Relación 3
Problemas de Valores Iniciales (PVI)

En la mayoría de los ejercicios se hacer referencia al problema de valores iniciales (PVI)

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{array}} \begin{array}{l} f : D = [a = t_0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t_0, \mu) \in D \end{array} \tag{1}$$

siendo $x = x(t)$ una función desconocida de t.

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ lipschitziana en su segunda variable con constante de Lipschitz M, y $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Sea $h = \frac{b-a}{N}$. Se considera el método de Euler para resolver el PVI (1) con tamaño de paso h. Demuestre que

   - Si $M = 0$, entonces $|e_n| \leq (b-a)\dfrac{M^*}{2}h \; \forall n = 0, \ldots, N$.
   - Si $M > 0$, entonces $|e_n| \leq \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M}\dfrac{M^*}{2}h \; \forall n = 0, \ldots, N$.

   donde e_n es el error de truncatura global del método en el punto t_n, y M^* es tal que $|x''(t)| \leq M^* \; \forall t \in [a,b]$ siendo $x(t)$ la única solución de (1).

Solución. Primero acotemos R_{n+1}.

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n)) \\ &\quad \text{(...Taylor...)} \\ &= x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 x''(\xi_n) - x(t_n) - hx'(t_n) \\ &= \frac{1}{2}h^2 x''(\xi_n), \end{aligned}$$

luego $|R_{n+1}| \leq \frac{1}{2}h^2 M^*$. Ahora (llamando $f_n = f(t_n, x_n)$)

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x_{n+1} \\ &= x(t_{n+1}) - x_n - hf_n \\ &= [x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n))] + [x(t_n) - x_n] + [hf(t_n, x(t_n)) - hf_n] \\ &= R_{n+1} + e_n + h(f(t_n, x(t_n)) - f(t_n, x_n)), \quad \text{luego} \\ |e_{n+1}| &\leq |R_{n+1}| + |e_n| + hM|e_n| \qquad \cdots 1 + hM = A \cdots \\ &\leq \frac{1}{2}h^2 M^* + A|e_n| \\ &\leq \frac{1}{2}h^2 M^* + A\left[\frac{1}{2}h^2 M^* + A|e_{n-1}|\right] \\ &= \frac{1}{2}h^2 M^*(1 + A) + A^2|e_{n-1}| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{2}h^2 M^*(1 + A + \cdots + A^n) + A^{n+1}|e_0| \end{aligned}$$

y como $|e_0| = 0$ se tiene

$$|e_n| \leq \frac{1}{2}h^2 M^*(1 + A + \cdots + A^{n-1}).$$

Caso $M = 0$: $A = 1$ luego $|e_n| \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* n \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* N = (b-a)\dfrac{M^*}{2}h$.

Caso $M > 0$: teniendo en cuenta que $1 + x \leq e^x \; \forall x$, entonces $A = 1 + hM \leq e^{hM}$, luego $|e_n| \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* \dfrac{A^n - 1}{A - 1} \leq \dfrac{1}{2}h^2 M^* \dfrac{e^{nhM} - 1}{hM} \leq \dfrac{1}{2}hM^* \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M}$.

2. Demuestre que el PVI $x' = -\frac{1}{2}x,\ x(0) = 2$ tiene una única solución en $[0, 1]$ y halle una cota del error de truncatura global en cada nodo del método de Euler de tamaño de paso h para aproximar dicha solución.

Solución. El PVI tiene solución única por ser $f(t, x) = -\frac{1}{2}x$ lipschitziana en su segunda variable con constante $M = \frac{1}{2}$.

Aplicando lo visto en el problema anterior, tendríamos

$$|e_n| \leq \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}} \frac{M^*}{2} h = (e^{\frac{1}{2}} - 1)M^* h$$

Si resolvemos la EDO $x(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t}$, $x(0) = 2 \Rightarrow K = 2$ tendríamos $M^* = 2$ y entonces $|e_n|| \leq (e^{\frac{1}{2}} - 1)2h$.

3. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método del punto medio para resolver el PVI (1) es estable, consistente con (1) y converge a la solución de (1).

Solución.

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n));$$

$$\Phi(x; t, h) = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t, x)).$$

No está de más, aunque no sea necesario, comprobar que Φ es lipschitziana. Supongamos que f lo es con constante L.

$$\begin{aligned}
|\Phi(z; t, h) - \Phi(w; t, h)| &= \left| f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2} f(t, z)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2} f(t, w)\right) \right| \\
&\leq L \left| z + \frac{h}{2} f(t, z) - w - \frac{h}{2} f(t, w) \right| \\
&\leq L|z - w| + L\frac{h}{2} |f(t, z) - f(t, w)| \\
&\leq L|z - w| + \frac{h}{2} L^2 |z - w| \quad = \quad \left(L + \frac{h}{2} L^2\right) |z - w|
\end{aligned}$$

luego Φ es lipschitziana con constante $M = L + \frac{h}{2}L^2$.

El primer polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda - 1$, cuya única raíz $\lambda = 1$ es simple y está en el disco unidad, luego (Teorema 4) el método es estable. Por otro lado, es consistente (Teorema 3) por ser $p(1) = 0$ y $\Phi(x(t_n); t_n, 0) = p'(1)f(t_n, x(t_n))$. Finalmente, siendo estable y consistente, es convergente (Teorema 5).

