AVISO LEGAL

Con motivo de la suspensión temporal de la actividad docente presencial en la Universidad de Granada, se informa de las condiciones de uso de este material que ha sido elaborado, por la profesora responsable de la asignatura Cálculo II del Grado de Matemáticas y del Doble Grado de Matemáticas-Física (Grupo A), para su impartición por docencia virtual.

"Queda prohibida la captación y/o grabación de la sesión así como su reproducción o difusión, en todo o en parte sea cual sea el medio o dispositivo utilizado. Cualquier actuación indebida comportará una vulneración de la normativa vigente, pudiendo derivarse las pertinentes responsabilidades legales". (Instrucción de la Secretaria General de 20 de abril de 2020, para la aplicación de la normativa de protección de datos en el uso de las herramientas digitales).

Puesto que este material forma parte de dichas sesiones docentes, queda prohibida expresamente su difusión o reproducción en todo o en parte.

Aplicaciones del Cálculo Integral

Presentamos algunas aplicaciones del Cálculo Integral, como son el cálculo de áreas planas, longitudes de curvas, áreas de superficies de revolución y volúmenes de sólidos de revolución.

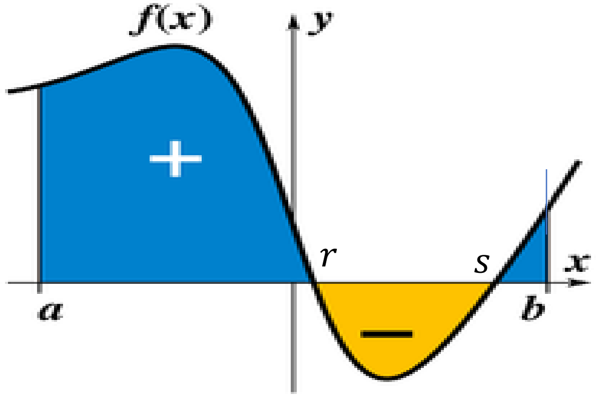
Cálculo de áreas planas.

Regiones de Tipo I: Comenzamos recordando lo siguiente:

Definición. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable entonces el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de f, las rectas $x=a$ y $x=b$, y el eje de abcisas se define como

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

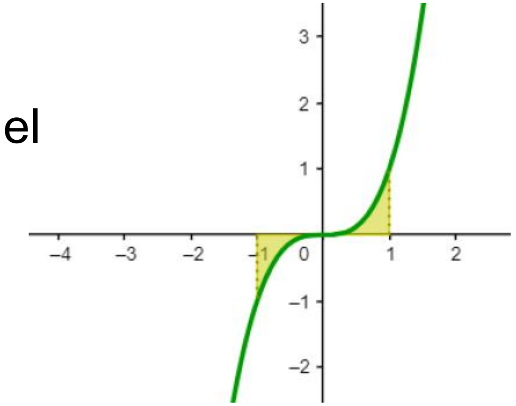
Ejemplo. Si la gráfica de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es la de la figura entonces



$$\int_a^b |f(x)| f dx=\int_a^r f(x)dx-\int_r^s f(x)dx+\int_s^b f(x)dx\,.$$

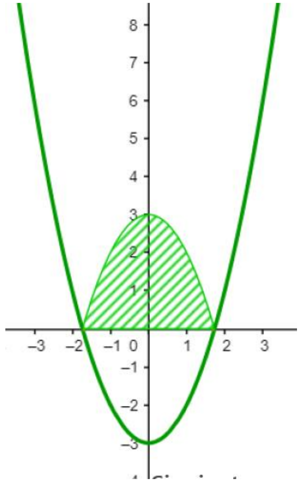
Por definición de integral tenemos que $\int_r^s f(x)dx\le 0$, y de ahí que la restemos pues $\int_r^s |f(x)|dx=-\int_r^s f(x)dx\ \ge 0$.

Ejemplo. Área determinada por la función $f(x) = x^3$ entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$, y el eje de abcisas.



$$A = \int_{-1}^{1} |x^3| dx = 2\int_0^1 x^3 dx = 2\frac{x^4}{4}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. Área de la region acotada limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3$ y el eje de abcisas.

