Tema 6

Integral curvilínea

Iniciamos aquí el desarrollo de la *teoría local de Cauchy*, cuyo resultado más llamativo será la equivalencia entre analiticidad y holomorfía. La herramienta imprescindible en esta teoría es una integral muy concreta para funciones complejas, llamada *integral curvilínea*. Como paso previo, extendemos la integral de Cauchy al caso en que el integrando toma valores complejos. Las propiedades básicas de la integral curvilínea nos permitirán probar el primer resultado de la teoría de Cauchy, una caracterización de la existencia de primitiva, que puede entenderse como la versión compleja del teorema fundamental del Cálculo.

6.1. Integral de Cauchy

En lo que sigue fijamos $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. De forma bastante rutinaria, extendemos la definición y las propiedades básicas de la integral de Cauchy, bien conocidas para funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, viendo que son válidas cuando el integrando toma valores complejos. Para una función continua $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ definimos su integral como cabe esperar:

$$\int_a^b f(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

Las dos primeras propiedades de esta integral, describen su dependencia con respecto al integrando y se comprenden mejor si pensamos en la integral como una aplicación que, a cada función continua en el intervalo $[a,b]$, hace corresponder un número complejo. Concretamente, consideramos el espacio de Banach complejo $C[a,b]$ de todas las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{C}$, cuya norma viene dada por

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\,|f(t)| \,:\, t \in [a,b]\,\right\} \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Podemos entonces pensar en la integral como el funcional $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \forall f \in C[a,b]$$

y comprobaremos fácilmente que Φ es lineal y continuo.

- **Linealidad.** *El funcional* Φ *es lineal, es decir: para* $f,g \in C[a,b]$ *y* $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ *se tiene:*

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

Sabiendo que esta igualdad es cierta cuando $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ y f,g toman valores reales, basta hacer la siguiente observación. Para $f \in C[a,b]$, escribiendo $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, se tiene:

$$\Phi(if) = \Phi(-v+iu) = -\Phi(v) + i\Phi(u) = i\big(\Phi(u) + i\Phi(v)\big) = i\Phi(f) \qquad \blacksquare$$

Recordemos la positividad (o crecimiento) de la integral para funciones con valores reales: si $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(t) \leqslant g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, entonces $\Phi(f) \leqslant \Phi(g)$. Esta propiedad, que por supuesto usaremos siempre que convenga, no nos da información para funciones con valores complejos. Pero de ella se deduce que $|\Phi(f)| \leqslant \Phi\big(|f|\big) \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$ desigualdad que, sustituyendo valores absolutos por módulos, sí es válida en general, lo que nos da la continuidad del funcional Φ.

- **Continuidad.** *El funcional* Φ *es continuo. De hecho, para* $f \in C[a,b]$ *se tiene:*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty$$

Escribimos $|\Phi(f)| = \lambda\Phi(f) = \Phi(\lambda f)$ con $\lambda \in \mathbb{T}$ y tenemos claramente:

$$|\Phi(f)| = \Phi(\lambda f) = \operatorname{Re}\Phi(\lambda f) = \Phi\big(\operatorname{Re}(\lambda f)\big) \leqslant \Phi\big(|\lambda f|\big) = \Phi\big(|f|\big) \qquad \blacksquare$$

La tercera propiedad básica de la integral se refiere a su dependencia respecto del intervalo de integración, por lo que conviene ponerse en una situación que permita mover con libertad dicho intervalo. *En lo que sigue fijamos un intervalo no trivial* $I \subset \mathbb{R}$ *y denotamos por* $C(I)$ *al conjunto de todas las funciones continuas de* I *en* $\mathbb{C}$. Para $f \in C(I)$ usaremos la integral de f con límites de integración arbitrarios $a,b \in I$, con los convenios usuales:

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_b^a f(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, dt$$

La aditividad de la integral, conocida para funciones con valores reales, se extiende obviamente al caso general:

- **Aditividad.** *Para cualesquiera* $f \in C(I)$ *y* $a,b,c \in I$ *se tiene:*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$

Comprobamos también de forma rutinaria que el teorema fundamental del Cálculo es válido para funciones con valores complejos.

- **Teorema.** *Dada $f \in C(I)$, y fijado $a \in I$, la función $F : I \to \mathbb{C}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

es derivable en I con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Basta tener en cuenta que para todo $x \in I$ se tiene

$$\operatorname{Re} F(x) = \int_a^x \operatorname{Re} f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} F(x) = \int_a^x \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

de modo que, al aplicar la versión ya conocida de este teorema a las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, se obtiene la derivabilidad de las funciones $\operatorname{Re} F$ y $\operatorname{Im} F$, luego también la de F, con

$$F'(x) = \big(\operatorname{Re} F\big)'(x) + i\big(\operatorname{Im} F\big)'(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = f(x) \qquad \forall x \in I \qquad \blacksquare$$

Destacamos finalmente las dos consecuencias del teorema anterior que más nos interesan. Se pueden deducir del teorema exactamente igual que se hace para funciones con valores reales, o también deducirlas directamente del caso particular conocido, igual que se ha hecho con todas las propiedades anteriores de la integral.

