Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Métodos Numéricos II (curso 2024/25)

Ejercicios sobre resolución de ecuaciones

1 Sea la función $f(x) = e^x - ax^2$ con $a \in [3, 4]$.

a) Demuestra que tiene una raíz negativa, otra raíz en $[0, 1]$ y otra mayor que 1.

b) Demuestra que $x = g_1(x) = \sqrt{\frac{e^x}{a}}$ y $x = g_2(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{a}}$ son ecuaciones equivalentes a la de partida.

c) Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a -0.5 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_2(x)$ y realiza dos iteraciones.

d) Toma $a = 3$. Demuestra la convergencia local hacia la raíz próxima a 1 partiendo de $x_0 = 0$ usando $g_1(x)$ y realiza dos iteraciones.

e) Toma $a = 3$. Comprueba que la raíz mayor que 1 está en $[3, 4]$. Demuestra la no convergencia hacia la raíz próxima a 4 partiendo de x_0 muy próximo a ella (pero diferente de ella) usando $g_1(x)$ y encuentra una función para la iteración funcional, alternativa a las anteriores que converja a la raíz cercana a 4. Partiendo de $x_0 = 3.98$ obtenga x_1 y x_2 con el método propuesto.

2 Sea la ecuación $p(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 15.2 = 0$.

a) Prueba que no tiene ninguna raíz menor que 1.

b) Prueba que Newton-Raphson converge partiendo de $x_0 = 0$ hacia la raíz más pequeña y realiza dos iteraciones.

c) Calcula la sucesión de Sturm y decide si existen raíces múltiples.

d) Separa las raíces reales de dicha ecuación.

3 Sea la ecuación $f(x) = e^{x-1} - ax^3 = 0$ siendo $a > 1$.

a) Demuestra que tiene al menos una raíz en $[0, 1]$.

b) A partir de ahora considera $a = 2$. Calcula las dos primeras aproximaciones x_1 y x_2 obtenidas con bisección (siendo $x_0 = 0.5$). Indica el error máximo que se comete con x_2.

c) Realiza dos iteraciones con el método de la secante tomando como valores iniciales (o semillas) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Debes calcular x_2 y x_3.

d) Evalúa la función en la segunda aproximación x_2 obtenida con bisección e indica, razonadamente con los resultados que se te han pedido, si se puede asegurar, o no, que la segunda aproximación obtenida con bisección está más cerca de la raíz que la segunda aproximación obtenida con la secante.

4 Considera la ecuación $x^2 = a$ siendo $a > 0$.

a) Se pretende usar el método de Newton-Raphson en la ecuación anterior para hallar la raíz cuadrada de a. Deduce que el método se puede expresar, en este caso, de la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{1}$$

b) Demuestra que el método es convergente partiendo de $x_0 = \text{máx}(1, a)$.

c) Apoyándote en la expresión (1) obtén la segunda aproximación x_2 de la raíz cuadrada positiva de 13, partiendo de $x_0 = 13$.

d) Determina la expresión del método de Newton-Raphson para la raíz cúbica de un número diferente de cero y aplícalo dos veces para aproximar la raíz cúbica de 13 partiendo de $x_0 = 13$.

5 Sea S la única solución en el dominio cuadrado $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$ del sistema no lineal

$$\begin{cases} xy^2 + 4x - 1 = 0 \\ 4yx^2 + 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

¿Es convergente a S la sucesión de iteraciones del método de iteración funcional definido por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4 + y_n^2} \\ y_{n+1} &= \frac{1}{6 + 4x_n^2} \end{aligned}$$

cualquiera que sea la aproximación inicial $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$?

6 Se sabe que $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$ y posee un único cero en dicho intervalo. ¿Se puede aproximar siempre dicho cero mediante el método de bisección?

7 Se considera la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Se pide:

a) Demuestra que la ecuación anterior tiene una única solución real s .

b) Encuentra un intervalo $[a,b]$ en el que al tomar cualquier punto $x_0 \in [a,b]$ como aproximación inicial del método de Newton-Raphson aplicado a $f(x)$ se asegure que la sucesión de iteraciones de dicho método converja a s con convergencia al menos cuadrática y demuestra que eso es así.

c) Calcula las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación dada tomando como aproximación inicial $x_0 = 1$.

8 Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

a) Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a,b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}?.

b) Determina justificadamente un intervalo $[a,b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

c) Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7} \, .$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

d) ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

9 Sucesión de Sturm

a) Sea $\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a,b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \ldots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_m(x)\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a,b]$.

b) Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

c) Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en el que se encuentran.

d) Realiza dos iteraciones del método de la secante para calcular de forma aproximada el valor de la raíz positiva más pequeña justificando la convergencia.

10 Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Se pretende resolver la ecuación
$$f(x) = 0$$
utilizando el método de Newton-Raphson sabiendo que es convergente localmente ¿Qué debe cumplir la función f para que dicho método tenga convergencia local al menos cúbica?

b) Si sabemos que f tiene una única raíz real en el intervalo $[-1, 1]$, ¿Cuántas iteraciones del método de bisección hay que realizar para conseguir un error menor que 10^{-7}?

c) ¿Es el método de Newton-Raphson para resolver el sistema
$$F(X) = 0$$
invariante frente a transformaciones lineales de F?

Nota: Que sea invariante frente a transformaciones ineales quiere decir que la secuencia de aproximaciones $\{X_n\}$ es la misma si se aplica el método al sistema $F(X) = 0$ o si se aplica al sistema $AF(X) = 0$, siendo A una matriz no singular, partiendo del mismo vector inicial X_0.

11 El problema de trisección de un ángulo consiste en hallar las razones trigonométricas de $\alpha/3$, conociendo las de $\alpha \in (0, \pi/2)$.

a) Llamando $x = \operatorname{sen}(\alpha/3)$ y $a = \operatorname{sen}\alpha$, demuestra que x es solución de la ecuación
$$-4x^3 + 3x - a = 0 \tag{2}$$

b) Construye una sucesión de Sturm de polinomios asociada a $p(x) = -4x^3 + 3x - a$ y deduce que p tiene exactamente 3 raíces reales.

c) Demuestra que $\operatorname{sen}(\alpha/3)$ es la única solución de la ecuación $p(x) = 0$, en el intervalo $(0, a/2)$ y que, tomando como valores iniciales $x_0 = a/3$ o $x_0 = a/2$, el método de Newton-Raphson converge.

d) Para resolver (2), se propone el método iterativo
$$x_{n+1} = \frac{a}{3 - 4x_n^2}$$
Estudia bajo qué condiciones el método converge localmente a la solución. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente?

e) Tomando $a = 1/2$, realiza una iteración del método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1/6$ para obtener una aproximación de $\operatorname{sen}(\pi/18)$.