

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas y del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), y el Doble Grado de Matemáticas-Informática para su impartición por docencia virtual.

**“Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales”.** (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

## Orígenes del Cálculo integral

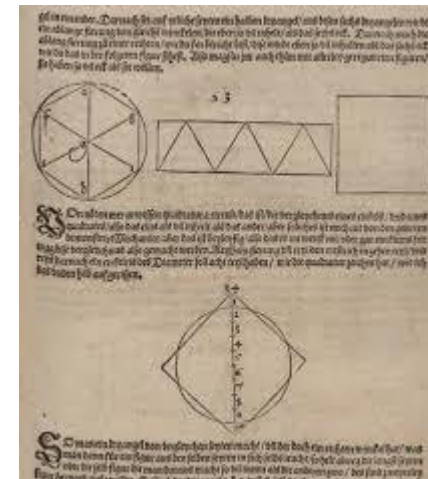
- El **cálculo de cuadraturas** ya se considera en el **Libro de los Elementos** de **Euclides** (c. 300 a.C.). Se pretendía construir un cuadrado (cuadratura) cuya área fuese igual a la de una figura dada.



Libro de los Elementos  
de Euclides  
(Trece libros)



Primera traducción al castellano  
del libro de los Elementos



Método exhaustivo

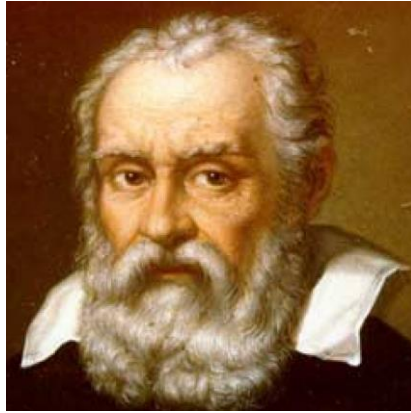


**Euclides**  
(ca. 325 a. C.  
ca. 265 a. C.)

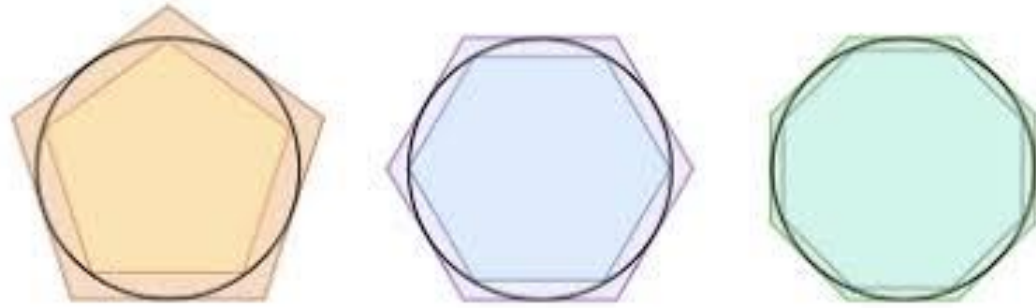
- El **Método Exhaustivo** (**Eudoxo de Cnido** c. 400-347a.C., **Arquímedes** c. 287-212 a.C.) es una técnica para calcular el área (resp. el volumen) de una región aproximándola por una sucesión de polígonos (resp. poliedros). Con él, los clásicos, calcularon el área de un segmento de parábola, el volumen de un segmento de paraboloides, volumen de una esfera etc.



