Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es una par $(X, \mathcal{T})$, donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X. Esta familia $\mathcal{T}$ tiene las siguientes propiedades:

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$ (unión arbitraria[1]).

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia $\mathcal{T}$ se le llama **topología** en el conjunto X. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **abiertos** en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

□

Observación. De **(A3)** podemos concretar que si $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{T}$, es decir, que la intersección finita de abiertos es abierto (se prueba con una inducción trivial).
En general, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ no tiene por qué ser abierto.

□

Ejemplo.

- **•) Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t[2].

- **•) Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.

- **•) Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$,
  $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.

- **•) Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$,
  $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t. (por las leyes de Morgan)

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i \right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) \text{(intersección de finitos es finito)}$$
$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) \text{(unión de finitos es finito)}$$

[1] Puede ser finita o infinita, numerable o no numerable
[2] A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

- •) **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U$ es numerable$\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.

- •) $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.

- •) **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t.

- •) **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S$, $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \ \ \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$. (es un caso particular del punto incluido, $\mathcal{T}_a$).

$\square$

Observación. En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

$\square$

Ejercicio 1. Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos $X = \{a, b\}$. Las topologías posibles son:

- •) Trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$

- •) Discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$

- •) Punto incluido (a): $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

- •) Punto incluido (b): $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

Cualquier otra topología que se pueda construir sobre este conjunto coicidirá con alguna de las anteriores.

$\square$

Ejercicio 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \ \ \forall x \in X$.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$, como $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \ \ \forall x \in X$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$.

$\Leftarrow$) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{T} \ \ \forall x \in X$. Consideramos $U \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunto cualquiera de X. Podemos expresar $U = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, donde $\{x_i\} \in X \ \ \forall i \in I$. Por la propiedad **(A2)** tenemos $U \in \mathcal{T}$. Como U era un subconjunto arbitrario de X, tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

$\square$

1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

(D1) $d(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D2) (simetría) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y, \in X$.

(D3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$

A la aplicación d la llamaremos **distancia**.

□

Ejercicio 1.1.1. Demostrar que a partir de las propiedades **(D2)**, **(D3)** y la segunda parte de **(D1)** se puede deducir la primera parte de **(D1)**, y como consecuencia se tiene $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$, tenemos:

$$0 \overset{\textbf{(D1)}(2)}{=} d(x, x) \overset{\textbf{(D3)}}{\leqslant} d(x, y) + d(y, x) \overset{\textbf{(D2)}}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow d : X \times X \to [0, \infty)$$

□

Definición 1.3. (X, d) e.m.[3] $x \in X$, $r > 0$, se definen:

- **•)** La **bola (abierta)** de centro x y radio r como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- **•)** La **bola cerrada** de centro x y radio r como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

- **•)** La **esfera** de centro x y radio r como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

□

Propiedades. De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

- **•)** $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- **•)** $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$

[3] A partir de ahora notaremos así a un espacio métrico

•) Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x, x) \subset B(x, r)$

□

Ejemplo. (Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ consideramos la **distancia usual**,

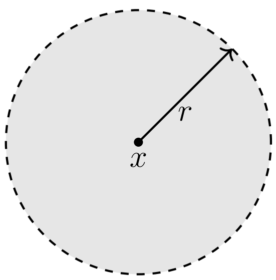
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

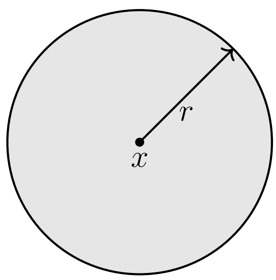
•) Si $n = 1$, $d(x, y) = |x - y|$,,

$$\begin{aligned} B(x, r) &= (x - r, x + r) \\ \overline{B}(x, r) &= [x - r, x + r] \\ S(x, r) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

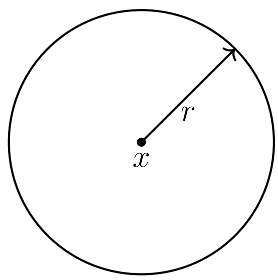
•) En $n = 2$ tenemos



$B(x, r) \equiv$ disco

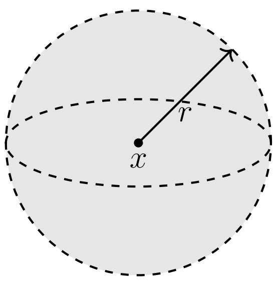


$\overline{B}(x, r) \equiv$ disco cerrado

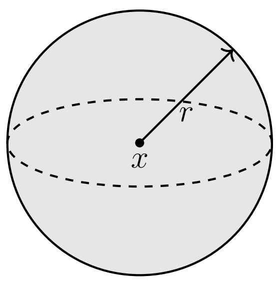


$S(x, r) \equiv$ circunferencia

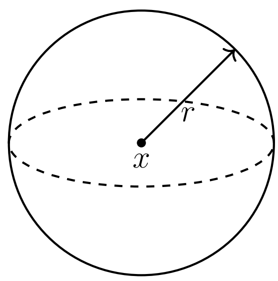
•) En $n = 3$ tenemos:



$B(x, r) \equiv$ bola



$\overline{B}(x, r) \equiv$ bola cerrada



$S(x, r) \equiv$ esfera

□

Ejemplo. En un conjunto $X \neq \emptyset$, se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x,y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r > 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x,y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r \geqslant 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r < 1 \end{cases}$$

$$S(x,y) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si} \quad r = 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad r \neq 1 \end{cases}$$

□

Ejemplo.

