



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

ANÁLISIS FUNCIONAL

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026



# Índice general

0.1. Espacios de Hilbert . . . . .	8
0.2. Espacios Duales . . . . .	12
0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert . . . . .	13



# Repaso

**Definición 0.1** (Espacio normado).  $E$  un espacio vectorial y  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  una función que verifica:

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$
2.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que  $E$  es un **espacio normado**. Podemos definir además una función  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$  a la que llamaremos **distancia**.

Decimos que un espacio  $E$  es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente. Si  $E$  es un espacio normado completo, entonces  $(E, \|\cdot\|)$  es un **espacio de Banach**.

**Definición 0.2** (Espacio prehilbertiano). Sea  $H$  es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo  $x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se verifica que

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha(x, z) + \beta(y, z) \\(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha(x, y) + \beta(x, z)\end{aligned}$$

2. **Simétrica:**  $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:**  $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:**  $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

Las dos últimas propiedades se pueden resumir en  $(x, x) = 0 \iff x = 0$ .

Diremos que  $(H, (\cdot, \cdot))$  es un **espacio prehilbertiano**.

Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  que es claramente una norma.

Si  $\|\cdot\|$  es completa, diremos que  $(H, (\cdot, \cdot))$  es un **espacio de Hilbert**.

**Ejemplo.** Los siguientes espacios son de Banach:

1.  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .
2.  $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$ , donde  $|x| = |(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$ . Además es de Hilbert ya que  $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$  es un producto escalar.
3. Dado<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{R}^N$  tomamos  $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada en } A\}$ . Podemos definir una norma en este espacio como

$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

4. Tomamos  $K \subset \mathbb{R}^N$  compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en  $K$  denotado por  $\mathcal{C}(K)$  y el espacio  $(K, (\cdot, \cdot))$ , donde

$$(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$$

es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos

$$\|f\| = \left( \int_K f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

**Ejemplo** (El espacio del punto 4 No es de Hilbert). Veámoslo con un contraejemplo. Tomamos  $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  y podemos definir  $\forall n \in \mathbb{N}$  la función  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $f_n^2$  viene dada por la siguiente gráfica:



De esta forma tenemos que

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x) dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$$

y vemos que

$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \rightarrow 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \rightarrow 1 \end{cases}$$

Con esto tenemos que la sucesión  $\{f_n\} \rightarrow 0$  en  $(\mathcal{L}([0, 1]), (\cdot, \cdot))$  (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

---

<sup>1</sup>la  $b$  de  $\mathcal{C}_b$  viene de *bounded* (acotado en inglés)

**Ejemplo.** Consideramos  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$  medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$  con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

**Ejemplo.** Sea  $1 \leq p < \infty$ . Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles} : \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de  $p$  de la siguiente forma<sup>2</sup>:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < \infty \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int |f|^p dx \right)^{1/p} \left( \int |g|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

**Ejemplo.**

1.  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$  con  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p}$  ( $x, y = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ ).
2.  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_{\infty})$  con  $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, N\}$
3. Sea  $p = \infty$ . Tenemos

$$L^{\infty} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma<sup>3</sup>:

$$\sup_{\Omega} |f| = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

<sup>2</sup>donde asumimos que  $1/\infty = 0$

<sup>3</sup>a.e. viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

En algunos libros se denota por *ess sup*.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \sup_{\Omega} |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio  $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  con  $\|f\|_\infty = \sup_{\Omega} |f|$  es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con  $p = \infty$ ,  $p' = 1$  nos dice que para  $f \in L^\infty(\Omega)$ ,  $g \in L^1(\Omega)$  entonces  $fg \in L^1(\Omega)$  y  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$  es una norma en  $H$ .

**Ejemplo.** Consideramos  $1 \leq p < \infty$  y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$$

entonces  $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$  es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar  $x \in \mathcal{L}^p$ ,  $y \in \mathcal{L}^{p'}$  y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \quad y \quad \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|x\|_{\mathcal{L}^p} \|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para  $p = 2$  tenemos que  $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$  es un espacio de Hilbert. Para  $p = \infty$  podemos definir  $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$  y con  $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  es un espacio de Banach.