**Eudoxio de Cnidos**  
c. 400-347 a.C.,  
Discípulo de Platón



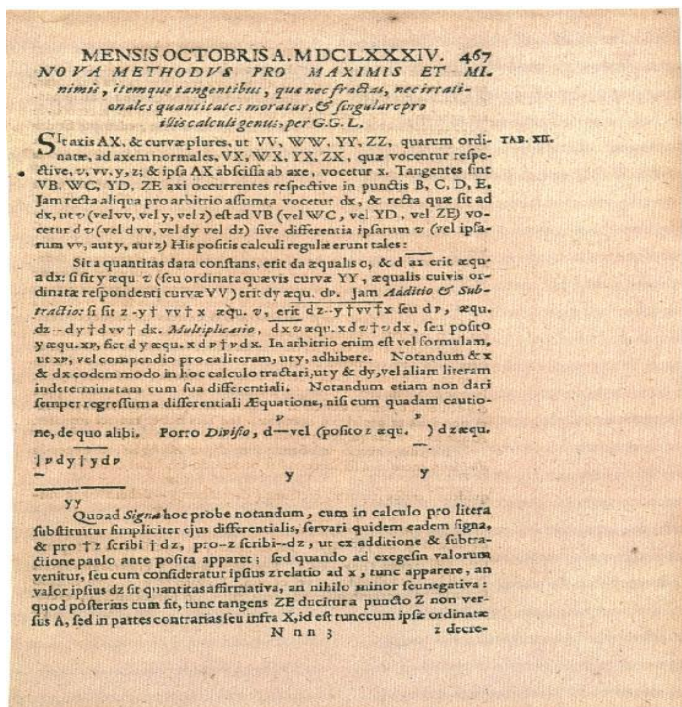
**Arquímedes**  
c. 287-212 a.C.,



**Pierre de Fermat**  
(1601-1665)

- En el S. XVI aparecen mejoras significativas sobre el método exhaustivo con autores como B. **Cavalieri** (Método de los indivisibles), P. **Fermat** (cuadraturas de hipérbolas y parábolas), J. **Wallis** (integración aritmética), etc.
- En el S. XVII las aportaciones de I. **Barrow** y E. **Torricelli** muestran los primeros indicios de una conexión profunda entre la integración y la derivación. El **Teorema Fundamental del Cálculo**, formulado de manera independiente por I. **Newton** y G. W. **Leibniz**, pone de manifiesto esta relación mostrando que *la derivación y la integración son procesos inversos*. Ello propicia el desarrollo del Cálculo Infinitesimal, que proporciona un método reglado para el cálculo de derivadas y otro para el cálculo de primitivas (esto es determinar una función a partir de su derivada). Se relaciona así el cálculo de tangentes con el de áreas y se desarrolla el Cálculo moderno, cuya notación para las integrales que empleamos hoy día es la usada por Leibniz.

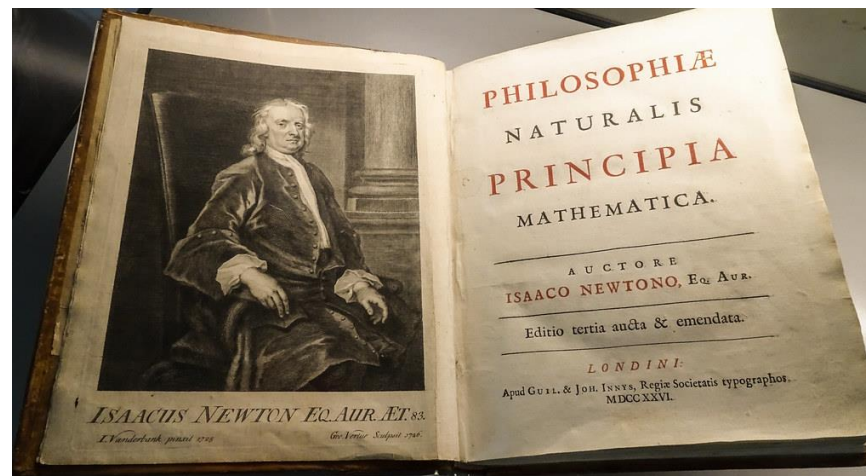




*Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos*

Leibniz. Acta Eruditorum (1686)

Leibniz introduce la notación  $dx$  para la diferencial y  $\int$  para la integral.



*Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (1687)



*De analyse per aequationes numero terminorum infinitas*

(Obra de I. Newton de 1669 publicada en 1711)



Isaac Barrow  
(1630-1677)



Evangelista  
Torricelli  
(1608-1647)



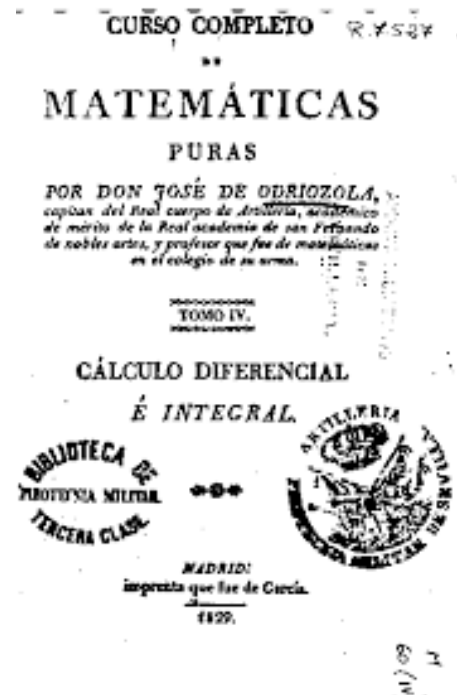
Isaac Newton  
(1643- 1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz  
(1646-1716)

- Los matemáticos del S XVII y XVIII se dedican al cálculo de primitivas para determinar áreas, volúmenes y longitudes de curvas, para resolver problemas de la Física y otras ciencias. Por ejemplo, I. **Newton** añade su **Tractus de quadrature curvarum**, como un apéndice de su obra **Óptica** (1704).
- La primera definición rigurosa de **integral** la proporciona A. L. **Cauchy** en el S. XIX estableciendo la teoría de la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado (hoy denominada **integral de Cauchy**).



