Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

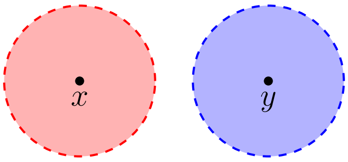
Índice general

1. Superficies compactas

1.1. Superfies topológicas

En primer lugar recordaremos algunos conceptos de Topología I para poder definir los nuevos conceptos de esta sección.

Definición 1.1. Diremos que un espacio topológico X es T2 (o de **Haussforff**, o que satisface el **segundo axioma de separación**) si $\forall x, y \in X$ existe un abierto U que contenga a x y un abierto V que contenga a y tal que $U \cap V = \emptyset$.



Definición 1.2. Decimos que un espacio topológico X es 2AN (o que cumple el **segundo axioma de numerabilidad**) si existe una base de la topología numerable.

Una vez recordados estos conceptos pasamos a las nuevas definiciones de esta sección:

Definición 1.3. Decimos que un espacio topológico X es **localmente euclídeo** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto suyo que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.4. Decimos que S es una **superficie** si S es un espacio topológico tal que $\forall x \in S$ existe un abierto que contiene a x y que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Además, pediremos que S sea T2 (o Hausdorff) y 2AN (segundo axioma de numerabilidad).

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{S}^2$ son superficies.

   Demostración. En el caso de $\mathbb{R}^2$ es trivial ya que para cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar el total, $\mathbb{R}^2$ que es abierto, contiene a x y es homeomorfo a sí mismo.

   En el caso de $\mathbb{S}^2$ podemos considerar para cada $x \in \mathbb{S}^2$ el conjunto $A = \mathbb{S}^2 \setminus \{-x\}$, es decir, la esfera quitándole la antípoda. Sabemos que A es abierto (ya que su complementario es $\{-x\}$ que es cerrado) y que contiene a x (ya que $0 \notin \mathbb{S}^2$). Además sabemos que A es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ que es un abierto de $\mathbb{R}^2$ (el total). $\square$

2. Cualquier abierto de una superficie es también una superficie. En particular, las bolas abiertas de $\mathbb{R}^2$ son también superficies.

   Demostración. Consideramos A el abierto de la superficie S y un punto cualquiera $x \in A$. Por ser S una superficie existe un abierto U que contiene a x y que es homeomorfo (por h) a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Consideramos entonces $A \cap U$ que es abierto por ser intersección de dos abiertos y que además contiene a x. Podemos considerar la restricción en el dominio del homeomorfismo h a $A \cap U$ que seguirá siendo un homeomorfismo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Como esto se verifica para todo $x \in A$ tendremos que A es una superficie. $\square$

3. Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leqslant r\} = \overline{B}(0, r)$. Entonces X no es una superficie porque para los puntos x con $\|x\| = r$ no existe un entorno abierto que lo contenga y que sea homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

   Demostración. Tomamos un punto $x \in X$ con $\|x\| = r$. Si existiese U entorno abierto suyo homeomorfo a un abierto A de $\mathbb{R}^2$ entonces $\exists V$ entorno abierto de x contenido en U que es de la forma $V = B(x, r_0) \cap X$. Entonces V es homeomorfo a un abierto A' de $\mathbb{R}^2$ (ya que sería una restricción en el dominio del homeomorfismo entre $h : U \to A$). De esta forma tendríamos que como $V \setminus \{x\}$ es convexo debe ser simplemente conexo. Sin embargo, su imagen por homeomorfismo h será $A' \setminus \{h(x)\}$ y como $h(x)$ está en el abierto A' existe un radio $r_0' > 0$ tal que $\overline{B}(h(x), r_0') \subseteq A'$. Pero el lazo dado por la frontera de dicha bola, $Fr(\overline{B}(h(x)r_0'))$ no es homotópicamente constante en $\mathbb{R}^2 \setminus \{h(x)\}$. Por tanto este lazo no es homotópicamente constante en $A' \setminus \{h(x)\}$ por lo que $A' \setminus \{h(x)\}$ no es simplemente conexo. Esto prueba que $\overline{B}(0, r)$ no es una superficie. $\square$

4. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son ejemplos de superficies. Esto se debe a que su recubridor universal es $\mathbb{R}^2$ luego sus aplicaciones recubridoras nos dan homeomorfismos locales desde abiertos de $\mathbb{R}^2$ en abiertos regularmente recubiertos de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Observación. Si X es un espacio topológico localmente euclídeo entonces cumple las propiedades locales de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, tiene una base de entornos numerable (es 1AN) y es localmente simplemente conexo. En particular, X ha de tener recubridor universal.

Definición 1.5. Sea S una superficie[1] y D un abierto dentro de S. Decimos que D es un **disco regular** en S si existe un abierto D' tal que $D \subsetneq D'$ y un homeomorfismo $h : D' \to \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} = B((0,0), 1)$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < r\} = B((0,0), r)$ con $0 < r < 1$.

Ejemplo.

[1]siempre se entiende que es una superficie topológica

1. Consideramos en $\mathbb{S}^2$:

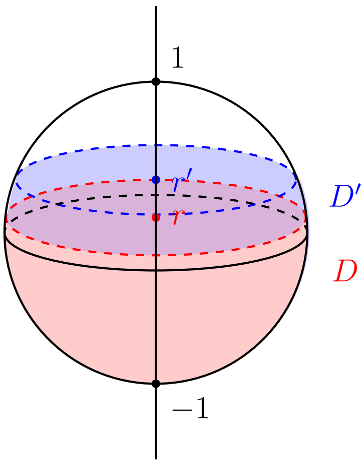
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < r\} \text{ con } -1 < r < 1$$

En efecto es un disco regular.

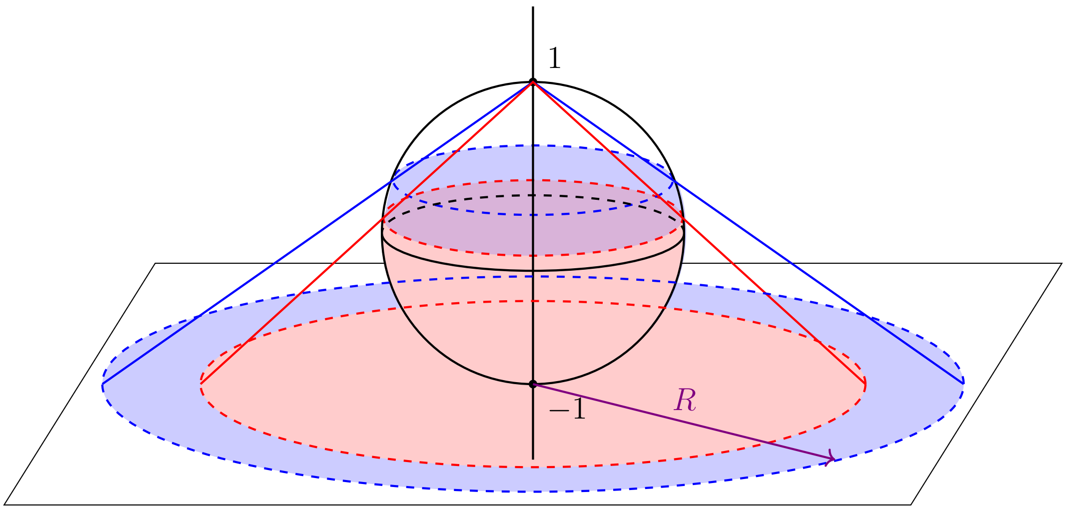
Demostración. Como $-1 < r < 1$ tenemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $r+\varepsilon < 1$. Podemos fijar dicho ε y consideramos el siguiente conjunto

$$D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < r + \varepsilon = r'\} \text{ con } -1 < r' < 1$$

En efecto tendremos que para cualquier punto $(x, y, z) \in D$ se tiene que $z < r < r'$ luego $(x, y, z) \in D'$. Además podemos considerar un punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ tal que $z = r$ y tendremos que dicho punto está en $D' \setminus D$. Podemos concluir que $D \subsetneq D'$.



