TOPOLOGÍA II. 2025–26.

Ejercicios del Tema 1: El grupo fundamental.

1. Prueba que en un espacio topológico simplemente conexo X, dos arcos cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$ son homotópicos por arcos.

2. Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Demuestra que si f se puede extender a una aplicación continua $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$, entonces h_* es el homomorfismo trivial, es decir, el homomorfismo que lleva todo elemento en el neutro.

3. Se dice que un grupo G con operación $\cdot$ es un *grupo topológico* si G tiene una topología de forma que las aplicaciones producto e inversión

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longrightarrow & x.y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longrightarrow & x^{-1} \end{array}$$

   son continuas. Sea e el elemento neutro en G.

   a) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$, se define $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \to G$ como $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Demuestra que $\alpha \cdot \beta \in \Omega(G, e)$.
   b) Comprueba que $(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta) = \alpha * \beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Omega(G, e)$.
   c) Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$. Prueba que la operación $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ está bien definida.
   d) Muestra que $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha] * [\beta]$, para cada $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$.
   e) Demuestra que $\pi_1(G, e)$ es abeliano.

4. Sean X un espacio topológico y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ aplicaciones continuas con $g(x) \neq -f(x)$ para cada $x \in X$. Prueba que f y g son homotópicas. Deduce que si $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y carece de puntos fijos, entonces f es homotópica a $-Id_{\mathbb{S}^n}$.

5. Sea $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora y $b \in B$. Demuestra que el subespacio topológico $p^{-1}(\{b\}) \subset R$ tiene la topología discreta.

6. Demuestra que toda aplicación recubridora es una aplicación abierta.

7. Sea $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, con B conexo. Demuestra que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo $b \in B$. En tal caso, se dice que R es un recubridor de k hojas de B.

8. Sean $p_1 : X \longrightarrow Y$ y $p_2 : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones recubridoras. Prueba que si $p_2^{-1}(z)$ es finito para todo $z \in Z$, entonces $p_2 \circ p_1 : X \longrightarrow Z$ es una aplicación recubridora.

9. Consideremos una aplicación recubridora $p : R \longrightarrow B$ y la relación de equivalencia $\mathcal{R}_p$ en R dada por
$$r_1 \, \mathcal{R}_p \, r_2 \Leftrightarrow p(r_1) = p(r_2).$$
   Demuestra que $R/\mathcal{R}_p$ es homeomorfo a B.

10. Sea $p : R \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, con R arcoconexo y B simplemente conexo. Prueba que p es un homeomorfismo.

11. Dado un espacio topológico Y, prueba que estas afirmaciones son equivalentes:

   a) Y es contráctil.

b) Para cualesquiera $f, g : X \longrightarrow Y$ continuas se tiene que f y g son homotópicas.

c) Cada aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es nulhomótopa.

d) La identidad Id_Y es nulhomótopa.

e) Cada conjunto $\{y_0\}$ con $y_0 \in Y$ es un retracto de deformación de Y.

12. Prueba que $X = ([0,1]\times\{0\})\cup((K\cup\{0\})\times[0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ es contráctil, donde $K = \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$.

13. Sea $f : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ una función continua. Definimos el conjunto:

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

a) Estudia el conjunto $S_f \cap \{z = z_0\}$ con $z_0 \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra que cualesquiera dos conjuntos S_f son homeomorfos entre sí.

c) Calcula el grupo fundamental de S_f.

14. Prueba que $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. ¿Son del mismo tipo de homotopía?

15. Sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k \leq n - 2$. Calcula $\pi_1(\mathbb{R}^n\backslash S)$.

16. Prueba que si X es de Hausdorff y $A \subseteq X$ es un retracto de X, entonces A es cerrado en X. Deduce que una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ no es un retracto de $\mathbb{R}^n$. ¿Lo es una bola cerrada?