- **Regla de Barrow.** *Si $f \in C(I)$ y $G : I \to \mathbb{C}$ es una primitiva de f, es decir, una función derivable en I con $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, entonces:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \qquad \forall a, b \in I$$

- **Fórmula de cambio de variable.** *Sea J otro intervalo no trivial, $\varphi : J \to I$ una función de clase C^1 y $f \in C(I)$. Si $\alpha, \beta \in J$, $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$, se tiene:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(s)\big)\,\varphi'(s)\,ds$$

6.2. Curvas en el plano

Como su nombre indica, la integral curvilínea será una integral a lo largo de una curva, así que de algún modo vamos a sustituir el intervalo $[a,b]$, que hemos usado para la integral de Cauchy, por una curva en el plano complejo. De momento adoptamos la definición general de curva que suele hacerse en Topología, aunque en realidad sólo usaremos tipos muy particulares de curvas.

Así pues, llamaremos **curva** a toda función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. La imagen de una curva φ se denota por φ^*, es decir,

$$\varphi^* = \big\{\, \varphi(t) \,:\, t \in [a,b] \,\big\}$$

Vemos que φ^* es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{C}$. En él destacamos el punto $\varphi(a)$, llamado **origen** de la curva φ, y el punto $\varphi(b)$, que es el **extremo** de φ. Cuando $\varphi(a) = \varphi(b)$ se dice que φ es una **curva cerrada**.

La nomenclatura ya indica la interpretación intuitiva que conviene tener en cuenta: una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ describe un movimiento en el plano, durante un intervalo de tiempo $[a,b]$, de forma que en cada instante $t \in [a,b]$, el móvil ocupa la posición $\varphi(t)$, con lo que φ^* es la trayectoria recorrida, $\varphi(a)$ la posición inicial y $\varphi(b)$ la final. Es claro que curvas muy diferentes pueden tener la misma imagen, por lo que no debemos confundir la curva φ, que es una función, con su imagen φ^*, que es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Pasamos a definir una operación con curvas que, por una razón que se verá más adelante, llamaremos "suma" de curvas, pero no se trata de sumar funciones, sino por así decirlo, de encadenar dos movimientos. La suma de dos curvas φ y ψ será una curva que describe el movimiento consistente en realizar el movimiento descrito por φ seguido del descrito por ψ. Para que esto pueda hacerse sin perder la continuidad, el extremo de φ deberá coincidir con el origen de ψ. Además, si las curvas están definidas en intervalos no consecutivos, debemos trasladar uno de ellos.

Consideremos por tanto dos curvas $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$, tales que $\varphi(b) = \psi(c)$. La **suma de curvas** $\gamma = \varphi + \psi$, es la función $\gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma(t) = \varphi(t) \ \ \forall t \in [a,b] \quad \text{y} \quad \gamma(t) = \psi(c+t-b) \ \ \forall t \in [b, b+d-c] \tag{1}$$

La condición $\varphi(b) = \psi(c)$ hace que γ esté bien definida y sea continua en el punto b, luego usando el carácter local de la continuidad, vemos que γ es continua, es decir, es una curva.

Examinemos con más detalle la definición de la curva suma. La restricción de γ al intervalo $[a,b]$ coincide obviamente con φ y cuando t recorre dicho intervalo, $\gamma(t)$ recorre el conjunto φ^*. A su vez, la restricción de γ a $[b, b+d-c]$ es $\varphi \circ \tau$ donde $\tau(t) = c+t-b$ para todo $t \in [b, b+d-c]$, así que τ es la única traslación que lleva $[b, b+d-c]$ a $[c,d]$. Cuando t recorre el intervalo $[b, b+d-c]$ es claro que $s = \tau(t)$ recorre $[c,d]$ y $\gamma(t) = \psi(s)$, recorre el conjunto ψ^*. Esto explica la idea intuitiva de encadenar dos movimientos, que habíamos mencionado. En particular tenemos $\big(\varphi + \psi\big)^* = \varphi^* \cup \psi^*$, el origen de γ es el de φ y el extremo de γ es el de ψ.

Resaltemos la forma en que los sumandos φ y ψ se relacionan con restricciones de la función γ:

- *Sean* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *y* $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ *dos curvas tales que* $\varphi(b) = \psi(c)$ *y consideremos la curva suma* $\gamma = \varphi + \psi : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$. *Entonces:*

  $$\gamma\big|_{[a,b]} = \varphi \qquad \text{y} \qquad \gamma\big|_{[b,b+d-c]} = \psi \circ \tau$$

  donde τ *es la traslación que lleva el intervalo* $[b, b+d-c]$ *al intervalo* $[c,d]$.

El caso particular más sencillo se presenta cuando $b = c$, es decir, cuando φ y ψ están definidas en intervalos consecutivos: $[a,b]$ y $[b,d]$. Entonces la traslación τ es la identidad, luego φ y ψ son las restricciones de γ a los intervalos $[a,b]$ y $[b,d]$ respectivamente. En el sentido contrario, es decir, partiendo de la curva γ, hemos observado lo siguiente:

- *Si* $\gamma : [a,d] \to \mathbb{C}$ *es una curva, cada punto intermedio* $b \in]a,d[$ *permite expresar* γ *como una suma de curvas:* $\gamma = \gamma\big|_{[a,b]} + \gamma\big|_{[b,d]}$.

Se comprueba rutinariamente que la suma de curvas es asociativa. Más concretamente, si φ_1, φ_2 y φ_3 son curvas tales que los extremos de φ_1 y φ_2 coinciden respectivamente con los orígenes de φ_2 y φ_3, se tiene: $(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3 = \varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)$, algo intuitivamente obvio. Podemos pues usar con comodidad sumas de curvas con un número arbitrario de sumandos.