- •) Si d es una distancia en X y $\lambda > 0$, entonces $\lambda \cdot d : X \times X \to [0, \infty)$ también es una distancia y $B_{\lambda d}(x,r) = B_d\left(x, \dfrac{r}{\lambda}\right)$.
- •) Sean d y $\tilde{d}$ distancias en X y $d \leqslant \tilde{d}$, entonces $B_d(x,r) \geqslant B_{\tilde{d}}(x,r)$.

□

Definición 1.4. (X,d) e.m. Un subconjunto $U \subset X$ se dice **abierto métrico** si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U, \quad \exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$.

□

Proposición 1.1. Si (X,d) es un espacio métrico, entonces

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ es un abierto métrico en } (X,d)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

es una topología en X que llamamos la **topología métrica** en (X,d).

Demostración. Veamos que $\mathcal{T}_d$ así definida verifica las propiedades de una topología:

(A1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}_d$ trivialmente (ya que $X \subset X$).

(A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_d$. Tendremos que ver si se verifica que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$. Para ello estudiemos los dos casos posibles:

Si $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Si $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$, entonces podemos considerar $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists r > 0 : B(x,r) \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$. ¿Se verifica que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$? De nuevo veamos los casos posibles:

Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces se verifica trivialmente.

Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces podemos considerar $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : B(x,r_1) \subset U_1$ y $B(x,r_2) \subset U_2 \Rightarrow B(x, \text{mín}\{r_1,r_2\}) \subset U_1 \cap U_2$, es decir existe una bola abierta en la intersección que contiene al punto luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$.

□

Definición 1.5. Se llama **topología usual de** $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_u$, a la topología métrica en $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, es decir, $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U \quad \exists r > 0 : B(x,r) \subset U$.

□

Proposición 1.2. (X,d) e.m. Se cumplen:

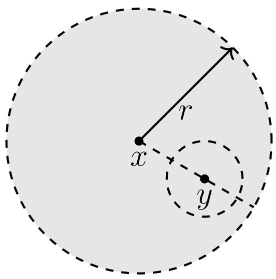
(i) Las bolas abiertas en (X,d) son abiertos.

(ii) Todo abierto no vacío en (X,d) se puede escribir como unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.

Demostración.

(i) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$B(x,r) \in \mathcal{T}_d$?

Sea $y \in B(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : d(x,y) + \varepsilon < r \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Para ver esta última implicación tenemos que si tomamos un $z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B(x,r)$.



(ii) Sea $U \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall x \in U \quad \exists r_x > 0$ tal que $B(x,r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup\limits_{x \in U} B(x,r_x) = \bigcup\limits_{x \in U} \overline{B}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$.

□

Corolario 1.2.1. En (X,d) tenemos

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

□

Ejemplo.

•) (X,d) e.m. En general, no todo abierto es una bola. Pir ejemplo la unión de bolas no concéntricas.

•) No todo conjunto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es abierto. Por ejemplo $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto.

•) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos abiertos (topológicamente) son los intervalos abiertos, es decir, los del tipo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a,b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.

- •) En (X, d), en general la intersección infinita de abiertos no es abierto. Por ejemplo, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ que no es abierto.

- •) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$ (la topología asociada a la distancia discreta es la distancia discreta).

$\square$

Definición 1.6. Sean $X \neq \emptyset$ y d_1, d_2 distancias en X. Decimos que d_1 y d_2 son **equivalentes** si existen $a, b > 0$ tal que

$$a \cdot d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant b \cdot d_1(x,y) \quad \forall x, y \in X$$

$\square$

Proposición 1.3. Si d_1, d_2 son distancias en $X \neq \emptyset$ y existe $a > 0$ tal que $a \cdot d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \quad \forall x, y \in X$, entonces $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. En particular, si d_1 y d_2 son equivalentes, entonces $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, $U \neq \emptyset$, ¿$U \in \mathcal{T}_{d_2}$?
Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1} \Rightarrow \exists r > 0 : B_{d_1}(x, r) \subset U$. Como $a \cdot d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset B_{d_1}(x, r)$. Para verlo, tomamos $y \in B_{d_2}(x, a \cdot r) \Rightarrow d_2(x,y) < a \cdot r \Rightarrow a \cdot d_1(x,y) < r \Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r)$. Por tanto, $B_{d_1}(x,r) \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2} \Rightarrow T_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

$\square$

Definición 1.7. Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice **metrizable** si existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

$\square$

Ejemplo.

- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es metrizable.

- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es metrizable.

