Geometría 2. Relación de problemas del tema 1.

1. Estudiar si las siguientes matrices A sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ son diagonalizables. En caso de serlo, encontrar una matriz diagonal D y una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiar cuales de las matrices de la primera fila son semejantes entre si.
Estudiar si A_4 y A_5 son semejantes.

2. Tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Para todo a real consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1+a & 1 & -1+a \\ 1-a & -a & 1-a \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudiar los valores de a para los que A es diagonalizable.
Diagonalizar la matriz para $a = 0$, $a = 1$ y $a = -1$ (si ello es posible).
Razonar si las matrices obtenidas para $a = -2$ y para $a = 4$ son semejantes.

3. Estudiar los valores de a para los que la siguiente matriz es diagonalizable. Estudiar el caso real y el caso complejo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & a & 8 \\ 2 & 8 & a \end{pmatrix}$$

4. Consideramos la matriz 4×4 sobre el cuerpo real. Estudiar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sea A es una matriz $n \times n$ diagonalizable. Demostrar que su matriz traspuesta también lo es. Razonar que, en ese caso, A y A^t son semejantes.

6. Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, demostrar que toda matriz simétrica 2×2 es diagonalizable.

7. Sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, estudiar cuales de las siguientes matrices son diagonalizables

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y A una matriz 2×2. Consideramos la matriz traspuesta A^t, la matriz conjugada $\bar{A}$ y la matriz traspuesta conjugada $\bar{A}^t$,

$$A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a+ib & e+if \\ c+id & g+ih \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a-ib & c-id \\ e-if & g-ih \end{pmatrix} \quad \bar{A}^t = \begin{pmatrix} a-ib & e-if \\ c-id & g-ih \end{pmatrix}$$

Decimos que A es *simétrica* si $A^t = A$ y que es *hermítica* si $\bar{A}^t = A$.

1) Demostrar que una matriz simétrica compleja no es necesariamente diagonalizable.

2) Demostrar que toda matriz hermítica es diagonalizable y que sus valores propios son reales.

9. Sea A una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo real.

1) Demostrar que si A es diagonalizable, entonces $A^2 - 2A + I$ también es diagonalizable.

2) Razonar que si $A^2 - 2A + I$ es diagonalizable, ésto no implica que A también lo sea.

10. Sea A una matriz real 2×2 no diagonalizable y con un valor propio real a de multiplicidad algebraica $m = 2$. Demostrar que A es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$