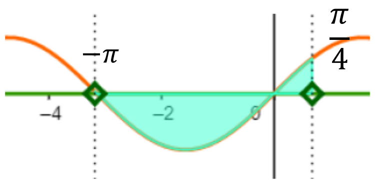


Puesto que $f(x) = 0$ si y solo si, $x = \pm\sqrt{3}$,

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^2 - 3| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = \left(3x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{x=-\sqrt{3}}^{x=\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Ejemplo. Área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi/4]$.

$$A = \int_{-\pi}^{\pi/4} |\operatorname{sen}(x)| dx = -\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}(x) dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(x) dx = (\cos(x))\big]_{x=\pi}^{x=0} + (-\cos(x))\big]_{x=0}^{x=\pi/4} = \frac{6-\sqrt{2}}{2}.$$

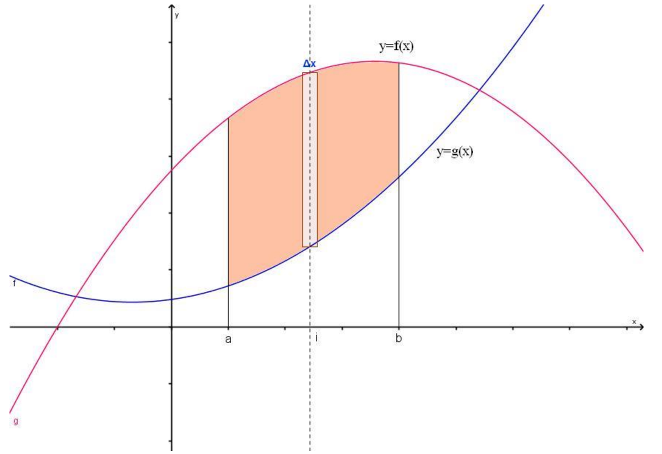


Aplicaciones del Cálculo Integral

Regiones más generales que las anteriores son las delimitadas por las gráficas de dos funciones:

Definición. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones Riemann integrables. Se define el área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



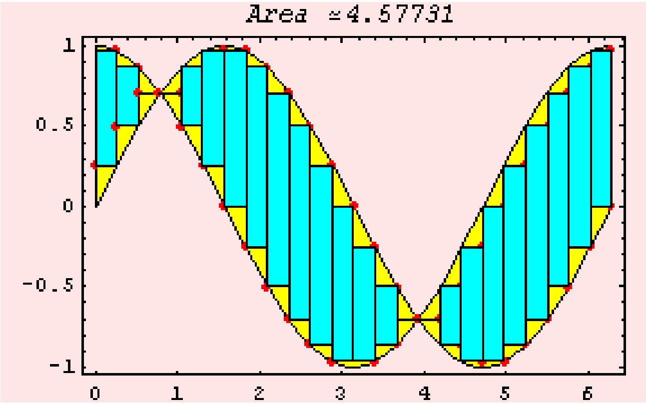
Observaciones.

(i) Por área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$ (sin más) entenderemos el área determinada por f y g entre las rectas dadas por sus puntos de corte.

(ii) Nótese que por ser $f(x)$ y $g(x)$ Riemann integrables, la integrabilidad de $|f - g|$ está garantizada.

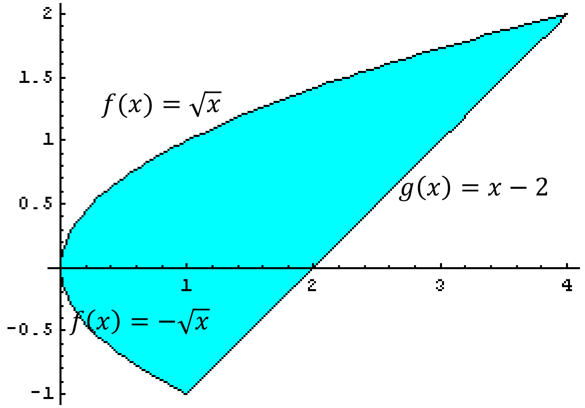
(iii) Si fuese $f(x) \geq g(x)$ entonces, para $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ con $\Delta P_n \to 0$, sería

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} (f(t_k) - g(t_k))(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f - g, P_n).$$



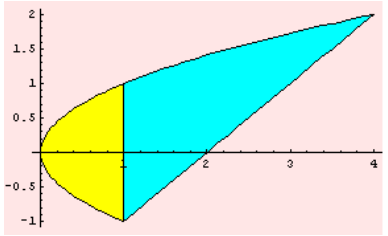
(iv) Cuando una de las funciones no domina a la otra, entonces hemos de ver en qué subintervalos f domina a g, o sucede al revés, para calcular el área buscada haciendo uso de la aditividad de la integral respecto del intervalo de integración.

Ejemplo. Área de la región acotada limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$.