Todo lo dicho para la suma de dos curvas se generaliza fácilmente para sumas de un número arbitrario de curvas, lo que se resume en el enunciado que sigue. Su demostración por inducción es completamente obvia. Para entender mejor el enunciado conviene recordar que una **partición** de un intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito $P \subset [a,b]$ que contiene a los extremos: $a,b \in P$. Los elementos de P se numeran siempre de menor a mayor, de modo que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, se entiende que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Es costumbre resaltar este convenio escribiendo $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$.

- *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant 2$ *y, para cada* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *sea* $\varphi_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ *una curva. Si* $\varphi_k(b_k) = \varphi_{k+1}(a_{k+1})$ *para todo* $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, *tiene sentido la curva suma,*
$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$
Concretamente, γ *se define en el intervalo* $[a,b]$ *con* $a = a_1$ *y* $b = a + \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$, *de la siguiente forma. Tomando* $t_0 = a$ *y* $t_k = a + \sum_{j=1}^{k}(b_j - a_j)$ *para todo* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, *tenemos una partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *del intervalo* $[a,b]$ *y, para cada* $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *se tiene que* $\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]} = \varphi_k \circ \tau_k$ *donde* τ_k *es la traslación que lleva el intervalo* $[t_{k-1}, t_k]$ *al intervalo* $[a_k, b_k]$. *De hecho* τ_1 *es la identidad, ya que* $[t_0, t_1] = [a_1, b_1]$.

- *Recíprocamente, toda partición* $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *de un intervalo* $[a,b]$ *permite expresar cualquier curva* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *como una suma de curvas:*
$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$$

Veamos otra operación muy intuitiva que podemos hacer con una sola curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$. Concretamente, llamamos **curva opuesta** de φ a la curva $-\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por
$$(-\varphi)(t) = \varphi(a+b-t) \qquad \forall\, t \in [a,b]$$
Cuando t recorre el intervalo $[a,b]$, vemos que $a+b-t$ lo recorre en sentido opuesto, desde b hacia a, luego $(-\varphi)(t)$ recorre el conjunto φ^* en sentido opuesto al de φ. En particular, $(-\varphi)^* = \varphi^*$, el origen de $-\varphi$ es el extremo de φ y el extremo de $-\varphi$ es el origen de φ.

Intuitivamente podríamos decir que $-\varphi$ describe el movimiento que consiste en "desandar" el movimiento descrito por φ. Obsérvese que las sumas $\varphi + (-\varphi)$ y $(-\varphi) + \varphi$ tienen sentido, y ambas son curvas cerradas, pero son *distintas*. La conmutatividad de la suma de curvas no siempre tiene sentido, pero incluso cuando lo tiene, puede no verificarse.

6.3. Arcos y caminos

El concepto topológico de curva que hasta ahora hemos manejado es muy general, da lugar a situaciones que para nada están de acuerdo con la intuición geométrica o física. Baste citar el ejemplo hallado por Peano de una curva cuya imagen tiene interior no vacío. A partir de ahora nos limitamos a considerar curvas con cierta regularidad.

Llamamos **arco** a una curva de clase C^1, es decir, una función $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$, como siempre con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, que es derivable en $[a,b]$ con $\sigma' \in C[a,b]$. La curva opuesta del arco σ viene dada por $(-\sigma)(t) = \sigma(a+b-t)$ para todo $t \in [a,b]$, que también es de clase C^1, así que *la curva opuesta de un arco también es un arco.*

Veamos por ejemplo los dos tipos de arco que usaremos con más frecuencia. Dados $z,w \in \mathbb{C}$, el **segmento** de origen z y extremo w es el arco $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\sigma(t) = (1-t)z + tw \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

que se denotará por $[z,w]$. Claramente se trata de un arco, puesto que σ es derivable en $[0,1]$ con $\sigma'(t) = w - z$ para todo $t \in [0,1]$. El arco opuesto de $[z,w]$ viene dado por

$$(-\sigma)(t) = \sigma(1-t) = tz + (1-t)w \qquad \forall t \in [0,1]$$

que es claramente el segmento de origen w y extremo z, es decir, $-[z,w] = [w,z]$.

Observamos también que la imagen $\sigma^* = [z,w]^*$ es el "segmento" de extremos z y w, visto ahora como un subconjunto de $\mathbb{C}$. La coincidencia de nomenclatura no es problema, gracias a la diferente notación: el segmento $[z,w]$ es una función definida en $[0,1]$ mientras el segmento $[z,w]^*$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$. A decir verdad, sí hay un leve problema de notación: para $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el intervalo cerrado y acotado de extremos a y b se seguirá denotando por $[a,b]$, como no podía ser de otra forma, pero ahora es la nomenclatura la que ayuda, basta distinguir entre el intervalo $[a,b]$ y el segmento $[a,b]$. Por ejemplo, el segmento $[b,a]$ tiene sentido, es un arco cuya imagen es el intervalo $[a,b]$, mientras que el intervalo $[b,a]$ es vacío.

Por otra parte, dados $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, llamamos **circunferencia** de centro z y radio r, que denotamos por $C(z,r)$ al arco cerrado $\varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\varphi(t) = z + re^{it} \qquad \forall\, t \in [-\pi,\pi]$$

Vemos que $\varphi'(t) = ire^{it}$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. La imagen del arco $\varphi = C(z,r)$ es también la "circunferencia" de centro z y radio r, que ahora estamos entendiendo como un subconjunto del plano: $\varphi^* = C(z,r)^* = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| = r\}$.

