Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria de junio

Ejercicio 1. (**2 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in D(0,1)$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ verificando $n \geqslant 2$ se cumple que

$$f(1/n)g(1/n) - f'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \longmapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{T}$.

a) Probar que f tiene un numero finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

b) Probar que $f\big(\overline{D}(0,1)\big) = \overline{D}(0,1)$.

Ejercicio 4. (**3 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$.

a) Si $K = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

b) Deducir que la función dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en Ω y estudiar sus singularidades aisladas.

c) Probar que para cada $\delta > 0$ el conjunto $f\big(D(0,\delta) \setminus K\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

Granada, 14 de junio de 2017

Ejercicio 1. (**2 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in D(0,1)$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ verificando $n \geqslant 2$ se cumple que

$$f(1/n)g(1/n) - f'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Tenemos que $g(1/n) = \dfrac{f'(1/n)}{f(1/n)}$ y como $\frac{1}{n} \in D(0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(1/n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con $A' \neq \emptyset$. Luego, como $A' \cap D(0,1) \neq \emptyset$ y $f, g, f' \in H(D(0,1))$, por el Ppio de Identidad, tenemos que $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ $\forall z \in D(0,1)$.

Distinguimos dos casos:

- Si $f(z) \in \mathbb{R}^-$: $g(z)$ no tiene primitiva ya que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
- Si $f(z) \notin \mathbb{R}^-$: $g(z)$ tiene primitiva, es decir, $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \log(f(z))$ está bien definida.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \longmapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$

El logaritmo principal está definido en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$

f está bien definida en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\{i\} \cup \{x - i : x \leq 0\}\}$

Luego, la única singularidad de f es i, que es un polo simple de f.

Si para cada $R > 1$ denotamos γ_R al camino cerrado que recorre la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ tenemos que $\operatorname{Ind}_{\gamma_R}(i) = 1$

Calculamos el residuo: $\operatorname{Res}(f, i) = \lim\limits_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim\limits_{z \to i} (z-i) \dfrac{\log(i+z)}{(z-i)(z+i)} = \lim\limits_{z \to i} \dfrac{\log(i+z)}{(z+i)} = \dfrac{\log(2i)}{2i}$

Por el Tma Residuos, tenemos que $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{\log(2i)}{\cancel{2}\cancel{i}} = \pi \log(2i) = \pi \log 2 + i \frac{\pi^2}{2}$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{[-R,R]} f(z)\, dz + \int_{\sigma_R} f(z)\, dz$ donde σ_R es la semicircunferencia de centro 0 y radio R.

- $\gamma_1 : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(x) = x$

$$\int_{-R}^{R} \frac{\log(i+x)}{1+x^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\log\sqrt{x^2+1}}{1+x^2}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{1+x^2}\,dx$$

- $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(x) = Re^{ix}$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \underbrace{\text{long}([0,\pi])}_{\pi R}\, \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma_2^*\} = \frac{\pi R\log(R+1)+\pi^2 R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$|\log(z+i)| \leq |\log(z+i)| + |\arg(z+i)| \leq \log(R+i) + \pi$

$|1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = |Re^{ix}|^2 - 1 = R^2 - 1$

Luego, $\lim\limits_{R\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

Por lo que, si tomamos límite $R \to +\infty$ tenemos que :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{1+x^2}\,dx + i\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arg(x+i)}{1+x^2}\,dx}_{0} = \pi\log 2 + i\frac{\pi^2}{2}$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{T}$.

a) Probar que f tiene un numero finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

b) Probar que $f(\overline{D}(0,1)) = \overline{D}(0,1)$.

a. Como f es continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, por el corolario del Ppio del módulo máximo, tenemos que $\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0,1)\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0,1)\} \overset{H}{=} 1$ $(|f(z)| = 1 \text{ para } |z| = 1)$ $\forall z \in \overline{D}(0,1)$

Si fuese $\{z \in D(0,1) : f(z) = 0\} = \emptyset \Rightarrow |f(z)| > 0$ $\forall z \in \overline{D}(0,1)$

$|f(z)| = 1$ $\forall z \in C(0,1)$

Luego, $1/f(z)$ es holomorfa en $D(0,1)$ y continua en $\overline{D}(0,1)$.

Aplicando el Ppio del módulo máximo tenemos que $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \text{máx}_{|z|=1} \frac{1}{|f(z)|} = 1$ $\forall z \in \overline{D}(0,1)$

Entonces, $|f(z)| \geq 1$ $\forall z \in \overline{D}(0,1) \Rightarrow |f(z)| = 1$ en $D(0,1) \Rightarrow f$ es constante !!!

Por el Ppio de los ceros aislados, $\{z \in \overline{D}(0,1) : f(z) = 0\}$ es un compacto y todos sus puntos son aislados, es decir, $\{z \in \overline{D}(0,1) : f(z) = 0\}$ es finito.

b . La igualdad $\max\{|f(z)| : z \in \bar{D}(0,1)\} = 1$ implica que $f(\bar{D}(0,1)) \subset \bar{D}(0,1)$.

A cerrado relativo a Y e Y cerrado $\Rightarrow$ A cerrado

Además, $f(D(0,1)) = \underbrace{\underbrace{f(\bar{D}(0,1))}_{\text{compacto}}}_{\text{compacto} \Rightarrow \text{cerrado}} \cap D(0,1)$ cerredo relativo a $D(0,1)$.

Por el Tma Aplicación Abierta, $f(D(0,1))$ es abto y $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$, entonces $f(D(0,1))$ abto relativo a $D(0,1)$.

Usando que $f(D(0,1)) \neq \emptyset$ y que $D(0,1)$ es conexo, obtenemos que $f(D(0,1)) = D(0,1)$.

Por tanto, $\bar{D}(0,1) = \overline{f(D(0,1))} \subset f(\bar{D}(0,1))$.

Ejercicio 4. (**3 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$.

a) Si $K = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

b) Deducir que la función dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en Ω y estudiar sus singularidades aisladas.

c) Probar que para cada $\delta > 0$ el conjunto $f\big(D(0,\delta) \setminus K\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

a . Como K es compacto y si $U \subset \mathbb{C} \setminus K$ es compacto $\Rightarrow \operatorname{dist}(K, U) = \varepsilon > 0$ y en particular, $|z - 1/n| \geq \varepsilon \quad \forall z \in U$

Luego, $\left| \dfrac{f_n(z)}{n^n} \right| = \dfrac{1}{n^n} \dfrac{1}{|z - 1/n|} \leq \dfrac{\varepsilon}{n^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in U$

Como $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 < 1$, el criterio del cociente nos da que la serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon}{n^n}$ es converge en $\mathbb{C} \setminus K$.

Por el Test de Weierstrass, tenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en $\mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en compactos contenidos en $\mathbb{C} \setminus K$.

b. Como cada $\frac{f_n(z)}{n^n}$ son holomorfas en $\mathbb{C}\setminus K$ y por el apartado a), tenemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ conv. unif. en compactos $U \subset \mathbb{C}\setminus K$, entonces por el Tma convergencia de Weierstrass, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus K$.

Las singularidades de f son 0 y $1/n, n\in\mathbb{N}$ (puntos de K) sin embargo, las singularidades aisladas son sólo $\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$.

Sea $n_0\in\mathbb{N}$ tenemos que $\lim_{z\to 1/n_0}\left(z-\frac{1}{n_0}\right) f(z) = \lim_{z\to 1/n_0}\left(z-\frac{1}{n_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(z)}{n^n} =$

$$= \underbrace{\lim_{z\to 1/n_0}\left(z-\frac{1}{n_0}\right)\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{f_n(z)}{n^n}}_{=0} + \lim_{z\to 1/n_0}\frac{1}{n_0^{n_0}} + \underbrace{\lim_{z\to 1/n_0}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{f_n(z)}{n^n}}_{=0} \neq 0$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria de septiembre

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) = g^n(z)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^n = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ con $R > 0$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\mathrm{e}^x + 1}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Supongamos que f tiene un polo en el punto a. Probar que el polo es simple si, y sólo si, f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$ con $D(a,r) \subset \Omega$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t}e^{-tz}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.

b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-tz}\, dt$ para todo $z \in \Omega$.

Granada, 6 de septiembre de 2017

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) = g^n(z)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^n = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Distinguimos dos casos:

- si $g \equiv 0$ en Ω entonces f también lo es y se cumple lo que queremos
- si $g \not\equiv 0$ en Ω entonces $\exists z_0 \in \Omega$ tq $g(z_0) \neq 0$ y como g es continua en $\Omega \Rightarrow \exists r > 0$ tq $D(z_0, r) \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D(z_0,r)$. Definimos $h: D(z_0,r) \to \mathbb{C}$ como $h(z) = f(z)/g(z)$ holomorfa en $D(z_0,r)$ y $h^n(z) = 1 \Rightarrow h(z) \in U \equiv$ raíces n-ésimas de la unidad (discreto).
  Como h es continua y $D(z_0,r)$ es conexo, $h(D(z_0,r)) \subset U$ es conexo $\Rightarrow h$ es constante $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda^n = 1$ tq $h(z) = \lambda$ $\forall z \in D(z_0,r) \Rightarrow f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in D(z_0,r)$
  Como $f, g \in H(\Omega)$ y $D(z_0,r)' \cap \Omega \neq \emptyset$, por el Ppio de Identidad, $f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ con $R > 0$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}\,dx.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{e^{z/2}}{e^z+1}$

Veamos donde se anula su denominador: $e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 \Rightarrow z \in \log(-1) = i\pi + 2k\pi i =$
$= \{(2k+1)i\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ conj. de ceros del denominador

Por lo que, f está bien def y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{(2k+1)i\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, veamos que $\left.\dfrac{d}{dz}(e^z+1)\right|_{(2k+1)\pi i} = e^{(2k+1)i\pi} = -1 \neq 0$

$e^{1/2\,(2k+1)i\pi} = e^{k\pi i} e^{i\pi/2} \neq 0 \Rightarrow (2k+1)i\pi$ no anula al numerador

Luego, $(2k+1)i\pi$ es un polo simple de f.