Los puntos de corte son los siguientes: $(x-2)^2 = x \iff x^2 - 2x + 4 = x \iff x = 1$ y $x = 4$. Por tanto el área que buscamos es la suma de dos áreas:

$$A = A_1 + A_2$$



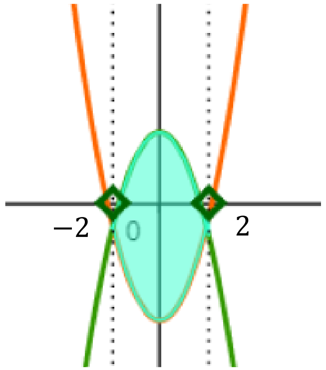
donde $A_1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx$ y $A_2 = \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2))dx$

$$A_1 = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx = \frac{4}{3}x^{3/2}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - (x-2))dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{x=1}^{x=4} = \frac{19}{6}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo. Área de la región acotada limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 5$ y $g(x) = 3 - x^2$.



$$A = \int_{-2}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-2}^{2} (3 - x^2 - x^2 + 5)dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = \frac{64}{3}$$

Regiones de tipo II

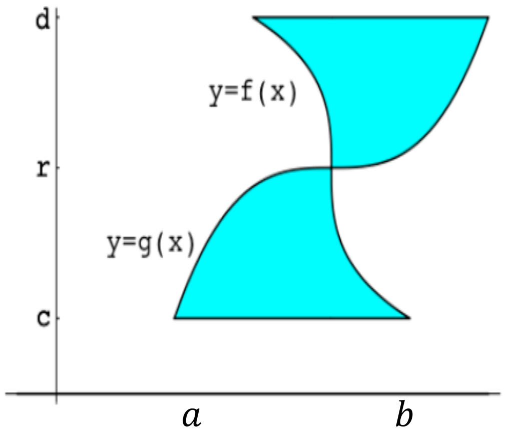
Supongamos que $f, g : [a,b] \to [c,d]$ son funciones integrables y biyectivas tales que $f^{-1}, g^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ también son integrables. Entonces en área limitada por $f(x)$ y $g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ puede definirse como el área limitada por las funciones inversas $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$ entre las rectas $y = c$ e $y = d$. Esto es

$$A = \int_c^d |f^{-1}(y) - g^{-1}(y)| dy.$$

Por ejemplo, en el caso de la función de la figura tendríamos:

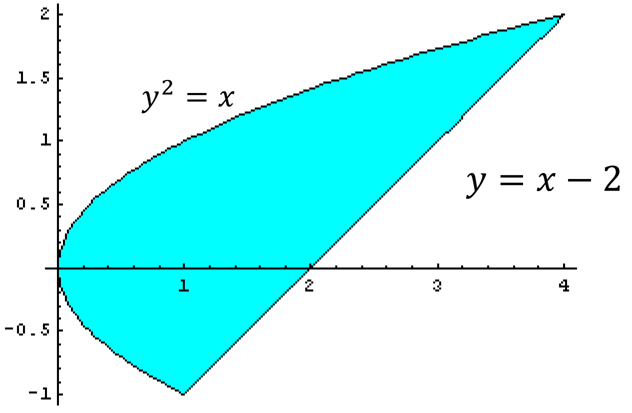
$$A = \int_c^d |f^{-1}(y) - g^{-1}(y)| dy =$$

$$= \int_c^r (f^{-1}(y) - g^{-1}(y)) dy + \int_r^d (g^{-1}(y) - f^{-1}(y)) dy.$$



Hay muchas regiones que son tanto de Tipo I como de Tipo II, por lo que esta consideración es una cuestión de conveniencia.
(Se trata de hacer una simetría respecto de la recta $y = x$ que deja invariante el área dada).

Ejemplo. Área de la región acotada limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$.



$x = f(y) = y^2;\ \ x = g(y) = y + 2$

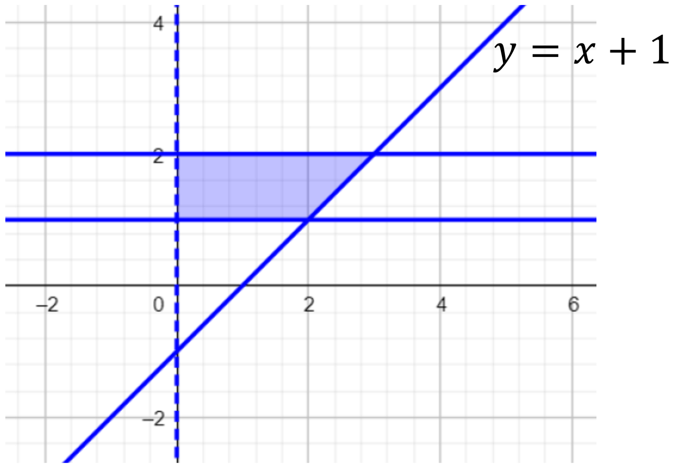
Nótese que el área que buscamos es

$$\{(x, y)\colon\ y^2 \le x \le y + 2;\ \ -1 \le y \le 2\}.$$

En consecuencia:

