



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

1. Espacios Recubridores	5
1.1. Levantamiento de aplicaciones	5

1. Espacios Recubridores

Observación. A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

1.1. Levantamiento de aplicaciones

Observación. Vamos a tener en cuenta que si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

Demuestração. Si O es abierto y A es una componente arcoconexa de O , entonces dado $a \in A$, como X es localmente arcoconexo tendremos que existe un U entorno arcoconexo de a tal que $U \subseteq O$. Como A es el mayor arcoconexo en O que contiene al punto a tendremos que $U \subseteq A$, luego A es abierto. \square

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$ y un punto $b_0 \in B$. Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto O que contiene a b_0 . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de O que contiene a b_0 podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

Lema 1.1 (Unicidad del levantamiento). Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $f_1, f_2 : X \rightarrow R$ continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, entonces $f_1 = f_2$.

Demuestração. Para la demostración solo se necesita que X sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow[f=p \circ f_1=p \circ f_2]{f_1, f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como X es conexo y tenemos que $Y \neq \emptyset$, ya que por hipótesis $x_0 \in Y$, si probamos que Y es abierto y cerrado tendremos que $Y = X$, es decir, $f_1 = f_2$.

Veamos que Y es abierto. Para ello tomamos $y \in Y$, es decir, un punto y tal que $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos el punto $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$. Sea O abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a b , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos de R y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto A_{i_0} donde se encuentra $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$. Veamos que $\forall x \in V$ se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$. Como $x \in V$ tendremos que $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$ por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en $(*)$ hemos usado que $p|_{A_i}$ es inyectiva. Tenemos finalmente que Y es abierto.

Veamos ahora que Y es cerrado. Para ello demostramos que $X \setminus Y$ es abierto. Tomamos $y \in X \setminus Y$ y vemos que existe un V abierto que contiene al punto y y tal que $V \subseteq X \setminus Y$. Sea $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ y de nuevo tomamos O regularmente recubierto que contiene a b . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos $f_1(y) \in A_{i_1}$ y $f_2(y) \in A_{i_2}$ y además se verificará que $A_{i_1} \neq A_{i_2}$ ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$, donde se tiene que $y \in V$. Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada $x \in V$ se tendrá que $f_1(x) \neq f_2(x)$ ya que $f_1(x) \in A_{i_1}$ y $f_2(x) \in A_{i_2}$. Esto nos dice que $V \subseteq X \setminus Y$, luego Y es cerrado. \square

Teorema 1.2 (Teorema de monodromía). Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in V$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$. El homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo. En particular, $\pi_1(R, r_0)$ es isomorfo a $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que p_* es inyectiva si y solo si $\ker(p_*)$ es trivial. Tomamos α lazo basado en r_0 tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además $[p \circ \alpha] = p^*([\alpha])$ tenemos que existe una homotopía por lazos de ε_{b_0} en $p \circ \alpha$. Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en R de $\hat{\varepsilon}_{b_0}$ y $\widehat{p \circ \alpha}$ (empezando en r_0). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

Observación. Recordemos que dados dos subgrupos H_1, H_2 de un grupo G se dice que H_1 y H_2 son conjugados si existe un $g \in G$ tal que

$$H_2 = g^{-1} H_1 g$$

Corolario 1.2.1. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$. Elegimos un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= r_1 \\ \alpha(1) &= r_2 \end{aligned}$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular, $p_*(\pi_1(R, r_1))$ y $p_*(\pi_1(R, r_2))$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que $p \circ \alpha$ es un lazo basado en b_0 por lo que $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$. Además,

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_2) &\xrightarrow{\text{isom.}} \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] &\mapsto [\alpha * \beta * \widetilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\widetilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \widetilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \widetilde{\alpha}] = [\widehat{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