Sea $\gamma_R = [-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ tenemos que:

$\text{Ind}_{\gamma_R}(\pi i) = 1$ (dentro poligonal) e $\text{Ind}_{\gamma_R}(\pi i + 2k\pi i) = 0$ (fuera poligonal) $\forall k \neq 0$

Calculamos el residuo: $\text{Res}(f, \pi i) = \lim\limits_{z \to \pi i} (z - \pi i)\dfrac{e^{z/2}}{e^z+1} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z \to \pi i} \dfrac{e^{z/2} + [(z-\pi i)e^{z/2}/2]}{e^z} =$

$= \dfrac{e^{\pi i/2}}{e^{\pi i}} = \dfrac{i}{-1} = -i$

Por el T^{ma} Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{z/2}}{e^z+1}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f, \pi i) = 2\pi$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f\,dz + \int_{[R,R+2\pi i]} f\,dz + \int_{[R+2\pi i,-R+2\pi i]} f\,dz + \int_{[-R+2\pi i,-R]} f\,dz$ *

- $\gamma_1 : [-R,R] \to \mathbb{C},\ \gamma_1(x) = x$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}\,dx$$

- $\gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma_2(x) = R+ix$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \underbrace{long([0,2\pi])}_{2\pi} \max\{|f(z)| : z \in \gamma_2^*\} = 2\pi \frac{e^{R/2}}{e^R-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$|e^{z/2}| = |e^{(R+ix)/2}| = |e^{R/2} e^{ix/2}| = e^{R/2}$$

$$|e^z+1| \geq |e^z| - 1 = |e^{R+ix}| - 1 = e^R - 1$$

Luego, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{[R,R+2\pi i]} f(z)\,dz = 0$

- $\gamma_3 : [-R,R] \to \mathbb{C},\ \gamma_3(x) = x+2\pi i$

$$\int_{[R+2\pi i,-R+2\pi i]} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{(x+2\pi i)/2}}{e^{x+2\pi i}-1}\,dx \overset{e^{\pi i}=-1}{\underset{e^{2\pi i}=1}{=}} \int^{R} \frac{e^{x/2}}{e^x-1}\,dx$$

- $\gamma_4 : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma_4(x) = -R+ix$

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \underbrace{long([0,2\pi])}_{2\pi} \max\{|f(z)| : z \in \gamma_4^*\} = \frac{2\pi e^{-R/2}}{1-e^{-R}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$$|e^{z/2}| = |e^{(-R+ix)/2}| = e^{-R/2}$$

$$|e^z+1| \geq 1 - |e^z| = 1 - |e^{-R+ix}| = 1 - e^{-R}$$

Luego, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0$

Ahora, tomamos límite cuando $R\to+\infty$ en *: $\displaystyle 2\int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}\,dx = 2\pi \Rightarrow \int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}\,dx = \pi$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Supongamos que f tiene un polo en el punto a. Probar que el polo es simple si, y sólo si, f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$ con $D(a,r) \subset \Omega$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si a es un polo simple, entonces $\exists R>0$ tq $D(a,R) \subset \Omega$ y $\varphi(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \in D(a,R)\setminus\{a\} \\ 0, & z = a \end{cases}$ es holomorfa en $D(a,R)$ y tiene un cero de orden 1 en a, es decir, $\varphi(a) = 0 \neq \varphi'(a)$. Por el Tma Función Inversa, φ es inyectiva en $D(a,R)$. En consecuencia, f es inyectiva en $D(a,R)\setminus\{a\}$ por serlo $1/f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por contradicción. Supongamos que f no es un polo simple, es decir, que el orden de a es $m \geq 2$. Entonces, $f(z) = (z-a)^{-m} h(z)$ donde h es holomorfa en Ω y $h(a) \neq 0 \Rightarrow \exists R_0 > 0$ tq $D(a,R_0) \subset \Omega$ y $h(z) \neq 0$ $\forall z \in D(a,R_0) \Rightarrow g(z) = (z-a)h(z)^{-1/m}$ es holomorfa en $D(a,R_0)$ con $g(z)^{-m} = f(z)$.

Como $g'(z) = h(z)^{-1/m} - \frac{1}{m}(z-a)h(z)^{-1/m-1} h'(z)$ $\forall z \in D(a,R_0)$ deducimos que $g'(a) = h(a)^{-1/m} \neq 0$ y por el Tma Función Inversa, $\forall R \in]0,R_0]$ $g: D(a,R) \to g(D(a,R))$ es biyectiva con $g(D(a,R)) \subset \mathbb{C}$.

Como $g(a) = 0 \Rightarrow 0 \in g(D(a,R))$ abto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : D(0,\varepsilon) \subset g(D(a,R))$.

En consecuencia, eligiendo dos raíces m-ésimas $w_1 \neq w_2$ de la unidad, $\frac{\varepsilon}{2} w_1, \frac{\varepsilon}{2} w_2 \in D(0,\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in D(a,R)\setminus\{a\}$ tq $g(z_1) = \frac{\varepsilon}{2} w_1$ y $g(z_2) = \frac{\varepsilon}{2} w_2$ donde

$$f(z_1) = g(z_1)^{-m} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-m} w_1^{-m} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-m} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) w_2^{-m} = g(z_2)^{-m} = f(z_2).$$

Por lo tanto, f no es inyectiva en ningún punto de $D(a,R)\setminus\{a\}$ con $R \in]0,R_0]$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t} e^{-tz} dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.

b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-tz} dt$ para todo $z \in \Omega$.

a. Definimos $\phi : [0,n] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $\phi(t,z) = \sqrt{t}\, e^{-tz}$

- ϕ es continua en $[0,n] \times \mathbb{C}$
- $\phi_t(z) = \sqrt{t} e^{-tz} \in H(\mathbb{C})$ $\forall t \in [0,n]$

Por el Tma Holomorfía para Integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \int_0^1 \sqrt{t} e^{-tz}\, dt \in H(\mathbb{C})$. Además, $f_n^{k)}(z) = \int_0^n \frac{\partial^k}{\partial^k z} \phi(t,z)\, dt$

Como $f_n \in H(\mathbb{C})$, por el Tma Taylor tenemos que $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n^{k)}(0)}{k!} z^k$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Calculamos las derivadas parciales de ϕ:

$\frac{\partial \phi}{\partial z}(t,z) = \sqrt{t}\,(-t) e^{-tz} \to \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 z}(t,z) = \sqrt{t}\,(-t)^2 e^{-tz}$

Luego, tenemos que:

$$f_n^{k)}(z) = \int_0^n \sqrt{t}\,(-t)^k e^{-tz}\, dt \Rightarrow f_n^{k)}(0) = \int_0^n \sqrt{t}\,(-t)^k\, dt = \int_0^n (-1)^k t^{k+1/2}\, dt = \frac{(-1)^k n^{k+3/2}}{k+3/2}$$

Por lo tanto, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n^{k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k+3/2}}{(k+3/2)\, k!} z^k$ $\forall z \in \mathbb{C}$

b. $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Fijamos $p > 0$ y consideramos el semiplano derecho cerrado $S_p = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq p\}$

Para cada $z \in S_p$ tenemos que $|e^{-tz}| = e^{\operatorname{Re}(-tz)} = e^{-t \operatorname{Re} z} \leq e^{-tp}$ $\forall z \in \mathbb{R}^+$

En consecuencia, para cualquier $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \leq q$

$$|f_q(z) - f_p(z)| = \left| \int_0^q \sqrt{t} e^{-tz} dt - \int_0^p \sqrt{t} e^{-tz} dt \right| = \left| \int_p^q \sqrt{t} e^{-tz} dt \right| \leq \int_p^q \sqrt{t}\, |e^{-tz}|\, dt \leq$$

$$\leq \int_p^q \sqrt{t} e^{-tp}\, dt = \int_p^q \frac{\sqrt{t}}{e^{tp}}\, dt$$

Puesto que, para cada $t > 0$, se tiene que $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \geq \frac{t^2}{2}$ se sigue que $e^{tp} \geq \frac{1}{2} p^2 t^2$, y por tanto

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{tp}} \leq \frac{2\sqrt{t}}{p^2 t^2} = \frac{2}{p^2 t^{3/2}}$$

b. Luego, $|f_q(z)-f_p(z)| \leq \int_p^q \frac{2}{p^2 t^{3/2}}\,dt = \frac{4}{p^2}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{q}}\right] \leq \frac{4}{p^2}\frac{1}{\sqrt{p}}$

Entonces, $\lim_{p\to+\infty} \frac{4}{p^2}\frac{1}{\sqrt{p}} = 0 \Rightarrow \{f_n\}$ unif de Cauchy en S_p, y por tanto, unif conv. en S_p.

Como todo compacto contenido en Ω está contenido en algún S_p, tenemos que $\{f_n\}$ conv. unif. en los compactos contenidos en Ω.

c. Por el T^{ma} convergencia de Weierstrass, $f\in H(\Omega)$ y además, para cada $z\in\Omega$ se tiene que

$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \sqrt{t}\,e^{-tz}\,dt = \int_0^\infty \sqrt{t}\,e^{-tz}\,dt.$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, se tiene

$$f'(1/n)g(1/n) - f(1/n)g'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\,\mathrm{e}^{-at}\,.$$

Ejercicio 3. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 9 de junio de 2018

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, se tiene

$$f'(1/n)g(1/n) - f(1/n)g'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Tenemos que $f'(1/n)g(1/n) - f(1/n)g'(1/n)$ es holomorfa en $D(0,1)$ se anula en el conj $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con $A' = \{0\}$.

Como $f, f', g, g' \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $A' \cap D(0,1) \neq \emptyset$, por el Ppio de Identidad, tenemos que

$f'(z)g(z) - f(z)g'(z) = 0 \quad \forall z \in D(0,1) \Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{g'(z)}{g(z)} \quad \forall z \in D(0,1)$

Definimos $h : D(0,1) \to \mathbb{C}$ como $h(z) = f(z)/g(z)$ holomorfa

$h'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g(z)^2} = 0 \quad \forall z \in D(0,1) \Rightarrow h$ es constante en $D(0,1) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : f(z) = cg(z) \quad \forall z \in D(0,1)$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\, e^{-at}.$$

Por el Tma Residuos, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)\right]$ donde $f(z) = \dfrac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}$ y

$z_1, \dots, z_n$ son los ceros del denominador de f en el semiplano superior.

Tenemos que $(z^2+a^2)^2 = (z-ia)^2(z+ia)^2 \Rightarrow ia$ es el único cero del denominador de f en el plano superior y es de orden 2 $\Rightarrow f$ tiene un polo de orden 2 en ia.

$$\mathrm{Res}(f, ia) = \lim_{z \to ia}\left[\frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-ia)^2}\frac{e^{itz}}{(z+ia)^2\cancel{(z-ia)^2}}\right)\right] = \lim_{z\to ia} \frac{ite^{itz}(z+ia)^2 - 2(z+ia)e^{itz}}{(z+ia)^4} =$$

$$= \lim_{z\to ia} \frac{e^{itz}[it(z+ia) - 2]}{(z+ia)^3} = \frac{e^{-ta}[it(2ia) - 2]}{(2ia)^3} = \frac{e^{-ta}(-2ta-2)}{-i\,2^3 a^3} = \frac{e^{-ta}(ta+1)}{4a^3 i}$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \mathrm{Re}\left[2\pi \cancel{i}\,\frac{e^{-ta}(ta+1)}{4a^3\cancel{i}}\right] = \frac{e^{-ta}(ta+1)\pi}{2a^3}$

Ejercicio 3. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Supongamos que f no se anula en $\mathbb{C}^*$ y definimos $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ por $g(z) = 1/f(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}^*$.