**Augustin Louis Cauchy,**  
(1789 -1857)



El **Teorema de Heine** (1821 - 1881) (probado por E. **Borel** en 1895) juega un papel fundamental en ella y Cauchy lo usaba implícitamente.



**Jean Baptiste Fourier**  
(1768 -1830)



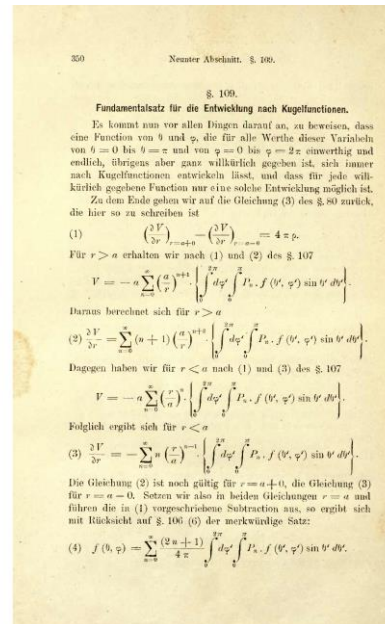
**Peter Gustav Lejeune Dirichlet ,**  
(1805—1859)



- Con los trabajos de J. B. **Fourier** (1768-1830) sobre representación de funciones mediante series trigonométricas (desarrollo en serie de Fourier) la idea de función evoluciona hasta su concepción actual formulada por P. G. L. **Dirichlet** en 1837.
- La integral de Cauchy se extiende al caso de las funciones  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotadas no necesariamente continuas: **Integral de Riemann**. También se aborda el caso de las integrales de funciones no acotadas (**integrales impropias**). Como no todas estas funciones son integrables ya se distingue entre funciones integrables y no integrables



**Georg Friedrich Bernhard Riemann**  
(1826-1866)



G. F. B. **Riemann**, en 1854, publica su obra **Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe** (Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica) para acceder al cargo de Profesor Auxiliar en la Universidad de Göttingen (fue numerario en 1859). En ella analizó las condiciones de Dirichlet para el problema de representación de funciones en serie de Fourier.

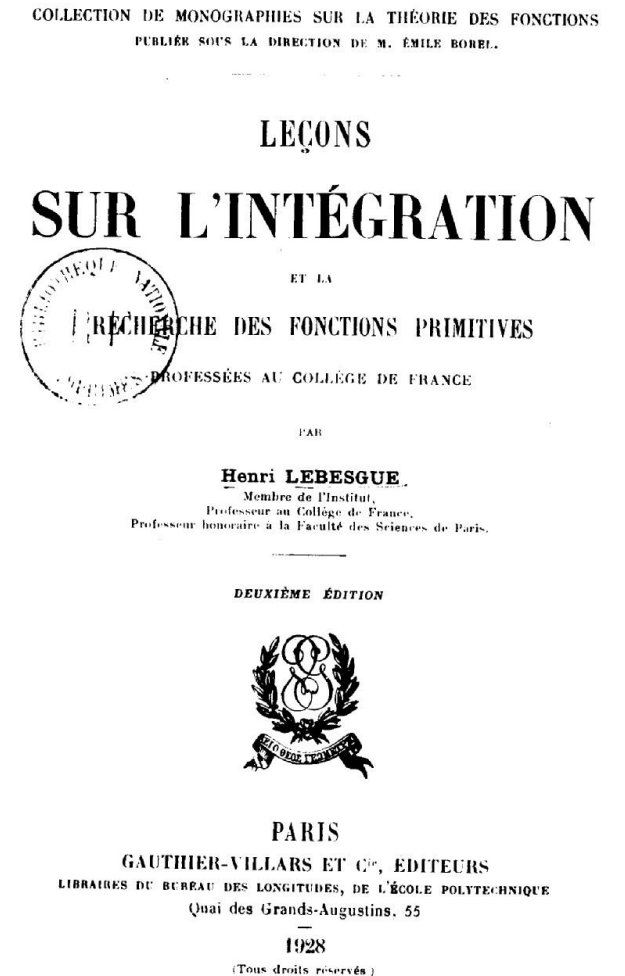
En este trabajo, definió el concepto de la hoy denominada **Integral de Riemann**, consolidando la teoría de las funciones reales de variable real.

# INTEGRACIÓN

- La teoría de integración adquiere entidad propia y en 1902 con la Tesis Doctoral de H. **Lebesgue** y su texto **Leçons sur L'intégration et la recherche des fonctions primitives**. Con estas aportaciones, reinterpretando las ideas de G. W. Leibniz, se consigue un concepto más general de integral, hoy llamado **Integral de Lebesgue**. Con esta noción de integral se asientan las bases para el desarrollo del Análisis Matemático y otras muchas disciplinas, a lo largo del S. XX.



Henri Lebesgue  
(1875-1941)



Particiones de un intervalo. Sumas asociadas a una partición dada.

Los intervalos considerados son siempre no triviales.