Buscamos ahora un homeomorfismo $h : D' \to \mathbb{D}$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$. Pensamos en la proyección estereográfica desde el polo norte, $h : D' \to \mathbb{R}^2$. Gráficamente lo podemos ver de la siguiente forma:



□

y llegamos a que existe un radio $R > 0$ tal que podemos definir una nueva aplicación

$$\begin{array}{rccc} h': & D' & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{R}h(x,y,z) \end{array}$$

que será un homeomorfismo (por serlo h). Además, es fácil ver que $h'(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$.

2. Consideramos la esfera sin el polo norte $D = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ en $\mathbb{S}^2$. En este caso tendremos que no es un disco regular ya que el único abierto D' que contiene estrictamente a D es el total $D' = \mathbb{S}^2$ que sabemos que no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

3. $\mathbb{D}_r = B((0,0),r) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un disco regular en $\mathbb{R}^2$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Sin embargo, $\mathbb{D}_r$ no es regular en $S = \mathbb{D}_r$.

4. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el siguiente conjunto

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geqslant 0\}$$

Entonces D no puede ser un disco regular.

Demostración. Si existiese un D' que contiene a D y contenido en $\mathbb{R}^2$ con $h : D' \to \mathbb{D}$ homeomorfismo tal que $h(D) = \mathbb{D}_r$ podemos tomar su restricción $h_{|D' \setminus D} : D' \setminus D \to \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r$ que seguirá siendo un homeomorfismo. Tenemos además que $D \subsetneq D \subseteq \mathbb{R}^2$ luego $D' \setminus D \subseteq \{(x,0) : x \geqslant 0\}$. Entonces tendremos que $(D' \setminus D) \setminus \{(x,0)\}$ no es convexo pero $h((D' \setminus D) \setminus \{(x,0)\}) = (\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r) \setminus \{(h(x,0))\}$ es conexo por lo que no pueden ser homeomorfos y llegamos a contradicción. □

Lema 1.1. *Sea p_0 un punto de una superficie S. Dado un entorno U de p_0 existe D disco regular que contiene a p_0 y está contenido en U. En particular, los discos regulares forman una base de la topología.*

Demostración. Como S es una superficie, entonces para p_0 existe un abierto V que contiene a p_0 y un homeomorfismo

$$\varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^2$$

sobre $\varphi(V)$ que ha de ser abierto de $\mathbb{R}^2$. Ya que $\varphi(U \cap V)$ es un entorno de $\varphi(p_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tenemos que existe un $R_0 > 0$ tal que

$$B(\varphi(p_0), R_0) \subseteq \varphi(U \cap V)$$

Tomamos

$$D = \varphi^{-1}\left(B\left(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2}\right)\right)$$
$$D' = \varphi^{-1}(B(\varphi(p_0), R_0))$$

Componiendo φ con una transformación afín podemos llevar las bolas $B\left(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2}\right)$ y $B(\varphi(p_0), R_0)$ a $\mathbb{D}_{1/2}$ y $\mathbb{D}$ respectivamente. □

Definición 1.6. Sean S_1 y S_2 dos superficies conexas y disjuntas. Tomamos $D_1 \subseteq S_1$ y $D_2 \subseteq S_2$ discos regulares y consideramos un homeomorfismo $h : Fr(D_1) \to Fr(D_2)$. Sobre el espacio topológico $X = (S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2)$ consideramos la relación de equivalencia R dada por

$$x_1 R x_2 \iff \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{z, h(z)\} \text{ con } z \in Fr(D_1) \end{array} \right.$$

Denotamos por $S_1 \# S_2$ al espacio topológico cociente de X bajo la relación de equivalencia R y lo llamaremos **suma conexa** de S_1 con S_2.