17. En este ejercicio demostraremos que *un abierto de* $\mathbb{R}^2$ *no puede ser homeomorfo a un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *si* $n \geq 3$. Supongamos que $f : U\longrightarrow V$ es un homeomorfismo entre abiertos no vacíos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^2$ con $n \geq 3$.

a) Prueba que existen bolas abiertas $B_1 \subset U$ y $B_2, B_2' \subset V$ (estas últimas con el mismo centro $y_0 \in \mathbb{R}^2$) tales que $\overline{B_2'} \subset f(\overline{B_1}) \subset \overline{B_2}$.

b) Si $i : \overline{B_2'} - \{y_0\}\longrightarrow\overline{B_2} - \{y_0\}$ es la inclusión, deduce de *a*) que el homomorfismo inducido en cualquier punto i_* es trivial.

c) Prueba que $\overline{B_2'} - \{y_0\}$ es un retracto de deformación de $\overline{B_2} - \{y_0\}$. Concluye que i_* es un isomorfismo no trivial, lo que contradice *b*).

18. Demuestra que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - \operatorname{arctg}(x^2 - y^3) = 2, \\ \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \dfrac{1}{y} = -5. \end{cases}$$

tiene al menos una solución en $\mathbb{R}^2$.

19. Sean M una matriz cuadrada real de orden 3 por 3 cuyas entradas son números reales positivos y $f : \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(v) = Mv$. Demuéstrese que:

a) El conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ es homeomorfo al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.

b) La aplicación $g : A\longrightarrow\mathbb{S}^2$ dada por $g(v) = f(v)/|f(v)|$ está bien definida y $g(A) \subset A$.

c) f tiene un valor propio real y positivo.

20. Teorema de Lusternik-Schnirelmann. Demuestra que si $\mathbb{S}^2$ es la unión de tres subconjuntos cerrados C_1, C_2, C_3, entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas. Para ello prueba que la función $f : \mathbb{S}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = (\operatorname{dist}(x, C_1), \operatorname{dist}(x, C_2))$$

tiene un punto $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, donde $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ denota la función distancia en $\mathbb{R}^3$.

21. Calcula $\pi_1(X)$ en los siguientes casos:

   a) $X = \mathbb{S}^2 \cup (\mathbb{D} \times \{0\})$.
   b) $X = (\mathbb{S}^1 \times [-1,1]) \cup (\mathbb{D} \times \{-1,1\})$.
   c) $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = (z+1)^2, \ -1 \leq z \leq 0\} \cup (\mathbb{S}^2 \cap \{z \geq 0\})$.
   d) $X = S_1 \cup S_2 \cup L$, donde S_1, S_2 son cerrados disjuntos simplemente conexos de $\mathbb{R}^n$ y $L \subset \mathbb{R}^n$ es un segmento tal que $L \cap S_i = \{x_i\}$, $i = 1,2$.
   e) $X \subset \mathbb{R}^3$ es la unión de una circunferencia y de una esfera que se tocan en un único punto.
   f) $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + (z-2)^2 = 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + (z+2)^2 = 1\}$.
   g) $X = S_1 \cup (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son, respectivamente, las esferas de radio 1 centradas en el $(0,-2,0)$ y en el $(0,2,0)$.
   h) $X \subset \mathbb{R}^2$ es la unión de las tres circunferencias de radio 1 centradas en los puntos $(-2,0), (0,0)$ y $(2,0)$.
   i) $X = \mathbb{S}^1 \cup [(-1,0),(1,0)]$.

22. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Omega(X, x_0)$ con $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$. Entonces $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$.
   b) Sea $f : A \longrightarrow Y$ una aplicación continua con $A \subset X$ y X simplemente conexo. Si existe $F : X \longrightarrow Y$ continua con $F_{|A} = f$, entonces f_* es trivial.
   c) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y nulhomótopa, entonces f_* es trivial.
   d) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y no sobreyectiva, entonces es nulhomótopa.
   e) Si X es simplemente conexo y $A \subset X$ un retracto de X, entonces A es simplemente conexo.
   f) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e inyectiva con $f(x_0) = y_0$ entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un monomorfismo.
   g) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una equivalencia homotópica y $A \subset X$. La restricción $f_{|A} : A \longrightarrow f(A)$ es una equivalencia homotópica.
   h) $\mathbb{S}^1$ no tiene ningún retracto de deformación $A \neq \mathbb{S}^1$.
   i) Existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que intercambia las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$.
   j) Si A es un retracto del disco unidad cerrado de $\mathbb{R}^2$, entonces toda aplicación continua $f : A \longrightarrow A$ tiene al menos un punto fijo.