Preguntas-segundo-control-tipo-t...

rayito_95

Inferencia Estadística

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Preguntas 2º control inferencia. 1.

- Sea $(X_1, \dots, X_n)$ mas de X con $f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}$, $x > 0$ y $\theta > 0$. Sabiendo que la familia de distribuciones de X es regular y que $E_\theta(\ln(X+1)) = \frac{1}{\theta}$ y $Var_\theta(\ln(X+1)) = \frac{1}{\theta^2}$. Entonces la cota de Frechet-Cramer-Rao para la varianza de estimador insesgado regular en θ^2 es:

a) $\frac{4\theta^4}{n}$ y no es alcanzable

b) $\frac{2\theta^4}{n}$ y no es alcanzable

c) $\frac{4\theta^4}{n}$ y es alcanzable

d) $\frac{2\theta^4}{n}$ y es alcanzable.

Notemos que: $f_\theta(x) = \exp\{\ln(\theta) - (1+\theta)\ln(1+x)\}$

Luego: $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} - \ln(1+x)$

Por tanto: $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = n I_X(\theta) = n\, Var_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X)\right) =$

$= n\, Var_\theta\left(\frac{1}{\theta} - \ln(1+X)\right) = n\, Var_\theta(\ln(1+X)) = \frac{n}{\theta^2}$

y la cota FCR: $\frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)} = \frac{(2\theta)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{4\theta^4}{n}$

Para ver si alcanza la cota basta comprobar que el estimador es eficiente, como:

$0 < I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) < \infty$ la fam. es regular y el estimador es insesgado de segundo orden aplicamos el criterio:

$\rightarrow I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta) g'(\theta) \Rightarrow a(\theta) = \dfrac{n}{2\theta^3}$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = a(\theta)(T - \theta^2)$$

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + x_i) = \frac{n}{2\theta^2}(T - \theta^2)$$

despejando: $T = \left(\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + x_i) \right) \dfrac{2\theta^2}{n}$

depende de $\theta \Rightarrow$ no alcanza la cota.

solución: a).

- Dos candidatos A y B se presentan a una elección. Se realizan de forma independiente cinco encuestas, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento, finalizando cada una de ellas cuando se encuentra el primer votante de A. Decir cuál es la afirmación correcta.

a) si la persona entrevistada en las 5 encuestas han sido 4,5,6,6 y 4, la estimación más verosímil de elegir un votante de B en la población es 0.2.

b) Si la estimación máximo verosímil de la probabilidad de que el primer votante de A sea el segundo entrevistado es 0.16, el número total de personas entrevistadas ha sido 30.

c) Si las personas entrevistadas en las 5 encuestas han sido 3,4,2,5 y 1, la estimación más verosímil de la probabilidad de que el primer votante de A sea el segundo entrevistado es $\frac{2}{9}$

d) Si en dos encuestas ha salido A a la primera, en 1 a la cuarta y en 2 a la tercera, la estimación más verosímil de la probabilidad de que los dos primeros votantes sean de B es $\frac{25}{144}$.

Considero: $X \equiv$ "núm. de votantes de B antes del primero de A".

$X \to \{ G(p) : p \in (0,1) \}$ ($p \equiv$ "prob. de que el vot. sea de A)

$n = 5$.

Calculemos la EMV:

$$f_p(x) = (1-p)^x p = \exp\{ \ln(p) + x \ln(1-p) \}$$

$$L_{X_1,\dots,X_5}(p) = \exp\{ 5\ln(p) + \ln(1-p) \sum_{i=1}^{5} x_i \}$$

luego: $\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L_{x_1,\dots,x_5}(p) = \frac{5}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{1-p} = 0 \iff$

$\iff p = \frac{5}{5+\sum_{i=1}^{5} x_i}$

$1-\hat{p} = 0.8$ FALSA

a) $\hat{p}(3,4,5,5,3) = \frac{5}{5+20} = \frac{1}{5} = 0.2$, ~~VERDADERA~~

b) considero $g(p) = P_p(X = 1) = p(1-p)$

$\widehat{g(p)} = \hat{p}(1-\hat{p}) = \frac{5}{5+25}\left(1 - \frac{5}{5+25}\right) = 0.13\hat{8} \neq 0.16$

↓ zehna $\qquad \sum_{i=1}^{5} x_i + 5 = 30$ $\qquad$ FALSA.