Teorema 1.2. El espacio topológico $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa que, salvo homeomorfismo, no depende de los discos D_1 y D_2 regulares ni del homeomorfismo h entre sus fronteras.

Observación.

1. $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.

2. Si S_1 es una superficie cualquiera y S_2 es la esfera $\mathbb{S}^2$, entonces

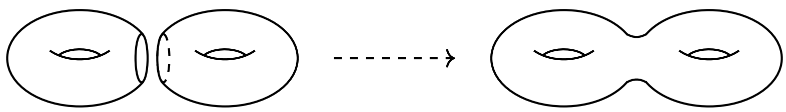
$$S_1 \# S_2 = S_1 \# \mathbb{S}^2 \cong S_1$$

3. Si tenemos n toros ($n \geqslant 2$) podemos definir

$$\mathbb{T}_n \equiv \text{suma conexa de los } n \text{ toros}$$

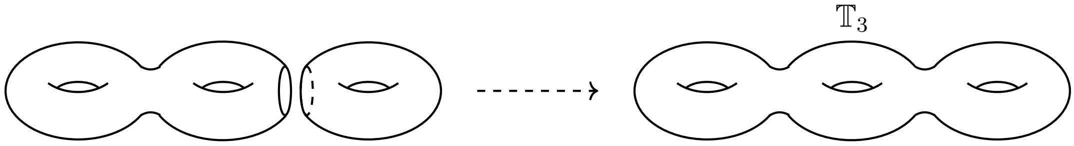
   que recibe el nombre de **n-toro** o **esfera con n asas**.

$\mathbb{T}_2$



2-toro

$\mathbb{T}_3$



3-toro

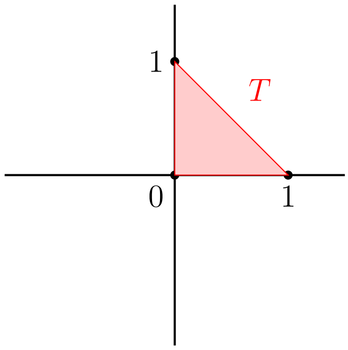
4. La suma conexa de n planos proyectivos la llamaremos[2] n **plano proyectivo**, $\mathbb{RP}^2_n$.

[2] no confundir con $\mathbb{RP}^n$

1.2. Presentaciones poligonales de superficies

Definición 1.7. Consideramos el triángulo

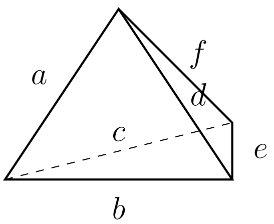
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$$

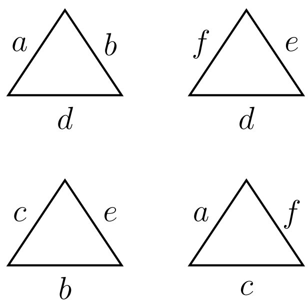


Decimos que un espacio topológico X es un **triángulo** (topológico) si existe un homeomorfismo $h : T \to X$. En tal caso, llamaremos **vértices** de X a la imagen mediante h de los vértices de T y **aristas** de X a la imagen mediante h de las aristas de T.

Teorema 1.3 (Teorema de Radó)**.** Toda superficie compacta puede ser triangulada, es decir, la superficie puede verse como una unión finita triángulos (topológicos) de forma que dos triángulos distintos o bien son disjuntos o bien solo se intersecan en un vértice o solo en una arista.

Observación. La idea de este teorema será que toda superficie compacta puede ser reconstruida pegando un número finito de triángulos a través de sus aristas.





