto $(X_1\times\cdots\times X_n, \mathcal{T}_1\times\cdots\times\mathcal{T}_n)$ con $n \geqslant 2$, que será compacto si y solo si $(X_i,\mathcal{T}_i)$ es compacto para cada $i \in 1,\dots,n$.

□

Teorema 3.20. (Teorema de Heine-Borel generalizado) Un subespacio de $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.ç

Demostración.

$\Rightarrow$) Es corolario de un resultado anterior.

$\Leftarrow$) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Como S es acotado está contenido en una bola y en particular considerando la norma infinito tenemos que $\exists r > 0$ tal que $S \subset [-r,r]\times\cdots\times[-r,r]$. Por el teorema de Heine-Borel sabemos que cada $[-r,r]$ es compacto y por Tijonoff sabemos que el producto de compactos es compacto. Tenemos que S es acotado y está contenido en un compacto luego S es compacto.

□

Observación. No es cierto en todo espacio métrico. Por ejemplo, si consideramos $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{disc})$ que es un espacio métrico y tomamos $\overline{B}(0,2)$ que es cerrado y acotado pero $\overline{B}(0,2) = \mathbb{R}$ (recordemos que la distancia discreta es siempre menor que 2) y $\mathbb{R}$ no es compacto.

□

Ejemplo. Considerando en cada caso $\mathcal{T}_u$

- •) $\mathbb{S}^n$ es compacto y $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ compacto (por ser un invariante topológico).
- •) $\mathbb{R}^n$ no es compacto por lo que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tampoco lo es.

□

Corolario 3.20.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es continua, entonces f es acotada y alcanza su máximo y su mínimo.

Demostración. Comencemos viendo que f es acotada. Tendremos dos formas de hacerlo:

1: Como f es continua y X es compacto tenemos que $f(X) \subset \mathbb{R}$ es compacto y por el teorema de Heine-Borel generalizado tenemos que $f(X)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.

2: $\{f^{-1}((-n, n)) : n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento por abiertos de X y como X es compacto existe un subrecubrimiento finito. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X = f^{-1}((-n_0, n_0)) \Rightarrow f(X) \subset (-n_0, n_0)$ luego f acotado.

Veamos que alcanza su máximo y su mínimo. Para ello tendremos que ver que el supremo y el ínfimo del conjunto $f(X)$ está contenido en $f(X)$ pero como $f(X)$ es cerrado esto se tiene.

□

Corolario 3.20.2. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es constante o $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado.

□

Proposición 3.21. (Lema de la aplicación cerrada) Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, $(Y, \mathcal{T}')$ es T2 y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, entonces f es cerrada.

Demostración. Para ver que f es cerrada tendremos que ver que la imagen de un cerrado es cerrada. Sea $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y como X es compacto, entonces C es compacto (un cerrado en un compacto es un compacto). Como f es continua tenemos que $f(C) \subset Y$ es compacto y como Y es T2, entonces $f(C)$ es cerrado (ya que un compacto en un T2 es cerrado) y tenemos lo que buscábamos.

□

Corolario 3.21.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, $(Y, \mathcal{T}')$ es T2 y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua, entonces

- •) Si f es inyectiva $\Rightarrow$ f es un embebimiento.
- •) Si f es sobreyectiva $\Rightarrow$ f es una identificación.
- •) Si f es biyectiva $\Rightarrow$ es un homeomorfismo.

□

Ejemplo. Toda función continua y monótona $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ tiene inversa continua $f^{-1} : f([a, b]) = [c, d] \to [a, b]$.

□

3.2.2. Compacidad en espacios métricos

Definición 3.7. Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice

- •) **Compacto por punto límite** si todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación, es decir, si $A \subset X$ infinito, entonces $\exists x_0 \in X$ con $A \cap (N \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset, \quad \forall N \in \mathcal{N}_x$.

- •) **Compacto por sucesiones** o **secuencialmente compacto** si toda sucesión en X tiene una parcial convergente.

□

En general compacidad y compacidad por sucesiones implica compacto por punto límite, pero compacto y compacto por sucesiones no son propiedades comparables (ya que hay espacios que son una pero no la otra). Poco a poco se irá viendo la relación entre estos conceptos.

Proposición 3.22. (Bolzano-Weierstrass) Todo e.t. compacto es compacto por punto límite.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. compacto, $A \subset X$ infinito y veamos que A tiene puntos de acumulación por reducción al absurdo. Para ello supongamos que A no tiene puntos de acumulación. En dicho caso tendremos que $\forall x \in X$, entonces $\exists U_x \in \mathcal{T}$ con $x \in U_x$ y $A \cap (U_x \setminus \{x\}) = \emptyset$. Como esto ocurre para cada $x \in X$ por lo que puedo escribir $X = \bigcup\limits_{x \in X} U_x$ y como X es compacto, admite un subrecubrimiento finito, luego $\exists x_1, \ldots, x_n \subset X$ con $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{x_j}$. Tenemos

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap U_{x_j}) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$$

y llegamos a contradicción ya que el conjunto A es infinto.

□

Teorema 3.23. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces equivalen:

(i) (X, d) es compacto.

(ii) (X, d) es compacto por punto límite.

(iii) (X, d) es compacto por sucesiones.

(iv) (**Numerablemente compacto**) Todo recubrimiento numerable por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.