$g(\hat{p}) = \frac{2}{9}$

c) $\hat{p}(2,3,1,4,0) = \frac{5}{5+10} = \frac{1}{3}$. VERDADERA

d) considero $h(p) = P_p(X = 2) = (1-p)^2 p$

$\widehat{h(p)} = \hat{p}(1-\hat{p})^2 = \frac{5}{5+7}\left(1 - \frac{5}{5+7}\right) = \frac{35}{144} \neq \frac{25}{144}$

↓ zehna $\qquad \sum_{i=1}^{5} x_i = 7$ $\qquad$ FALSA.

solución: ~~a)~~ c)

- Selecciona la correcta

a) si T es el UMVUE para $\theta \Rightarrow h(T)$ es el UMVUE para $h(\theta)$

b) El UMVUE de una función paramétrica es el estimador de 2º orden que minimiza unif.

la varianza.

c) El UMVUE de una función paramétrica es el estimador insesgado de 2º orden que minimiza unif. el ECM.

d) si T es suficiente, $E_\theta(S) = g(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$ y $E_\theta(S^2) < \infty$, $\forall \theta \in \Theta \Rightarrow E(S|T)$ es el UMVUE de $g(\theta)$

a) [illegible]

Basta tomar h de forma que $h(T)$ no sea insesgado en $h(\theta)$: FALSA

b) El estimador tiene que ser insesgado: FALSA.

c) $ECM(T) = E((T-g(\theta))^2) = E(T^2) - \cancel{g(\theta)E(T)} + \cancel{g(\theta)^2}$

Luego $var(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E(T^2) - g(\theta)^2 =$

$= ECM(T) - g(\theta)^2$

Minimizar el ECM $\Rightarrow$ Minimizar var $\Rightarrow$ UMVUE

~~verda~~ VERDADERA.

CARi

Comparte trayecto y ahorra con CARi

Tu ruta de siempre, con compis, buen rollo
y un ingreso extra en cada viaje

CARi es la app para compartir trayecto en tu uni. Conduce o súbete de copiloto, conecta fácil y ahorra en cada viaje

CARi

¡Escanea!

d) Por el Teorema de Lehmam-Scheffè basta tomar un T que no sea completo convenientemente, para que no sea el UMVUE. FALSA.

solución: c)

- Sea $(X_1, \dots, X_n)$ mas de X con $f_\theta(x) = -\frac{2x}{(1-\theta)^2}$, $1-\theta < x < 0$ y $\theta > 0$. Elija la correcta.

a) Si los datos observados son $-5, -4.8, -1.2, -3, -2.5, -6.4$, la emv de θ es 41.96.

b) El emv de θ es $-\min X_i$

c) El emv de por el método de los momentos es $1 - \frac{3}{2}\bar{X}$

d) No existe un emv. de θ.

Calculemos el EMV.

$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = \frac{(-2)^n \prod_{i=1}^n x_i}{(1-\theta)^{2n}} I_{\mathbb{R}^+}(\min x_i - 1 + \theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = \frac{-(-2)^n \prod_{i=1}^n x_i (-2n)(1-\theta)^{2n-1}}{(1-\theta)^{4n}} =$$

$$= \frac{2n}{(1-\theta)} f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) \geq 0$$ monótona ~~creciente~~ decreciente

y $\theta > 1 - \min x_i \rightarrow$ emv.

a) $\hat{\theta}(-5,-4.8,-1.2,-3,-2.5,-6.4) = 1-(-6.4) = 7.4 \neq 41.96$ FALSA.

b) FALSA

c) $$m_1 = \int_{1-\theta}^{0} x\left(-\frac{2x}{(1-\theta)^2}\right)dx = -\frac{2}{(1-\theta)^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{1-\theta}^{0} =$$

$$= -\frac{2}{\cancel{(1-\theta)^2}}\left(-\frac{(1-\theta)^3}{3}\right) = \frac{2}{3}(1-\theta) \Rightarrow \theta = 1 - \frac{3}{2}\bar{X}$$

VERDADERA

d) FALSA

solución: c).

- Sea $(X_1,\dots,X_n)$ mas de X con $f_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}$ $x>0$, $\theta \in \mathbb{R}$. sabiendo que la familia de distrib.

es regular y que $E_\theta(\overline{X}) = \frac{2}{\theta}$ y $var_\theta(\overline{X}) = \frac{2}{\theta^2}$.

