Geometría II. Relación de problemas 1.

Diagonalización de endomorfismos

(1) Determinar los valores y vectores propios de las siguientes matrices reales

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

¿Son diagonalizables?

(2) Encontrar, si es posible, pares de endomorfismos de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, uno diagonalizable y otro no, que tengan los siguientes polinomios característicos

$$(1-\lambda)^3, \qquad -(1-\lambda)^2(1+\lambda), \qquad (1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

(3) Probar que todo endomorfismo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ con determinante negativo es diagonalizable.

(4) Estudiar si las siguientes matrices son semejantes entre si.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5) Calcular A^{12} y A^{-7} para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$?

(6) Resolver la ecuación $A^2 = 9I \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(7) Resolver la ecuación $f^3 = f \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

(8) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que respecto de la base usual $\mathcal{B}_u$ tiene matriz asociada

$$M(f, \mathcal{B}_u) = A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es diagonalizable.

(b) Diagonalizar f dando la matriz de cambio de base.

(9) Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Probar:

(a) $f(V_\lambda) = V_\lambda$, para todo valor propio $\lambda \neq 0$.

(b) f es un automorfismo si y solo si 0 no es un valor propio de f.

(c) λ es valor propio de $f \in Aut(V)$ si y solo si λ^{-1} lo es de f^{-1}.

(10) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ con nulidad 1. Probar que f es diagonalizable si y solo si $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

(11) Sea f un endomorfismo de V tal que $f^2 = f$. Probar que

$$V = Ker(f) \oplus Ker(f - 1_V).$$

Deducir que f es diagonalizable.