Examen Extraordinaria 22-23

Nota: la mayoría de enunciados del examen original estaban mal redactados y carecían de sentido. Los enunciados que se muestran aquí están ya corregidos. Como se puede observar, es un examen con un nivel mucho mayor que el de la convocatoria ordinaria, por lo que en esta asignatura se recomienda que por todos los medios intentéis aprobarla en ordinaria.

1. Da la descomposición en ciclos disjuntos y en transposiciones de la permutación $\sigma = (1234)(235)(12)$. Calcula su orden.

Resolución:

- **Descomposición en ciclos disjuntos:** $(14)(35)$
- **Descomposición en transposiciones:** $(14)(35)$
- **Orden:** $mcm(2,2) = 2$

2. Sea G un grupo no abeliano de orden 27. Razona que su centro $Z(G)$ es un grupo cíclico.

Resolución:

- $Z(G) \leq G$, y por el teorema de Lagrange, concluimos que $|Z(G)|$ divide a 27, y por tanto, $|Z(G)|$ podría ser $1, 3, 9$ o 27.
- Como $|G| = 27 = 3^3$, tenemos que G es un 3-grupo, y por tanto, su centro es no trivial, es decir, $|Z(G)| > 1$.
- Además, como G es no abeliano, tenemos que $Z(G) \neq G$, y por tanto $|Z(G)| < |G| = 27$.
- Como G es no abeliano, $G/Z(G)$ no puede ser cíclico, y por tanto $|Z(G)| \neq 3^2 = 9$.
- Concluimos, por tanto, que $|Z(G)| = 3$ y, por tanto, $|Z(G)| \cong C_3$.

3. Prueba que todo grupo de orden 18 es un producto semidirecto.

Resolución:

Calculamos el número de 3-subgrupos de Sylow, sabiendo que $|G| = 18 = 2 \cdot 3^2$ y que $n_3 \equiv 1 \mod 3$ y que $n_3 \mid 2$. Concluimos que $n_3 = 1$, y por tanto todo grupo de orden 18 tiene un único grupo de orden 9, que además es normal.

Tomamos por tanto, el 3-subgrupo de Sylow de G, P_3, y un 2-subgrupo de Sylow de G, P_2. Tenemos entonces que:

- $P_3 \trianglelefteq G, P_2 \leq G$
- Como los órdenes de P_3 y P_2 son primos relativos, entonces se tiene que $P_3 \cap P_2 = 1$.
- Por últimos tenemos que $P_3P_2 = G$, ya que:

$$|P_3P_2| = \frac{|P_3||P_2|}{|P_3 \cap P_2} = 2 \cdot 3^2 = 18 = |G|$$

Concluimos que $G = P_3 \rtimes P_2$.

4. Da las descomposiciones cíclica y cíclica primaria del grupo $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$.

Resolución:

- **Descomposición cíclica primaria**: $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$
- **Descomposición cíclica**: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{60}$

5. Sea G un grupo de orden 18. ¿Puedes asegurar que G tiene un elemento de orden 3? ¿Y de orden 9? Razona las respuestas.

Resolución:

- Por el primer teorema de Sylow, como $3 \mid |G|$, entonces existe $H \leq G$ tal que $|H| = 3$, y por tanto, concluimos que $H \cong C_3$. Como H es un grupo cíclico de orden 3, existirá $h \in H$, y por tanto $h \in G$ tal que $|h| = 3$.
- En el caso $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$, se tiene que $|G| = 18$, y en G no existen elementos de orden 9. De existir $g = (x, y, z)$ tal que $|g| = 9$ se tendría que $mcm(|x|, |y|, |z|) = 9$, pero el orden de x e y solo puede ser 1 o 3 y el orden de z solo puede ser 1 o 2, por tanto, $|g| = 1, 2, 3, \text{o } 6$.

6. Sea G un grupo de orden 18 no abeliano y $g \in G$ un elemento de orden 9. Razona que G es isomorfo a D_9.

Resolución:

Utilizando el ejercicio 3, sabemos que G tiene un único grupo de orden 9, y que G es producto semidirecto de dicho grupo y de un grupo de orden 2. Como $\langle g \rangle$ es un grupo de orden 9 de G, tenemos que:

$$G = \langle g \rangle \rtimes P_2 \cong C_9 \rtimes C_2$$

, donde P_2 es un subgrupo de G de orden 2.