Definición 1.8. Llamaremos presentación poligonal de una superficie compacta a una expresión de la forma

$$\mathcal{P} = \{a_1, ..., a_n; w_1, ..., w_m\} \text{ con } n, m \in \mathbb{N}$$

donde los a_i son símbolos y los w_j son expresiones del tipo

$$w_i = a_{i1}^{\varepsilon_{i1}} ... a_{ik}^{\varepsilon_{ik}}$$

donde $k \geqslant 3$ (es decir, hay al menos 3 símbolos en la expresión w_i) y cada $\varepsilon_{il} \in \{1, -1\}$ para cada $l \in \{1, ..., k\}$. Y además, el número de veces que aparece cada símbolo en el total de los w_i es 2.

Ejemplo.

1. $\mathcal{P} = \{a, b; aba^{-1}b^{-1}\}$.

2. $\mathcal{P} = \{a, b, c; aab, bcc^{-1}\}$.

3. $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; aab, bcd, cdd^{-1}\}$ no es una presentación ya que la d aparece 3 veces.

Definición 1.9. A cada presentación poligonal $\mathcal{P}$ le asociaremos un espacio toloógico que denotaremos por $|\mathcal{P}|$ y que llamaremos la **realización geométrica de la presentación poligonal**. Su construcción es la siguiente

1. Para cada w_i consideramos un polígono P_i (regular) con número de lados igual al número de símbolos de w_i. Los P_i serán disjuntos entre sí.

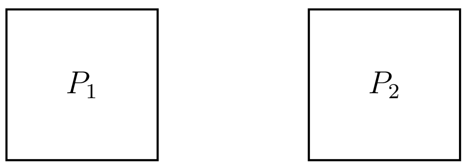
2. Para cada P_i asociado a un w_i elegimos un lado cualquiera y en sentido contrario de las agujas del reloj, nombramos cada lado de P_i con el nombre del símbolo. Además a cada lado le daremos la orientación contraria a las agujas del reloj si el exponente es 1 y la orientación contraria si el exponente es -1.

3. En el espacio topológico dado por la unión de todos los polígonos P_i consideramos la relación la equivalencia que identifica los lados con igual nombre mediante el único homeomorfismo (aplicación que lleva un lado en otro sin cambiar el sentido de las flechas).

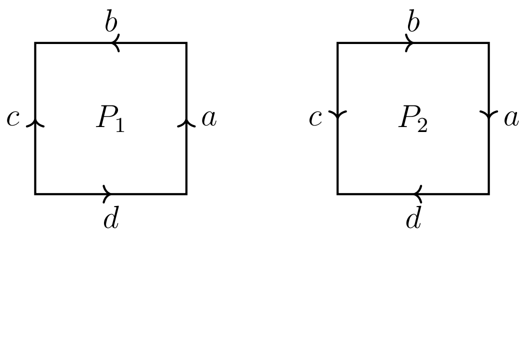
4. Llamamos $|\mathcal{P}|$ al espacio cociente dado por la unión de los polígonos bajo la relación de equivalencia anterior.

Ejemplo. $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abc^{-1}d, a^{-1}b^{-1}cd^{-1}\}$

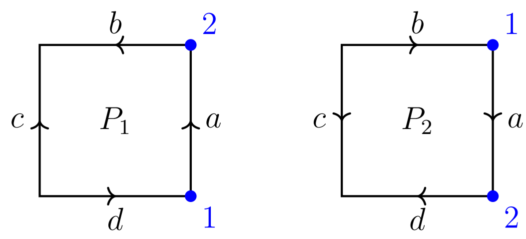
1.