$\lim\limits_{z\to+\infty} f(z) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0 \Rightarrow \exists R>0$ tq $\forall z\in\mathbb{C}^*$ $|z|\geq R$ $|g(z)| \leq \delta/2$

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} g(z) = 0 \Rightarrow \exists R>r<0$ tq $\forall z\in\mathbb{C}^*$ $|z|\leq r$ $|g(z)| \leq \delta/2$

Si $g \not\equiv 0 \Rightarrow \exists z_0$ tq $g(z_0)\neq 0 \Rightarrow \delta = |g(z_0)|$ y sea $g : \bar{A}(0,r,R) \to \mathbb{C}$

$A(0,r,R)$ dominio acotado
g continua
$\bar{A}(0,r,R)$ compacto
$\Bigg] \Rightarrow \exists \max\{|g(z)| : z\in\bar{A}(0,r,R)\} \Rightarrow \exists z_1\in\bar{A}(0,r,R)$ tq $|g(z_1)| = \max\{|g(z)| : z\in\bar{A}(0,r,R)\}$

Como $|g(z_0)| = \delta$ y tenemos que $|g(z_1)| \geq |g(z_0)| = \delta$
y $\forall z\in\mathbb{C}^*$ $|z| = r$ ó $|z| = R$ se tiene que $|g(z)| \leq \delta$ $\Big] \Rightarrow z_1 \in A(0,r,R)$

Luego, por el ppio del módulo máximo, g es cte en $A(0,r,R)$ y por el ppio de identidad, g es cte en $\mathbb{C}^*$.
Entonces, f es cte!!!

<u>Extra</u>: Supongamos que $\exists\{z_n\}$ de puntos distintos tq $f(z_n) = 0$.
Supongamos que $\{z_n\}$ no está acotada. Luego, $\forall M>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N} : z_n > M$ $\forall n > n_0$
por lo que, $\lim\limits_{n\to\infty} \{\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{f(z_n)}\} = \lim\limits_{z\to\infty}\{f(z)\} = \infty$!!! $\Rightarrow \{z_n\}$ debe estar acotada

Por el Tma B-W, $\exists \tau : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente tq $\{z_{\tau(n)}\} \to z_0 \in\mathbb{C}$
Si $z_0 = 0$: $\{\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{f(z_{\tau(n)})}\} = 0$!!! $\Rightarrow z_0 \neq 0$

Como $z_0\neq 0$, z_0 es un pto de acumulación de $A = \{z\in\mathbb{C}^* : f(z) = 0\} \Rightarrow A' \neq \emptyset$
Luego, por el ppio de identidad, f es constante en $\mathbb{C}^*$!!! f diverge en ∞
Por lo que, f se anula una cantidad finita de veces.
Veamos que f tiene al menos 2 ceros contando multiplicidad.
Tenemos que $\mathbb{C}^* = (0,0,+\infty)$
f diverge en 0
f holomorfa en $\mathbb{C}^*$ $\Big] \Rightarrow f$ tiene un polo en $0 \Rightarrow \exists\varphi$ polinomio de grado $k\in\mathbb{N}$ y $\varphi(0) = 0$, y $\exists g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $f(z) = g(z) + \varphi(1/z)$ $\forall z\in\mathbb{C}^*$

Sea $\varphi(z) = a_1 z + \ldots + a_k z^k$, $a_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$f(z) = g(z) + \underbrace{\frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_k}{z^k}}_{\downarrow z \to \infty \; 0}$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to\infty} g(z) = \infty$ y g es entera.

Entonces, g es un polinomio no constante.

Por lo que, $f(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_k}{z^k}$ con $b_m \neq 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Poniendo denominador común tenemos que $f(z) = \frac{P(z)}{z^k}$ con grado $P(z) = m + k \geq 2$.

Por el Tma Fundamental del Álgebra, f se anula al menos dos veces.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1 - a trozos.

Definimos $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ dado que sus componentes lo son en sus resp. dominios.

Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos la función $\phi_t(z) = \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$

Por el Tma Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt$ $\forall z \in \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n,n+1])}_{1} \max\left\{ \frac{|\operatorname{sen}(t+z)|}{|1+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{M}{1+n^2}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow t^2 + 1 \geq n^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$

Como $\operatorname{sen}(t+z)$ es continua en $\gamma^* \times K$ y K es compacto, $\operatorname{sen}(t+z)$ está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|\operatorname{sen}(t+z)| < M$

b. Veamos si la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2}$ y sabemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es

conv. (serie armónica) $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea U un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{C}$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene un polo en a. Probar que existe $R > 0$ de modo que $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + i\pi, -R + i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t + z)}{1 + t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

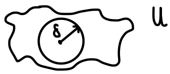
b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 29 de junio de 2018

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea U un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{C}$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene un polo en a. Probar que existe $R > 0$ de modo que $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$.

entorno reducido = entorno que excluye el punto a del entorno

f tiene un polo en a $\Rightarrow \lim_{z\to a} |f(z)| = \infty \Rightarrow \exists \delta > 0 : D(a,\delta)\setminus\{a\} \subset U$ con $|f(z)| \geq 1 \quad \forall z \in D(a,\delta)\setminus\{a\}$



Entonces, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(a,\delta)\setminus\{a\}$

Definimos $g: D(a,\delta)\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $g(z) = 1/f(z)$ holomorfa en $D(a,\delta)\setminus\{a\}$.

$\lim_{z\to a} |g(z)| = \lim_{z\to a} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to a} g(z) = 0$

Luego, por el Tma Extensión de Riemann, $g: D(a,\delta) \to \mathbb{C}$ es holomorfa y definida por

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \in D(a,\delta)\setminus\{a\} \\ 0, & z = a \end{cases}$$

Como $g \neq$ cte, por el Tma Aplicación Abierta, $g(D(a,\delta))$ es abierta.

Tenemos que $0 = g(a) \in g(D(a,\delta)) \Rightarrow \exists r > 0 : D(0,r) \subset g(D(a,\delta))$

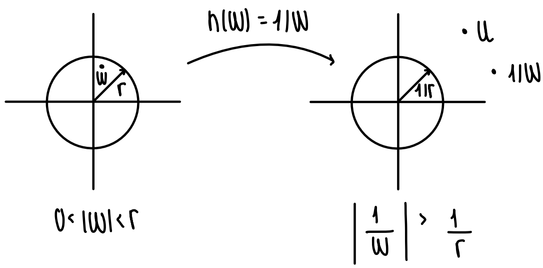
$\forall w \in D(0,r)\setminus\{0\}$ tenemos que $w \in g(D(a,\delta))\setminus\{0\} \Rightarrow \exists z \in D(a,\delta)$ con $|z-a| < \delta$ tq $g(z) = w \neq 0 \Rightarrow w = 1/f(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = 1/w$

En resumen, si $w \in D(0,r)\setminus\{0\} \Rightarrow \exists z \in D(0,r)\setminus\{0\}$ tq $f(z) = 1/w$ $(0 < |w| < r \Rightarrow 1/|w| > 1/r)$.

Dado $u \in \mathbb{C}\setminus D(0, 1/r) \Leftrightarrow w = 1/u \in D(0,r)\setminus\{0\} \Leftrightarrow \exists z \in D(a,\delta)\setminus\{a\}$ tq $f(z) = u$.

Por lo tanto, $\mathbb{C}\setminus D(0, \underbrace{1/r}_{R}) \subset f(D(a,\delta)\setminus\{a\}) \subset f(U)$



Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{e^x + e^{-x}}$

Veamos donde se anula el denominador: $e^z + e^{-z} = 0 \overset{\text{si } z=0}{\Rightarrow} e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z \in \log(-1) = i(\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \Rightarrow z \in i\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

Luego, f está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)i$

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ vemos que $\dfrac{d}{dz}(e^z + e^{-z})\Big|_{(\pi/2+\pi k)i} = (e^z - e^{-z})\Big|_{(\pi/2+\pi k)i} = e^{\pi i/2} e^{\pi k i} - e^{-\pi k i} e^{-\pi i/2} \neq 0$

Entonces, $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)i$ es un cero simple del denominador.

Además, como el numerador no se anula nunca, tenemos que $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)i$ es un polo simple de f.

Sea $\gamma_R = [-R, R, R+\pi i, -R+\pi i, -R]$ y tenemos que:

$\text{Ind}_{\gamma_R}(\pi i/2) = 1$ (dentro γ_R) e $\text{Ind}_{\gamma_R}(\pi i/2 + \pi i k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (fuera γ_R)

Tenemos que $\gamma_R^* \subset \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})i$ y γ_R es nulhomólogo con respecto $\mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})i$.

Calculamos el residuo: $\text{Res}\left(f, \dfrac{\pi i}{2}\right) = \lim\limits_{z \to \frac{\pi i}{2}} \left(z - \dfrac{\pi i}{2}\right) \dfrac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z \to \frac{\pi i}{2}} \dfrac{e^{iz} + ie^{iz}(z - \pi i/2)}{e^z - e^{-z}} =$

$= \dfrac{e^{-\pi/2}}{e^{\pi i/2} - e^{-\pi i/2}} = \dfrac{e^{-\pi/2}}{2i}$

Por el T^{ma} Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z) = 2\pi i \,\text{Res}\left(f, \frac{\pi i}{2}\right) = 2\pi i \frac{e^{-\pi/2}}{2i} = \pi e^{-\pi/2}$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f\, dz = \int_{[-R,R]} f + \cancel{\int_{[R,R+\pi i]} f} + \int_{[R+\pi i, -R+\pi i]} f + \cancel{\int_{[-R+\pi i, -R]} f}$ *

- $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(x) = x$

  $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

- $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(x) = R + ix$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{\text{long}([0,\pi])}_{\pi} \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma_2^*\} \leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$|e^{iz}| = |e^{Ri-x}| = e^{-x} \leq 1$

$|e^z + e^{-z}| \geq |e^z| - |e^{-z}| = e^R - e^{-R}$

Luego, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

- $\gamma_3 : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_3(x) = x + \pi i$ $\qquad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}e^{-\pi}}{e^x e^{\pi i} - e^{-x}e^{-\pi i}}\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}e^{-\pi}}{e^x - e^{-x}}\,dx$$

- $\gamma_4 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_4(x) = -R + ix$

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{\text{long}([0,\pi])}_{\pi} \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma_4^*\} \leq \frac{1}{e^{-R} - e^R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$|e^{iz}| = |e^{-iR}e^{-x}| = e^{-x} \leq 1$

$|e^z + e^{-z}| \geq |e^{-z}| - |e^z| = e^{-R} - e^R$

Luego, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0.$

Ahora, tomamos límite cuando $R \to +\infty$ en $*$:

$$(1+e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \pi e^{-\pi/2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{(1+e^{-\pi})}$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

Distinguimos dos casos:

- Si f es constante: $f(z) = k \;\; \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow k = f(k) = k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f \equiv 0$
- Si f no es constante: como además f es entera, por el T$^{\text{ma}}$ Louville tenemos que f es densa en $\mathbb{C}$ ($\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$).