$\square$

Ejercicio 1.1.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t. metrizable, entonces cumple la condición de Hausdorff:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U, \; y \in V \text{ y } U \cap V = \emptyset$$

Por ser metrizable, sabemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ donde $d : X \to [0, \infty)$ es una distancia. Por tanto, para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ tengo $d(x,y) > 0$. Puedo considerar entonces $r = \dfrac{d(x,y)}{2}$. Tengo entonces $U = B(x,r)$ y $V = B(y,r)$. Es claro que $x \in U$ y $y \in V$. Veamos que U y V son disjuntos. Tengo $U \cap V = \{z \in X : d(z,x) < r, d(z,y) < r\}$. Supongamos que este conjunto no es vacío, en cuyo caso tendría que $\exists z \in X$ tal que $d(z,x) < r$ y $d(z,y) < r$. Por tanto, $d(z,x) + d(z,y) < 2r = d(x,y)$ lo cual incumple la desigualdad triangular. Llegamos a contradicción y por tanto $U \cap V = \emptyset$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$ no es metrizable si $\#X > 2$ (cardinal del conjunto) ya que no verifica la condición de Hausdorff.
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ no es metrizable por la misma razón (ya que la intersección de cualesquiera dos abiertos va a contener a x_0).
- •) $(X, \mathcal{T}_{CF})$ no es metrizable si X es infinito (aplicar las leyes de morgan para la intersección).
- •) $(X, \mathcal{T}_{CN})$ no es metrizable si X no es numerable.
- •) $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$.
- •) La topología de Sierpinski tampoco es metrizable (ya que el único abierto que contiene a b es el total).
- •) La topología de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ cumple la propiedad de Hausdorff.

□

1.2. Comparación de Topologías

Definición 1.8. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X. Diremos que $\mathcal{T}_2$ es **más fina** que $\mathcal{T}_1$ o que $\mathcal{T}_1$ es **menos fina** que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y lo notamos como $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

□

Ejemplo.

- •) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} \leqslant \mathcal{T}_{CN}$.
- •) $(X, \mathcal{T})$ e.t, entonces $\mathcal{T}_t \leqslant \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_{disc}$
- •) Si $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_2 \leqslant \mathcal{T}_1$, entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (por doble inclusión).
- •) En general si tenemos dos topologías en X, no siempre son comparables. Por ejemplo la topología del punto incluida en dos puntos distintos:

  $$0, 1 \in \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0), (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$$

  Veamos que $\mathcal{T}_0 \nleq \mathcal{T}_1$, ya que $\{0\} \notin \mathcal{T}_1$, y por el mismo motivo (pero con el 1) tenemos $\mathcal{T}_1 \nleq \mathcal{T}_0$.

  Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{x_0})$ ya que $\{x_0\} \in \mathcal{T}_{x_0}$, $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_u \Rightarrow \mathcal{T}_{x_0 \nleq \mathcal{T}_u}$
  Igualmente $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_u$ y $(x_0 + 1, x_0 + 2) \in \mathcal{T}_{x_0} \Rightarrow \mathcal{T}_u \nleq topo_{x_0}$
- •) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- •) (X, d), (X, d'), $d \leqslant d' \Rightarrow \mathcal{T}_d \leqslant \mathcal{T}_{d'}$.

□

1.3. Cerrados

Definición 1.9. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Diremos que un conjunto $F \subset X$ es **cerrado** en $(X, \mathcal{T})$ si $X \subset F \in \mathcal{T}$. Denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ a la familia de todos los cerrados en $(X, \mathcal{T})$.

□

Propiedades.

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(C2) Si $\{F_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$.

(C3) Si $F_1, F_2" \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$

Por inducción, de **(C3)** tenemos que la unión finita de cerrados es cerrada.

Observación.

- •) $U \in \mathcal{T} \iff X \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, $F \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \iff X \setminus F \in \mathcal{T}$.
- •) $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto además implica que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{C}_{\mathcal{T}_1} = \mathcal{C}_{\mathcal{T}_2}$. Esto nos dice que para conocer una topología basta con conocer la familia de sus cerrados.
- •) En general, puede haber conjntos que no sean ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tenemos que $[0, 1) \notin \mathcal{T}_u \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
- •) En $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ tenemos que $\mathcal{T}_{x_0} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{P}(X)$ y además $\mathcal{T}_{x_0} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \{\emptyset, X\}$.
- •) En general, la unión arbitraria de cerrados no es cerrado. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, tomamos $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] = (0, 3)$. Otro ejemplo sería $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ considerando $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$ que no es cerrado.

□

Ejemplo.

- •) Topología trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_t} = \mathcal{C}_t = \{\emptyset, X\}$.
- •) Topología discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{disc}} = \mathcal{C}_{disc} = \mathcal{P}(X)$.
- •) Topología del punto incluido: $x_o \in X$, $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{x_0}} = \mathcal{C}_{x_0} = \{X\} \cup \{F \subset X : x_0 \notin F\}$
- •) Topología cofinita: $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ finito }\} \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{T}_{CF}} = \mathcal{C}_{CF} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ finito}\}$
- •) En ocasiones no es fácil describir $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Por ejemplo en $\mathcal{T}_u$ o $\mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.

□

Ejemplo. En un espacio métrico $(X, \mathcal{T}_d)$, las bolas cerradas y las esferas son cerrados.

Demostración.

- •) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$\overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}_d$? Esto es equivalente a preguntarse ¿$X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{T}_d$?

  Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x,r) \Rightarrow d(x, y > r)$. Entonces $\exists \varepsilon > 0 : r + \varepsilon < d(x,y) \Rightarrow B(y,\varepsilon) \cap \overline{B}(x,r) = \emptyset \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{T}_d \Rightarrow X \setminus \overline{B}(x,r) \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$

- •) Sea $x \in X$, $r > 0$,¿$S(x,r) \in \mathcal{C}_d$? Dado que $X \setminus S(x,r) = B(x,r) \cup (X \setminus \overline{B}(x,r)) \in \mathcal{T}_d$ (por ser unión de abiertos).

□

Ejercicio 1.3.1. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos cerrados son los de la forma $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y $[a, b]$ con $a < b$.

Sabemos que los únicos abiertos en $\mathcal{T}_u$ son los intervalos de la forma $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a, b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.
Es claro que $\mathbb{R} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
Tenemos que $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty) \in \mathcal{T}_u$, luego $(-\infty, a] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
De la misma forma, $\mathbb{R} \setminus [b, +\infty) = (-\infty, b) \in \mathcal{T}_u$, luego $[b, +\infty) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$
Finalmente $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \in \mathcal{T}_u$ por ser unión de abiertos luego $[a, b] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_u}$.
Dado que ya han aparecido todos los tipos posibles de intervalos en $\mathbb{R}$, no habrá más intervalos cerrados que los ya mencionados (ya que cualquier otro tipo de intervalo es abierto).

□

Teorema 1.4. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

(C2) Si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

(C3) Si F_1, F_2" $\in \mathcal{C}$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{C}_\mathcal{T} = \mathcal{C}$.

Demostración. La existencia queda probada definiendo $\mathcal{T} = \{U \subset X : X \setminus U \in \mathcal{C}\}$.
La unicidad es inmediata ya que si $\mathcal{C}_{\mathcal{T}'} = \mathcal{C}_\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

□

1.4. Bases de topología

Definición 1.10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Una familia de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una **base** de la topología $\mathcal{T}$ si $\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists \{B_i\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$.
A los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **abiertos básicos**.

□

Observación.

- •) Ni $\mathcal{B}$ ni la familia $\{B_i\}_{i \in I}$ tienen que ser finitas o numerables
- •) La forma de escribir $U = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ puede no ser única.
- •) $\mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}$ (trivialmente).
- •) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$ con $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}'$ es base de $\mathcal{T}$.

□

Proposición 1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ una familia de abiertos. Son equivalentes:

(i) $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

(ii) $\forall U \in \mathcal{T},\ U \neq \emptyset \ \ \forall x \in U \ \ \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$ (si tenemos un abierto de la topología podemos encontrar para cada punto suyo un abierto básico contenido en el abierto y que contiene al punto).

Demostración.

(i)⇒(ii) Sea $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$. Sea $x \in U \Rightarrow U = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists i \in I$ tal que $x \in B_i = B_x \subset U$

(ii)⇒(i) Sea $U \in \mathcal{T}$.

- Si $U = \emptyset \Rightarrow U = \bigcup\limits_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$
- Si $U \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in U \ \ \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$

□

Ejemplo.

- •) Sea $(X, \mathcal{T}_d)$ un e.m. La familia $base = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ de todas las bolas abiertas es una base de $\mathcal{T}_d$.
- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{(a, b) : a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ y se le llama **base usual**.
- •) En $(\mathbb{R}, T_u)$, $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ es base de $\mathcal{T}_u$ (por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$).

- •) En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ es la base usual. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\mathcal{B}_u = \{B(x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ también es base de $\mathcal{T}_u$ (numerable).

- •) En $(X, \mathcal{T}_t)$, $\mathcal{B} = \{X\}$ es base (la única que no contiene al vacío).

- •) $(X, \mathcal{T}_d)$, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{T}$ es base de $\mathcal{T}_{disc}$. Es la más económica ya que si $\mathcal{B}'$ es base, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

  Demostración. Sea $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc}$, como $\mathcal{B}'$ es base podemos considerar $x \in \{x\}$ y entonces $\exists B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B \subset \{x\}$ y entonces $B = \{x\} \subset \mathcal{B}'$ $\forall x \in X \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ □

- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $x_0 \in X \neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \{\{x, x_0\} : x \in X\}$ es una base. Esta es la base más económica.

- •) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Sorgenfrey})$ (recordemos que $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U, \quad \exists \varepsilon : [x, x+\varepsilon) \subset U)$. $\mathcal{B} = \{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ es base. $\mathcal{B}' = \{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ no lo es (ya que tomando un intervalo de la forma $[x, x+\varepsilon)$ con $x \in \mathbb{Q}$ entonces no existe ningún elemento de $\mathcal{B}'$ que contenga a x y quede enmedio).

□

Teorema 1.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base suya. Entonces:

(B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Demostración.

(B1) Trivial

(B2) Tenemos $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ entonces, como $\mathcal{B}$ es base $\exists B_3 = B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

□

Teorema 1.7. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

(B1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Además,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathcal{B}) &= \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : \exists \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B} \text{ con } U = \bigcup_{i \in I} B_i\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{U \in X : \forall x \in U \ \ \exists B = B_x \in \mathcal{B} \text{ con } x \in B \subset U\}\end{aligned}$$

Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es la topología menos fina conteniendo a $\mathcal{B}$, es decir, si $(X, \mathcal{T}')$ es un e.t y $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{T}'$. A esta topología se le llama la **topología generada** por $\mathcal{B}$.