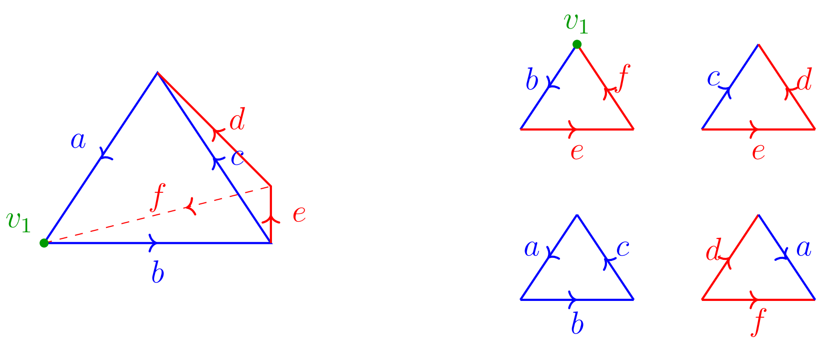
2.



3.



Ejemplo.



Tendríamos entonces $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abc, c^{-1}ed, a^{-1}d^{-1}f, bef\}$.

Proposición 1.4. El espacio topológico $|\mathcal{P}|$ asociado a una presentación poligonal $\mathcal{P}$ es una superficie compacta (posiblemente no conexa).

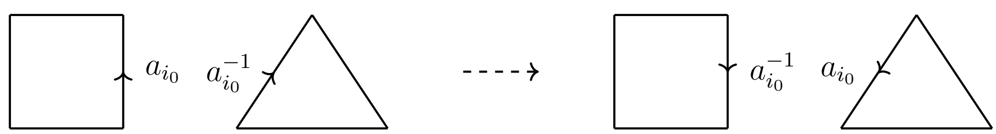
Observación. Toda superficie compacta debe tener una presentación poligonal y recíprocamente, toda presentación poligonal nos da una superficie compacta. Como una misma superficie puede tener muchas (de hecho infinitas) presentaciones poligonales, nuestro objetivo será dada una presentación poligonal $\mathcal{P}$ llegar a otra presentación poligonal $\mathcal{P}'$ reconocible que represente a la misma superficie

1.2.1. Transformaciones elementales

Dada una presentación poligonal $\mathcal{P}$ vamos a ver una serie de transformaciones que, aunque cambian la presentación, no cambia la superficie asociada $|\mathcal{P}|$ (salvo homeomorfismo).

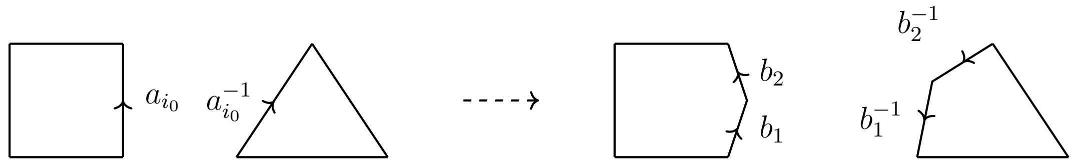
Renombrar

Dado un símbolo a_{i_0} en $\mathcal{P}$ podemos cambiar su nombre por otro distinto b_{i_0} que no esté siendo usado. También podemos cambiar el exponente de un símbolo las dos veces que aparezca este, es decir, cambiaríamos a_i por a_i^{-1} (en ambos lados a la vez).



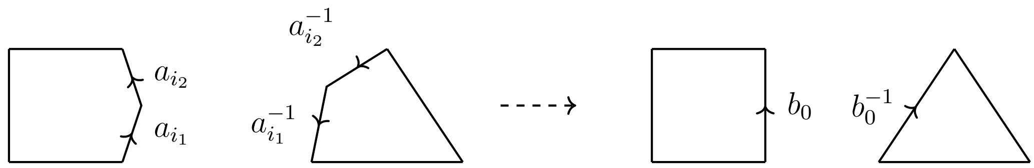
Subdividir

Podemos cambiar un símbolo a_{i_0} en $\mathcal{P}$ por dos símbolos $b_1 b_2$ y $a_{i_0}^{-1}$ por $b_2^{-1} b_1^{-1}$, donde los símbolos b_1 y b_2 no están siendo usados.