**Definición.** Se llama **partición** de  $[a, b]$  a cualquier subconjunto finito  $P$  contenido en  $[a, b]$  tal que  $a, b \in P$ . Escribimos  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  siendo  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ . (Nótese que cada partición tiene su propio cardinal  $n$ ).

Definimos **diámetro** de  $P$  como

$$\Delta P = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}.$$

La unión de dos particiones de  $[a, b]$  es una partición de  $[a, b]$ .

**Definición.** Sean  $P$  y  $P'$  dos particiones de  $[a, b]$ . Decimos que  $P$  es **más fina** que  $P'$  si  $P' \subseteq P$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}[a, b]$  al conjunto de todas las particiones de  $[a, b]$ .

**Ejemplo.**  $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ,  $P_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  y  $P_3 = \{0, \frac{1}{4}, 1\}$  son particiones de  $[0, 1]$  siendo  $P_2$  más fina que  $P_1$ . La partición  $P_3$  no está relacionada con las anteriores (en el sentido de ser más fina).



# INTEGRACIÓN : LA INTEGRAL DE CAUCHY

Recordamos el **Teorema de Weierstrass** que establece que una función continua en un intervalo  $[a, b]$  alcanza sus valores máximo y mínimo en ciertos puntos del intervalo.

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Sea  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición de  $[a, b]$ .

Como  $f$  es continua en  $[x_k, x_{k+1}]$ , para cada  $k = 1, \dots, n$ , existen

$$m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

**Definición.** Se llama **suma inferior** de  $f$  respecto de partición  $P$  al valor  $I(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$ .

Se llama **suma superior** de  $f$  respecto de la partición  $P$  al valor  $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$ .

Si elegimos  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , se dice que  $\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1})$  es una **suma intermedia**

**Observación.** Si  $\text{Im } f = [m, M]$  (se recuerda que  $f$  es continua en  $[a, b]$ ) entonces

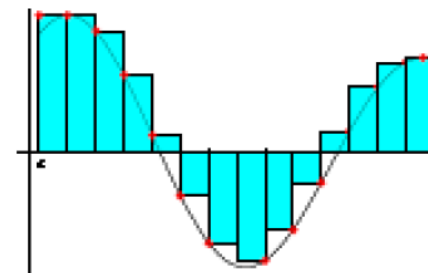
$$m(b - a) \leq I(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b - a).$$

En consecuencia, los siguientes valores existen:

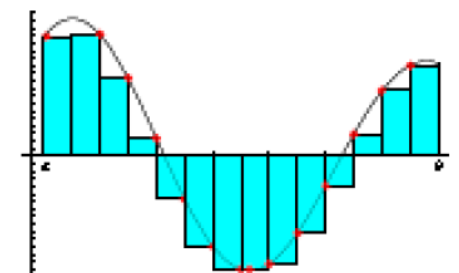
$$I(f) = \sup\{I(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$

$$S(f) = \inf\{S(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$

siendo  $I(f) \leq S(f)$ .



Suma superior.



Suma inferior.

# INTEGRACIÓN : LA INTEGRAL DE CAUCHY

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y tal que  $f(x) \geq 0$  para cada  $x \in [a, b]$ . Entonces:

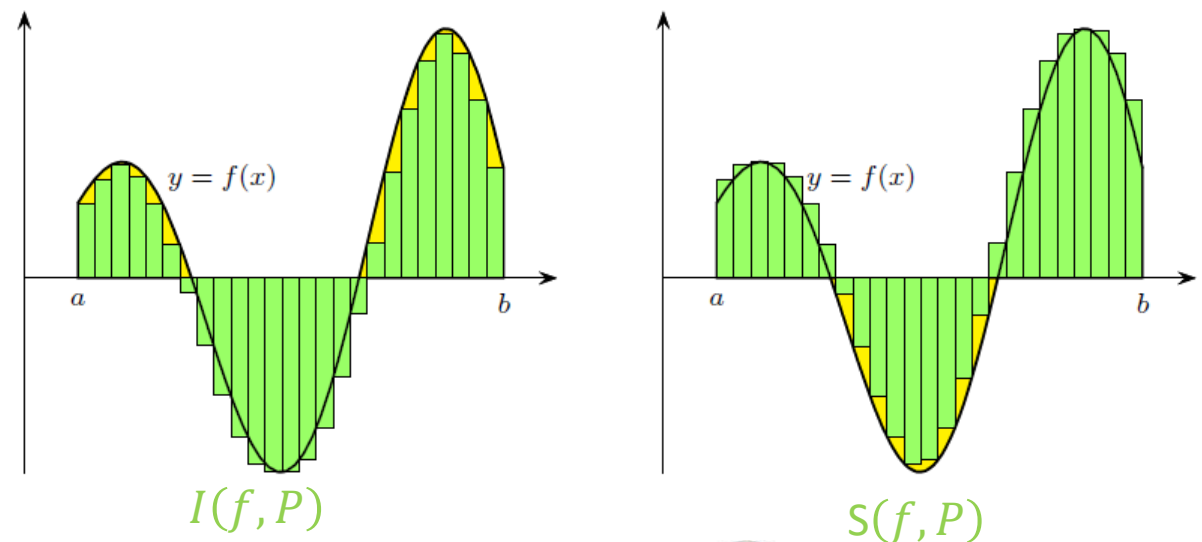
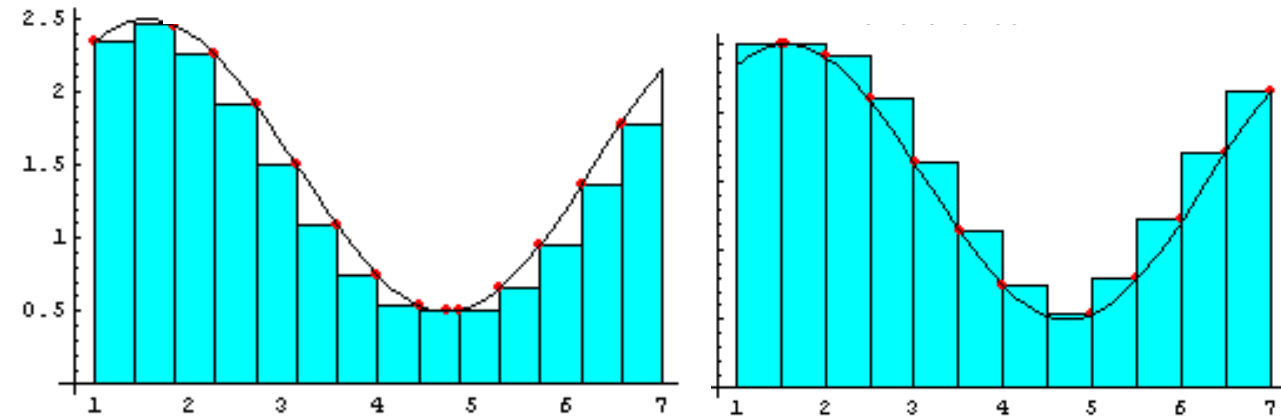
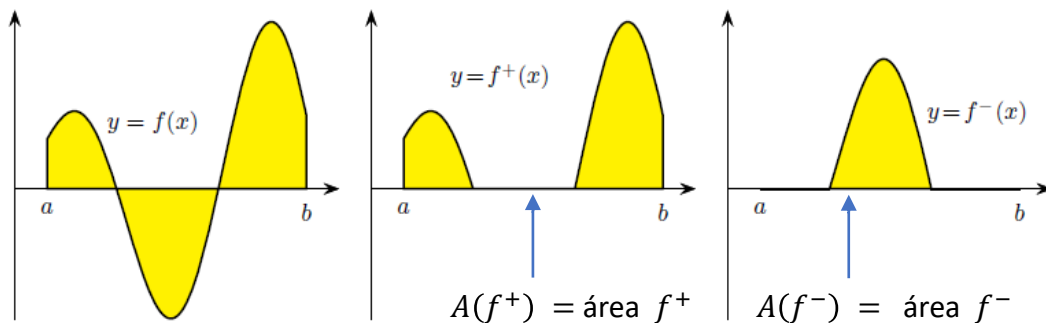
$I(f, P)$  (y por tanto  $I(f)$ ) es una aproximación por defecto del área que determina la gráfica de la función  $f$ .

Análogamente,  $S(f, P)$  (y por tanto  $S(f)$ ) es una aproximación por exceso.

Veremos que  $A(f) = I(f) = S(f)$  y diremos que este valor es el **área** de  $f$ .

Cuando  $f$  toma valores positivos y negativos (siendo continua) la situación es la siguiente:

$$I(f, P) \leq A(f^+) - A(f^-) \leq S(f, P)$$



**Teorema de integrabilidad de Cauchy.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si el diámetro de  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  es  $\Delta P < \delta$  entonces  $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ .

**Dem.** Por el **Teorema de Heine**,  $f$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ . Así, asociado a  $\frac{\varepsilon}{b-a}$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in [a, b]$  son tales que  $|x - y| < \delta$  entonces  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Sea  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  tal que  $\Delta P < \delta$ . Si  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ . Entonces, por el Teorema de Weierstrass existen  $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tales que