Para estudiar la integral curvilínea no sólo usaremos arcos, sino también sumas de arcos, y el problema es que la suma de dos arcos puede no ser un arco, como veremos enseguida. Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ son arcos, es claro que la curva suma $\gamma = \varphi + \psi$, definida en el intervalo $J = [a, b+d-c]$ como se hizo en (1), es de clase C^1 en $J \setminus \{b\}$, pero puede no ser derivable en b. De hecho γ tiene derivadas laterales $\gamma'(b-) = \varphi'(b)$ y $\gamma'(b+) = \psi'(c)$, luego γ es un arco si, y sólo si, $\varphi'(b) = \psi'(c)$. Pronto aparecerán abundantes ejemplos en los que esto no ocurre. La forma de resolver este pequeño inconveniente consiste en considerar una familia de curvas que contenga a los arcos y sea estable por sumas, cosa que no es difícil.

Decimos que una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un **camino** cuando se puede expresar como suma de arcos, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$, donde σ_k es un arco, para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Obviamente esta suma de curvas ha de tener sentido, es decir, el extremo del arco σ_k deberá coincidir con el origen de σ_{k+1} para todo $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. En vista de la asociatividad de la suma de curvas, es evidente que toda suma de caminos es un camino. Aclaramos ahora fácilmente qué tipo de regularidad ha de tener una curva para ser un camino:

- *Para una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *γ es un camino*
  - (ii) *Existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1},t_k]$ es una función de clase C^1.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Escribiendo $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$, como una suma de arcos, sabemos que existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tiene la forma $\sigma_k \circ \tau_k$ donde τ_k es una traslación, luego es una función de clase C^1, pues tanto τ_k como σ_k lo son.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Basta escribir $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ para tener γ expresada como suma de arcos. ■

Al sumar dos segmentos no alineados, o incluso a veces estando alineados, encontramos el ejemplo más sencillo de una suma de arcos que no es un arco: si $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ el camino $[z_0,z_1] + [z_1,z_2]$ es un arco si, y sólo si, $z_1 - z_0 = z_2 - z_1$. Llamaremos poligonal a toda suma de segmentos. Naturalmente, el extremo de cada segmento que aparezca en dicha suma deberá coincidir con el origen del siguiente, para que la suma tenga sentido. Por tanto:

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, llamamos **poligonal** de vértices $z_0, z_1, \ldots, z_n$ al camino definido por

$$[z_0, z_1, \ldots, z_n] = \sum_{k=1}^{n} [z_{k-1}, z_k]$$

Es claro que tenemos un camino cerrado si, y sólo si, $z_0 = z_n$. Naturalmente, la nomenclatura está inspirada en los vértices de un polígono. Por ejemplo, suele decirse que la poligonal cerrada $[z_0,z_1,z_2,z_0] = [z_0,z_1] + [z_1,z_2] + [z_2,z_0]$ es un triángulo.

6.4. Integral curvilínea

Dado un camino γ, nuestro objetivo es definir la integral sobre γ de una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$. Aunque no es necesario considerarlo previamente, la definición se comprenderá mejor si empezamos por el caso particular en que γ es un arco, para después ver lo que ocurre en general con una suma de arcos.

Sea pues $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco y sea $f : \sigma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos entonces la **integral de** f **sobre el arco** σ mediante la siguiente igualdad:

$$\int_\sigma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\,\sigma'(t)\,dt \tag{2}$$

Obsérvese que en el segundo miembro tenemos una integral que hemos estudiado con detalle, la integral de Cauchy de una función continua en el intervalo $[a,b]$ con valores complejos, concretamente la función $(f \circ \sigma)\sigma'$.

Para hacer la misma definición en el caso de un camino γ y una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$, la función $f \circ \gamma$ sigue siendo continua, pero el problema es que γ' puede no estar siquiera definida en un subconjunto finito de $[a,b]$. La solución podría consistir en usar una integral más general que la de Cauchy, teniendo en cuenta que $(f \circ \gamma)\gamma'$ puede verse como una función acotada de $[a,b]$ en $\mathbb{C}$ que es continua salvo en un conjunto finito de puntos. El propio Cauchy se ocupó de extender la definición de su integral para poderla aplicar a este tipo de función. Alternativamente podemos pensar en la integral de Riemann o incluso en la de Lebesgue, para funciones con valores complejos, pues nuestra función es integrable en cualquiera de los dos sentidos. Sin embargo, para mantener nuestra exposición a un nivel completamente elemental, haremos una definición de la integral sobre un camino que, aunque sea algo más laboriosa, sólo involucra la integral de Cauchy tal y como la hemos estudiado, sin necesidad de usar ninguna integral más general.

Sea pues $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que la función $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ sea de clase C^1 para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Dada una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la función $f_k = (f \circ \gamma_k)\gamma_k'$ es continua en el intervalo $[t_{k-1},t_k]$ y podemos considerar la suma siguiente:

$$\Sigma(f,P) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt$$

Pretendemos definir la integral de f sobre γ como esta suma, extendiendo así la definición hecha en el caso de un arco, pero para ello debemos comprobar que la suma $\Sigma(f,P)$ no depende de la partición P que hayamos usado, pues evidentemente P no es única. Pasamos pues a hacer esa comprobación, considerando cualquier otra partición Q del intervalo $[a,b]$ que cumpla la misma condición que P, es decir, tal que la restricción de γ a cada uno de los subintervalos determinados por Q sea una función de clase C^1.