**Ejemplo.** Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos  $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$  y es un subespacio de  $\mathcal{L}^\infty$ .
2. Podemos tomar otro subespacio de este,  $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$  que de nuevo es un subespacio de  $\mathcal{L}^\infty$ .

## 0.1. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un par  $(H, (\cdot, \cdot))$  donde  $H$  es un espacio vectorial y  $(\cdot, \cdot)$  es una función bilineal simétrica y definida positiva.

**Proposición 0.1.** Si  $H$  es prehilbertiano entonces se tiene:

1. Se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H$$



2. Se verifica la desigualdad del paralelogramo

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad \forall u, v \in H$$

**Teorema 0.2** (Teorema de la Proyección). Supongamos que  $H$  es un espacio Hilbertiano y  $\emptyset \neq K \subset H$  un conjunto convexo y cerrado, entonces  $\forall f \in H \exists u \in K$  tal que  $\|f - u\| = \text{dist}(f, K)$ . Además, dicho  $u$  está caracterizado por:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Notaremos a dicho  $u$  por  $P_K f$  y **diremos que es la proyección de  $f$  sobre  $K$**

*Demostración.* En primer lugar tendremos que ver que  $d(f, K) = \inf\{\|f - v\| : v \in K\}$  existe y se alcanza. Al ser un ínfimo de cantidades positivas sabemos que existe y nos quedará ver que se alcanza.

Por definición de ínfimo tenemos que

$$\exists \{v_n\} \subset K \text{ tal que } \|f - v_n\| \rightarrow d$$

Aplicando la desigualdad del paralelogramo para  $u = f - v_n$  y  $v = f - v_m$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f - v_n + f - v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{f - v_n - (f - v_m)}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) \\ \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) \\ \frac{\|v_m - v_n\|^2}{4} &= \frac{1}{2} (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \\ \|v_m - v_n\|^2 &= 2 (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4 \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \end{aligned}$$

Como  $K$  es convexo y  $v_n, v_m \in K$  tendremos que  $d \frac{v_n + v_m}{2} \in K$  y además  $\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d$  por lo que tenemos

$$\|v_m - v_n\|^2 = 2 (\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4d^2$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos que  $\|f - v_n\| \rightarrow d$  y  $\|f - v_m\| \rightarrow d$  por lo que el término de la derecha tenderá a 0 cuando  $n, m \rightarrow \infty$ . Esto significa que la sucesión  $\{v_n\}$  es de Cauchy.

Como  $H$  es de Hilbert, en particular es completo por lo que sabemos que  $\{v_n\} \rightarrow u$  en  $(H, (\cdot, \cdot))$ .

Como además  $\{v_n\} \subset K$  y  $K$  es cerrado, el límite  $u \in K$ . Tendremos que

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - v_n\| = \|f - u\|$$

Y tendremos probada la existencia de  $u$ .

Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la segunda parte del teorema, es decir

$$\left. \begin{array}{l} u \in K \\ \|f - u\| = \text{dist}(f, K) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{array} \right.$$

Veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $u \in K$  y sabemos que  $\|f - u\| \leq \|f - v\|$  para todo  $v \in K$ . Tomamos ahora  $w \in K$  y consideramos el segmento que une  $u$  con  $w$ . Entonces  $\forall w \in K$  y  $\forall t \in [0, 1]$ , al ser  $K$  convexo tendremos que

$$(1 - t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f - u\|^2 \leq \|f - (1 - t)u - tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned} \|f - (1 - t)u - tw\|^2 &= (f - (1 - t)u - tw, f - (1 - t)u - tw) = \\ &= \|f - u\|^2 + t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leq t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

Al dividir entre  $t$  nos queda

$$0 \leq t\|w - u\|^2 - 2(f - u, w - u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

y tomando ahora el límite cuando  $t$  tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leq -2(f - u, w - u) \Rightarrow (f - u, w - u) \leq 0$$

Se deja como ejercicio demostrar la otra implicación y la unicidad de  $u$ . □

**Proposición 0.3.** La aplicación dada por

$$\begin{aligned} P_K : H &\rightarrow H \\ f &\mapsto P_K f \end{aligned}$$

es Lipschitziana, es decir,  $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$  para todo  $f_1, f_2 \in H$ .