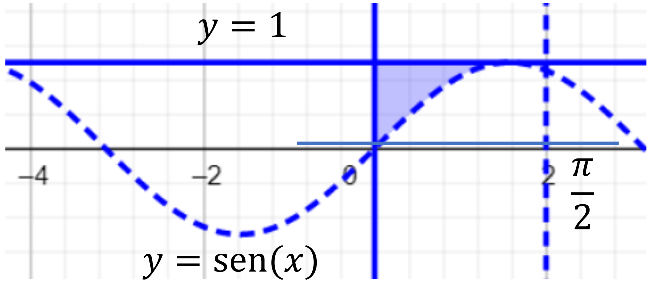
$$A = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)dy = \frac{y^2}{2} - 2y - \frac{y^3}{3}\Bigg]_{y=-1}^{y=2} = \frac{9}{2}$$

Ejemplo. Área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x + 1$, el eje de ordenadas y las rectas $y = 2$ e $y = 4$.



$$A = \int_{2}^{4} (y - 1)dy = \frac{y^2}{2} - y\Bigg]_{y=2}^{y=4} = 4.$$

Ejemplo. Área de la región limitada por la gráfica de la función $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, dada por $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$, y la recta $y = 1$.

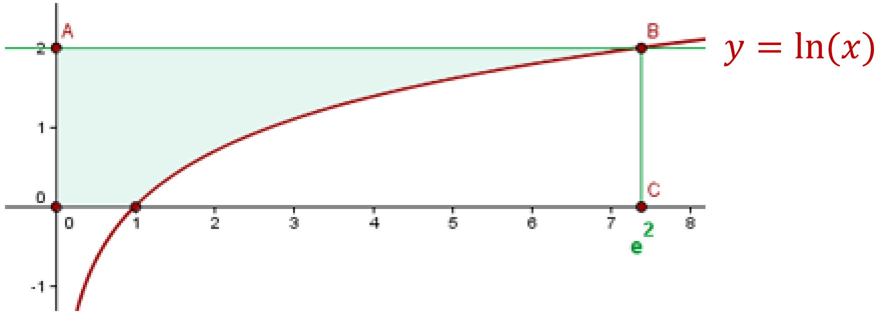


Nótese que $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ es una biyección sobre su imagen (el intervalo $[0,1]$) siendo $f^{-1}: [0,1\,] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $f^{-1}\,(y) = \operatorname{arc\,sen}(y)$, para cada $y \in [0,1\,]$. Por tanto,

$$A = \int_0^1 \operatorname{arc\,sen}(y)\, dy = y \operatorname{arc\,sen}(y)\Big]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ejemplo. Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de $y = f(x) = \ln(x)$, la recta $y = 2$ y los ejes coordenados (conforme a la siguiente figura).

$$A = \int_0^2 e^y dy = e^2 - 1.$$

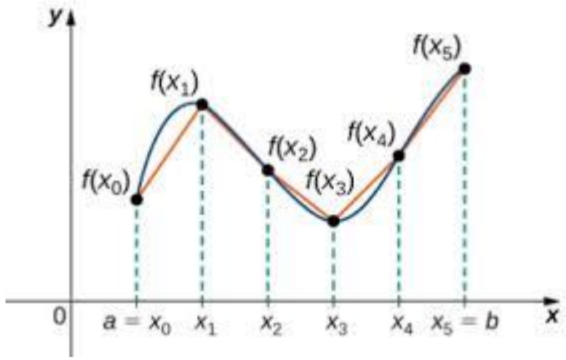


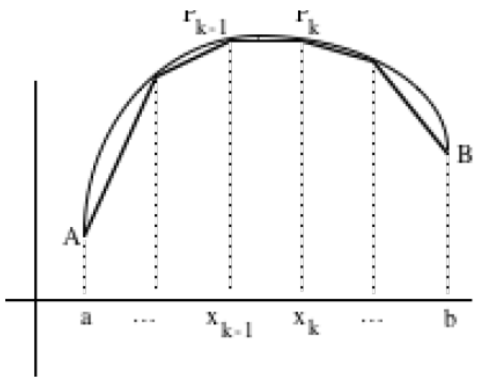
Nótese que el punto de corte de la curva $y = \ln(x)$ y la recta $y = 2$ es $x = e^2$ y que considerar una región de Tipo I, en este ejemplo, habría sido algo más complicado. ¿Cómo se haría?

Cálculo de longitudes de curvas

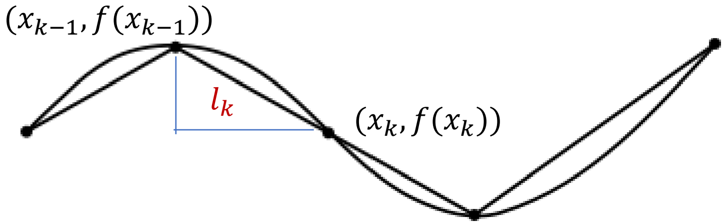
Dada una función integrable $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, a cada partición $P = \{x_0 = a, x_1 \dots, x_n = b\}$ le corresponde una poligonal de vértices $(x_k, f(x_k))$, donde $k = 0,1,\dots,n,$ como sucede en la siguiente figura:

Definición. Se dice que la gráfica de $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una curva rectificable cuando el supremo de las longitudes poligonales asociadas a las particiones del intervalo $[a,b]$ es finito. Cuando una curva no es rectificable decimos que es de longitud infinita.