  Sea $A = \{w \in \mathbb{C} : f(w) = w\}$ y $f(\mathbb{C}) \subset A$, entonces A también es denso en $\mathbb{C}$.

  Luego, dado $w \in \mathbb{C}$ $\exists \{w_n\} \subset A$ tq $\{w_n\} \to w$. Por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} f(w_n) \overset{H}{=} w_n \to w \\ \quad \downarrow f \text{ continua} \\ f(w) \end{array}\right\} \Rightarrow f(w) = w \Rightarrow f \text{ es cte ó } f \text{ es la identidad}$$

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma: [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1-a trozos.

Definimos $\phi: \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \dfrac{\cos(t+z)}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ dado que sus componentes lo son en sus resp. dominios.

Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos la función $\phi_t(z) = \dfrac{\cos(t+z)}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$

Por el T^{ma} Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt$ $\forall z \in \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\text{long}([n,n+1])}_{1} \max\left\{ \frac{|\cos(t+z)|}{|1+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{M}{1+n^2}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow t^2 + 1 \geq n^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$

Como $\cos(t+z)$ es continua en $\gamma^* \times K$ y K es compacto, $\cos(t+z)$ está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|\cos(t+z)| < M$

Veamos si la serie $\sum_{n\geq 1} \dfrac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{M}{n^2+1} \leq \sum_{n\geq 1} \dfrac{M}{n^2}$ y sabemos que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ es conv. (serie armónica) $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \dfrac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean f, g funciones enteras verificando

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$ de modo que $g(z) = \alpha z + \beta$ y $f(z) = \dfrac{z - \beta}{\alpha}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \mapsto \dfrac{z}{a - \mathrm{e}^{-iz}}$ sobre la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x) dx}{1 + a^2 - 2a\cos(x)} = \frac{2\pi}{a} \ln\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5**) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Entonces $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ ó $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{T}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0,1)$.

Granada, 11 de junio de 2019

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean f, g funciones enteras verificando

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$ de modo que $g(z) = \alpha z + \beta$ y $f(z) = \dfrac{z-\beta}{\alpha}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Como f, g son enteras, $f \circ g$ es entera.

Sea $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = A$ y $A' \neq \emptyset$ ya que $A' = \{0\}$.

Luego, como $A' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ y $f \circ g$ es entera, por el ppio de identidad, tenemos que $(f \circ g)(z) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$

Supongamos que g es constante. Entonces, $g(z) = k \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(g(z)) = f(k) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$!!! g es no constante.

Si f y g son funciones polinómicas $\Rightarrow f \circ g$ es un polinomio de grado $f \cdot$ grado $g = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\text{grado } f, \text{grado } g\} = \{1\}$.

Supongamos que g no es un polinomio. Entonces, por el corolario del Tma Casorati, $\exists \{z_n\} \to +\infty$ tal que $\{g(z_n)\} \to w \in \mathbb{C}$. Entonces, $\{f(\underset{\downarrow \atop f(w) \in \mathbb{C}}{g(z_n)})\} = \{z_n\} \to +\infty$!!! g es un polinomio de grado 1, $g(z) = \alpha z + \beta$

Supongamos que f no es un polinomio. Por el corolario del Tma Casorati, $\exists \{z_n\} \to +\infty$ tq $\{f(z_n)\} \to w \in \mathbb{C}$.

Como g es un polinomio no cte, por el Tma FA, $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \Rightarrow \exists w_n \in \mathbb{C}$ tq $g(w_n) = z_n \to +\infty$.

Entonces, $\{\underset{\downarrow \atop \{f(z_n)\} \to w \in \mathbb{C}}{f(g(w_n))}\} = \{z_n\} \to +\infty$!!! f es un polinomio de grado 1

Sea $w = \alpha z + \beta \Rightarrow z = \dfrac{w - \beta}{\alpha} \Rightarrow f(z) = \dfrac{z - \beta}{\alpha} \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \mapsto \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$ sobre la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x) dx}{1 + a^2 - 2a\cos(x)} = \frac{2\pi}{a} \ln\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$ y veamos donde se anula el denominador:

$a - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{-iz} = a \Leftrightarrow -iz = \operatorname{Log}(a) = \ln(a) + 2\pi i\mathbb{Z} \Rightarrow z = \dfrac{\log(a)}{-i} + 2\pi\mathbb{Z} = i\log(a) + 2\pi\mathbb{Z}$

Luego, f está bien def y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\log(a) + 2\pi\mathbb{Z}\}$

Veamos si $i\log(a) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, es un cero simple:

$\dfrac{d}{dz}(a - e^{-iz})\Big|_{i\log a + 2\pi k} = ie^{-iz}\Big|_{i\log a + 2\pi k} = ie^{\log a} e^{-2\pi i k} = ia \neq 0$

Luego, $i\log a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, es un polo simple de f ya que el numerador no se anula ahí.

Consideramos el camino cerrado $\gamma_n = [-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$ y tenemos que:

$\operatorname{Ind}_{\gamma_n}(i\log a) = 1$ (dentro γ_n) e $\operatorname{Ind}_{\gamma_n}(i\log a + 2\pi k) = 0 \ \forall k \neq 0$ (fuera γ_n)

Calculamos el residuo: $\operatorname{Res}(f, i\log a) = \lim\limits_{z \to i\log a} (z - i\log a)\dfrac{z}{a - e^{-iz}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z \to i\log a} \dfrac{2z - i\log a}{ie^{-iz}} =$

$= \dfrac{i\log a}{ia} = \dfrac{\log a}{a}$

Por el Tma Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\log a) = 2\pi i \frac{\log a}{a}$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma_n} f\,dz = \int_{[-\pi,\pi]} f + \int_{[\pi, \pi+in]} f + \int_{[\pi+in, -\pi+in]} f + \int_{[-\pi+in, -\pi]} f$

- $\gamma_1 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(x) = x$

$\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - (\cos x - i\operatorname{sen} x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - \cos x - i\operatorname{sen} x)}{(a - \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} =$

$\displaystyle= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[x(a - \cos x) - ix\operatorname{sen} x]}{a^2 - 2a\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - \cos x)}{1 + a^2 - 2a\cos x}\,dx}}_{0 \text{ función impar}} - i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\operatorname{sen} x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\,dx$

- $\gamma_n := \int_{[\pi, \pi+in]} f\,dz + \int_{[-\pi+in, -\pi]} f\,dz = \int_{[\pi,\pi+in]} f\,dz - \int_{[-\pi,-\pi+in]} f =$ $\quad e^{i\pi}=-1$

$$= \int_0^n \frac{\pi+ix}{a-e^{-i(\pi+ix)}}\, i\,dx - \int_0^n \frac{-\pi+ix}{a-e^{-i(-\pi+ix)}}\, i\,dx = \int_0^n \frac{\pi i - x}{a-e^{-i\pi}e^x}\,dx - \int_0^n \frac{-\pi i - x}{a-e^{i\pi}e^x}\,dx =$$

$$= \int_0^n \frac{\pi i - x}{a+e^x} + \int_0^n \frac{\pi i + x}{a+e^x}\,dx = \int_0^n \frac{2\pi i}{a+e^x}\,dx$$

Haciendo el cambio de variable $y = e^x \to dy = e^x dx = y\,dx$, tenemos:

$$\int \frac{dx}{a+e^x} = \int \frac{dy}{y(a+y)} = \int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{a+y}\right) dy = \frac{1}{a}\left[\log y - \log(a+y)\right] =$$

$$= \frac{1}{a}\left[x - \log(a+e^x)\right] \Rightarrow \gamma_n = \int_0^n \frac{2\pi i}{a+e^x}\,dx = \frac{2\pi i}{a}\left[n - \log(a+e^n) + \log(a+1)\right]$$

Notemos que $n - \log(a+e^n) = \log e^n - \log(a+e^n) = \log \frac{e^n}{a+e^n} \longrightarrow \log 1 = 0$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{2\pi i}{a}\log(a+1)$

- $\gamma_3 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_3(x) = x + in$

$$\left|\int_{\gamma_3} f(z)\,dz\right| \le \underbrace{\text{long}([-\pi,\pi])}_{2\pi}\, \text{máx}\{|f(z)| : z\in\gamma_3^*\} \le 2\pi \,\frac{\pi+n}{e^n - a} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$|z| = |x+in| \le |x| + n \le \pi + n$

$|a - e^{-iz}| \ge |e^{-iz}| - a = |e^{-ix+n}| - a = e^n - a$

Luego, $\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0$.

Por lo que, si tomamos límite cuando $n\to\infty$ en $*$ tenemos que:

$$-i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\,\text{sen}\,x}{1+a^2-2a\cos x} + \frac{2\pi i}{a}\log(a+1) = 2\pi i\,\frac{\log a}{a}$$

Por lo tanto, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\,\text{sen}\,x}{1+a^2-2a\cos x}\,dx = \frac{2\pi}{a}\left(\log(a+1) - \log a\right) = \frac{2\pi}{a}\log\frac{a+1}{a}$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ C^1-a trozos.
Definimos $\Phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\Phi(t,z) = \dfrac{e^{z^2/1+t^2}}{(1+t)^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ porque las componentes lo son en sus resp. dominios.
Para cada $t \in \gamma^*$, se tiene la función $\Phi_t(z) = \dfrac{e^{z^2/1+t^2}}{(1+t)^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por el Tma Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \Phi(t,z)\, dt$ es una función entera.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{e^{z^2/1+t^2}}{(1+t)^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\text{long}([n,n+1])}_{1} \text{máx} \left\{ \frac{|e^{z^2/1+t^2}|}{|(1+t)^2|} : z \in K \right\}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow (t+1)^2 \geq (n+1)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{(t+1)^2} \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Como z^2 es cont en K y K es compacto, z^2 alcanza máximo M en K.
Entonces, $e^{z^2/1+t^2} \leq e^{M/1+n^2}$ $\forall z \in K$ está acotada.
Veamos si la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{M/1+n^2}}{(1+n)^2}$ es convergente.

Sabemos que $|e^{M/1+n^2}| \leq e^{M/2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por el criterio de comparación, tenemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{M/1+n^2}}{(1+n)^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{e^{M/2}}{n^2}$ es convergente (serie armónica), entonces podemos decir que

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{M/1+n^2}}{(1+n)^2}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el Tma Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5**) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Entonces $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ ó $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{T}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)|: z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0,1)$.