Demostración. Empezaremos por probar la existencia. Para ello tendremos que ver que $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es una topología, probando que verifica las propiedades de las topologías:

(A1) $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ por la definición de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Por **(B1)**, tenemos también que $X \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

(A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$ y sea $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ por lo que $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ (si la intersección es vacía es trivial). Consideramos $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_1 \subset U$ y $x_\in B_2 \subset U_2$ por tanto $x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por **(B2)**, existe un $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$ por lo que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Con esto queda probado que es una topología. Tendremos que ver ahora que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Para ello empiezo viendo que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Por la segunda defición de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, esto es evidente. Como verifica las hipótesis del Teorema 1.7, es base de $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Veamos ahora la unicidad. Sea $(X, \mathcal{T}')$ un e.t. con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}'$. Tendré que ver que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Sea $\emptyset \neq U \subset X \Rightarrow U \in \mathcal{T}' \iff \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in \mathcal{B} \subset U \iff U \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ ya que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}'$.

Nos queda ver que es la menos fina conteniendo a $\mathcal{B}$. Para ello, sea $(X, \mathcal{T}')$ un e.t. tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, entonces por **(A2)** tenemos que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}'$, lo cual es equivalente a decir que $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \leqslant \mathcal{T}'$.

□

Ejemplo.

- •) Si $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a\}\}$ no es base de ninguna topología en X (ya que no cumple **(B1)**).
- •) Si $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Esta base verifica **(B1)** pero no **(B2)** (tomando $x = b$ se ve facilmente).
- •) Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] : a < b\}$. Si tomamos dos intervalos $[0, 1] \cap [1, 2]$, su intersección es $\{1\}$ y por tanto no verifica **(B2)** (tomando $x = 1$).
- •) Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B} = \{[a, b] : a \leqslant b\}$ es base de una topología, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ en $\mathbb{R}$. Además, $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{disc}$.

□

Proposición 1.8. Sean $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías en X con bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Equivalen:

(i) $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$.

(ii) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \quad x \in B_1, \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $x \in B_2 \subset B_1$.

Demostración.

(i)⇒(ii) Sea $B \in \mathcal{B}_1$. Por (i), $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ y como $\mathcal{B}_2$ es base de $\mathcal{T}_2$, aplicando la definición de base tengo que $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ con $x \in B_2 \subset B_1$.

(ii)⇒ (i) Por (ii) tenemos que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$ (por el Teorema 1.7) y entonces $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathcal{T}_2$.

□

Ejemplo.

- •) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_u \leqslant \mathcal{T}_{Sorgenfrey}$.
- •) Ejercicios 1 y 2 de la relación.

□

Proposición 1.9. Sean $X \neq \emptyset$ y $S \subset \mathcal{P}(X)$, $S \neq \emptyset$, Entonces,

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ \bigcap_{i \in I} : I \text{ finito, } S_i \in S \quad \forall i \in I \right\}$$

Es base de una única topología $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\mathcal{B}(S))$ en X. A esta topología la llamaremos la **topología generada** por S y es la topología menos fina que contiene a S, es decir, si $(X, \mathcal{T}')$ es un e.t. y $S \subset \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}(S) \leqslant \mathcal{T}'$.

Decimos que S es una **subbase** de $\mathcal{T}(S)$.

Demostración. Tendremos que comprobar **(B1)** y **(B2)** y que es la menos fina. □

Ejemplo.

- •) Toda base $(X, \mathcal{T})$ es subbase de $(X, \mathcal{T})$.
- •) $S = \{X\}$ es subbase de $\mathcal{T}_t$.
- •) En $\mathbb{R}$, $S = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$ es subbase de $\mathcal{T}_u$.

□

1.5. Entornos

Definición 1.11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $x \in X$. Diremos que un conjunto $N \subset X$ es un **entorno** de x si $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$.

Denotamos $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : N \text{ es entorno de } x\}$ y lo llamamos **sistema de entornos** del punto x en $(X, \mathcal{T})$.

□

Ejemplo.

- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $[0, 1) \in \mathcal{N}_x$ para todo $x \in (0, 1)$, pero no es entorno de 0 ni de 1.

□

Observación.

- •) $X \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in X \Rightarrow \mathcal{N}_x \neq \emptyset \quad \forall x \in X.$
- •) Si $x \in U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{N}_x$
- •) Puede ocurrir que exista $N \subset \mathcal{N}_x$ con $N \notin \mathcal{T}$.

□

Proposición 1.10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $U \subset X$. Equivalen:

(i) $U \in \mathcal{T}$.

(ii) $U \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in U$.

Demostración.