Para calcular la longitud de la poligonal asociada a una partición, la situación es la siguiente:



$$l_k = \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

La longitud de la poligonal es $l(P) = \sum_{k=1}^{k=n} l_k$

Teorema. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de clase $C^1([a,b])$. Entonces es su gráfica es una curva rectificable cuya longitud viene dada por

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Dem. Sabemos que si $P\in\mathscr{P}[a,b]$ está dada por $P=\{x_0=a,x_1\ldots,x_n=b\}$ entonces la longitud de la poligonal asociada es

$$l(P)=\sum_{k=1}^{k=n}l_k=\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2+[x_k-x_{k-1}]^2}.$$

Por el TVM tenemos que $f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(c_k)(x_k-x_{k-1})$, para conveniente $c_k\in\,]x_{k-1},x_k[$.
En consecuencia,

$$l(P)=\sum_{k=1}^{k=n}\sqrt{[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2+[x_k-x_{k-1}]^2}=\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-x_{k-1})\sqrt{[f'(c_k)]^2+1}=\sigma(P,g)$$

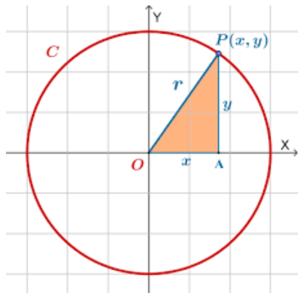
donde $\sigma(P,g)$ es la suma de Riemann para la función $g(x)=\sqrt{[f'(x)]^2+1}$, asociada a la partición P, para el etiquetado $c_k\in\,]x_{k-1},x_k[$, con $k=1,\ldots,n$.

Puesto que g es integrable por ser continua, el supremo de todos los $l(P)$ donde P recorre $\mathscr{P}[a,b]$ no es otra cosa que la integral de g en el intervalo $[a,b]$, de donde

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

El carácter rectificable se debe a la continuidad de $g(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$. ■

Ejemplo. Longitud de la cicunferencia de radio r.



Puesto que la ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$, concluimos que, en la parte positive, se trata de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde $x \in [-r, r]$. Por tanto,

$$l = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2} dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} dx = 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} dx =$$

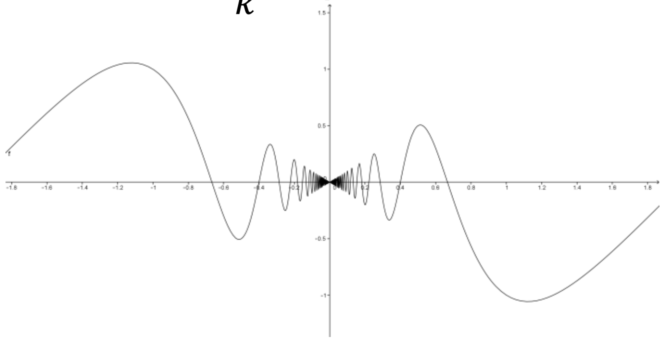
$$2r \operatorname{arcsen}(x/r)]_{x=-r}^{x=r} = 2r\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi r.$$

Ejemplo. Sea $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Probemos que la gráfica de f no es una curva rectificable.

Consideremos las particiones $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1\right\} \in \mathscr{P}[0,1]$. Como $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{k}$, para $k > 1$,

$$\tilde{l}_k := l_{n-k+1} = \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{\left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{k^2} + \frac{2}{(k-1)^2}}.$$



En consecuencia, $\frac{2}{k} \leq \tilde{l}_k \leq \frac{2}{k-1}$, para $k > 1$, de donde $l(P_n) = \sum_{k=1}^{k=n} l_k = \sum_{k=1}^{k=n} \tilde{l}_k \to \infty$ puesto que $\sum \frac{1}{n}$ no converge.