*Demostración.* Tomamos  $f_1, f_2 \in H$  y consideramos  $u_1 = P_K f_1$ ,  $u_2 = P_K f_2$  y tenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, v - u_1) &\leq 0 \quad \forall v \in K \\ (f_2 - u_2, v - u_2) &\leq 0 \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, u_2 - u_1) &\leq 0 \\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Aprovechando la bilinealidad tenemos que

$$(f_2 - u_2, u_2 - u_1) \geq 0 \Rightarrow ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) \leq 0$$

Y además

$$\begin{aligned} ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) &= ((f_1 - f_2) - (u_1 - u_2), u_2 - u_1) = \\ &= (f_1 - f_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \end{aligned}$$

Y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|u_2 - u_1\|^2 &= (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq -(f_1 - f_2, u_2 - u_1) \\ &\leq \|f_1 - f_2\| \|u_2 - u_1\| \Rightarrow \|u_2 - u_1\| \leq \|f_1 - f_2\| \end{aligned}$$

□

**Corolario 0.3.1** (Proyección ortogonal). Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $\emptyset \neq M \subset H$  un subespacio vectorial cerrado. Entonces se tiene que

$$\forall f \in H \quad \exists u \in M \text{ tal que } \|f - u\| = \text{dist}(f, M)$$

Además,  $u = P_M f$  está caracterizado por

- )  $u \in M$
- )  $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$

Y se tiene que  $P_M : H \rightarrow H$  es lineal.

*Demostración.* Comencemos con la primera parte del corolario. Sabemos que  $u \in M$  y  $(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M$  del teorema de la proyección. Tendremos que probar la equivalencia entre esto y  $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$  cuando  $M$  es un subespacio vectorial. Veamos ambas implicaciones:

$\Leftarrow$ ) Evidente por ser  $M$  un espacio vectorial.

$\Rightarrow$ ) Tenemos que  $(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M$ . Tomamos ahora  $v \in M$ ,  $t \neq 0$  y como  $M$  es un subespacio vectorial, entonces  $\frac{v}{t} \in M$  por lo que

$$(f - u, \frac{v}{t} - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, t \neq 0$$

Hagamos una distinción de casos:

$$\begin{cases} \text{Si } t > 0 & \Rightarrow (f - u, v - tu) \leq 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ \text{Si } t < 0 & \Rightarrow (f - u, v - tu) \geq 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Tomando límite cuando  $t$  tiende a 0

$$\begin{cases} (f - u, v) \leq 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ (f - u, v) \geq 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

Y por tanto  $(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

La demostración de que  $P_M$  es lineal se deja como ejercicio.

□

## 0.2. Espacios Duales

**Definición 0.3** (Dual algebraico). Sea  $E$  un espacio vectorial, llamamos **dual algebraico** al siguiente espacio:

$$E^\# = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$$

**Definición 0.4** (Dual topológico). Dado  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado, llamamos **dual topológico** a

$$E^* = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

*Observación.* Si tenemos  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  dos espacios normados y una aplicación  $T : E \rightarrow F$  lineal. Son equivalentes:

- (i)  $T$  es continua
- (ii)  $T$  es continua en 0
- (iii)  $T(B_E(0, 1))$  es un conjunto acotado de  $F$ , es decir que  $\exists R > 0 : \|T(x)\|_F \leq R \quad \forall x \in E \text{ con } \|x\| < 1$
- (iv)  $T$  es acotada, es decir,  $T(A)$  es acotada en  $F$  para todo  $A \subset E$  que esté acotado
- (v)  $T$  es Lipschitziana.