4. Razone la veracidad o falsedad de la afirmación siguiente: El método de Euler modificado (Heun) proporciona la solución exacta de la EDO $x' = -2\lambda t$.

5. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI (1) es estable, consistente con (1) y converge a la solución de (1).

6. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

    a) Al aplicar el método de un paso del punto medio al problema $x'(t) = -x(t) + 1,\ x(0) = 2$ se obtiene la solución numérica $\{t_n, x_n\}_{n=0}^N$ donde $x_n = A^n + 1$ con $A = 1 - h + \frac{h^2}{2}$.

    b) El orden de un método explícito de un paso cuya ecuación en diferencias es

    $$x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

    con $\Phi(x; t, h) = f(t, x) + \frac{h}{2}x''(t)$ es al menos 2.

7. Demuestre que el PVI $x' = t - x,\ x(0) = 1$ tiene una única solución en $[0, 1]$. ¿Se puede aproximar dicha solución mediante

    - el método de Taylor de orden 2?
    - el método de Heun?
    - el método del punto medio?

    ¿Por qué? Escriba la ecuación en diferencias de cada uno de estos métodos para resolver el PVI considerado. ¿Ocurre algo reseñable?

8. Demuestre que el PVI $x' = t^2 x,\ x(0) = 1$ tiene una única solución $x(t)$ en $[0, 1]$. Demuestre que el método de Taylor de orden 2 y el método de Runge-Kutta clásico convergen a $x(t)$ y halle las aproximaciones de cada uno de los estos dos métodos para el tamaño de paso $h = 0.2$.

9. Utilizando el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t),\ x(0) = \mu$, deduzca una conocida fórmula de integración numérica e indique de qué fórmula se trata.

10. Para el método de Runge-Kutta de 2 evaluaciones con arreglo de Butcher

    $$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{array}$$

    a) Determine el orden del método según los valores del escalar α.

    b) Para α adecuado para que el método tenga orden máximo, ¿cuál es el término principal del error local de truncatura?

    c) ¿Es estable (cero-estable) el método para todo α si $f(t, x)$ es continua y lipschitziana respecto de x sobre D?

11. Considere el MML definido por: $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = h\left(b_0 f_n + b_1 f_{n+1}\right)$

    a) Exprese los valores de a_0, b_0, b_1 respecto de a_1 para que el método sea de orden, al menos, 2.

    b) Para la familia de métodos obtenida en a),

    - ¿Qué valor(es) de a_1 hacen el MML estable?
    - ¿Qué métodos particulares se obtienen si $a_1 = 0$ y $a_1 = -1$?
    - ¿Es estable y de orden 3 el MML para algún valor de a_1?

12. Determine los parámetros $\alpha,\ \beta$ para los que el método lineal de ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - (1+\alpha)x_{n+1} + \alpha x_n = h\left((1+\beta)f_{n+2} - (\alpha+\beta+\alpha\beta)f_{n+1} + \alpha\beta f_n\right)$$

$n = 0, \ldots, N-2$, tiene el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden? ¿Es convergente el método obtenido? ¿Por qué?

13. Construya una familia 1-paramétrica de MML implícitos de dos pasos con el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden?

    - Si $x(t)$ es suficientemente diferenciable, ¿cuál es la parte principal de error de truncatura local?
    - ¿Qué valores del parámetro aseguran la convergencia?

14. Obtenga la ecuación en diferencias del método de Adams-Bashforth de tres pasos y la del método de Adams-Moulton de dos pasos. Estudie la convergencia y el orden de dichos métodos.

15. Usando integración numérica sobre el intervalo $\left[t_{n+1}, t_{n+3}\right]$, deduzca dos métodos lineales de tres pasos explícitos diferentes para resolver el p.v.i. de ecuación $x' = f(t,x)$ y condición inicial $x(t_0) = \mu$. ¿Es alguno de ellos un método óptimo? Justifique la respuesta.

16. Dado el MML $x_{n+3} + \alpha\left(x_{n+2} - x_{n+1}\right) - x_n = \frac{h}{2}(3+\alpha)\left(f_{n+1} + f_{n+2}\right)$, razone si es cierto que

    a) $\exists\alpha$ para el que el orden es 4.

    b) Si $-3 < \alpha < 1$, el método es cero-estable.

    c) Si el MML dado es convergente su orden es exactamente 2.

17. Para que un MML sea estable es necesario que las raíces del primer polinomio característico $p(\lambda)$ sean de módulo no mayor que 1, y todas las de módulo 1 sean simples. Cualquier MML ya tiene la raíz $\lambda = 1$ entre las de su primer polinomio característico. Podemos afinar algo más distinguiendo los MML que no tienen ninguna otra raíz de módulo 1, de aquellos en los que hay más de una raíz de módulo 1. Los primeros se denominan *fuertemente estables* y los segundos *débilmente estables*.

    a) Compruebe que el método **AB4** es fuertemente estable

    $$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n).$$

    b) Compruebe que la fórmula abierta de 4 pasos es débilmente estable

    $$x_{n+1} = x_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n).$$

    c) (Práctica) Considere el PVI $x' = -6x + 6,\ 0 \leq t \leq 1,\ x(0) = 2$, que tiene como solución exacta $x(t) = 1 + e^{-6t}$. Con $h = 0.1$ y valores iniciales exactos x_0, x_1, x_2, x_3, aproxime $x(1)$ con las dos fórmulas anteriores, incluyendo los errores acumulados en cada paso para ambos métodos. Comente los resultados.