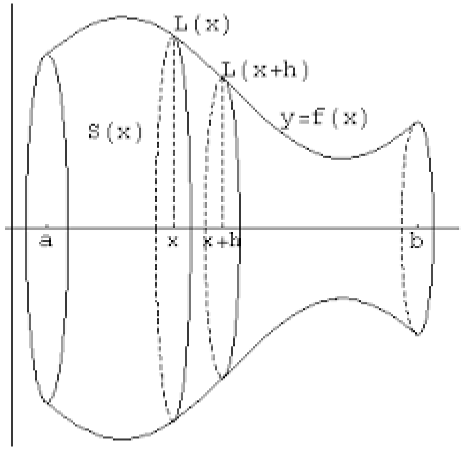
Áreas de superficies de revolución

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^1([a,b])$. El área de la superficie engendrada por la rotación de la función $f(x)$ sobre el eje $0X$, entre los valores $x=a$ y $x=b$, viene determinada por

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Si $S(x)$ es el área de la parte de la superficie comprendida entre los planos $X=a$ y $X=x$ y representamos por $L(x)$ la longitud de la curva determinada por la gráfica de f entre a y x, entonces sabemos que

$$L(x)=\int_a^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt.$$



Sea $h>0$. Sabiendo que el área lateral de un cilindro circular recto de radio r es $2\pi rh$, concluimos que

$$\begin{aligned}2\pi\min\{f(t):t\in[x,x+h]\}\big(L(x+h)-L(x)\big)&\le S(x+h)-S(x)\\&\le 2\pi\max\{f(t):t\in[x,x+h]\}\big(L(x+h)-L(x)\big).\end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo por h,

$$2\pi\min\{f(t):t\in[x,x+h]\}\frac{\big(L(x+h)-L(x)\big)}{h}\le\frac{S(x+h)-S(x)}{h}\le 2\pi\max\{f(t):t\in[x,x+h]\}\frac{\big(L(x+h)-L(x)\big)}{h}.$$

$$2\pi \min\{f(t) : t \in [x, x+h]\} \frac{\big(L(x+h) - L(x)\big)}{h} \leq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq 2\pi \max\{f(t) : t \in [x, x+h]\} \frac{\big(L(x+h) - L(x)\big)}{h}.$$

Tomando límite cuando $h \to 0$, concluimos que

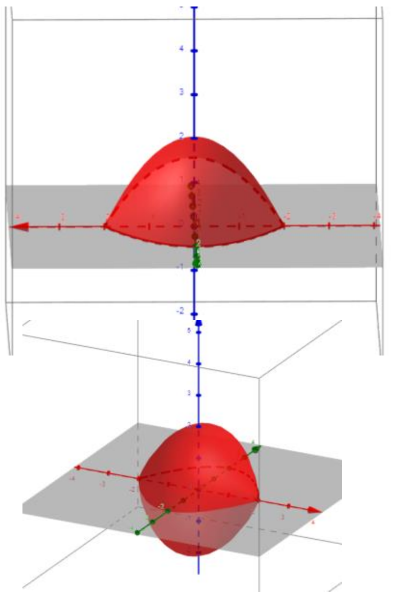
$$S'(x) = 2\pi f(x) L'(x).$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $L'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, de donde,

$$S'(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

En consecuencia, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el área buscada es

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b S'(x)dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad \blacksquare$$



Ejemplo. Calcular el área de la superficie esférica obtenida al girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $[-2,2]$.

S$= 2\pi \int_{-2}^{2} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-2}^{2} 2dx = 16\,\pi.$

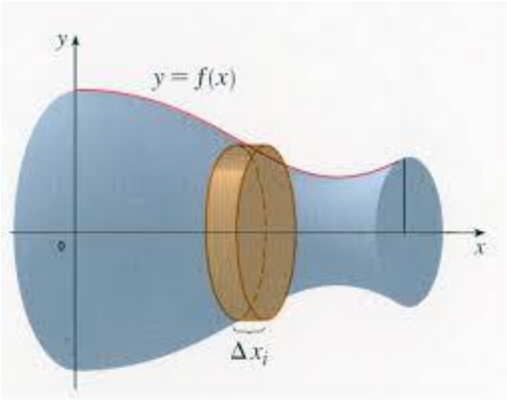
Volúmenes de sólidos de revolución

Es posible calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas que se obtienen cuando seccionamos al sólido en cuestión por planos paralelos a uno dado.

Método de los discos o de las arandelas. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua y positiva, entonces la región la curva dada por la gráfica de f entre los valores $x=a$ y $x=b$, al girar en torno al eje OX determina un sólido de revolución cuyo volumen es

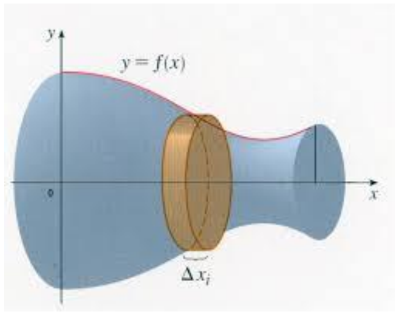
$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx.$$