Veamos cuáles son los posibles productos semidirectos de C_9 y C_2, es decir veamos los homomorfismos posibles desde C_2 en los automorfismos de C_9.

Calculemos primero todos los automorfismos de C_9. Como $\varphi(9) = 6$, existen 6 posibles automorfismos:

$$\begin{array}{ccc} C_9 & \longrightarrow & C_9 \\ g & \xrightarrow{\theta_1} & g \\ g & \xrightarrow{\theta_2} & g^2 \\ g & \xrightarrow{\theta_3} & g^4 \\ g & \xrightarrow{\theta_4} & g^5 \\ g & \xrightarrow{\theta_5} & g^7 \\ g & \xrightarrow{\theta_6} & g^8 = g^{-1} \end{array}$$

Para que se tenga un homomorfismo

$$\theta : C_2 = \langle b : b^2 = 1 \rangle \longrightarrow Aut(C_9)$$

utilizando el teorema de Dyck, sabemos que se debe tener $(\theta(b))^2 = Id$, y por tanto, solo se puede tener $\theta(b) = \theta_1$ o $\theta(b) = \theta_6$.

- Si tenemos $\theta(b) = \theta_1$, tenemos que $\theta(b) = Id$, y por tanto, tenemos que $G \cong C_9 \times C_2$, y por tanto, G es abeliano, por lo que esta posibilidad no es la que se pide.
- Si tenemos $\theta(b) = \theta_6$, tenemos que

  $$bgb^{-1} = {}^b g = \theta(b)(g) = g^{-1} \Rightarrow bg = g^{-1}b$$

  Podemos ya finalmente definir un isomorfismo de D_9 en G, dado por:

  $$\begin{array}{ccc} D_9 & \longrightarrow & G \\ \rho & \longmapsto & g \\ \tau & \longmapsto & b \end{array}$$

  Utilizando el Teorema de Dyck, ya que $g^9 = 1, b^2 = 1$ y $bg = g^{-1}b$, se trata de un homomorfismo, y ahora comprobamos que es biyectivo. Claramente es sobreyectivo, ya que los elementos de G son $g^i b^j$, por tanto g y b generan G. Finalmente, como $|D_9| = |G| = 18$ tenemos que se trata de una biyección.

7. ¿Es el grupo $D_8/Z(D_8)$ abeliano?

Resolución:

Probaremos primero que $Z(D_8) = \langle \rho^4 \rangle$. Comprobamos primero que $\rho^i\tau \notin Z(D_8)$, ya que $\rho^i\tau\rho = \rho^{i-1}\tau \neq \rho^{i+1}\tau = \rho\rho^i\tau$. Por tanto $Z(D_8) \leq \langle \rho \rangle$, y para todo $\rho^i \in Z(D_8)$ se debe verificar que

$$\tau\rho^i\tau = \rho^{-i} = \rho^i = \tau\tau\rho^i$$

, lo cual solo se verifica si ρ^i tiene orden 1 o 2. Por tanto, $Z(D_8) = \langle \rho^4 \rangle$.

Por tanto, el grupo del enunciado es $D_8/\langle \rho^4 \rangle$. Comprobamos rápidamente que se trata de un grupo no abeliano, ya que:

$$\rho\tau\langle \rho^4 \rangle = \{\rho\tau, \rho^5\tau\} \neq \{\rho^7\tau, \rho^3\tau\} = \{\tau\rho, \tau\rho^5\} = \tau\rho\langle \rho^4 \rangle$$

8. Demuestra si se tiene que $S_3 \cong Aut(C_9)$ o $C_6 \cong Aut(C_9)$. Da el isomorfismo.

Resolución:

En el ejercicio 6 calculamos los posibles automorfismos de C_9:

$$\begin{array}{ccc} C_9 & \longrightarrow & C_9 \\ g & \xrightarrow{\theta_1} & g \\ g & \xrightarrow{\theta_2} & g^2 \\ g & \xrightarrow{\theta_3} & g^4 \\ g & \xrightarrow{\theta_4} & g^5 \\ g & \xrightarrow{\theta_5} & g^7 \\ g & \xrightarrow{\theta_6} & g^8 = g^{-1} \end{array}$$