Corolario 1.2.2. Sean $p : R \rightarrow B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p^{-1}(b_0)$. Sea H un subgrupo conjugado de $p_*(\pi_1(R, r_1))$ en $\pi_1(B, b_0)$. Entonces existe un punto $r_2 \in R$ tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que $p(r_1) = b_0$ y que $p_*(\pi_1(R, r_1))$ es conjugado con H en $\pi_1(B, b_0)$, es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con $g \in \pi_1(B, b_0)$, esto es, $g = [\gamma]$. Consideramos $\hat{\gamma}$ el levantamiento de γ a R con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos $r_2 = \hat{\gamma}(1)$ al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \rightarrow B$, una aplicación continua $f : X \rightarrow B$, $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento $\hat{f} : X \rightarrow R$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$.
2. $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento \hat{f} de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$ es único.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_x & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$ por lo que tenemos esta implicación simplemente desarrollando la composición.

(2) \Rightarrow (1) Empezamos definiendo \hat{f} :

$$\begin{array}{ccc} R & & \\ \downarrow p & & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado $x \in X$ elegimos α_x un arco en X que une x_0 con x . Entonces $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es un arco en B que une $b_0 = f(x_0)$ con $f(x)$. Consideramos ahora $\widehat{f \circ \alpha_x}$ el único arco en R tal que $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$ y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que \hat{f} está bien definida, es decir, que no depende del arco α_x elegido. Tomamos otro arco β_x en X tal que $\beta_x(0) = x_0$ y $\beta_x(1) = x$ y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos $\gamma = \alpha_x * \tilde{\beta}_x$ que es un lazo en X con base en x_0 . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \tilde{\beta}_x)$$

es un lazo con base en b_0 . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco δ con base en r_0 tal que $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$. Sea $\widehat{f \circ \gamma}$ el único levantamiento de $f \circ \gamma$ que comienza en r_0 . Tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico por arcos con $p \circ \delta$. Como p_* es inyectiva tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico con δ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widehat{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es el levantamiento de $f \circ \alpha_x$ empezando en r_0 y ω es el levantamiento de $\widehat{f \circ \beta_x}$ comenzando en $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$. Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widehat{f \circ \beta_x} = f \circ \tilde{\beta}_x \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \circ \tilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \tilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \tilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right.$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \tilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de $\hat{f}(x)$ está bien hecha.

Veamos ahora que $p \circ \hat{f} = f$. Para ello, dado $x \in X$ tenemos que ver que $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$. Veamos quién es $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ (\widehat{f \circ \alpha_x}))(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que $\hat{f}(x_0) = r_0$ ya que para x_0 podemos elegir ε_{x_0} verificándose que $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$ luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \widehat{\varepsilon_{b_0}} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que \hat{f} es continua.

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ \nearrow \hat{f} & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Comenzamos tomando un punto $x \in X$ y vemos que \hat{f} es continua en x . Sea U un entorno de $\hat{f}(x)$. Tomamos O abierto arcoconexo de $f(x)$ que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homomorfismo}\end{aligned}$$

Como $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$ tenemos que existe un único $i_0 \in I$ tal que $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$. Podemos suponer que $A_{i_0} \subseteq U$ (si no fuese así consideraríamos $U \cap A_{i_0}$). Como f es continua, existe un abierto V que contiene a x tal que $f(V) \subseteq O$. Podemos suponer que V es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de V que contenga a x).

Si probamos que $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$ tendríamos que \hat{f} es continua en x . Para verlo consideramos un punto $y \in V$ y tomamos un arco γ dentro de V que une x con y . Tenemos entonces que $\alpha_x * \gamma$ es un arco que une x_0 con y . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = f \circ \widehat{(\alpha_x * \gamma)}(1) = (f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}(1)$$

donde $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ es la única curva que se proyecta por p en $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ y comienza en r_0 . Es decir, $(f \circ \alpha_x) * \widehat{(f \circ \gamma)}$ se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{\widehat{f \circ \gamma}}$$

donde $\widehat{\widehat{f \circ \gamma}}$ es el levantamiento de $f \circ \gamma$ pero comenzando en el punto $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$

□

Observación. Una consecuencia inmediata es que si X es simplemente conexo, toda $X : X \rightarrow B$ continua se puede levantar.