*Demostración.*

(v) $\Rightarrow$ (iv) ) Trivial

(iv) $\Rightarrow$ (iii) ) Trivial

(iii) $\Rightarrow$ (i) ) Trivial

(i) $\Rightarrow$ (ii) ) Trivial

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ) Sabemos que  $T$  es continua en 0. Luego para  $\varepsilon = 1 \quad \exists \delta > 0$  tal que  $\|x\|_E < \delta$  luego  $\|T(x)\|_F < 1$ . Tenemos que

$$\|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \forall x, y \in E$$

luego  $\|T(x)\| \leq M\|x\|$  para todo  $x \in E$ . De esta forma tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\| \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta} \right) \right\| = \frac{2}{\delta} \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2} \right) \right\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

(iii) $\Rightarrow$ (vi) ) Sabemos que  $A \subset E$  está acotado, luego  $T(A)$  también, es decir que  $T(A) \subset B(0, M)$  para cierto  $M > 0$ . Tenemos que probar que

$$T(A) \subset T(B(0, R)) \subset B(0, M)$$

Dado  $x \in A$  tal que  $\|x\| \leq R$ , como además es Lipschitziana tenemos que

$$\|T(x)\| \leq N\|x\| \leq N\|x\| < NR = M$$

y tenemos la inclusión que queríamos probar.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) ) Por hipótesis tenemos que si  $\|x\| < 1$  entonces  $\|T(x)\| \leq R$  y queremos probar que  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $\|x\| < \delta$ , entonces  $\|T(x)\| < \varepsilon$ . Tomamos  $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$  y suponiendo que  $\|x\| < \delta$  tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|} \cdot 2\|x\|\right) \right\| = 2\|x\| \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right) \right\| \leq 2\|x\| R < 2\delta R = \varepsilon$$

y ya lo tenemos. □

**Definición 0.5.** Dado  $E$  un espacio vectorial, consideramos su dual topológico  $E^*$  y definimos la norma

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \quad \forall f \in E^*$$

**Ejercicio 0.2.1.** Demostrar que  $\|f\|_{E^*}$  es una norma.

**Ejercicio 0.2.2.** Demostrar que  $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$  es de Banach.

**Ejercicio 0.2.3.** Demostrar que  $\|f\|_{E^*} = \inf\{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E\}$

### 0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

*Observación.* Es elemental que si tomo  $v \in H$ , entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_v : H &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = (u, v) \end{aligned}$$

verifica que  $\varphi_v \in H^*$  y  $\|\varphi_v\|_{H^*} = \|v\|_H$ . Además, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : H &\rightarrow H^* \\ v &\mapsto \phi_v \end{aligned}$$

que será lineal por lo que tenemos que un espacio de Hilbert y su dual topológico serán isomorfos.

*Demostración.* La demostración se deja como ejercicio. □

**Teorema 0.4** (Teorema de Riesz-Fischer). Para toda  $\varphi \in H^*$ , se tiene que  $\exists v \in H$  tal que  $\varphi(u) = (u, v) \quad \forall u \in H$ . Además, se tiene que  $\|\varphi\|_{H^*} = \|v\|_H$

**Ejercicio 0.3.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert, y tomamos un elemento cualquiera  $y \in H$ . Consideramos  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_y(x) = (x, y)$  para todo  $x \in H$ . Entonces se tiene que  $f_y$  es lineal, y además

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|y\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in H \Rightarrow f_y \text{ acotada}$$

con lo que  $\|f_y\|_{H^*} \leq \|y\|_H$ .