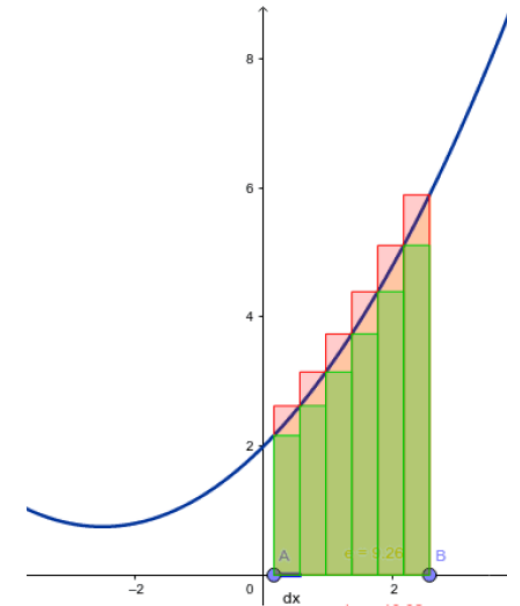
$$\begin{aligned} f(u_k) &= m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \\ f(v_k) &= M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \end{aligned}$$

siendo además  $|v_k - u_k| < \Delta P < \delta$ , por lo que

$$|f(v_k) - f(u_k)| = f(v_k) - f(u_k) = M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Así,

$$S(f, P) - I(f, P) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b - a) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$





El teorema anterior se reformula como sigue:

**Corolario.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Sea  $P_n$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ .

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0.$$

**Dem.** Por el teorema anterior, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, si el diámetro de  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  es  $\Delta P < \delta$ , entonces  $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ , dado  $\delta$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\Delta P_n \leq \delta$  para cada  $n \geq n_0$  de donde  $S(f, P_n) - I(f, P_n) < \varepsilon$ , para cada  $n \geq n_0$  y esto significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0$ . ■

**Observación:** El Teorema de Integrabilidad de Cauchy equivale al corolario anterior.

⇒ ] Prueba anterior.

⇐ ] Reducción al absurdo. Si dado  $\varepsilon > 0$  no existe  $\delta$  como el en teorema de integrabilidad, entonces para  $\delta = \frac{1}{n}$  obtenemos  $P_n$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$  (por ser  $\Delta P_n \leq \frac{1}{n}$ ) y tal que  $S(f, P_n) - I(f, P_n) \geq \varepsilon$ . Pero esto contradice el corolario anterior (que se verifica por hipótesis).

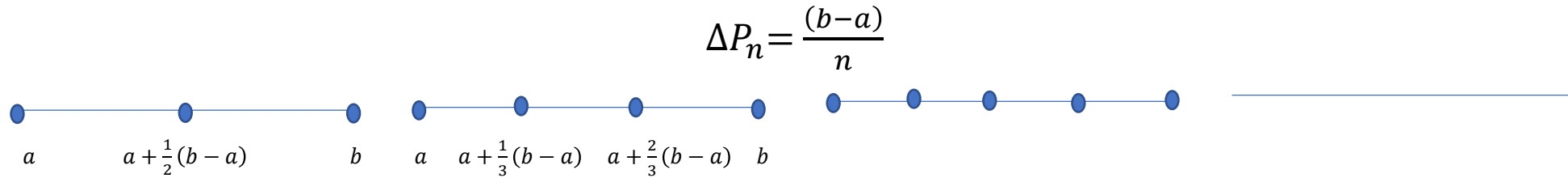
**Observación:** Si en las hipótesis del corolario anterior resulta que los límites  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n)$  existen, dicho resultado asegura que dichos límites coinciden.

Antes de plantearnos la existencia de tales límites nos cuestionamos algo todavía más básico:

**Cuestión:** ¿Existen particiones de diámetro tan pequeño como se necesite o se desee?

**Observación.** Existen particiones de  $[a, b]$  de diámetro arbitrariamente pequeño.

$$P_n = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}, \quad x_k = a + \frac{k}{n}(b - a), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$



$$\Delta P_2 = \frac{(b-a)}{2}$$

$$\Delta P_3 = \frac{(b-a)}{3}$$

$$\Delta P_4 = \frac{(b-a)}{4}$$

Además podemos conseguir que las **particiones** estén **encajadas**. Esto es que  $P_n \subseteq P_{n+1}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .  
¿Cómo?

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &:= P_1 \\ \tilde{P}_2 &:= P_2 \cup P_1 \\ \tilde{P}_n &:= P_n \cup \dots \cup P_1 \end{aligned}$$

Está claro que  $\tilde{P}_n \subseteq \tilde{P}_{n+1}$  y que  $\Delta \tilde{P}_n \leq \Delta P_n = \frac{(b-a)}{n}$ . Por tanto:

Para cualquier intervalo  $[a, b]$  existen particiones  $P_n$  que son tales que  $P_n \subseteq P_{n+1}$  y  $\Delta P_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema (de la Integral de Cauchy).** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Entonces  $I(f) = S(f)$ .

**Dem.** Sea  $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$  una sucesión de particiones tal que  $P_n \subseteq P_{n+1}$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ .

Puesto que  $P_{n+1}$  es más fina que  $P_n$ , tenemos que

$$I(f, P_n) \leq I(f, P_{n+1}) \leq I(f) \leq S(f) \leq S(f, P_{n+1}) \leq S(f, P_n),$$

por lo que que

$$0 \leq S(f) - I(f) \leq S(f, P_n) - I(f, P_n).$$

Como  $f$  es continua y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ , por el corolario anterior se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0,$$

de donde  $I(f) = S(f)$ . ■

**Definición.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Se define la **integral** de  $f$  en  $[a, b]$  como el valor

$$\int_a^b f(x) dx = I(f) = S(f).$$

**Observación.** El símbolo  $dx$  determina la variable de integración, que se entiende como una variable muda.



**Corolario.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Dada  $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ), sea  $\sigma(P_n, f)$  una sucesión de sumas intermedias. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ , entonces se verifica que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(P_n, f).$$

**Dem.** Por ser  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  y ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ , tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - I(f, P_n) = 0$ . Como  $I(f, P_n) \leq I(f) \leq S(f) \leq S(f, P_n)$ , se tiene que

$$0 \leq I(f) - I(f, P_n) \leq S(f, P_n) - I(f, P_n) \text{ y, análogamente, } 0 \leq S(f, P_n) - S(f) \leq S(f, P_n) - I(f, P_n),$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = I(f) = S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n).$$

Puesto que

$$I(f, P_n) \leq \sigma(P_n, f) \leq S(f, P_n),$$

Se obtiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(P_n, f) = I(f) = S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$ ,

Como  $I(f) = S(f) = \int_a^b f(x) dx$ , concluimos que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(P_n, f). \quad \blacksquare$$

**Corolario.** Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$  entonces,  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f(a + \frac{k}{n}(b-a))$ .

**Dem.** Obvia. (El diámetro de la sucesión de particiones considerada tiende a cero).

**Corolario.** Si  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua entonces  $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

Así  $\int_0^1 f(x)dx$  puede entenderse como el límite de un promedio de los valores  $\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$ .

**Ejemplo.**  $\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ .

Sea  $P_n = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ , donde  $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Como  $\Delta P_n = \frac{(b-a)}{n} \rightarrow 0$  tenemos que

$$\begin{aligned} S(f, P_n) &= \frac{b-a}{n} \left( a + \frac{1}{n}(b-a) \right) + \dots + \frac{b-a}{n} \left( a + \frac{k}{n}(b-a) \right) + \dots + \frac{b-a}{n} \left( a + \frac{n}{n}(b-a) \right) = \\ &= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{n(n+1)}{n^2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} \right) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

La integración sirve de herramienta para usar para sumar series y calcular valores numéricos:

**Ejemplo.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln(2).$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

donde  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

**Ejemplo.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \ln \sqrt{2}$

En efecto,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

para  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Por tanto,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$



## Propiedades de la integral de Cauchy.

**Linealidad.** Sean  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en  $[a, b]$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

**Dem.** Sabemos que  $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\alpha f + \beta g, P_n)$ , donde  $\sigma(\alpha f + \beta g, P_n)$  es una suma intermedia de  $\alpha f + \beta g$  para la partición  $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$ , siendo  $P_n$  una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta P_n = 0$ .

El resultado se obtiene de los siguientes hechos:

$$\sigma(\alpha f + \beta g, P_n) = \alpha \sigma(f, P_n) + \beta \sigma(g, P_n),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, P_n), \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(g, P_n). \quad \blacksquare$$

**Positividad.** Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$  entonces  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Dem.** Se obtiene del hecho de que  $\sigma(f, P) \geq 0$ , para cada partición  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ . \blacksquare

## Observaciones.

- (i) El operador integral  $I: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $f \rightarrow I(f) := \int_a^b f(x)dx$  es un funcional lineal positivo ( $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$ ).
- (ii) En  $\mathcal{C}([a, b])$  establecemos la relación de orden  $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ , para cada  $x \in [a, b]$ .  
Dicha relación verifica la siguiente propiedad :

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

**Corolario.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f|(x)dx$ .

**Dem.** Como  $-|f| \leq f \leq |f|$ , tenemos que (por la positividad),  $-\int_a^b |f|(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f|(x)dx$ . ■

**Corolario.** Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $\text{Im} f(x) = [m, M]$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

**Dem.** Si  $g_1(x) = m$  y  $g_2(x) = M$ , es claro que  $g_1 \leq f \leq g_2$ , de donde se obtiene lo afirmado. ■

**Aditividad respecto del intervalo de integración.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y  $c \in ]a, b[$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**Dem.** Dada  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ , sea  $P' = P \cup \{c\}$ . Definimos  $P_1 = P' \cap [a, c]$  y  $P_2 = P' \cap [c, b]$ .