Como f es holomorfa en $D(0,1)$, g es continua en $z=0$ ya que $f'(0)$ existe.
Luego, por el Tma Extensión de Riemann, g es holomorfa en $D(0,1)$.
Sea $0<r<1$, por el corolario del Ppio del módulo máximo, tenemos que para cada $z \in D(0,r)$

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{w} \leq \frac{1}{r}$$

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow |g(z)| \leq 1 \;\; \forall z \in D(0,1) \Rightarrow |f(z)| \leq |z| \;\; \forall z \in D(0,1) \;\text{ y }\; |f'(0)| \leq 1.$$

Luego, $|g|$ alcanza su máximo en el interior de $D(0,1)$.
Entonces, por el Ppio del módulo máximo, g es constante, es decir, $g(z) = \alpha \;\; \forall z \in D(0,1)$.
Por lo tanto, $f(z) = \alpha z \;\; \forall z \in D(0,1)$ y $|\alpha| = |g(z)| = 1$.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea a una singularidad de una función f. Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector circular $D(0,R) \cap \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} .$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = (f(z))^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t-z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 3 de julio de 2019

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea a una singularidad de una función f. Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a.

Sea a una singularidad de f y U un entorno reducido de a.
Entonces, a es un polo o una singularidad esencial.
Sea U un entorno reducido de a. Si $\operatorname{Re} f$ está acotada $\Rightarrow f(U\setminus\{a\})$ está contenida en una banda vertical.
Supongamos que a es una singularidad esencial. Por el T^{ma} Casorati, $\overline{f(U\setminus\{a\})} = \mathbb{C}$!!!
Entonces, $f(U\setminus\{a\})$ no puede estar contenido en una banda vertical.
Supongamos que a es un polo. Entonces, $\exists R>0$ tq $\mathbb{C}\setminus D(0,R) \subset f(U) \Rightarrow \operatorname{Re} f|_U$ no puede estar acotada.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector circular $D(0,R) \cap \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ y veamos donde se anula el denominador:

Las soluciones de la ecuación $1+z^n = 0$ son las raíces n-ésimas de -1:
$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}$, $k = 0,\dots,n-1 \Rightarrow 1+z^n = \prod_{k=0}^{n-1} (z-z_k)$

Luego, tenemos que f está bien def y es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_k : k=0,\dots,n-1\}$ y los z_k son polos simples de f.
Para cada $R>1$ consideramos γ_R el camino que recorre la frontera de $S_R = D(0,R) \cap \{z\in\mathbb{C}^* : 0<\arg z < 2\pi/n\}$:
$\gamma_R = [0,R] + \sigma_R + [Re^{2\pi i/n}, 0]$ donde σ_R es el arco de la circunferencia $C(0,R)$.
z_0 es el único polo que pertenece a S_R ya que $|z_0| = 1 < R$ y $\arg(z_0) = \pi/n \in [0, 2\pi/n]$
Calculamos el residuo: $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)} = \dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}(z_0-z_k)}$

Por el T^{ma} Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{n-1}(z_0-z_k)}$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f\,dz = \int_{[0,R]} f + \int_{\sigma_R} f + \int_{[e^{2\pi i/n}R,\,0]} f$

- $\gamma_1 : [0,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(x) = x$
  $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\,dx$

- $\gamma_2 : [0, 2\pi/n] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(x) = Re^{ix}$

$$\left| \int_{\sigma_R} f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{\text{long}([0,2\pi/n])}_{2\pi/n} \max\{|f(z)| : z \in \gamma_2^*\} \leq \frac{2\pi R}{(R^n-1)n} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$|1+z^n| \geq |z|^n - 1 = R^n - 1$

$|\gamma_2'(t)| = |Rie^{ix}| = R$

Luego, $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

- $\gamma_3 : [Re^{2\pi i/n}, 0] \to \mathbb{C}$, $\gamma_3(x) = xe^{2\pi i/n}$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{[0,\, Re^{2\pi i/n}]} f(z)\,dz = -\int_0^R \frac{e^{2\pi i/n}}{1+(xe^{2\pi i/n})}\,dx$$

Luego, si $R\to+\infty$ en * tenemos que: $(1-e^{2\pi i/n})\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{n-1}(z_0-z_k)}$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i}{\prod_{k=1}^{n-1}(z_0-z_k)(1-e^{2\pi i/n})}$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = (f(z))^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

Distinguimos dos casos:

- Si f es constante: $f(z) = k \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow k = f(k) = k^2 \Rightarrow k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0, 1$.
  Luego, si f es constante, tenemos que $f \equiv 0$ ó $f \equiv 1$.
- Si f no es constante: por el T^{ma} Aplicación Abierta, $f(\mathbb{C})$ es abierto. Sea $\{w \in \mathbb{C} : f(z) = w\} = f(\mathbb{C})$.
  Luego, tenemos que $f(w) = w^2 \ \forall w \in f(\mathbb{C})$ tq $w \in D(z_0, R) \subset f(\mathbb{C})$.
  Como $D(z_0,R)' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$, por el ppio de Identidad, $f(w) = w^2 \ \forall w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t-z)}{1+t^2}\,dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1-a trozos.
Definimos $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(t-z)}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ dado que sus componentes lo son en sus resp. dominios.
Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos la función $\phi_t(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(t-z)}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$

Por el T^{ma} Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t-z)}{1+t^2}\,dt$ $\forall z \in \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t-z)}{1+t^2}\,dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n,n+1])}_{1} \max\left\{ \frac{|\operatorname{sen}(t-z)|}{|1+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{M}{1+n^2}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow t^2+1 \geq n^2+1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$

Como $\operatorname{sen}(t-z)$ es continua en $\gamma^* \times K$ y K es compacto, $\operatorname{sen}(t+z)$ está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|\operatorname{sen}(t-z)| < M$
Veamos si la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2}$ y sabemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es conv. (serie armónica) $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f^k(z) = g^k(z)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^k = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para cada $z \in \Omega$. Extra 2017

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \mapsto \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del disco $D(0, R)$ calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(1+x^2)^2} \, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $f\big(g(z)\big) = z^2$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Probar que una de las funciones f y g es un polinomio de grado uno y la otra es un polinomio de grado dos.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1 + t^2} \, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 9 de junio de 2020

Instrucciones:

- Enviad la prueba resuelta a mi email (jmeri@ugr.es) en un único archivo .pdf con el nombre en el formato Apellido1Apellido2Nombre.pdf
- Tenéis hasta las 13:00 para entregar la prueba.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \mapsto \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del disco $D(0,R)$ calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$, que está bien def y es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$.

Se tiene que i y $-i$ son polos de orden 2 de f.

Denotamos γ_R al camino cerrado que recorre la frontera de la mitad superior de $D(0,R)$:

$\gamma_R = [-R,R] + \sigma_R$ donde σ_R es el arco de la semicircunferencia.

γ_R es nul-homólogo respecto $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$. Además, $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(i)=1$ e $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(-i)=0$.

Calculamos el residuo: $\mathrm{Res}(f,i) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\,\dfrac{ze^{iz}}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}}\right] =$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{(z+i)^2(e^{iz}+zie^{iz}) - 2(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^4}\right] = \lim_{z\to i} \frac{(z+i)(e^{iz}+zie^{iz}) - 2ze^{iz}}{(z+i)^3} =$$

$$= \frac{2i(e^{-1}-e^{-1}) - 2ie^{-1}}{8(i)^3} = \frac{1}{4e}$$

Por el Tma Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)\right] = \mathrm{Im}\left[2\pi i \frac{1}{4e}\right] = \frac{\pi}{2e}$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$ $\ast$

- $\gamma_1: [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(x) = x$

  $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx$

- $\gamma_2: [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(x) = Re^{ix}$

  $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le \underbrace{\mathrm{long}([0,\pi])}_{\pi}\, \max\{|f(z)| : z\in\gamma_2^*\} \le \frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

  $|ze^{iz}| = |z|\,\cancel{|e^{iz}|}^{\,1} = R$

  $|1+z^2| \ge |z|^2 - 1 = R^2 - 1$

  Luego, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$

Por lo que, si tomamos límite cuando $R\to+\infty$ en $\ast$, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $f\big(g(z)\big) = z^2$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Probar que una de las funciones f y g es un polinomio de grado uno y la otra es un polinomio de grado dos.

Como $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow f \circ g \in H(\Omega)$.

Si f ó g fuesen constantes $\Rightarrow f \circ g$ también lo sería !!! f, g no son constantes.

Si f y g fuesen polinomios $\Rightarrow f \circ g$ es un polinomio de grado $f \cdot$ grado $g = 2 \Rightarrow \{\text{grado } f, \text{grado } g\} = \{1, 2\}$.

Supongamos que g no es entera polinómica. Entonces, por el corolario del Tma Casorati, tenemos que $\overline{g(\mathbb{C} \setminus D(0,n))} = \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists z_n \in \mathbb{C}$ con $|z_n| > n$ tq $g(z_n) \to 0 \in \mathbb{C}$.

Por lo que, $\{f(g(z_n))\} = \{z_n^2\} \to +\infty$!!! g es un polinomio no constante

$\downarrow$ $f(0)$

Ahora, supongamos que f no es entera polinómica. Por el corolario del Tma Casorati, $\overline{f(\mathbb{C} \setminus D(0,n))} = \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists w_n \in \mathbb{C}$ con $\{w_n\} \to +\infty$ tq $\{f(w_n)\} \to 0 \in \mathbb{C}$. Como g es un polinomio no cte, por el Tma FA, $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \Rightarrow \exists z_n \in \mathbb{C}$ tq $g(z_n) = w_n$. Luego, $\{f(g(z_n))\} = \{z_n^2\} = \{f(w_n)\} \to 0 \Rightarrow \{z_n\} \to 0$ y g continua $\Rightarrow$ $\Rightarrow \{g(z_n)\} \to g(0)$!!! f es un polinomio no constante.

$\{g(z_n)\} = \{w_n\} \to +\infty$

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1 + t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ C^1-a trozos.

Definimos $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t, z) = \dfrac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1 + t^2}$, que es continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$

Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos $\phi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi_t(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1 + t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por el Tma Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que

$f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1 + t^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\left| \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n,n+1])}_{1} \max\left\{ \frac{|\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)|}{|1+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{M}{1+n^2}$$

Como $t \in [n,n+1]$: $t \geq n \Rightarrow t^2+1 \geq n^2+1 \Rightarrow \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$

Como $\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)$ es continua en K y K es compacto, entonces z alcanza máximo m en K.
Luego, $\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)$ está acotada, es decir, $\exists M>0$ tq $|\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)| < M$
Veamos si la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2}$ y sabemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es conv. (serie armónica) $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\, \mathrm{e}^{-at}\,.$$ Ord 2018

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in]0,1[$ se verifica

$$\max\{|f(z)|\colon |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

Granada, 16 de junio de 2021

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ (C^1 a trozos).

Definimos $\Phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\Phi(t,z) = \frac{e^{z^3/1+t}}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ porque las componentes lo son en sus resp. dominios.

Para cada $t \in \gamma^*$, se tiene la función $\Phi_t(z) = \frac{e^{z^3/1+t}}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por el Tma Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \int_n^{n+1} \Phi(t,z)\, dt$ es una función entera.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{e^{z^3/1+t}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n, n+1])}_{1} \max \left\{ \frac{|e^{z^3/1+t}|}{|1+t^2|} : z \in K \right\}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow 1+t^2 \geq 1+n^2 \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$

Como z^3 es cont en K y K es compacto, z^3 alcanza máximo M en K.