Consideremos primeramente el caso en que $Q = P \cup \{c\}$ se obtiene añadiendo a P un punto $c \in [a,b] \setminus P$ que cumplirá $t_{k-1} < c < t_k$ para algún $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. La aditividad de la integral de Cauchy nos da entonces la igualdad buscada:

$$\Sigma(f,P) - \Sigma(f,Q) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_k(t)\,dt - \int_{t_{k-1}}^{c} f_k(t)\,dt - \int_c^{t_k} f_k(t)\,dt = 0$$

Mediante una obvia inducción obtenemos que $\Sigma(f,P)$ no varía cuando añadimos a la partición P cualquier conjunto finito de puntos, es decir, que $\Sigma(f,P) = \Sigma(f,Q)$ siempre que se tenga $P \subset Q$. Finalmente, en el caso general basta usar la partición $P \cup Q$ pues, por lo ya demostrado, se tiene $\Sigma(f,P) = \Sigma(f,P \cup Q) = \Sigma(f,Q)$. Podemos ya hacer la siguiente definición.

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos entonces la **integral de f sobre el camino** γ mediante la igualdad:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt \tag{3}$$

donde $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ es cualquier partición del intervalo $[a,b]$ tal que la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ sea de clase C^1 para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. La forma de elegir la partición P hace que todas las integrales que aparecen en el segundo miembro de (3) sean integrales de Cauchy de funciones continuas y, según hemos comprobado previamente, su suma no depende de la partición P que hayamos elegido. Es claro que esta definición generaliza la que hicimos en (2) para el caso de un arco.

Hemos salvado, de la forma más elemental posible, el obstáculo que había para definir la integral sobre un camino, pero queda un detalle por aclarar. En la práctica un camino suele aparecer como suma de arcos definidos en intervalos no consecutivos, en cuyo caso la igualdad (3) no resulta cómoda para calcular la integral, es preferible usar la siguiente observación:

- *Sea* $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ *un camino expresado como suma de arcos. Entonces, para toda función continua* $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ *se tiene:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f(z)\,dz \tag{4}$$

Nótese que las integrales del segundo miembro tienen sentido, porque al ser $\gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k^*$, la función f es continua en σ_k^* para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Si para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ el arco σ_k está definido en un intervalo $[a_k, b_k]$ y el camino γ lo está en $[a,b]$, sabemos que existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ tiene la forma $\sigma_k \circ \tau_k$ donde τ_k es la traslación que lleva $[t_{k-1}, t_k]$ a $[a_k, b_k]$. También para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la fórmula de cambio de variable para la integral de Cauchy nos dice que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_k} f(z)\,dz &= \int_{a_k}^{b_k} f\big(\sigma_k(s)\big)\,\sigma_k'(s)\,ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big((\sigma_k \circ \tau_k)(t)\big)\,(\sigma_k \circ \tau_k)'(t)\,dt \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $s = \tau_k(t)$ teniendo en cuenta que $s = a_k$ para $t = t_{k-1}$ y $s = b_k$ para $t = t_k$, así como que $\tau_k'(t) = 1$ para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Puesto que la partición P es adecuada para calcular la integral de f sobre γ, al sumar miembro a miembro las n igualdades anteriores, obtenemos (4). ■

La igualdad (4) explica la razón por la que llamamos “suma” a la operación con arcos que venimos manejando: lo hacemos para resaltar que a la suma de arcos corresponde la suma de integrales.

La ventaja de (4) con respecto a (3) es que permite olvidar la definición de la suma de arcos, recordando sólo la condición para que tenga sentido. Para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la integral de f sobre el arco σ_k se calcula mediante la definición de σ_k en el intervalo $[a_k, b_k]$, y entonces la integral sobre el camino γ se calcula usando (4). Al estudiar las propiedades de la integral, casi siempre las probaremos primero para un arco, y usaremos (4) para extenderlas al caso general.

6.5. Propiedades de la integral curvilínea

Las propiedades de la integral de Cauchy se van a traducir en las análogas para la integral curvilínea.

Notación. En todo lo que sigue, para evitar repeticiones, fijamos un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ escrito en la forma $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ donde, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\sigma_k : [a_k, b_k]$ es un arco. Sabemos que γ^* es compacto, luego podemos considerar el espacio de Banach complejo $C(\gamma^*)$ de todas las funciones continuas de γ^* en $\mathbb{C}$, cuya norma viene dada por

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} \qquad \forall f \in C(\gamma^*)$$

Para cada $f \in C(\gamma^*)$ podemos definir

$$\Lambda(f) = \int_\gamma f(z)\,dz \qquad \text{y} \qquad \Lambda_k(f) = \int_{\sigma_k} f(z)\,dz \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

con lo que $\Lambda(f) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k(f)$.

Las dos primeras propiedades de la integral curvilínea son la linealidad y la continuidad del funcional $\Lambda : C(\gamma^*) \to \mathbb{C}$.