(i)⇒ (ii) Si $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in U$

(ii)⇒ (i) $\forall x \in U \quad \exists U_x \in \mathcal{T}$ con $x \in U_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \mathcal{T}$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$, $\mathcal{N}_x = \{X\} \quad \forall x \in X$.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x \in N\}$
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x_0, x \in N\}$
- •) $(X, d), \mathcal{N}_x = \{N \subset X : \exists \varepsilon > 0 \text{ con } B(x, r) \subset N\}$. En particular, $\overline{B}(x, r) \in \mathcal{N}_x$.

□

Proposición 1.11. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t., $x \in X$. Entonces:

(N1) $\mathcal{N}_x \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

(N2) Si $N \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in N$.

(N3) Si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset N'$, entonces $N' \in \mathcal{N}_x$.

(N4) Si $N, N' \in \mathcal{N}_x$, entonces $N \cap N' \in \mathcal{N}_x$.

(N5) Si $N \in \mathcal{N}_x$, entonces $\exists N' \in \mathcal{N}_x$ con $N' \subset N$ y $N \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in N'$.

Demostración.

(N5) $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Tomamos $U = N'$ y se verifica que $x \in U \in \mathcal{N}_x$. Además $U \subset N$ y tendré que ver que $N \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$. Como $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U \overset{\textbf{(N3)}}{\Rightarrow} N \in \mathcal{N}_y \quad \forall y \in U$.

□

Proposición 1.12. (Hausdorff, 1914) Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y supongamos que tenemos $\forall x \in X$ una familida $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo **(N1)**,...,**(N5)**. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X cuyos sustemas de entornos $\mathcal{N}_x$ coinciden con $\mathcal{M}_x \ \ \forall x \in X$ (es decir, $\mathcal{N}_x = \mathcal{M}_x \ \ \forall x \in X$).

Además, $\mathcal{T} = \{U \subset X : U \in \mathcal{M}_x \ \ \forall x \in U\} \cup \{\emptyset\}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathcal{T}$ es una topología, comprobando que verifica **(A1)**, **(A2)**, **(A3)**. Esto se deja planteado como ejercicio para el lector.

Veamos que esa topología es única. Para ello supongamos que $\exists \mathcal{T}'$ con $\mathcal{N}'_x = \mathcal{M}_x (= \mathcal{N}_x)$. Tenemos que $U \in \mathcal{T}' \iff U \in \mathcal{N}'_x = \mathcal{N}_x \ \ \forall x \in U \iff U \in \mathcal{T}$.

Nos queda probar que $\mathcal{N}_x = \mathcal{M}_x \ \ \forall x \in X$. Sea $x \in X$. Veamos la doble inclusión:

$\subseteq$) $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Por la definición de $\mathcal{T}$, $U \in \mathcal{M}_x$.

$\supseteq$) Sea $N \in \mathcal{M}_x$. Tendremos que comprobar que $N \in \mathcal{N}_x$. Esto ocurrirá si $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subset N$. Definimos $U = \{y \in N : N \in \mathcal{M}_y\}$. Veamos que este conjunto verifica lo que buscamos. Comencemos viendo que $x \in U$. Es claro que $N \in \mathcal{M}_x$ (por hipótesis) y además, por **(N2)** tenemos que $x \in N$, luego $x \in U$. Veamos ahora que $U \subset N$, lo cual es claro por la definición de U. Por último tendré que ver que $U \in \mathcal{T}$ lo cual equivale a ver que $U \in \mathcal{M}_y$ $\forall y \in U$. Para ello tomo $y \in U$. Tendremos que ver que $U \in \mathcal{M}_y$. Como $y \in U \Rightarrow y \in N \in \mathcal{M}_y \overset{\textbf{(N5)}}{\Rightarrow} \exists N' \in \mathcal{M}_y$ con $N' \subset N$ y $N \in \mathcal{M}_z \ \ \forall z \in N' \overset{\textbf{(N2)}}{\Rightarrow}$ $y \in N' \subset U \overset{\textbf{(N3)}}{\Rightarrow} U \in \mathcal{M}_y$.

□

1.5.1. Bases de Entornos

Definición 1.12. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. y $x \in X$,. Entonces una **base de entornos** de x en $\mathcal{T}$ es una familia de entornos, $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que $\forall N \in \mathcal{N}_x \ \ \exists V \in \mathcal{B}_x$ con $x \in V \subset N$.

A los elementos de $\mathcal{B}_x$ se les llama **entornos básicos**.

□

Observación.

- •) Si $\mathcal{B}_x$ es b.d.e[4]. entonces $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : \exists V \in \mathcal{B}_x \text{ con } V \subset N\}$.
- •) $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$.
- •) $\mathcal{N}_x$ es una b.d.e. de x.
- •) $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \mathcal{T} = \{U \subset \mathcal{T} : x \in U\}$ es también una b.d.e. de x.

[4]Notaremos así a las bases de entornos

- •) Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B} \cap \mathcal{N}_x = B \in \mathcal{B} : x \in B$ es una b.d.e. de x

  Demostración. Sea $N \in \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset N$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U \subset N$. □

- •) En general, no todo entoorno de un punto es unión de entornos básico. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $x = 0$, $\mathcal{B}_x = \{(a, b) : a < x < b\}$ es una b.d.e. de x. Tomamos $[-1, 1) \in \mathcal{N}_x$ (es entorno de $x = 0$) pero no es unión de elementos de $\mathcal{B}_x$.