Entonces, $e^{z^3/1+t} \leq e^{M/1+n}$ $\forall z \in K$ está acotada.

Veamos si la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{M/1+n}}{1+n^2}$ es convergente.

Sabemos que $|e^{M/1+n}| \leq e^{M/2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{M/1+n}}{1+n^2} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{e^{M/2}}{n^2}$ es convergente (serie armónica), entonces podemos decir que

$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{M/1+n}}{1+n^2}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\sum_{n \geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el Tma Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

Como es entera y no constante, por el T^{ma} Louville, $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.
Entonces, f diverge por no estar acotada. Luego, sabemos que las únicas funciones enteras que verifican que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ son las funciones polinómicas y como f no es constante por ser inyectiva, f es un polinomio.

Si f es un polinomio de grado mayor que 1, por el T^{ma} FA. f tiene el mismo n° de raíces que el grado del polinomio. Esto significa que f tendría varios valores para los que $f(z)=0$, pero f es inyectiva $\Rightarrow$ f es un polinomio de grado 1.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in]0,1[$ se verifica

$$\max\{|f(z)|\colon |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

Definimos $g: D(0,1)\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ como $g(z) = f(z)/z^n$ holomorfa en $D(0,1)\setminus\{0\}$.
Veamos la continuidad en $z=0$.
Como f es holomorfa en $D(0,1)$, admite desarrollo en serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \Rightarrow \frac{f(z)}{z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^{k-n}$$

$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^n}$ existe y es finito $\Leftrightarrow a_0 = \dots = a_{n-1} = 0 \Rightarrow g$ es continua en $z=0$.

Como g holomorfa en $D(0,1)\setminus\{0\}$ y continua en $z=0$, por el T^{ma} Extensión de Riemann, g es holomorfa en $D(0,1)$.
Como $\max_{|z|=r} |f(z)| = r^n \ \forall r \in (0,1)$ tenemos que:

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^n} = \frac{r^n}{r^n} = 1 \ \forall r \in (0,1) \Rightarrow \max_{|z|<1} |g(z)| = 1$$

Luego, $|g|$ alcanza el máximo en $D(0,1)$.
Por lo tanto, por el Ppio del módulo máximo, g es constante: $\exists \alpha \in C(0,1)$ tq $g(z) = \frac{f(z)}{z^n} = \alpha \ \forall z \in D(0,1)$.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2 + t)}{1 + t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \longmapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx.$$ Ord 2017

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean f y g funciones enteras verificando que $g\big(f(z)\big) = zf(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo entonces f es constante.

Granada, 7 de julio de 2021

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2 + t)}{1 + t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma: [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1 - a trozos.

Definimos $\phi: \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2+t)}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ dado que sus componentes lo son en sus resp. dominios.

Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos la función $\phi_t(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2+t)}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$

Por el T^{ma} Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2+t)}{1+t^2}\, dt$ $\forall z \in \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2+t)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n,n+1])}_{1} \max \left\{ \frac{|\operatorname{sen}(z^2+t)|}{|1+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{M}{1+n^2}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow t^2 + 1 \geq n^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$

Como $\operatorname{sen}(z^2+t)$ es continua en $\gamma^* \times K$ y K es compacto, $\operatorname{sen}(z^2+t)$ está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|\operatorname{sen}(z^2+t)| < M$

Veamos si la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2}$ y sabemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es conv. (serie armónica) $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean f y g funciones enteras verificando que $g\big(f(z)\big) = zf(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Distinguimos casos:

- <u>Si f es constante</u>: $f(z) = K$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g(f(z)) = zf(z)$ implica que $g(K) = zK$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Como $g(K)$ no depende de z y zK sí, esta igualdad es posible solo si $K = 0$ tq $g(0) = 0$.
  Luego, si f es cte entonces $f \equiv 0$ y g es cualquier función entera tq $g(0) = 0$.
- <u>Si g es constante</u>: $g(z) = K$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow K = zf(z)$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = K/z$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$. Puesto que K/z tiene una singularidad en $z = 0$ si $K \neq 0$ y f es entera por hipótesis, entonces $K = 0$ y $f(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
- <u>Si $f, g \neq$ cte</u>: veamos que f es una función polinómica por reducción al absurdo.
  Supongamos que no lo fuera. Por el Tma Casorati, $\exists \{z_n\} \subset \mathbb{C}$ tq $\{z_n\} \to +\infty$ y $\{f(z_n)\} \to w \in \mathbb{C}$.
  Luego, $\underbrace{\{g(f(z_n))\}}_{\downarrow\, g(w)} = \{z_n f(z_n)\} \to +\infty$!!! f es una función polinómica.

  Así, tenemos que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{|z| \to +\infty} |g(z)| = \lim\limits_{|z| \to +\infty} |z| \lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$.

  Por lo que, g es una función polinómica.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo entonces f es constante.

Como f es holomorfa en Ω, podemos definir la función $h: \Omega \to \mathbb{C}$ como $h(z) = e^{f(z)}$ holomorfa en Ω. Entonces, $|h(z)| = |e^{\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f}| = e^{\operatorname{Re} f} > 0$ $\forall z \in \Omega$
Como $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo en Ω, entonces $|h(z)| = e^{\operatorname{Re} f}$ también lo tiene.
Luego, por el ppio del módulo máximo o mínimo, h es constante.
Por lo tanto, como h es constante, f también lo es.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{z^2-t}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$ Extra 2018

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $\{\alpha_n\} \subset \Omega$ una sucesión convergente a $\alpha \in \Omega$. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f^k(\alpha_n) = g^k(\alpha_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^k = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para cada $z \in \Omega$. Extra 2017

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera y sea $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{f(0)\})$ verificando que $g\big(f(z)\big) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

- Probar que f es inyectiva en $\mathbb{C}^*$.
- Probar que f es un polinomio de grado uno.
- Deducir la forma que debe tener g.

Granada, 15 de julio de 2021

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{z^2-t}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ (C^1 a trozos).

Definimos $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \dfrac{e^{z^2-t}}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ porque las componentes lo son en sus resp. dominios.

Para cada $t \in \gamma^*$, se tiene la función $\phi_t(z) = \dfrac{e^{z^2-t}}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por el Tma Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \phi(t,z)\, dt$ es una función entera.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{e^{z^2-t}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\text{long}([n,n+1])}_{1} \text{máx} \left\{ \frac{|e^{z^2-t}|}{|1+t^2|} : z \in K \right\}$$

Como $t \in [n, n+1]$, tenemos que $t \geq n \Rightarrow 1+t^2 \geq 1+n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$

Como z^2 es cont en K y K es compacto, z^2 alcanza máximo M en K.

Entonces, $e^{z^2-t} \leq e^{M-n}$ $\forall z \in K$ está acotada.

Veamos si la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{M-n}}{1+n^2}$ es convergente.

Sabemos que $|e^{M-n}| \leq e^{M-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por el criterio de comparación, tenemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{M-n}}{1+n^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{e^{M-1}}{n^2}$ es convergente (serie armónica), entonces podemos decir que

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{M-n}}{1+n^2}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$

Además, por el Tma convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera y sea $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{f(0)\})$ verificando que $g\big(f(z)\big) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

- Probar que f es inyectiva en $\mathbb{C}^*$.
- Probar que f es un polinomio de grado uno.
- Deducir la forma que debe tener g.

a. Sea $x, y \in \mathbb{C}^*$ tq $f(x) = f(y) \Rightarrow$ ¿$x = y$?

$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ es inyectiva

b. Supongamos que f no es un polinomio. Por el corolario del T^ma^ Casorati, $\exists \{z_n\} \subset \mathbb{C}^*$ tq $\{z_n\} \to +\infty$ y $\{f(z_n)\} \to w \in \mathbb{C}$. Entonces, $\{\underbrace{g(f(z_n))}_{g(w)}\} = \frac{1}{\{z_n\}} \to 0 \Rightarrow g(w) = 0$!!! porque $\frac{1}{z} \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}^*$

Entonces, f es un polinomio de grado 1 de la forma $f(z) = \alpha z + \beta$.

c. $g(f(z)) = \frac{1}{z} \Rightarrow g(\alpha z + \beta) = \frac{1}{z}$

$w = \alpha z + \beta \Rightarrow z = \frac{w - \beta}{\alpha} \Rightarrow g(z) = \frac{\alpha}{z - \beta}$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \colon \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4}\, dx.$$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $g(f(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n^3}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y la otra un polinomio de grado tres.

Granada, 15 de junio de 2022

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C}\colon \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4}\,dx.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{\log(z)}{1+z^4}$

El logaritmo principal está definido en $\mathbb{C}^*$ y es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$

Los ceros del denominador son las raíces cuartas de -1:

$1+z^4=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}$, $k=\{0,1,2,3\}$, son polos simples.

Luego, f está bien def en $\mathbb{C}\setminus\{z_k : k=0,1,2,3\}$ y es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_0^- \cup \{z_k : k=0,\dots,3\}\}$.

Si para cualesquiera $0<\varepsilon<1<R$ denotamos γ_R al camino que recorre la frontera de $\{z\in\mathbb{C} : \varepsilon<|z|<R,\ 0<\arg z<\pi/2\}$, se tiene que $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(z_0)=1$ e $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(z_k)=0$, $k=1,2,3$.

