Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales I

Primera Prueba de Clase

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Ejercicio 1. En el plano con coordenadas (A, B) se considera la ecuación

$$A^3 - cos(AB) = 0$$

¿Es posible encontrar una función $\varphi : I \to \mathbb{R}, B \mapsto \pi(B)$ con $\varphi(0) = 1$ y de manera que se cumpla la ecuación para cada (A, B) con $A = \varphi(B), B \in I$? $I =]-\delta, \delta[$ para algún $\delta > 0$

Ejercicio 2. Se considera la familia uniparamétrica de curvas

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Encuentra la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias en un plano común con coordenadas (x, y).

Ejercicio 3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$x' = \frac{1 + x^2}{1 + t^2}, \quad x(0) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida?

Ejercicio 4. Se considera la transformación

$$\phi : D \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t, x) = (e^t x, \arctan x)$$

donde $D = \mathbb{R} \times]0, \infty[$. Se pide:

a) Describe el conjunto $D_1 = \varphi(D)$ y prueba que φ es un difeomorfismo entre D y D_1.

b) Dada una ecuación $x' = f(t, x)$ con $f : D \to \mathbb{R}$, ¿qué condiciones hay que imponer para que se pueda asegurar que el cambio $(s, y) = \varphi(t, x)$ es admisible?

Ejercicio 5. Dada una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1, se considera el cambio de variable

$$s = t + \phi(x), \quad y = x$$

a) Prueba que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t, x) = (s, y)$ es un difeomorfismo.

b) Encuentra una función ϕ en las condiciones anteriores que permita transformar la ecuación $x' = x$ en la ecuación

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y}{1 + y \cos y}$$

Describe los dominios sobre los que este cambio es admisible.