- **Linealidad.** *El funcional* Λ *es lineal, es decir:*

$$\int_\gamma \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz \qquad \forall f,g \in C(\gamma^*), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

La linealidad de la integral de Cauchy nos hace ver claramente que el funcional Λ_k es lineal para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, luego Λ es lineal, como suma de aplicaciones lineales. ■

Para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ comprobamos ahora fácilmente la continuidad de Λ_k:

$$|\Lambda_k(f)| \leqslant \int_{a_k}^{b_k} \big|f\big(\sigma_k(t)\big)\big|\,\big|\sigma_k'(t)\big|\,dt \leqslant \|f\|_\infty \int_{a_k}^{b_k} |\sigma_k'(t)|\,dt \tag{5}$$

La última integral es, por definición, la longitud del arco σ_k. Así pues, para decirlo en general, la **longitud de un arco** $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ se define por

$$l(\sigma) = \int_c^d |\sigma'(t)|\,dt$$

No vamos a detenernos a explicar que esta definición es coherente con la idea intuitiva de longitud. Simplemente comprobamos que la longitud de un segmento y la de una circunferencia son las que cabe esperar. Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ es claro que:

$$l\big([z,w]\big) = |w-z| \qquad \text{y} \qquad l\big(C(z,r)\big) = 2\pi r$$

Usando la desigualdad (5), tenemos claramente

$$|\Lambda(f)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\Lambda_k(f)| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k) \tag{6}$$

y es natural definir la **longitud de un camino** γ como la suma de las longitudes de los arcos cuya suma es γ:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k) \tag{7}$$

Razonando como se hizo con la integral, se puede comprobar que esta definición es correcta, es decir, que $l(\gamma)$ no depende de la forma de expresar γ como suma de arcos, pero no habrá necesidad de usar este hecho. Podemos simplemente entender la igualdad (7) como un convenio de notación. Resaltemos, eso sí, la continuidad del funcional Λ, que aparece en (6):

- **Continuidad.** *El funcional Λ es continuo. Más concretamente, se tiene:*

$$|\Lambda(f)| = \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leqslant l(\gamma)\,\|f\|_\infty \qquad \forall f \in C(\gamma^*) \tag{8}$$

En la práctica no suele ser necesario calcular con exactitud la norma de f, basta usar una clara consecuencia de (8). Para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:

$$|f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in \gamma^* \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leqslant l(\gamma)\,M$$

Usaremos a menudo la continuidad de la integral, teniendo en cuenta que la convergencia de sucesiones en el espacio de Banach $C(\gamma^*)$ es la uniforme en γ^*. Aprovechando también la linealidad de la integral, lo enunciamos para series:

- *Sea $f_n \in C(\gamma^*)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en γ^*. Entonces:*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

Vamos con la tercera propiedad importante de la integral curvilínea, que describe la forma en que depende del camino sobre el que se integra:

- **Aditividad.** *Sea φ otro camino cuyo origen coincida con el extremo de γ. Entonces, para toda función $f \in C\big((\gamma+\varphi)^*\big) = C\big(\gamma^* \cup \varphi^*\big)$ se tiene:*

$$\int_{\gamma+\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\varphi f(z)\,dz \tag{9}$$

Además, para toda función $f \in C(\gamma^*)$, se tiene también:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz \tag{10}$$

Para la igualdad (9) expresamos φ como suma de arcos, que numeramos consecutivamente a los que teníamos para γ, es decir, $\varphi = \sum_{k=n+1}^{n+m} \sigma_k$. Por hipótesis, el extremo de γ, que es el de σ_n, coincide con el origen de φ que es el de σ_{n+1}, luego es bien fácil expresar $\gamma+\varphi$ como suma de arcos: $\gamma+\varphi = \sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k$. Al aplicar la igualdad (4) a los tres caminos involucrados, obtenemos claramente (9).

Para probar (10) sí usaremos la definición que hicimos en (3) de la integral sobre un camino. Sea $\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ sea de clase C^1 para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Tomando

$$s_k = a+b-t_{n-k} \qquad \forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$$

tenemos otra partición $\{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b\}$ de $[a,b]$, que es adecuada para calcular la integral sobre el camino $-\gamma$. En efecto, fijado $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, para todo $s \in [s_{k-1},s_k]$ se tiene que $a+b-s \in [t_{n-k},t_{n-k+1}]$, luego $(-\gamma)(s) = \gamma(a+b-s) = \gamma_{n-k+1}(a+b-s)$; como γ_{n-k+1} era de clase C^1, vemos que la restricción de $-\gamma$ al intervalo $[s_{k-1},s_k]$ es de clase C^1 como queríamos.

Por otra parte, siempre para cada $k \in \{1,2,\ldots n\}$ la fórmula de cambio de variable para la integral de Cauchy nos permite escribir

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} f\big((-\gamma)(s)\big)(-\gamma)'(s)\,ds = -\int_{s_{k-1}}^{s_k} f\big(\gamma(a+b-s)\big)\gamma'(a+b-s)\,ds = -\int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt$$

donde hemos hecho el cambio de variable $s = a+b-t$, sustituyendo ds por $-dt$, y hemos permutado los límites de integración, ya que $s = s_{k-1}$ para $t = t_{n-k-1}$ y $s = s_k$ para $t = t_{n-k}$. Al sumar miembro a miembro las n igualdades anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^n \int_{s_{k-1}}^{s_k} f\big((-\gamma)(s)\big)(-\gamma)'(s)\,ds = -\sum_{k=1}^n \int_{t_{n-k}}^{t_{n-k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt \\ &= -\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz\end{aligned}$$

que es la igualdad (10) buscada. ■

Además de reencontrar la razón por la que la suma de caminos se llama así, ahora vemos también la razón por la que el camino opuesto de γ se denota por $-\gamma$.

Pasamos a probar la propiedad de la integral curvilínea que la hace útil para el problema que nos interesa: construir, cuando sea posible, primitivas de una función.