Si  $P' = \{x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  siendo  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = c < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ , es claro que

$$P_1 = \{x_0, \dots, x_k\}, \quad P_2 = \{x_k, \dots, x_n\}$$

y que

$$I(f, P) \leq I(f, P') = I(f|_{[a, c]}, P_1) + I(f|_{[c, b]}, P_2) \leq I(f|_{[a, c]}) + I(f|_{[c, b]}) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tomando supremos,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Aplicando lo anterior a  $-f$ , deducimos que

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Uniendo las dos últimas desigualdades,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \blacksquare$$



**Corolario.** Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y tal que  $f \geq 0$  en  $[a, b]$ , pero existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) > 0$ , entonces  $\int_a^b f(x)dx > 0$ .

**Dem.** Por el Teorema de conservación del signo, existe  $\delta > 0$  tal que  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq ]a, b[$ .

Sea

$$m := \min\{f(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} > 0.$$

Por tanto,

$$0 < 2\delta m \leq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx.$$

En consecuencia,

$$0 < \int_a^{x_0 - \delta} f(x)dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x)dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(por ser la suma de dos números positivos con uno estrictamente positivo). ■

**Corolario.** El operador integral es estrictamente creciente en el sentido de que si  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas tales que  $f < g$  (esto es  $f \leq g$  y  $f \neq g$ ) entonces,  $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ .

**Dem.** Aplicamos lo anterior a  $g - f$  y usamos la linealidad de la integral respecto del integrando. ■

**Teorema (del valor medio integral).** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces, su promedio integral se alcanza en algún punto  $c \in [a, b]$ , lo que significa que  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$ .

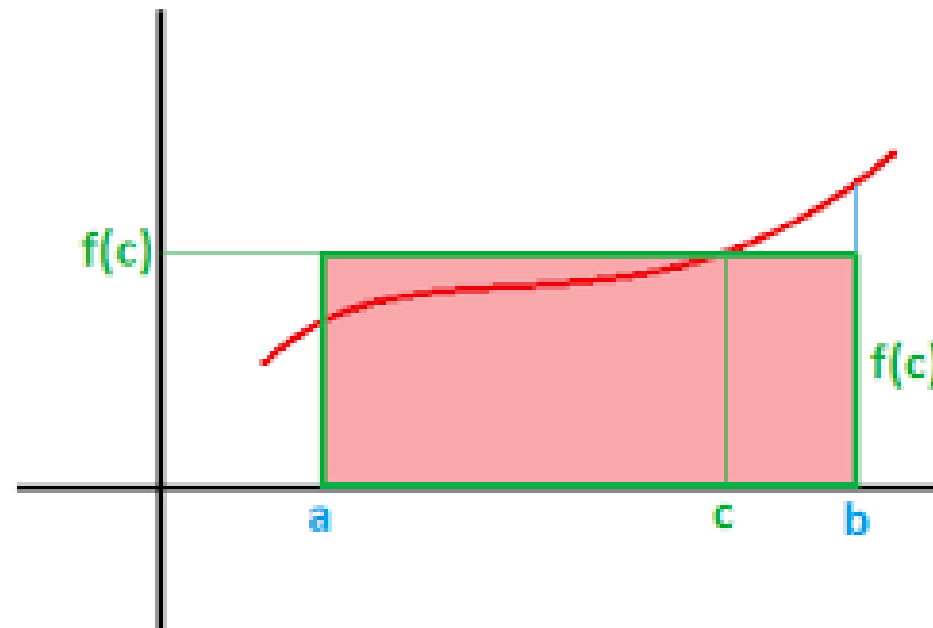
**Dem.** Sea  $\text{Im}f = [m, M]$  (Teorema de Weierstrass). Puesto que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a),$$

y en consecuencia

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \in [m, M] = \text{Im}f.$$

Así, el resultado es claro por el teorema de los valores intermedios (la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo) aplicado a la función  $f$ . ■



**Observación:** El valor  $f(c)$  nos proporciona la cuadratura de  $f$  en  $[a, b]$ .

**Teorema (promedio integral ponderado).** Sean  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas, siendo  $g$  no negativa en  $[a, b]$ . Entonces existe  $c \in [a, b]$ , tal que  $\int_a^b (fg)(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$ .

**Dem.** Si  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , entonces ha de ser  $g = 0$  (por ser continua y no negativa) y el resultado es claro.

Supongamos que  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ . Sea  $\text{Im}f = [m, M]$  (Teorema de Weierstrass).

Puesto que  $mg \leq fg \leq Mg$  tenemos que

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (fg)(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

En consecuencia

$$\frac{\int_a^b (fg)(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \in \text{Im}f = [m, M].$$

Por ello existe  $c \in [a, b]$  verificando lo pedido. ■

**Observaciones:**

- (i) Al valor  $f(c)$  se le llama **promedio integral ponderado** de  $f$  respecto a la función  $g$ .
- (ii) La función producto  $fg$  es una función continua en  $[a, b]$  (por ser producto de funciones continuas).