Entonces la cota de FCR para la varianza del estimador regular insesgado en θ^2 es:

a) $\frac{\theta^4}{2n}$ y no es alcanzable

b) $\frac{\theta^4}{2n}$ y es alcanzable

c) $\frac{2\theta^4}{n}$ y no es alcanzable

d) $\frac{2\theta^4}{n}$ y es alcanzable.

$I_{\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_n}(\theta) = n\, I_{\overline{X}}(\theta) = n\, Var_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(\overline{X})\right) =$

$= n\, Var_\theta\left(\frac{2}{\theta} - \overline{X}\right) = \frac{2n}{\theta^2}$

$f_\theta(\overline{X}) = \theta^2 \overline{X} e^{-\theta \overline{X}} = \exp\{2\ln(\theta) + \ln(\overline{X}) -$

$- \theta \overline{X}\}$

$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(\overline{X}) = \frac{2}{\theta} - \overline{X}$

cota de FCR: $\frac{2\theta^4}{n}$

veamos si se alcanza:

$$a(\theta) = \frac{2n}{\theta^2} \cdot \frac{1}{2\theta} = \frac{n}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(2n\ln(\theta) + \sum \ln(x_i) - \theta\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n}{\theta^3}(T - \theta^2) \Rightarrow T = \frac{\theta^3}{n}\left(\frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\theta}\right)$$

$\rightarrow$ depende de θ luego no se alcanza la cota.

solución: c).

- Se lanza un dado cargado hasta que sale uno y se repite el experimento seis veces de forma indep. Decir cual es la falsa

a) si la emc de la prob. de que salga uno en la segunda tirada es 0.16, el núm tot. de lanzamientos ha sido 30.

b) si en dos repeticiones ha salido el uno a la primera, en dos a la segunda y en las otras dos a la tercera, la EMV es 0.5.

c) si los lanzamientos necesarios para obtener el 1 en las 6 rep. ha sido 5,4,6,6,4 y 5 la emv de no salir 1 es 0.8.

d) Si los lanzamientos han sido 6,5,7,7,5 y 6, la emv de que el 1 salga en la segunda tirada es $\frac{1}{6}$.

Calculo la emv. de p.

$X \equiv$ "Nº de veces que sale un núm distinto del uno antes del primer 1."

$X \to \{ G(p) : p \in (0,1) \}$ $p \equiv$ "prob de 1".

$$f_\theta(x) = p(1-p)^x = \exp\{\ln(p) + x\ln(1-p)\}$$

$$f_\theta^6(x) = \exp\{6\ln(p) + \sum_{i=1}^{6} x_i \ln(1-p)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \overset{\ln}{\downarrow} f_\theta(x_1,\dots,x_6) = \frac{6}{p} - \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{1-p} = 0 \iff$$

$$\iff 6 - 6p - \sum_{i=1}^{6} x_i\, p = 0 \iff p = \frac{6}{6+\sum_{i=1}^6 x_i}$$

a) $g(p) = P_p(X = 1) = p(1-p)$

$$\widehat{g(p)} = \underset{\text{Zehna}}{\underbrace{\frac{6}{6+\sum_{i=1}^6 x_i}}}\left(1 - \frac{6}{6+\sum_{i=1}^6 x_i}\right) = 0.16 \quad \text{VERDADERA}$$

$$30 = \sum_{i=1}^{6} x_i + 6$$

b) $\hat{p}(0,0,1,1,2,2) = \dfrac{6}{6+6} = 0.5$ ~~FALSA~~ VERDADERA

c) $g(p) = 1-p$, $\widehat{g(p)} = 1 - \dfrac{6}{6+24} = 0.8$ VERDADERA

d) $g(p) = P_p(X = 1) = p(1-p)$

$\widehat{g(p)} = \dfrac{6}{6+30}\left(1 - \dfrac{6}{6+30}\right) = \dfrac{5}{36}$ FALSA

Solución: d)

• sea $f_\theta(x) = \dfrac{3x^2}{(\theta+1)^3}$, $0 < x < \theta+1$, $\theta > -1$.

selecciona la correcta

a) No existe el ~~UMVUE~~ emv de θ

b) Si los datos observados son 5, 4.8, 1.2, 3, 2.5, 6.4, el emv de θ^2 vale 39.96

c) El emv de θ es máx X_i

d) El emv de θ por el método de los momentos es $\frac{4}{3}\bar{X} - 1$.