- **Regla de Barrow.** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Supongamos que f admite una primitiva en Ω, es decir, que existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Entonces, si el camino γ verifica que $\gamma^* \subset \Omega$, se tiene:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, aplicamos la regla Barrow para la integral de Cauchy:

$$\int_{\sigma_k} f(z)\,dz = \int_{a_k}^{b_k} f\big(\sigma_k(t)\big)\,\sigma_k'(t)\,dt = \int_{a_k}^{b_k} \big(F\circ\sigma_k\big)'(t)\,dt = F\big(\sigma_k(b_k)\big) - F\big(\sigma_k(a_k)\big)$$

Sumaremos miembro a miembro las n igualdades anteriores, pero teniendo en cuenta algo que ahora es importante:

$$\gamma(a) = \sigma_1(a_1), \quad \gamma(b) = \sigma_n(b_n) \quad \text{y} \quad \sigma_k(b_k) = \sigma_{k+1}(a_{k+1}) \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$$

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \big[F\big(\sigma_k(b_k)\big) - F\big(\sigma_k(a_k)\big)\big] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} F\big(\sigma_k(b_k)\big) - \sum_{k=2}^{n} F\big(\sigma_k(a_k)\big) + F\big(\sigma_n(b_n)\big) - F\big(\sigma_1(a_1)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} F\big(\sigma_{k+1}(a_{k+1})\big) - \sum_{k=2}^{n} F\big(\sigma_k(a_k)\big) + F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) \\
&= F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Para abreviar, si un camino γ verifica, como en el resultado anterior, que $\gamma^* \subset \Omega$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, diremos simplemente que γ es un camino **en** Ω. Hemos obtenido una condición necesaria para que una función $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ admita una primitiva en Ω: su integral sobre cualquier camino en Ω sólo depende del origen y extremo del camino. Dicho de forma más llamativa, la integral de f sobre cualquier camino cerrado γ en Ω ha de anularse, puesto que $\gamma(b) = \gamma(a)$, luego $F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) = 0$.

Por ejemplo, supongamos que para algún $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene $C(0,r)^* \subset \Omega \subset \mathbb{C}^*$. Entonces

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i\,r\,e^{it}\,dt}{r\,e^{it}} = 2\pi i \neq 0$$

y deducimos que la función continua $z \mapsto 1/z$ no admite una primitiva en Ω, cosa que ya sabíamos. Pero ahora no hemos tenido que usar ningún resultado sobre logaritmos holomorfos, argumentos o raíces cuadradas continuas ni nada por el estilo, simplemente hemos calculado una integral sobre un arco cerrado, bien sencilla por cierto.

6.6. Existencia de primitiva

Nuestro próximo objetivo es probar que, la condición necesaria recién obtenida para que una función continua en un abierto admita una primitiva, también es suficiente.

Teorema ***(Caracterización de la existencia de primitiva).*** *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

(ii) *Para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Demostración. Ya sabemos que $(i) \Rightarrow (ii)$ y, para probar el recíproco, empezamos por reducir el problema al caso en que Ω es un dominio.

(a). Supongamos demostrado el teorema para dominios. Sea entonces Ω abierto y supongamos que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ verifica (ii). Para cada componente conexa U de Ω sabemos que U es un dominio y es claro que la restricción $f\big|_U$ verifica también (ii), puesto que todo camino cerrado en U es un camino cerrado en Ω. Por tanto existirá $F_U \in \mathcal{H}(U)$ tal que $F_U'(z) = f(z)$ para todo $z \in U$. Para cada $z \in \Omega$ definimos entonces $F(z) = F_U(z)$ donde U es la única componente conexa de Ω tal que $z \in U$. Tenemos así $F\big|_U = F_U$ para toda componente conexa U de Ω. Por el carácter local del concepto de derivada deducimos que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Así pues, suponemos a partir de ahora que Ω es un dominio.

(b). Fijamos en lo que sigue un punto $\alpha \in \Omega$, pues la idea es construir la función F integrando f sobre caminos con origen en α que nos lleven a cualquier punto de Ω. Nuestro próximo paso es probar que efectivamente podemos llegar desde α a cualquier punto de Ω mediante un camino, de hecho mediante una poligonal. Comprobamos por tanto que Ω verifica la siguiente forma fuerte de conexión:

Para todo $z \in \Omega$ existe un camino γ_z en Ω con origen α y extremo z.

Para probarlo consideramos el conjunto $A \subset \Omega$ de los puntos que verifican la propiedad buscada. Es obvio que $A \neq \emptyset$ luego bastará probar que A es abierto y también que es cerrado relativo a Ω, para concluir que $A = \Omega$ como queremos.

Dado $a \in A$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Por hipótesis tenemos un camino γ_a en Ω con origen α y extremo a. Para cada $z \in D(a,r)$ podemos entonces tomar $\gamma_z = \gamma_a + [a,z]$, suma que está bien definida pues el extremo de γ_a coincide con el origen de $[a,z]$. Además tenemos $\gamma_a^* \subset \Omega$ y $[a,z]^* \subset D(a,r) \subset \Omega$ luego γ_z es un camino en Ω con origen en α y extremo en z. Esto prueba que $z \in A$, luego $D(a,r) \subset A$ y A es abierto.

Sea ahora $z \in \overline{A} \cap \Omega$ que es el cierre de A relativo a Ω. Tomamos otra vez $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y encontramos $a \in A \cap D(z,r)$. De nuevo existe un camino γ_a en Ω con origen α y extremo a, y de nuevo tomamos $\gamma_z = \gamma_a + [a,z]$ que es un camino en Ω con origen α y extremo z. Esto prueba que $z \in A$, luego A es cerrado relativo a Ω.