Con la definición de la norma tenemos que

$$\|f_y\|_{H^*} = \sup\{|(x, y)| : x \in H, \|x\|_H \leq 1\} \leq \|y\|_H \sup\{\|x\|_H : x \in H, \|x\|_H \leq 1\} = \|y\|_H$$

Comenzamos con el caso  $y \neq 0$  y tomamos  $x = \frac{y}{\|y\|_H}$  y tenemos que

$$|(x, y)| = \left| \left( \frac{y}{\|y\|_H}, y \right) \right| = \frac{1}{\|y\|_H} (y, y) = \|y\|_H$$

por lo que hemos visto que se alcanza el máximo por lo que  $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$ . Veamos ahora qué sucede cuando  $y = 0$ . En este caso tendremos  $f_y(x) = (x, 0)$  y por tanto se tiene directamente que  $\|f_y\|_{H^*} = 0 = \|y\|_H$ .

La linealidad se deja como ejercicio.

**Teorema 0.5** (Teorema de representación del dual de un espacio de Hilbert de Riesz-Fréchet). Sea  $H$  un espacio de Hilbert, entonces  $\forall f \in H^*$  existe un único  $y \in H$  tal que  $f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H$ . Además,  $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$ .

*Demostración.* Solo tenemos que probar la primera parte, pues la segunda es consecuencia del ejercicio anterior. Para ello tomamos  $f \in H^*$  y tenemos dos casuísticas:

- ) Si  $f = 0$ , entonces puedo tomar  $y = 0$  y es evidente.
- ) Si  $f \neq 0$ , entonces tenemos que  $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$  es un subespacio vectorial cerrado (imagen inversa de un cerrado por una función continua<sup>4</sup> y lineal<sup>5</sup>). Podemos aplicar entonces el teorema de la proyección ortogonal. Sabemos que  $\exists z_0 \in H \setminus M$ . Llamamos  $z_1 = P_M z_0 \in M$  y tenemos que  $(z_0 - z_1, v) = 0$  para todo  $v \in M$ . Definimos ahora

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|_H}$$

y está bien definido ya que  $z_0 \notin M$  y  $z_1 \in M$  luego  $z_0 - z_1 \neq 0$ . Es claro que  $\|z\| = 1$  y veamos cuánto vale  $(z, v)$  para todo  $v \in M$ :

$$(z, v) = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|} (z_0 - z_1, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

Veamos que  $z \notin M$ . Sabemos que  $M$  es un espacio vectorial y si  $z_0 - z_1$  estuviera en  $M$ , entonces  $z_0 \in M$  pero sabemos que  $z_0 \notin M$  luego  $z \notin M$  o equivalentemente  $f(z) \neq 0$  (por la definición de  $M$ ).

Tenemos ahora que para todo  $x \in H$  tenemos que  $x - \frac{f(x)}{f(z)}z \in M = \ker f$  ya que

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}f(z) = 0$$

<sup>4</sup>nos dice que es cerrado.

<sup>5</sup>nos dice que es espacio vectorial.

luego  $f(x) = f\left(\frac{f(x)}{f(z)}z\right)$  lo que nos dice que

$$0 = \left(z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = (z, x) - \frac{f(x)}{f(z)} \Rightarrow f(x) = f(z)(z, x) = (x, f(z)z)$$

Por tanto, tomando  $y = f(z)z$  tenemos la existencia probada. Nos queda por ver la unicidad. Para ello, supongamos que existen  $y_1, y_2 \in H$  tal que  $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$  para todo  $x \in H$ . Con esto tendríamos que  $(x, y_1 - y_2) = 0$  para todo  $x \in H$ . Elijo  $x = y_1 - y_2$  y tenemos que  $0 = (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2$  por lo que finalmente  $y_1 = y_2$ .

□

Nos planteamos ahora qué ocurre cuando tenemos un espacio de Banach  $E$  y un subespacio  $G \subset E$ . Tenemos además una aplicación  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua. Lo que nos plantemos ahora es si existe una aplicación  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua tal que su restricción  $f|_G = g$ .

Que  $g$  sea continua es equivalente a decir que  $|g(x)| \leq k\|x\|$  para todo  $x \in G$  y queremos ver si se verifica la continuidad de  $f$ , es decir que  $|f(x)| \leq k\|x\|$  para todo  $x \in E$ .