□

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_u)$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{X\}$ es la única b.d.e de x posible.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es una b.d.e de x (la más "económica").
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{\{x, x_0\}\}$ es b.d.e de x (la más "económica").
- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $x \in X \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ es una b.d.e de x. $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}, k \text{ par}\}$ también son bases de entornos de x (cada una más económica que la anterior).

□

Proposición 1.13. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $\mathcal{B}_x$ una b.d.e. de x $\forall x \in X$ y $U \subset X$. Equivalen:

(i) $U \in \mathcal{T}$.

(ii) $\forall x \in U \;\; \exists V = V_x \in \mathcal{B}_x$ con $V_x \subset U$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Como $U \in \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{N}_x$ $\forall x \in U$. Por tanto, $\forall x \in U$, $\exists V_x \in \mathcal{B}_x$ con $V_x \subset U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por la hipótesis tenemos que $U \in \mathcal{N}_x$ $\forall x \in U$ por lo que $U \in \mathcal{T}$ (por la Proposición 1.11)

□

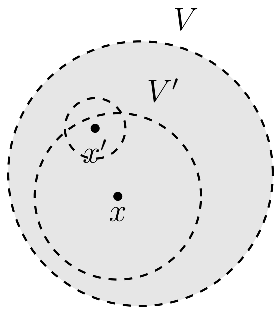
Proposición 1.14. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. y $\mathcal{B}_x$ una b.d.e de x $\forall x \in X$. Entonces:

(V1) $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$.

(V2) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.

(V3) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces $\exists V_3 \in \mathcal{B}_x$ con $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. (En general, la intersección de dos abiertos básicos no tiene por qué ser abierto básico pero sí contener a uno).

(V4) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $\exists V' \in \mathcal{B}_x$ con $V' \subset V$ tal que $\forall y \in V'$ $\exists V_y \in \mathcal{B}_y$ con $V_y \subset V$.



Demostración.

(V4) $V \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$, entonces, por **(N5)** $\exists N' \in \mathcal{N}_x$ con $N' \subset V$ tal que $V \in \mathcal{N}_y$ $\forall y \in N'$. Como $\mathcal{B}_x$ es b.d.e, $\exists V' \in \mathcal{B}_x$ con $V' \subset N' \subset V$.

Sea $y \in V' \subset N' \Rightarrow V \in \mathcal{N}_y$. Como $\mathcal{B}_y$ es b.d.e, $\exists V_y \in \mathcal{B}_y$ con $V_y \subset V$.

□

Proposición 1.15. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y supongamos que $\forall x \in X$ tenemos una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{P}(X)$ cumpliendo **(V1)**, ..., **(V4)**. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{B}_x$ es b.d.e de x en $(X, \mathcal{T})$ $\forall x \in X$.

Además, $\mathcal{T}$ es la única topología con $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : \exists V = V_x \in \mathcal{B}_x \text{ con } V_x \subset N\}$ $\forall x \in X$.

Demostración. Tengo que comprobar que $\mathcal{N}_x$ cumplen **(N1)**,..., **(N5)** usando que $\mathcal{B}_x$ cumplen **(V1)**, ..., **(V4)**. La demostración se deja propuesta como ejercicio para el lector. □

Ejercicio 1.5.1. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X, \mathcal{T}')$ espacios topológicos y $\mathcal{B}_x$ b.d.e de x en $(X, \mathcal{T})$ $\forall x \in X$. Si V es entorno de x en $\mathcal{T}'$ $\forall V \in \mathcal{B}_x$, entonces $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$.ç

□

1.6. Puntos adherentes. Clausura

Definición 1.13. Sean $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X$, $x \in X$. Diremos que x es **adherente** de A si $A \cap N \neq \emptyset$ $\forall N \in \mathcal{N}_x$, es decir, si cada entorno del punto interseca al conjunto. Esto no implica que $x \in A$. Podemos distinguir dos tipos:

- •) Decimos que un punto adherente x es de **acumulación** de A si $A \cap (N \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ $\forall N \in \mathcal{N}_x$ (Esto no implica que $x \in A$).

- •) Decimos que un punto adherente x es **aislado** de A si existe un entorno $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $A \cap N = \{x\}$ (Esto sí implica que $x \in A$).

□

Proposición 1.16. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X, x \in X$. Equivalen:

(i) x es adherente a A.

(ii) $A \cap U \neq \emptyset \quad f\forall U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$.

(iii) $\forall B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, donde $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$.

(iv) $A \cap V \neq \emptyset \quad \forall V \in \mathcal{B}_x$ con $\mathcal{B}_x$ base de entornos de x.

Demostración.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subset V$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, entonces $\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset U \subset V$. Por hipótesis, $B \cap A \neq \emptyset$, por lo que $V \cap A \neq \emptyset$

(iv)$\Rightarrow$(i) Sea $N \in \mathcal{N}_x$. Como $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x, entonces $\exists V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subset N$. Por hipótesis, $A \cap V \neq \emptyset \Rightarrow A \cap N \neq \emptyset$ por lo que x es adherente a A.

□

Observación. Los puntos de acumulación y los puntos aislados admiten una caracterización análoga.