Nótese que en los dos razonamientos anteriores, γ_z es una poligonal cuando γ_a lo es. Por tanto, la misma prueba nos dice que, para cada $z \in \Omega$ existe de hecho una poligonal en Ω con origen α y extremo z.

(c). Definimos ya la función F que buscamos, escribiendo, para cada $z \in \Omega$,

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$

donde γ_z es cualquier camino en Ω con origen α y extremo z, pero debemos asegurarnos de que la integral no depende del camino γ_z elegido. Sean pues φ_z y ψ_z dos caminos que cumplan las condiciones exigidas a γ_z. Como z es el extremo de φ_z y también el origen de $-\psi_z$, podemos considerar el camino $\varphi_z - \psi_z$. Puesto que $(\varphi_z - \psi_z)^* = \varphi_z^* \cup \psi_z^* \subset \Omega$, tenemos un camino en Ω, pero α es su origen y también su extremo, luego se trata de un camino cerrado. Aplicando la hipótesis (ii) tenemos que

$$0 = \int_{\varphi_z - \psi_z} f(w)\,dw = \int_{\varphi_z} f(w)\,dw - \int_{\psi_z} f(w)\,dw$$

como queríamos comprobar. Así pues la función F está bien definida en todo punto $z \in \Omega$.

(d). Destacamos la propiedad clave de F, de la que se deducirá que es una primitiva de f:

Para todo $a \in \Omega$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

En efecto, tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y si γ_a es cualquier camino que usemos para definir $F(a)$, para cada $z \in D(a,r)$ usamos $\gamma_z = \gamma_a + [a,z]$. La igualdad buscada es consecuencia evidente de la aditividad de la integral curvilínea:

$$F(z) = \int_{\gamma_a} f(w)\,dw + \int_{[a,z]} f(w)\,dw = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw$$

Para probar que F es una primitiva de f sólo usaremos ya la propiedad de F recién obtenida. Como quiera que más adelante nos encontraremos en situaciones análogas, recogemos el resto de la demostración en forma de lema, que podremos usar cuando sea conveniente, sin tener que repetir el razonamiento.

Lema ***(Construcción de primitivas).*** *Sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $F : \Omega \to \mathbb{C}$ una función verificando que, para todo $a \in \Omega$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y*

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Fijamos $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ dado por la hipótesis. Para $z \in D(a,r)$ se tiene entonces

$$F(z) - F(a) - f(a)(z-a) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw - f(a)(z-a) = \int_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\,dw$$

donde, para la última igualdad, hemos usado la regla de Barrow, pues la función constantemente igual a $f(a)$ tiene, en todo el plano, una primitiva obvia: $w \mapsto f(a)\,w$.

Fijado $\varepsilon > 0$, por ser f continua en a, podemos encontrar $\delta \in]0, r[$, tal que

$$w \in \Omega, \quad |w - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(w) - f(a)| < \varepsilon$$

Fijado $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$, para todo $w \in [a,z]^*$ se tiene claramente $|w-a| \leqslant |z-a| < \delta$, luego $|f(w) - f(a)| < \varepsilon$. De la continuidad de la integral curvilínea deducimos que

$$\left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| = \frac{1}{|z-a|} \left| \int_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\, dw \right| < \frac{\varepsilon\, l\big([a,z]\big)}{|z-a|} = \varepsilon$$

lo que prueba que F es derivable en a con $F'(a) = f(a)$. Puesto que $a \in \Omega$ era arbitrario, esto concluye la demostración del lema, y con ella la del teorema principal. ■

El teorema anterior puede verse, no sólo como la versión compleja del teorema fundamental del Cálculo, sino como una auténtica generalización del mismo. Aplicándolo formalmente a funciones reales de variable real, este teorema nos diría que una función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}$, admite una primitiva si, y sólo si, su integral sobre cualquier camino cerrado γ en Ω se anula. Ocurre que un camino cerrado en Ω ha de ser "trivial", en el sentido de que sólo puede ser una suma de segmentos que se recorren en ambos sentidos. Entonces, la integral de cualquier función continua sobre tal camino ha de anularse, luego toda función continua en un abierto de $\mathbb{R}$ admite una primitiva, que es lo que nos asegura el teorema fundamental del Cálculo para funciones reales de variable real.

6.7. Ejercicios

1. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Probar que $\displaystyle\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)\, dz = \int_0^r f(\alpha+s)\, ds$ para cualquier función $f \in C\big([\alpha,\alpha+r]^*\big)$. ¿Cual es la igualdad análoga para un segmento vertical?

2. Para $r \in]1,+\infty[$ se define $I(r) = \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{z\, dz}{z^3+1}$ y $J(r) = \displaystyle\int_{\sigma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1}\, dz$ donde $\gamma_r = C(0,r)$ y $\sigma_r = [-r, -r+i]$. Probar que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} I(r) = \lim_{r\to+\infty} J(r) = 0$.

3. Probar que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z}\, dz = 0$ y deducir que $\displaystyle\int_0^\pi \log(1+r^2+2r\cos t)\, dt = 0$, para todo $r \in]0,1[$.

4. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ verificando que $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Admitiendo que f' es continua, probar que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ para todo $r \in]0,1[$.

5. Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por $f(z) = 1/(1+z^2)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que f no admite una primitiva en Ω.

6. Probar que $\displaystyle\int_\sigma \frac{dz}{1+z^2} = 0$, donde $\sigma(t) = \cos t + (i/2)\operatorname{sen} t$ para todo $t \in [0,2\pi]$.