Tema 2: Derivación e integración numérica
Segunda parte: integración numérica

Métodos Numéricos II

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Curso 2024/25

1 Integración Romberg

2 Integración adaptativa

4. Integración Romberg

Recordemos la fórmula del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

Notemos por T_n la fórmula del trapecio compuesta para una división de $[a,b]$ en n intervalos, es decir, consideremos una partición uniforme con $h = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$ y $f_i = f(x_i)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f(b)\right) = T_n$$

Integración Romberg

Se puede demostrar (Kincaid & Cheney 1994, pág. 483) que

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_n + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_m h^{2m} + \cdots$$

y duplicando la densidad de nodos en el mismo intervalo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = T_{2n} + a_1 \frac{h^2}{2^2} + a_2 \frac{h^4}{2^4} + \cdots + a_m \frac{h^{2m}}{2^{2m}} + \cdots$$

Por tanto:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx & = & T_n + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_m h^{2m} + \cdots \\
\displaystyle 4\int_a^b f(x)\,dx & = & 4T_{2n} + a_1 h^2 + a_2 \frac{h^4}{2^2} + \cdots + a_m \frac{h^{2m}}{2^{2m-2}} + \cdots \\
\hline
\displaystyle 3\int_a^b f(x)\,dx & = & (4T_{2n} - T_n) + \frac{3}{4} a_2 h^4 + \cdots + a_m \left(\frac{1}{2^{2m-2}} - 1\right) h^{2m} + \cdots
\end{array}$$

Integración Romberg

Por lo que se puede eliminar el término en h^2:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} + b_2 h^4 + \cdots + b_m h^{2m} + \cdots \tag{1}$$

lo que implica un aumento del orden del término de error de 2 a 4 en la fórmula $\frac{4T_{2n} - T_n}{3}$.

Esta misma idea puede aplicarse recursivamente a las nuevas fórmulas así diseñadas, para aumentar el orden de 4 a 6, de 6 a 8, etc.

Denotamos por

$$R(j,0) = T_{2^j},$$

$$R(j+1,1) = \frac{4T_{2\times 2^j} - T_{2^j}}{3} = \frac{4R(j+1,0) - R(j,0)}{3},$$

$$R(j,k) = \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k - 1},\ j = 0,1,\ldots,N,\ k = 1,\ldots,j$$

Integración Romberg

La integración Romberg consiste en construir la tabla

$$
\boxed{\begin{array}{ccccc}
R(0,0) & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R(N,0) & R(N,1) & \cdots & \cdots & R(N,N)
\end{array}}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
R(j,0) &= T_{2^j} \\
R(j,k) &= \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k - 1}, \ j = 0,1,\ldots,N, \ k = 1,\ldots,j
\end{aligned}
$$

Integración Romberg

El interés práctico de la integración Romberg viene justificado por el siguiente

Teorema 4 (Kincaid & Cheney 1994, pág. 484)

Si $f \in \mathcal{C}[a,b]$ entonces $\lim\limits_{N\to\infty} R(N,k) = \int_a^b f(x)\,dx \;\forall k.$

Entonces cada columna de la tabla converge a la integral.

La sucesión de aproximaciones que se suele tomar es la de la diagonal de la tabla $\{R(N,N)\}_{N=0}^{\infty}$ junto con un criterio de parada basado en que la diferencia absoluta entre los dos últimos términos sea menor que una tolerancia prefijada.

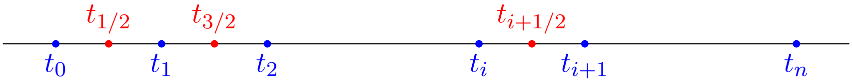
Integración Romberg

Para construir la tabla de Romberg:

- Cada término se construye fácilmente a partir de dos términos de la columna anterior:

$$R(j,k) = \frac{4^k R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^k - 1}$$

- Para la primera columna, observa que:



Entonces

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+\frac{1}{2}}$$

con lo cual la mitad de los valores de f vienen de la fórmula anterior, y sólo hay que añadir los valores en los nuevos nodos, intermedios entre los anteriores.

Integración Romberg: ejemplo

Se pretende calcular de forma aproximada $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

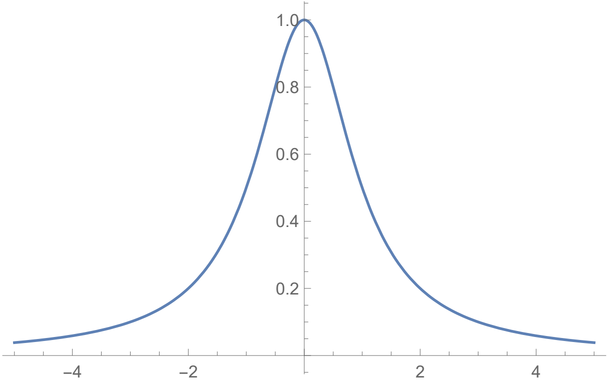


Figura: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Integración Romberg: ejemplo