**Ejercicio 0.3.2.** Definimos  $p(x) = k\|x\| \quad \forall x \in E$ . Probar que se verifican las siguientes propiedades:

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$
2.  $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in E$

**Definición 0.6.** Sea  $\emptyset \neq P$  un conjunto con una relación  $\leq$  de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva). Entonces

- ) un subconjunto  $Q \subset P$  es **totalmente ordenado** si para cualesquiera dos elementos  $a, b \in Q$  se tiene que  $a \leq b$  o  $b \leq a$  (o ambas).
- ) Si  $Q \subset P$  y  $x \in P$ , diremos que  $x$  es **cota superior** de  $Q$  si  $a \leq x$  para todo  $a \in Q$ .
- ) Si  $m \in P$ , entonces diremos que  $m$  es un **elemento maximal** de  $P$  si

$$\{x \in P : m \leq x\} = \{m\}$$

es decir, no hay ningún elemento de  $P$  excepto  $m$  que esté por encima de  $m$ .

- ) Diremos que  $P$  es **inductivo** si todo subconjunto  $Q \subset P$  que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

**Lema 0.6** (Lema de Zorn). Sea  $\emptyset \neq P$  un conjunto con una relación de orden  $\leq$ . Entonces se tiene que si  $P$  es inductivo, entonces  $P$  tiene un elemento máximo.

**Teorema 0.7** (versión analítica del teorema de Hanh-Banach). Supongamos que  $E$  es un espacio vectorial y tenemos  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que se verifica

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E \\ p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

Sea  $G \subset E$  un subespacio vectorial y  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación lineal verificando

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$$

Entonces se tiene que  $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R}$  lineal verificando

$$\begin{aligned} f(x) &\leq p(x) \quad \forall x \in E \\ f|_G &= g \end{aligned}$$

*Demostración.* Definimos el siguiente conjunto

$$P = \left\{ h : D(h) \rightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h \text{ lineal, } h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \end{array} \right\}$$

y lo llamaremos **conjunto de extensiones** de  $g$ . Sabemos que  $P \neq \emptyset$  ya que  $g \in P$  (es una extensión de sí misma en el espacio  $P$ ). Necesitamos ahora definir una relación de orden. Lo haremos de la siguiente forma

$$h_1 \leq h_2 \iff \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases} \quad \forall h_1, h_2 \in P$$

y diremos que  $h_2$  es una **extensión** de  $h_1$ . Se deja como ejercicio demostrar que  $\leq$  es una relación de orden.

Probemos ahora que  $P$  es inductivo. Para ello tendremos que probar que cualquier subconjunto suyo que esté totalmente ordenado tiene una cota superior. Sea  $Q \subset P$  totalmente ordenado. Consideramos

$$V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$$

y definimos la aplicación

$$\begin{aligned} h_0 : V_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_0(x) = h(x) \quad \text{si } x \in D(h) \end{aligned}$$

Está bien definida como consecuencia de que el conjunto sea totalmente ordenado. Se deja como ejercicio demostrar que  $V_0$  es un subespacio vectorial, que  $h_0$  está bien definida, que es lineal y que  $h_0(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in V_0$ .

Con esto tengo que  $h_0$  es una extensión de todas las  $h \in Q$ , es decir,  $h \leq h_0$  para todo  $h \in Q$  lo que nos dice que  $h_0$  es la cota superior de  $Q$ . Con esto podemos concluir que  $P$  es inductivo.



Tenemos todas las hipótesis necesarias para aplicar el teorema de Zorn, que nos dice que  $\exists f \in P$  elemento maximal de  $P$ , es decir,

$$f : D(f) \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} G \subset D(f) \subset E \\ f \text{ lineal, } f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(f) \\ f|_G = g \end{cases}$$

Se deja como ejercicio demostrar que si  $f$  es maximal, entonces  $D(f) = E$  (por contrarrecíproco).