Calculemos el emv.

$f_\theta^n(x) = \dfrac{3^n \prod_{i=1}^n x_i^2}{(\theta+1)^{3n}}$

$\dfrac{\partial}{\partial\theta} f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = -\dfrac{3^n \prod_{i=1}^n x_i^2 \cdot 3n(\theta+1)^{3n-1}}{(\theta+1)^{6n}} =$

$$= -\frac{3n}{\theta+1} f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) < 0$$ monot. decreciente

$\max X_i - 1 < \theta$
↳ emv.

a) FALSA

b) $g(\theta) = \theta^2 \Rightarrow \widehat{g(\theta)} = (6.4-1)^2 = 29.16$
FALSA.

c) FALSA

d) $m_1 = \int_0^{\theta+1} x \frac{3x^2}{(\theta+1)^3} dx = \frac{3}{(\theta+1)^3} \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big]_0^{\theta+1} =$

$= \frac{3}{4}(\theta+1) \Rightarrow \theta = \frac{4}{3}\bar{X} - 1$ VERDADERA.

solución: d).

- Selecciona la falsa

a) El UMVUE de una fun. paramétrica es el estim. de segundo orden que minimiza unif. la varianza

b) si T es suf. y comp. $E_\theta(S) = g(\theta)$, $E_\theta(S^2) < \infty$ $\forall \theta \in \Theta \Rightarrow E(S|T)$ es el UMVUE de $g(\theta)$

c) El UMVUE de una fun. param. es el estim. insesgado de 2º orden que minimiza unif. la var.

d) si T es suf y de 2º orden $\Rightarrow$ T es el UMVUE para $E_\theta(T)$

a) El estim. tiene que ser insesgado. FALSA.

b) Thm. de Lehemann-Scheffe. VERDADERA

c) Ya demostrado. VERDADERA.

d) Por el Thm. de ~~Lehemann-Scheffe~~ Rao-Blackwell • si T es suf y S estim. insesg. de 2º orden $\Rightarrow$ $E(S/T)$ ~~insesgado~~.

Tomando

- Sea $(X_1, \dots, X_n)$ mas de una va. X con $f_\theta(x) = \theta x^{\theta - 1}$, $0 < x < 1$ y $\theta > 0$. Sabiendo que la fam. es regular, con $I_X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Elija la opción correcta.

a) $\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ es eficiente para $-\frac{n}{\theta}$

b) El UMVUE de $\ln(\theta)$, si existe es ef.

c) Toda fun. lineal de θ admite estim. ef.

d) Sea $n = 1$ y $U(X)$ insesg. en $\frac{1}{\theta}$. Si $E(U(X)\ln(X)) = -\frac{1}{\theta^2}$ $\Rightarrow$ $U(X)$ regular.

$$f_\theta(x) = \exp\{\ln(\theta) + (\theta-1)\ln(x)\}$$

$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = \exp\{n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n}{\theta} + \displaystyle\sum_{i=1}^n \ln(x_i) = a(\theta)(T - g(\theta)) \\ I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = \dfrac{n}{\theta^2} = a(\theta)\, g'(\theta) \end{array}\right\}$$

a) $g(\theta) = -\frac{n}{\theta} \Rightarrow g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a(\theta) = 1$ y $\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) =$

$= 1\left(T + \frac{n}{\theta}\right) \iff T = \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$. VERDADERA.

b)

las únicas fc. paramétricas que admiten est. ef. son las del tipo $a\left(-\frac{n}{\theta}\right) + b \neq \ln(\theta)$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$. FALSA.

c) $a\left(-\frac{n}{\theta}\right) + b \neq a'\theta + b'$ FALSA

d) Es reg. si $\frac{\partial}{\partial\theta} E(U(\underline{X})) =$

$= E\left(U(\underline{X}) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta^1(\underline{X})\right)$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E(U(\underline{X})) = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$E\left(U(\underline{X}) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta^1(\underline{X})\right) = E\left(U(\underline{X})\left(\frac{1}{\theta} + \ln(\underline{X})\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} = 0$$

FALSA.

solución a)