De hecho, si representamos por $S(x)$ la sección obtenida al cortar el volumen dado por el plano perpendicular al eje OX que pasa por el punto $(x,0,0)$, entonces denotamos por $V(x)$ el volumen del sólido que queda a la izquierda de dicha sección. La función $x\to A\big(S(x)\big)$, donde $A(S(x))$ denota el área de la sección $S(x)$, obtenida al seccionar el sólido por el plano vertical $X=x$ es continua. De hecho $A(S(x))=\pi f(x)^2$, puesto que al seccionar obtenemos un disco de radio $r=f(x)$. Por tanto,



$$\min\{A\big(S(t)\big):x\le t\le x+h\}\,h\le V(x+h)-V(x)\le\max\{A\big(S(t)\big):x\le t\le x+h\}h.$$

$$\min\{A(S(t)) : x \leq t \leq x+h\}\, h \leq V(x+h) - V(x) \leq \max\{A(S(t)) : x \leq t \leq x+h\} h.$$



Por tanto, dividiendo por h y tomando límite cuando $h \to 0$, obtenemos que

$$V'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h)-V(x)}{h} = A(S(x)),$$

En consecuencia, $V(x) - V(a) = \int_a^x A(S(t))dt,$ y así para $x = b$ el volumen buscado es

$$V = \int_a^b A(S(x))dx.$$

Puesto que

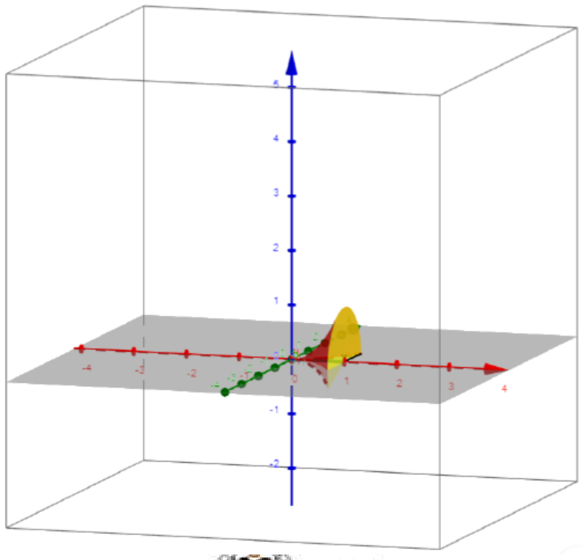
$$A(S(x)) = \pi f(x)^2,$$

Concluimos finalmente que

$$V = \int_a^b A(S(x))dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora algunos casos en los que es fácil calcular esta integral.

Ejemplo. Calcular el volumen del sólido engrendrado al girar sobre el eje de abcisas la gráfica de $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.



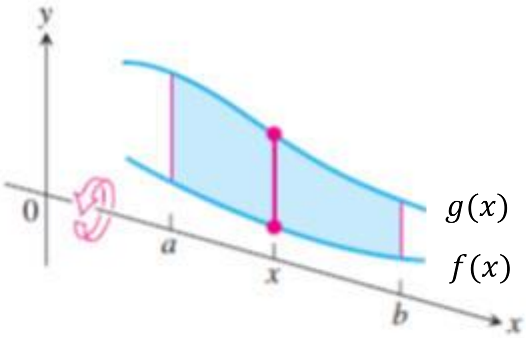
$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{5}.$$

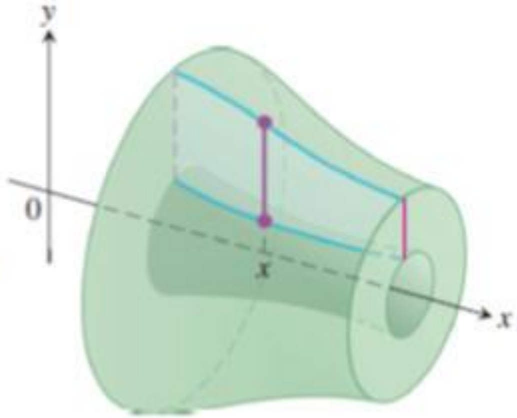
Del resultado anterior deducimos lo siguiente:

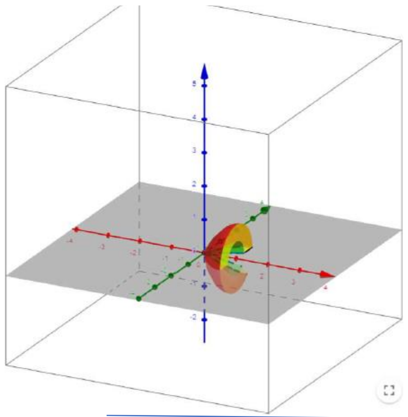
Volúmenes de los sólidos de revolución engendrados por dos curvas que giran sobre OX. Si $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables con $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces el volumen del cuerpo engendrado al girar sobre el eje OX la región limitada por las gráficas de las funciones f y g entre los valores $x=a$ y $x=b$, viene dada por

$$V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)dx.$$

Ejemplo. Calcular el volumen del sólido engrendrado por el recinto limitado por las funciones $g(x) = 2x - \frac{x^2}{2}$ y $f(x) = \frac{x}{2}$ al girar sobre el eje OX en el ontervalo $[0,1]$.