Para construir la primera columna de la tabla tenemos en cuenta la fórmula del trapecio y las recurrencias.

$$T_{2^{j+1}} = \frac{1}{2}\Big(T_{2^j} + \frac{b-a}{2^j}\sum_{i=0}^{2^j-1} f_{i+1/2}\Big) = \frac{1}{2}T_{2^j} + \frac{b-a}{2^{j+1}}\sum_{i=0}^{2^j-1} f_{i+1/2}$$

$$R(0,0) = T_1 = (5-(-5))(f[-5]+f[5])/2 = 0.38461538$$

$$R(1,0) = T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{b-a}{2}f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{5-(-5)}{2}f(0) = 5.19230769$$

$$R(2,0) = T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{b-a}{2^2}\sum_{i=0}^{1} f_{i+1/2} = \frac{1}{2}T_2 + \frac{b-a}{2^2}(f(-2.5)+f(2.5))$$

$$= 3.28580902$$

Así vamos calculando la primera columna de la tabla.

Integración Romberg: ejemplo

N	$R(N,0)$	$R(N,1)$	$R(N,2)$	$R(N,3)$	
0	0.38461538				
1	5.19230769	6.79487179			
2	3.28580902	2.65030946	2.37400531		
3	2.78448937	2.61738282	2.61518771	2.61901600	
4	2.74611162	2.73331903	2.74104812	2.74304590	$\ddots$
5	2.74656094	2.74671072	2.74760350	2.74770755	$\cdots$
6	2.74674135	2.74680149	2.74680754	2.74679491	$\cdots$
7	2.74678649	2.74680153	2.74680153	2.74680144	$\cdots$

Una vez calculada la primera columna:

$$R(1,1) = \frac{4R(1,0) - R(0,0)}{3} = \frac{4 \times 5.19230769 - 0.38461538}{3} = 6.79487179$$

$$R(2,1) = \frac{4R(2,0) - R(1,0)}{3} = \frac{4 \times 3.28580902 - 5.19230769}{3} = 2.65030946$$

$$R(2,2) = \frac{4^2 R(2,1) - R(1,1)}{4^2 - 1} = \frac{16 \times 2.65030946 - 6.79487179}{15} = 2.37400531$$

Integración Romberg: ejemplo

. . .

N		$R(N,4)$	$R(N,5)$	$R(N,6)$	$R(N,7)$
4	$\cdots$	2.74353229			
5	$\cdots$	2.74772583	2.74772993		
6	$\cdots$	2.74679133	2.74679041	2.74679018	
7	$\cdots$	2.74680146	2.74680147	2.74680148	2.74680148

Entonces

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{x^2+1}\, dx \approx 2.74680148$$

El valor exacto de la integral es:

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{x^2+1}\, dx = 2\arctan(5) \approx 2.74680153389003$$

Integración Romberg: ejercicios

1. Se pretende aproximar mediante integración de Romberg la integral:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx.$$

   Calcula para ello $R(2,2)$.

2. Dada la regla de integración numérica

$$\int_a^b f(x)\, dx = L_n(f,h) + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

   ¿Cómo se haría un procedimiento similar a la integración de Romberg con esta fórmula?

5. Integración adaptativa

Las fórmulas compuestas requieren el uso de nodos uniformemente espaciados. Para muchas situaciones esto no es un inconveniente, pero podría ser inapropiado cuando se trata de integrar una función en un intervalo que contiene regiones con variaciones funcionales grandes y regiones con variaciones funcionales pequeñas.

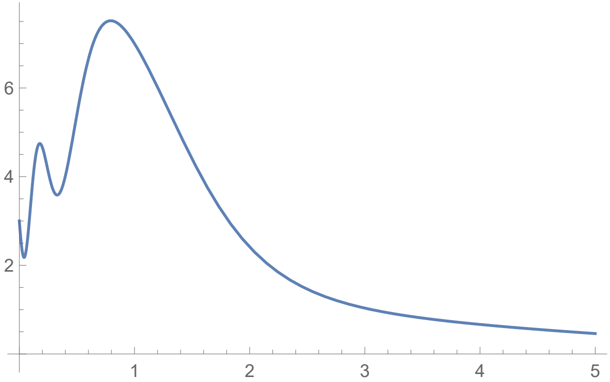


Figura: Gráfica de la función $f(x) = \frac{8}{x^2-2x+2} + \sin\left(\frac{3\pi}{x+0.5}\right) - 1$.

Integración adaptativa

En tales casos sería más conveniente un tamaño de paso más pequeño en las zonas "rugosas"que en las zonas suaves, para de este modo repartir uniformemente el error de aproximación.