Consolidar

Es el proceso contrario a subdividir. Si en las expresiones aparecen $a_{i_1} a_{i_2}$ y/o $a_{i_2}^{-1} a_{i_1}^{-1}$ dos veces (una de cada o dos de la misma), entones podemos cambiar $a_{i_1} a_{i_2}$ por b_0 y $a_{i_2}^{-1} a_{i_1}^{-1}$ por b_0^{-1} (donde b_0 es un símbolo nuevo). Esto siempre se podrá hacer de forma que ninguna expresión se quede con menos de 3 símbolos.



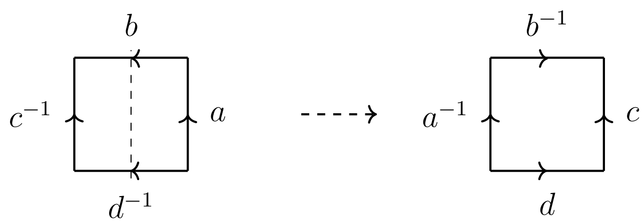
Reflejar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

la podemos cambiar por

$$w_i' = a_{i_l}^{-\varepsilon_l} ... a_{i_2}^{-\varepsilon_2} a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$$



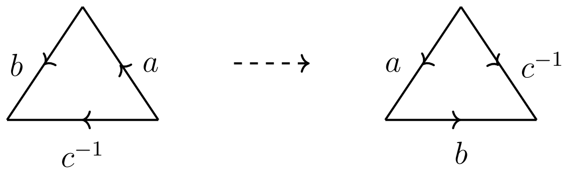
Rotar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

la podemos cambiar por

$$w_i' = a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l} a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k}$$



Cortar

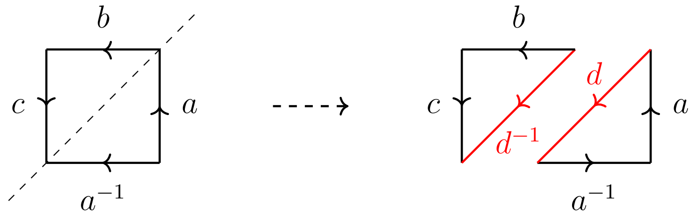
Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

podemos sustituirla por las dos expresiones

$$w_i' = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} b \quad , \quad w_i'' = b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

Esto se podrá hacer siempre que w_i' y w_i'' se queden con al menos de 3 símbolos.



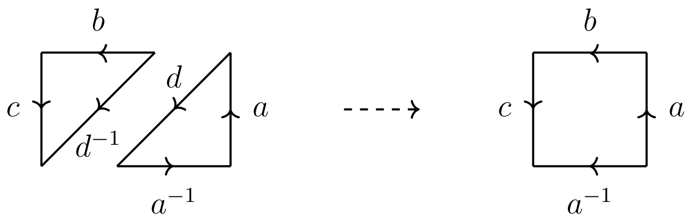
Pegar

Es la operación opuesta a cortar. Dadas dos expresiones de la forma

$$w_i' = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_0} \quad , \quad w_i'' = a_{i_0}^{-1} a_{j_1}^{\varepsilon_1} ... a_{j_l}^{\varepsilon_l}$$

las podemos sustituir por una única

$$w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{j_1}^{\varepsilon_1} ... a_{j_l}^{\varepsilon_l}$$



Desdoblar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

le podemos añadir un símbolo nuevo b cambiando la expresión anterior por

$$w_i' = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k} b b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} ... a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

Doblar

Es el proceso contrario a desdoblar. Si una expresión w tiene de forma consecutiva un símbolo y el mismo con exponente cambiado podemos quitar dicho símbolo de la expresión. Esto se podrá hacer siempre que al quitarle estos símbolos queden al menos 3.

Ejemplo. $\mathcal{P} = \{a, b, c; a^{-1}cb,\ ac^{-1}b^{-1}\}$