Calculemos el orden de θ_2:

$$g \mapsto g^2 \mapsto g^4 \mapsto g^8 \mapsto g^7 \mapsto g^5 \mapsto g$$

Hemos comprobado que $|\theta_2| = 6$, y que θ_2 es un generador de $Aut(C_9)$. Por tanto, vamos a tener que $C_6 = \langle a : a^6 = 1 \rangle \cong Aut(C_9)$. El isomorfismo será el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} C_6 & \longrightarrow & Aut(C_9) \\ a & \mapsto & \theta_2 \end{array}$$

Utilizando el teorema de Dyck, como $(\theta_2)^6 = Id$ concluimos que se trata de un homomorfismo, que será sobreyectivo por ser θ_2 generador. Finalmente, como $|C_6| = |Aut(C_9)| = 6$ tenemos que el homomorfismo es biyectivo.

9. Considera los grupos $C_3 = \langle a; a^3 = 1\rangle, K = \langle b, c; b^2 = c^2 = (bc)^2 = 1\rangle$ y la acción de C_3 sobre K determinada por ${}^a b = bc$ y ${}^a c = b$. En el producto semidirecto $G = K \rtimes C_3$ calcula el producto $(b, a)^{-1}(bc, a^2)(c, a)^{-1}$.

Resolución:

- **Neutro de G:** $(k, h)(1, 1) = (k^h 1, 1) = (k, h)$
- **Inverso de $(k, h) \in G$:**

$$(k, h)(r, s) = (k^h r, hs) = (1, 1) \Rightarrow r = {}^{h^{-1}}k^{-1}, s = h^{-1}$$

Calculamos $(b, a)^{-1}$:

$$(b, a)^{-1} = ({}^{a^{-1}}b^{-1}, a^{-1}) = ({}^{a^2}b, a^2) = ({}^a(bc), a^2) = (bcb, a^2) = (c, a^2)$$

Calculamos $(c, a)^{-1}$:

$$(c, a)^{-1} = ({}^{a^{-1}}c^{-1}, a^{-1}) = ({}^{a^2}c, a^2) = ({}^a b, a^2) = (bc, a^2)$$

Calculamos $(b, a)^{-1}(bc, a^2)$:

$$(b, a)^{-1}(bc, a^2) = (c, a^2)(bc, a^2) = (c^{a^2}(bc), a) = (c^a({}^a b^a c), a) = (c^a c, a) = (bc, a)$$

Calculamos $(b, a)^{-1}(bc, a^2)(bc, a^2)$:

$$(b, a)^{-1}(bc, a^2)(bc, a^2) = (bc, a)(bc, a^2) = (bc^a(bc), a^3) = (bcbcb, 1) = (b, 1)$$

10. Para el grupo $G = K \rtimes C_3$ del ejercicio anterior, calcula el conmutador $[G, G]$.

Resolución:

Sabemos que $G' = [G, G]$ es el menor subgrupo normal de G tal que G/G' es abeliano. Por definición de producto semidirecto, sabemos que $K \trianglelefteq G$ y $|G/K| = 3$, luego G/K es abeliano. Por tanto, sabemos que:

$$[G, G] \leq K$$

Calculemos $[(b, a), (b, 1)]$:

$$(b, a)(b, 1)(b, a)^{-1}(b, 1)^{-1} = (c, a)(c, a^2)(b, 1) = (bc, 1)(b, 1) = (c, 1)$$

por lo que concluimos que, en primer lugar, G no es abeliano (es decir, $[G, G] \neq 1$) y en segundo lugar que $\langle c \rangle \leq [G, G]$.

Comprobamos que $\langle c \rangle$ no es normal en G:

$$(1, a)(c, 1)(1, a)^{-1} = (b, a)(1, a^2) = (b, 1) \notin \langle c \rangle$$

Por tanto, $[G, G] \neq \langle c \rangle$, y como $\langle c \rangle \leq [G, G] \leq K$ y $|K/\langle c \rangle| = 2$ que es primo (es decir, no existe ningún otro grupo normal distinto que contenga a $\langle c \rangle$ y esté contenido en K), se tiene que $[G, G] = K$.