Calculamos el residuo: $\displaystyle\lim_{z\to e^{i\pi/4}} (z-e^{i\pi/4})\frac{\log(z)}{1+z^4} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{\log(z)+(z-z_0)/z}{4z^3} = \frac{\log(z_0)}{4z_0^3} =$

$= \dfrac{\log(e^{i\pi/4})}{4(e^{i\pi/4})^3} = \dfrac{\pi i/4}{4e^{3\pi i/4}} = \dfrac{\pi i}{16\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{-\pi i}{16}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{16\sqrt{2}}(1+i)$

Por el Tma Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,z_0) = 2\pi i\frac{\pi}{16\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\pi^2 i}{8\sqrt{2}}(1+i)$

Por otra parte, $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{[\varepsilon,R]} f + \int_{\sigma_R} f + \int_{[iR,i\varepsilon]} f + \int_{-\sigma_\varepsilon} f$ *

- $\gamma_1 : [\varepsilon,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(x)=x$

  $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^4}\,dx$

- $\gamma_2 : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(x)=Re^{ix}$

  $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le \underbrace{\mathrm{long}([0,\pi/2])}_{\pi/2} \max\{|f(z)| : z\in\gamma_2^*\} \le \frac{\pi}{2}\,\frac{R(\log R+\pi/2)}{R^4-1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

  $|\log z| = |\log(Re^{ix})| = |\log R + ix| \le \log R + x \le \log R + \pi/2$

  $|1+z^4| \ge |z|^4 - 1 = |Re^{ix}|^4 - 1 = R^4-1$

  Luego, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

- $\gamma_3 : [\varepsilon, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_3(x) = ix$

$$\int_{[iR, i\varepsilon]} f(z)\, dz = -\int_{[i\varepsilon, iR]} f(z)\, dz = -\int_\varepsilon^R \frac{\log(ix)}{1+(ix)^4}\, dx = -\int_\varepsilon^R \frac{i(\log x + i\pi/2)}{1+x^4}\, dx =$$

$$= -i\int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^4}\, dx + \int_\varepsilon^R \frac{\pi/2}{1+x^4}\, dx$$

- $\gamma_4 : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_4(x) = \varepsilon e^{ix}$

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z)\, dz \right| \leq \underbrace{\text{long}([0,\pi/2])}_{\pi/2} \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma_4^*\} \leq \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon(\log 1/\varepsilon + \pi/2)}{1-\varepsilon^4} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$|\log z| = |\log \varepsilon e^{ix}| = |\log \varepsilon + ix| \leq -\log \varepsilon + x \leq \log 1/\varepsilon + \pi/2$

$|1+z^4| \geq 1 - |z|^4 = 1 - \varepsilon^4$

Luego, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_4} f(z)\, dz = 0$

Por lo que, si tomamos límite $R \to +\infty$ y $\varepsilon \to 0$ en $*$, tenemos que:

$$\frac{\pi^2 i}{8\sqrt{2}}(1+i) = (1-i)\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^4}\, dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^4}\, dx$$

Igualando la parte imaginaria: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^4}\, dx = \frac{-\pi^2}{8\sqrt{2}}$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

Como f es holomorfa en Ω, podemos definir $h : \Omega \to \mathbb{C}$ como $h(z) = e^{if(z)}$ holomorfa en Ω.
Luego, $|h(z)| = |e^{i(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)}| = |e^{i\operatorname{Re} f - \operatorname{Im} f}| = e^{-\operatorname{Im} f} > 0 \quad \forall z \in \Omega$
Como $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en Ω, entonces $|h(z)| = e^{-\operatorname{Im} f}$ también lo tiene.
Por el Ppio del módulo máximo o mínimo, tenemos que h es constante $\forall z \in \Omega$.
Por lo tanto, como h es constante, f también lo es.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} e^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1 a trozos.
Definimos $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = e^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ ya que sus componentes lo son en sus resp. dominios.
Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos $\phi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\phi_t(z) = e^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)$ holomorfa en $\mathbb{C}$.
Por el T^{ma} Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que
$f_n(z) = \int_n^{n+1} e^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)\, dt$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:
$$\left| \int_n^{n+1} e^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)\, dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n, n+1])}_{1} \max \{ |e^{z-t}| |\operatorname{sen}(t^n + z^2)| : z \in K \} \leq \frac{M}{e^n}$$

Como $t \in [n, n+1]$ y e^{-t} decrece $\Rightarrow e^{-t} \leq e^{-n} = (1/e)^n$
Como K y $[n, n+1]$ son compactos y $e^z \operatorname{sen}(t^n + z^2)$ es continua en $K \times [n, n+1]$, entonces está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|e^z \operatorname{sen}(t^n + z^2)| < M$ $\forall t \in [n, n+1]$ $\forall z \in K$
Veamos si $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{e^n}$ es convergente. Como $\frac{1}{e} < 1$, la serie es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\sum_{n \geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$

Además, por el T^{ma} Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $g(f(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n^3}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y la otra un polinomio de grado tres.

Como $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : (g \circ f)(z) = z^3\} \supset \overline{\{1/n : n \in \mathbb{N}\}} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

Luego, como $A' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$, por el Ppio de Identidad, tenemos que $(g \circ f)(z) = z^3 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Si f y g son funciones polinómicas $\Rightarrow (g \circ f)$ es un polinomio de grado $f \cdot$ grado $g = 3$.

Entonces, $\{\text{grado } f, \text{grado } g\} = \{1, 3\}$.

Supongamos que f es entera no polinómica. Por el corolario del T^{ma} Casorati, $\exists \{z_n\} \to +\infty$ tq $\{f(z_n)\} \to 0 \in \mathbb{C}$.

Entonces, $\{\underset{\overset{\downarrow}{g(0)}}{g(f(z_n))}\} = \{z_n^3\} \to +\infty$!!! f es un polinomio no constante.

Ahora, suponemos que g es entera no polinómica. Por el corolario del T^{ma} Casorati, $\exists \{w_n\} \subset \mathbb{C}$ tq $\{w_n\} \to +\infty$ y $\{g(w_n)\} \to 0 \in \mathbb{C}$. Como f es un polinomio no constante, por el T^{ma} FA, $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Es decir, $\exists z_n \in \mathbb{C}$ tq $f(z_n) = w_n$. Luego, $\{g(f(z_n))\} = \{z_n^3\} = \{g(w_n)\} \to 0 \Rightarrow \{z_n\} \to 0$ y g es continua $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\overset{\|}{\{w_n\} \to +\infty}}{\{g(z_n)\}} \to g(0)$!!! g es un polinomio no constante

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} \, dx.$$ Extra 2018

Ejercicio 2. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros. Ord 2018

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4} \, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f(g(1/n)) = \frac{1}{n^3}$$ Ord 2022

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Granada, 22 de junio de 2023

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1-a trozos.

Definimos $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \dfrac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ ya que cada componente lo es en su resp. dominio.

Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos $\phi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi_t(z) = \dfrac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por el T^{ma} Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt \right| \leq \underbrace{\operatorname{long}([n, n+1])}_{1} \max\left\{ \frac{|\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)|}{|1+t^4|} : z \in K \right\}$$

Como $t \in [n, n+1]$: $t \geq n \Rightarrow t^4 + 1 \geq n^4 + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^4} \leq \dfrac{1}{1+n^4}$

Como $K \times [n, n+1]$ es compacto y $\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)$ es continua en $K \times [n, n+1]$, tenemos que está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)| < M$ $\forall t \in [n, n+1]$ $\forall z \in K$

Veamos si $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{M}{1+n^4}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{M}{n^4+1} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2}$ y sabemos que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es conv. (serie armónica) $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{M}{n^4+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$ Extra 2018

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que

$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea a una singularidad aislada de una función f. Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a . Extra 2019

Granada, 18 de julio de 2023

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a. Consideramos el camino $\gamma : [n, n+1] \to \mathbb{C}$ como $\gamma(t) = t$ C^1-a trozos.
Definimos la función $\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}$ ya que sus componentes lo son en sus resp. dominios.
Para cada $t \in \gamma^*$ se tiene $\phi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\phi_t(z) = \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por el T^{ma} Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}\, dt$ es holomorfa en $\mathbb{C}$.

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\left| \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \operatorname{long}([n,n+1]) \max\left\{ \frac{|\cos(e^z - t)|}{|1+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{M}{1+n^2}$$

Como $t \in [n, n+1]$: $t \geq n \Rightarrow t^2 + 1 \geq n^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{1+n^2}$

Como $[n, n+1]$ y K son compactos y $\cos(e^z - t)$ es continua en $[n,n+1] \times K$, entonces $\cos(e^z - t)$ está acotada, es decir, $\exists M > 0$ tq $|\cos(e^z - t)| < M$ $\forall t \in [n, n+1]$ $\forall z \in K$
Veamos si la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2}$ y sabemos que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es conv. (serie armónica) $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^2+1}$ es convergente.

Luego, por el Test de Weierstrass, $\sum_{n \geq 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}$.

Además, por el T^{ma} Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que

$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Probar que f es constante.

Fijamos $z \in D(0,1)$, tenemos que $|f(z)| \leq |f(z^2)| \leq |f(z^4)| \leq |f(z^{2^n})| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Como $|z| < 1$, $\{z^{2^n}\} \to 0 \Rightarrow |f(z)| \leq |f(0)|$

- $|f|$ alcanza su máximo en $z = 0$
- $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$
- $D(0,1)$ conexo

$\Big\}$ Ppio módulo máximo $\Rightarrow$ f es constante en $D(0,1)$.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2}\, dt.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1 + at)\, \mathrm{e}^{-at}\,.$$ Ord 2018

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ que diverge en cero y en infinito tiene al menos un cero. Probar además que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad). Ord 2018

Ejercicio 4. (**2.5**) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Probar que $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0,1)$. Ord 2019

Granada, 10 de junio de 2024

Ejercicio 1. **(2.5 puntos)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz + t^2)}{n^2 + t^2}\, dt.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

a. Consideramos el camino $\gamma: [1,2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$ C^1 - a trozos y $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ abierto.
Definimos $\phi: \gamma^* \times \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ como $\phi(t,z) = \dfrac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}$ continua en $\gamma^* \times \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ por composición de continuas.
Para cada $t \in \gamma^*$ tenemos $\phi_t(z) = \dfrac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}$ holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Por el Tma Holomorfía para integrales dependientes de un parámetro, tenemos que $f_n(z) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}\, dt$ es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$

b. Consideramos un compacto arbitrario K de $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\left| \int_1^2 \frac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\text{long}([1,2])}_{1} \max\left\{ \frac{|\log(nz+t^2)|}{|n^2+t^2|} : z \in K \right\} \leq \frac{\ln(nM+4)+\pi}{1+n^2}$$

Como $t \in [1,2]$: $n^2 + t^2 \geqslant n^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2+t^2} \leq \dfrac{1}{n^2+1}$

Como K es compacto y $\log(nz+t^2)$ es continua en $K \times [1,2]$, tenemos que:
$|\log(nz+t^2)| \leq |\ln|nz+t^2| + i\arg(nz+t^2)| \leq \ln(nM+4) + \pi$
$|nz+t^2| \leq n|z| + t^2 \leq nM + 4$ donde $M = \max\{|z| : z \in K\}$
Veamos si la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(nM+4)+\pi}{n^2+1}$ es convergente

Como $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(nM+4)+\pi}{n^2+1} = 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(nM+4)+\pi}{n^2+1}$ es convergente

Luego, por el Test de Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ conv. abs en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y conv. unif. en compactos contenidos en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.
Además, por el Tma Convergencia de Weierstrass, la suma de dicha serie es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$ Extra 2018

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2+t)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$ Extra 2021

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean f y g funciones enteras verificando que $g\big(f(z)\big) = z^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que una de las dos funciones es un polinomio de grado dos y la otra un polinomio de grado uno. Ord 2020

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo entonces f es constante. Extra 2021

Granada, 5 de julio de 2024

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Convocatoria ordinaria de Variable Compleja I
Grado en Matemáticas y Grado en Física y Matemáticas

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un abierto y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\overline{f}g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que $g \equiv 0$ en Ω o f es constante en Ω.

Ejercicio 2. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$.

a) (**1.5 puntos**) Probar que f tiene un numero finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

Ord 2017

b) (**1 punto**) Probar que $f\big(\overline{D}(0,1)\big) = \overline{D}(0,1)$.