□

Definición 1.14. Sea $(X, \mathcal{T})$, $A \subset X$. Se define la **adherencia** (**clausura** o **cierre**) de A como $\overline{A} = cl(A) = \{x \in X : x \text{ es adherente de } A\}$.

□

Ejemplo.

- •) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- •) $A \subset \overline{A}$. Para verlo puedo tomar $x \in A, N \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in N \Rightarrow x \in N \cap A \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A}$.
- •) $\overline{X} = X$.
- •) Sea (X, d) e.m. y tomamos $A \subset X, x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$.

□

Ejemplo. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$

- •) $A = (0,1) \Rightarrow \overline{A} = [0,1]$ y todos los puntos son de acumulación.
- •) $A = (0,1) \cup \{2\} \Rightarrow [0,1] \cup \{2\}$. Además x es de acumulación $\forall x \in [0,1]$ y $x = 2$ es aislado (ya que puedo considerar $N = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \in \mathcal{N}_2$ y $N \cap A = \{2\}$).

□

Proposición 1.17. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t y $A \subset X$. Entonces:

(i) $\overline{A} \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.

(ii) Si $C \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ y $A \subset C$, entonces $\overline{A} \subset C$, es decir, la adherencia es el cerrado más pequeño que contiene a A.

(iii) $A = \overline{A} \iff A \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.

Demostración.

(i) Supongamos que $\overline{A} = X$. Entonces $\overline{A} \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$. Supongamos ahora el caso $\overline{A} \neq X \Rightarrow X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. Tendré que ver si $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$. Para ello tomo $x \in X \setminus \overline{A}$ y como $x \notin \overline{A}$, entonces $\exists U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$, $U \cap A = \emptyset$, luego $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Esto quiere decir que $x \in U \in X \setminus \overline{A}$ y entonces $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{N}_x \quad \forall x \in X \setminus \overline{A}$ por lo que $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$

(ii) (Por reducción al absurdo) Supongamos $\overline{A} \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$ y considero $x \in \overline{A} \cap (X \setminus C)$, entonces, como $(X \setminus C) \in \mathcal{T}$ tengo $x \in (X \setminus C) \in \mathcal{T}$ y como $x \in \overline{A}$, entonces $(X \setminus C) \cap A \neq \emptyset$, pero como teníamos que $A \subset C$ llegamos a contradicción

(iii) $\Rightarrow$) $A = \overline{A} \overset{(i)}{\Rightarrow} A \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$.

$\Leftarrow$) Tengo que $A \in \mathcal{C}_\mathcal{T}$ y $A \subset A$ (trivialmente) $\overset{(ii)}{\Rightarrow} \overline{A} \subset A$ y como $A \subset \overline{A}$ (por lo visto anteriormente), se da la doble inclusión y tenemos que $A = \overline{A}$.

□

Ejemplo. (Ejercicio 23 de la Relación 1)

a) $(X, \mathcal{T}_t)$, $A \subset X$, $\#A \geqslant 2 \Rightarrow \overline{A} = X$ ya que $X \cap A = A \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

b) $(X, \mathcal{T}_{disc})$, $A \subset X \Rightarrow \overline{A} = A$ ya que $A \in \mathcal{C}_\mathcal{T} \quad \forall A \subset X$. Además, todos los puntos son aislados ya que $\forall x \in \overline{A} \quad \exists \{x\} \in \mathcal{N}_x$, $A \cap \{x\} = \{x\}$.

c) $(X, \mathcal{T}_{CF})$, $A \subset X$ infinito, entonces $\overline{A} = A$ (ya que al ser A finito es cerrado). Además, todos los puntos serán aislados, ya que $\forall a \in A$ puedo considerar $U = (X \setminus A) \cup \{a\} \in \mathcal{N}_a$ y $U \cap A = \{a\}$.

d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ (una base de $\mathcal{T}_S$ es $\{[x, x+\varepsilon) : x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$).

$A = (0, 1] \Rightarrow \overline{A} = [0, 1]$. Además x es de acumulación $\forall x \in [0, 1)$ y $x = 1$ es aislado.

$A = (0, 1) \Rightarrow \overline{A} = [0, 1)$ (ya que puedo considerar $N = [1, 2) \in \mathcal{N}_1$ y $N \cap A = \emptyset$ luego $1 \notin \overline{A}$).

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$. Esto no es cierto en todo espacio métrico.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $\overline{(a, b)} = [a, b] = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b)}$. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

□

Definición 1.15. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A \subset X$, A se dice **denso** si $\overline{A} = X$. El espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice **separable** si $\exists A \subset X$ denso y numerable.

□

Ejemplo.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es separable $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^n$.
- $A \subset X$ denso $\iff A \cap B \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B}$ con $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$.

Proposición 1.18. Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t., $A, B \subset X$. Entonces:

(i) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(ii) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (la otra inclusión no se verifica en general, por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, los conjuntos $A = (0,1)$, $B = (1,2)$)

Demostración.

(i) $\overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ luego $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(ii) $A \subset B \subset \overline{B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) $\subset$) $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\supset$) $\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

(iv) $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \subset \overline{A} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ A \cap B \subset B \subset \overline{B} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

□