Para ello supongamos que por contradicción se tuviera  $D(f) \subsetneq E$  por lo que  $\exists x_0 \in E \setminus D(f)$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} D(f) \oplus x_0 \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x + tx_0 &\mapsto f(x) + t\alpha = \hat{f}(x + tx_0) \end{aligned}$$

Solo tendremos que ver que  $\hat{f}|_{D(f)} = f$  y que  $\hat{f}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$  para todo  $x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R}$ .

Sabemos que Esto es equivalente a

$$\begin{aligned} &\hat{f}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \quad \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff \hat{f}(t_z + tx_0) \leq p(t_z + tx_0) \quad \forall z \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff t\hat{f}(z + x_0) \leq p(t(z + x_0)) = \begin{cases} tp(z + x_0) & t > 0 \\ -tp(-z - x_0) & t < 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} f(z) + \alpha = \hat{f}(z + x_0) \leq p(z + x_0) & t > 0, z \in D(f) \\ -f(z) - \alpha = -\hat{f}(z + x_0) \leq p(-z - x_0) & t < 0, z \in D(f) \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} \alpha \leq -f(z) + p(z + x_0) \\ -f(z) - p(-z - x_0) \leq \alpha \end{cases} \quad \forall z \in D(f) \end{aligned}$$

Por lo que nos basta con demostrar lo siguiente

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leq \alpha \leq \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Podemos cambiar  $-z$  por un  $w \in D(f)$  cualquiera de la siguiente forma:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leq \alpha \leq \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Veamos que esta desigualdad se verifica. Para cualesquiera  $z, w \in D(f)$

$$\begin{aligned} f(z) + f(w) &= f(z + w) \leq p(z + w) = p(z + x_0 - x_0 + w) \leq p(z + x_0) + p(w) - x_0 \Rightarrow \\ &f(w) - f(w - x_0) \leq -f(z) + p(z + x_0) \end{aligned}$$

y hemos probado que cualquier elemento del segundo conjunto es cota superior de todos los elementos del primer conjunto, lo que prueba la existencia del  $\alpha$  probando lo buscado.  $\square$

*Observación.* Sea  $E$  un espacio normado,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación no nula ( $f \neq 0$ ) y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  lineal y continua, entonces

$$[f = \alpha] = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

es un hiperplano<sup>6</sup> cerrado<sup>7</sup>.

**Definición 0.7.** Si  $A, B \subset E$  es un espacio normado. Diremos que el hiperplano  $H = [f = \alpha]$  **separa**  $A$  y  $B$  si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Diremos que **separa estrictamente**  $A$  y  $B$  si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(x) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

**Teorema 0.8** (Primera forma geométrica del teorema de Hanh-Banach). Supongamos que  $E$  es un espacio normado,  $A, B \subset E$  dos subconjuntos de  $E$  no vacíos, disjuntos, es decir,  $A \cap B = \emptyset$ , convexos y con  $A$  abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado  $H$  que separa  $A$  y  $B$ .

*Demostración.*

**Paso 1:** Vamos a considerar  $B = \{x_0\}$  y  $\emptyset \neq A \subset E$  abierto convexo con  $x_0 \notin A$ . Elijo  $C = A - z_0$ . Se deja como ejercicio probar que  $C$  es convexo y abierto con  $0 \in C$ . Probar también que  $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$ .

Sabemos que  $\mathbb{R}y_0$  es un espacio de dimensión 1 y buscamos una función lineal, que en este espacio será de la forma

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}y_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ty_0 &\mapsto g(ty_0) = t \end{aligned}$$

Buscamos ahora una aplicación  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  que extienda a  $g$  verificando  $f(x) \leq f(y_0) = g(y_0) = 1$  para todo  $x \in C$ . El teorema de Hanh-Banach nos dirá que existe un  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  lineal tal que

$$\begin{aligned} f(ty_0) &= t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ f(x) &\leq p(x) \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

□

<sup>6</sup>basta con la linealidad (primer teorema de isomorfía)

<sup>7</sup>por ser  $f$  continua