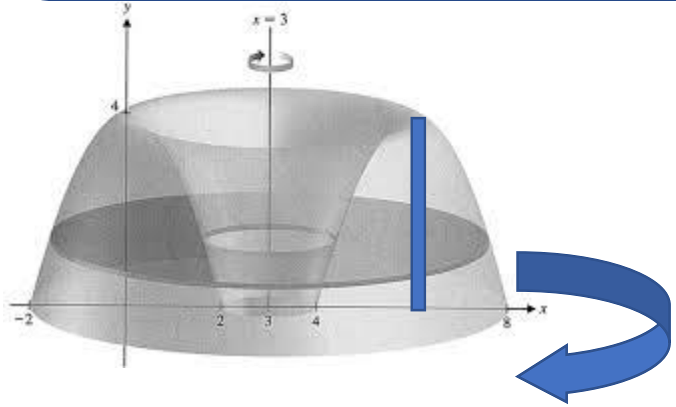


$$V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)dx =$$

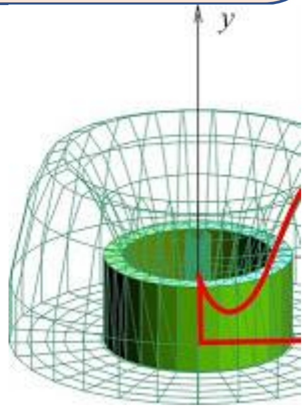
$$= \pi \int_0^1 (4x^2 + \frac{x^4}{4} - 2x^3 - \frac{x^2}{2})dx = \frac{7\pi}{15}.$$

Métodos de las láminas o de los tubos. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y positiva. El volumen del sólido de revolución engendrado la girar sobre el eje OY la región plana limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$



Cada uno de estos rectángulos engendra, por giro sobre OY, un tubo cilíndrico. La suma de los volúmenes de dichos tubos es el volumen buscado. Se entiende que la aproximación va mejorando conforme vamos considerando "tubos" con las paredes más delgadas. Intuitivamente:



Cada partición $P = \{x_0 = a,\ x_1, \dots,\ x_n = b\}$ siendo $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, genera una serie de tubos cilíndricos de base el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, y altura $f(x_k)$ (podríamos tomar también $f(c_k)$ con $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$). El volumen de dicho tubo es el área de la base $(\pi x_k^2 - \pi x_{k-1}^2)$ por la altura $f(x_k)$. Por tanto

$V(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (\pi x_k^2 - \pi x_{k-1}^2)\, f(x_k) = \pi \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\,(x_k + x_{k-1})\, f(x_k) =$

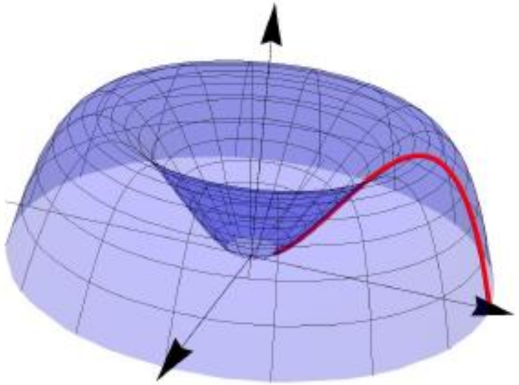
$\pi \sum_{k=1}^{n} x_k\, f(x_k)(x_k - x_{k-1}) + \pi \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\, f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \pi\sigma(P,g) + \pi\tilde{\sigma}(P,g)$ con $g(x) = xf(x)$.

De ahí que $\lim_{\Delta P \to 0} V(P,f) = \pi \lim_{\Delta P \to 0} \sigma(P,g) + \pi \lim_{\Delta P \to 0} \tilde{\sigma}(P,g) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$ ■

Ejemplo. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar en torno al eje OY la región del plano limitada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(x)dx = 2\pi(-x\cos(x))\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} + 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx =$$

$$= 2\pi(-x\cos(x) + \operatorname{sen}(x))\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = 2\pi$$



Cuando el eje de giro es la recta vertical $x = r$ en lugar del eje OY entonces obtenemos

$$V = 2\pi \int_a^b |x - r| f(x)\, dx.$$

Fórmulas análogas a las anteriores se obtienen para volúmenes de sólidos de revolución engendrados por rotación sobre el eje OY de la región plana comprendida entre dos funciones, o sobre la recta vertical $x = r$, etc.