Una técnica apropiada es aquella que puede detectar de alguna forma la cantidad de variación funcional, la "rugosidad", y adapte el tamaño del paso a los requerimientos cambiantes del problema. La integración adaptativa es un procedimiento que distribuye las evaluaciones del integrando con mayor densidad en las zonas que presentan más dificultad, ahorrando esfuerzo y tiempo de computación en otras zonas donde f se comporta de modo suave y el error es más bajo. En tal sentido el proceso adapta la estrategia de evaluaciones de f para obtener máxima precisión con mínimo esfuerzo.

El método adaptativo que se discute a continuación está basado en la fórmula de Simpson, pero la técnica se puede modificar para usar otras fórmulas simples.

Integración adaptativa

Sea $h = \frac{b-a}{2}$, $m = \frac{a+b}{2}$ y $S(a,b) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(m) + f(b)\right)$.
Entonces la fórmula de Simpson simple se puede escribir como

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{iv}(\mu).$$

Ahora, aplicando la misma regla a los intervalos $[a,m]$ y $[m,b]$ y sumando se tiene

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx \\
&= S(a,m) + S(m,b) - \frac{1}{32}\frac{h^5}{90} f^{iv}(\tilde{\mu}_1) - \frac{1}{32}\frac{h^5}{90} f^{iv}(\tilde{\mu}_2) \\
&= S(a,m) + S(m,b) - \frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{iv}(\tilde{\mu})
\end{aligned}$$

donde $\tilde{\mu}$ es intermedio entre $\tilde{\mu}_1$ y $\tilde{\mu}_2$.

Integración adaptativa

Entonces:

$$S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{iv}(\mu) = S(a,m) + S(m,b) - \frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{iv}(\tilde{\mu})$$

Ahora, si se asume la hipótesis de que $f^{iv}(\mu) \approx f^{iv}(\tilde{\mu})$, es fácil deducir que

$$\frac{h^5}{90} f^{iv}(\tilde{\mu}) \approx \frac{16}{15}(S(a,b) - S(a,m) - S(m,b))$$

con lo que podemos conseguir una estimación computable del error en la forma

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(a,m) - S(m,b) \right| \\
&= \left| S(a,b) - \frac{h^5}{90} f^{iv}(\mu) - S(a,m) - S(m,b) \right| \\
&= \left| -\frac{1}{16}\frac{h^5}{90} f^{iv}(\tilde{\mu}) \right| \approx \frac{1}{15}\left| S(a,b) - S(a,m) - S(m,b) \right|.
\end{aligned}$$

Integración adaptativa

Por tanto, si fuera $|S(a,b) - S(a,m) - S(m,b)| < 15\varepsilon$, entonces sería (aprox.)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S(a,m) - S(m,b)\right| \tilde{<} \varepsilon$$

donde la tilde en $\tilde{<}$ indica que la desigualdad, aunque no esté rigurosamente garantizada, será tanto más fiable cuanto más ajustada sea la aproximación $f^{iv}(\mu) \approx f^{iv}(\tilde{\mu})$.

Algoritmo de integración adaptativa

- Si $|S(a,b) - S(a,m) - S(m,b)| < 15\varepsilon$ (o mejor $< 10\varepsilon$ para mayor seguridad), se acepta que $\int_a^b f(x)\,dx \approx S(a,m) + S(m,b)$ con error $< \varepsilon$;
- en caso contrario se aplica el algoritmo en $[a,m]$ y $[m,b]$ con error $\frac{\varepsilon}{2}$ en cada uno de los dos subintervalos.

Integración adaptativa: ejemplo

Cálculo de $\int_0^3 \left(\sqrt{x} + \cos\left(\frac{5}{x^2 + 0.2}\right)\right) dx$ con una cota de error de 10^{-3}.

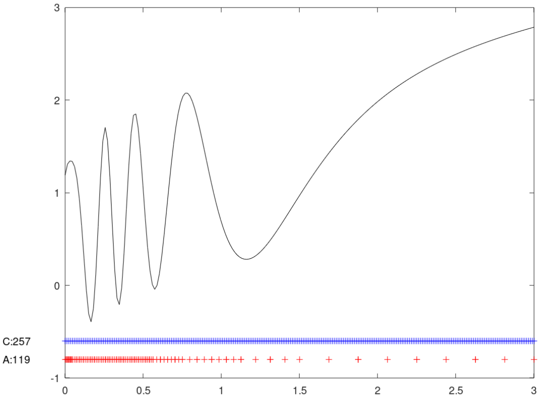


Figura: Se necesitaron 119 evaluaciones del integrando (en rojo) con el algoritmo de integración adaptativa, y 257 evaluaciones (en azul) con la fórmula compuesta de Simpson.

Integración adaptativa: ejercicios

1. Utiliza integración adaptativa para calcular las siguientes integrales con una toleracia de 10^{-3}:
    1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$
    2. $\displaystyle\int_1^{1.5} x^2 \ln(x)\,dx$
2. Deduce una fórmula similar a la anterior si se utiliza la regla del trapecio en lugar de la regla de Simpson en la integración adaptativa.