Ejercicio 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y consideramos la función $f_n : \mathbb{C} \setminus \{a_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$. Ord 2017

a) (**1.5 puntos**) Si $A = \overline{\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

b) (**1 punto**) Deducir que la función dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en Ω y estudiar sus singularidades aisladas.

c) (**Extra: 1 punto**) Probar que para cada $\delta > 0$ el conjunto $f\big(D(0,\delta) \setminus A\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Supongamos que 1 y -1 son polos de f y que

$$\mathrm{Res}(f, 1) = -\mathrm{Res}(f, -1).$$

Probar que f admite primitiva en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Granada, 17 de enero de 2025

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un abierto y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\overline{f}g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que $g \equiv 0$ en Ω o f es constante en Ω.

Basta probar que si $g \not\equiv 0$ entonces f es constante en Ω.
Supongamos que $g \not\equiv 0$, es decir, $\exists z_0 \in \Omega$ tq $g(z_0) \neq 0$. Puesto que g es continua en z_0 (por ser holomorfa), existe $r > 0$ tq $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D(z_0, r) \subset \Omega$.
Así, $1/g(z)$ está bien definida en $D(z_0,r)$ y es holomorfa en $D(z_0,r)$ por ser cociente de holomorfas.
Luego, tenemos que $\overline{f} = \overline{f}g \dfrac{1}{g}$ es holomorfa en $D(z_0,r)$.

Así, f y $\overline{f}$ son holomorfas en $D(z_0,r)$. Por teoría, sabemos que esto sólo ocurre si f es constante en $D(z_0,r)$. Por lo tanto, por el Ppio de los ceros aislados aplicado a la función holomorfa $f(z)-K$ deducimos que $f(z) = K$ $\forall z \in \Omega$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea f holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Supongamos que 1 y -1 son polos de f y que

$$\operatorname{Res}(f, 1) = -\operatorname{Res}(f, -1).$$

Probar que f admite primitiva en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Por el T^{ma} de caracterización de existencia de primitivas, basta probar que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para cada camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.
Fijamos γ un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus [-1,1] \subset \mathbb{C} \setminus \{1,-1\}$, que es nulhomólogo respecto a $\mathbb{C}$.
Como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-1,1\})$ y $\{-1,1\}$ carece de puntos de acumulación, el T^{ma} de los Residuos nos dice que:

$$\int_\gamma f(z) = 2\pi i\left(\operatorname{Ind}_\gamma(-1)\operatorname{Res}(f,-1) + \operatorname{Ind}_\gamma(1)\operatorname{Res}(f,1)\right) \overset{4}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(f,1)\left(\operatorname{Ind}_\gamma(1) - \operatorname{Ind}_\gamma(-1)\right)$$

Probamos que $\operatorname{Ind}_\gamma(1) = \operatorname{Ind}_\gamma(-1)$. Como $[-1,1]$ es convexo, existe V componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ de modo que $[-1,1] \subset V$. Al ser $\operatorname{Ind}_\gamma$ constante en la componente conexa V obtenemos que $\operatorname{Ind}_\gamma(1) = \operatorname{Ind}_\gamma(-1)$. Por lo tanto, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Convocatoria extraordinaria de Variable Compleja I
Grado en Matemáticas y Grado en Física y Matemáticas

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+x+1)^2}\, dx.$$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Sea $f : \overline{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$ de modo que $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Probar que f es constante.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que las únicas funciones enteras e inyectivas son los polinomios de grado uno. Ord 2021

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean f, g holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ verificando $f(n) = n^2 g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ y $\lim_{z\to\infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$. Probar que $f(z) = z^2 g(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Granada, 10 de febrero de 2025

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

Consideramos la función $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+z+1)^2}$ y veamos donde se anula el denominador:

$z^2+z+1=0 \Rightarrow z = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ y $z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_1, z_2$ ceros de f de orden 2

Luego, f está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2\}$.

Consideramos el camino cerrado $\gamma_R = [-R,R] + \sigma_R$ donde σ_R es la semicircunferencia de centro 0 y radio R.

γ_R ciclo en $\mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2\}$ Hq $\gamma^* \subset \mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2\}$ y γ_R es nulhomólogo respecto $\mathbb{C}$.

Además, tenemos que $\text{Ind}_{\gamma_R}(z_1) = 1$ e $\text{Ind}_{\gamma_R}(z_2) = 0$ (semiplano inferior).

Calculamos el residuo: $\text{Res}(f,z_1) = \lim_{z\to z_1}\left[\dfrac{d}{dz}\,\cancel{(z-z_1)^2}\,\dfrac{e^{iz}}{\cancel{(z-z_1)^2}(z-z_2)^2}\right] =$

$= \lim_{z\to z_1} \dfrac{ie^{iz}(z-z_2)^2 - 2(z-z_2)e^{iz}}{(z-z_2)^4} = \lim_{z\to z_1}\dfrac{e^{iz}[i(z-z_2)-2]}{(z-z_2)^3} = \dfrac{e^{iz_1}[-\sqrt{3}-2]}{(i\sqrt{3})^3}$

$z_1 - z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$

Por el Tma Residuos, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \text{Re}\,[2\pi i\,\text{Res}(f,z_1)] = \text{Re}\left[2\pi i\,\dfrac{e^{iz_1}(-\sqrt{3}-2)}{i^3(\sqrt{3})^3}\right] =$

$= \text{Re}\left[2\pi\,\dfrac{e^{iz_1}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^3}\right] = 2\pi\,\dfrac{[(e^{-\sqrt{3}/2}\cos(1/2))(\sqrt{3}+2)]}{(\sqrt{3})^3}$

$iz_1 = i\,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-i-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Re}(e^{iz_1}) = e^{-\sqrt{3}/2}\cos(1/2)$

Por otro lado, tenemos que $\displaystyle\int_{\gamma_R} f\,dz = \int_{[-R,R]} f\,dz + \int_{\sigma_R} f\,dz$ *

- $\gamma_1 : [-R,R] \to \mathbb{C},\ \gamma_1(x) = x$

  $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

- $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(x) = Re^{ix}$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \underbrace{\text{long}([0,\pi])}_{\pi}\,\text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma_2^*\} \leq \frac{\pi R e^{-R}}{M^2 R^4} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$e^{iz} = \cos z + i\,\text{sen}\,z \Rightarrow iRe^{iz} = iR(\cos z + i\,\text{sen}\,z) = iR\cos z - R\,\text{sen}\,z$

$|e^{iz}| = |e^{iR\cos z - R\,\text{sen}\,z}| = e^{-R\,\text{sen}\,z} \leq e^{-R}$

$|z^2+z+1| \geq MR^2$ con $M>0$

Luego, $\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0$

Por lo que, si tomamos límite cuando $R\to+\infty$ en * tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+x+1)^2}\,dx = 2\pi\,\frac{[(e^{-\sqrt{3}/2}\cos(1/2))(\sqrt{3}+2)]}{(\sqrt{3})^3}$$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Sea $f : \overline{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$ de modo que $f(z) \in \mathbb{R}$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Probar que f es constante.

Consideramos $g : \bar{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) := e^{if(z)}$.

Tenemos que g no se anula, es continua en $\bar{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$.

Además, verifica que $|g(z)| = |e^{if(z)}| = e^{\text{Re}(if(z))} = e^{-\text{Im}f(z)} \overset{H}{=} e^0 = 1 \quad \forall z \in C(0,1)$

Por el corolario de los Ppios del módulo máximo y mínimo, la función g es constante, es decir, $\exists \alpha \in C(0,1)$ tq $e^{if(z)} = \alpha \quad \forall z \in \bar{D}(0,1)$, o lo que es lo mismo $if(z) \in \text{Log}(\alpha) \quad \forall z \in \bar{D}(0,1)$

Puesto que $if(\bar{D}(0,1))$ es conexo y está contenido en el conj. $\text{Log}(\alpha) = \log\alpha + 2\pi i\mathbb{Z}$ que es discreto, se tiene que if es constante, y por tanto, f es constante.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean f, g holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ verificando $f(n) = n^2 g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$ y $\lim_{z\to\infty} z^2 g(z) \in \mathbb{C}$. Probar que $f(z) = z^2 g(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definimos las funciones holomorfas $p, q : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ como $p(z) := f(1/z)$ y $q(z) := g(1/z)$

Por hipótesis tenemos que: $\lim_{z\to 0} p(z) = \lim_{|z|\to\infty} f(z)$ y $\lim_{z\to 0} \frac{q(z)}{z^2} = \lim_{|z|\to\infty} z^2 g(z)$

Luego, por el T^{ma} Riemann, p y q/z^2 son holomorfas en $\mathbb{C}$, es decir, se pueden extender de forma holomorfa y dichas extensiones las denotamos por p y $\tilde{q}$.

$p(1/n) = f(n) = n^2 g(n) = \frac{q(1/n)}{(1/n)^2} = \tilde{q}(1/n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tenemos que el conj $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene a 0 como punto de acumulación $\Rightarrow \{1/n : n\in\mathbb{N}\}' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$

Luego, por el Ppio de Identidad, $p(z) = \tilde{q}(z) \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = z^2 g(z) \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean S un conjunto finito de puntos en un dominio Ω homológicamente conexo y f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Prueba que f tiene una primitiva en $\Omega \setminus S$ si y solo si

$$\operatorname{Res}(f, w) = 0, \qquad \forall w \in S.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si f tiene primitiva F en $\Omega\setminus S$, fijado $w \in S$, tomamos $r > 0$ suficientemente pequeño para que $\bar{D}(w,r) \subset \Omega$ y $\bar{D}(w,r) \cap S = \{w\}$. Entonces, $\operatorname{Res}(f,w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(w,r)} f(z)\,dz = 0$ por la caracterización de existencia de primitiva pues $C(w,r)$ es un camino cerrado en $\Omega\setminus S$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supuesto que $\operatorname{Res}(f,w) = 0$ para cada $w \in S$, fijamos γ un camino cerrado arbitrario en $\Omega \setminus S$. Como Ω es homologicamente conexo, γ es nulhomólogo con respecto a Ω. Además, $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus S)$.

Luego, por el T^{ma} Residuos, $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{w\in S} \operatorname{Ind}_\gamma(w) \operatorname{Res}(f,w) \overset{H}{=} 0$

Por lo tanto, el T^{ma} caracterización de existencia de primitivas garantiza la existencia de primitiva para f en $\Omega\setminus S$.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Demuestra que no puede existir una función f entera verificando

$$|f(z)| \geqslant |z| + |\operatorname{sen}(z)|, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

suponemos que existe una función entera cumpliendo la hipótesis para llegar a contradicción.
la hipótesis implica que: $|f(z)| \geqslant |z|$ y $|f(z)| \geqslant |\operatorname{sen}(z)|$ $\forall z \in \mathbb{C}$
la primera desigualdad nos dice que f diverg en infinito y por tanto, f es un polinomio.
luego, la segunda desigualdad nos dice que el seno tiene crecimiento sub-polinómico y entonces, también es un polinomio !!!