Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Análisis Funcional

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Repaso

Definición 0.1 (Espacio normado). E un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

1. $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in E$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \forall x, y \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que E es un **espacio normado**
Podemos definir además una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$ a la que llamaremos **distancia**.
Decimos que un espacio E es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.
Si E es un espacio normado completo, entonces $(E, \|.\|)$ es un **espacio de Banach**.

Definición 0.2 (Espacio prehilbertiano). Sea H es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo $x, y, z \in H, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$
$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$$

2. **Simétrica:** $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:** $(x, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:** $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

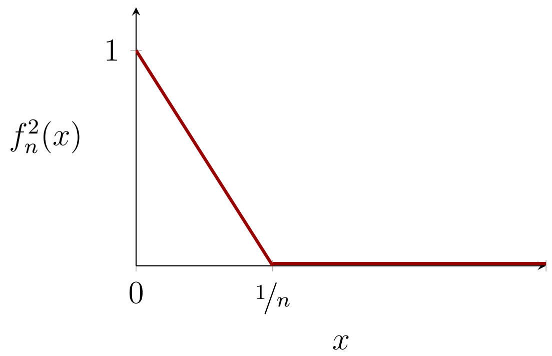
Las dos últimas propiedades se pueden resumir en $(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio prehilbertiano**.
Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ que es claramente una norma.

Si $\|\cdot\|$ es completa, diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo. Los siguientes espacios son de Banach:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, donde $|x| = |(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$. Además es de Hilbert ya que $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ es un producto escalar.
3. Dado[1] $A \subset \mathbb{R}^N$ tomamos $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f$ es continua y acotada en $A\}$. Podemos definir una norma en este espacio como
$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$
4. Tomamos $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en K denotado por $\mathcal{C}(K)$ y el espacio $(K, (\cdot, \cdot))$, donde
$$(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$$
es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos
$$\|f\| = \left(\int_K f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Ejemplo (El espacio del punto 4 No es de Hilbert)**.** Veámoslo con un contraejemplo. Tomamos $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y podemos definir $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ tal que f_n^2 viene dada por la siguiente gráfica:



De esta forma tenemos que
$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x)dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$
y vemos que
$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \to 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \to 1 & \end{cases}$$
Con esto tenemos que la sucesión $\{f_n\} \to 0$ en $(\mathcal{L}([0, 1]), (\cdot, \cdot))$ (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

[1] la b de $\mathcal{C}_b$ viene de *bounded* (acotado en inglés)

Ejemplo. Consideramos $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$ con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

Ejemplo. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles } : \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de p de la siguiente forma[2]:

$$p' = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{p}{p-1} & \text{si} & 1 < p < \infty \\ & & \\ \infty & \text{si} & p = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)| dx \leqslant \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ con $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p} (x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.
2. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \ldots, N\}$
3. Sea $p = \infty$. Tenemos

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma[3]:

$$\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \quad a.e. \ x \in \Omega\}$$

[2]donde asumimos que $1/\infty = 0$

[3]*a.e* viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

En algunos libros se denota por $ess\,\sup$.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup_\Omega |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$ es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con $p = \infty$, $p' = 1$ nos dice que para $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$ es una norma en H.

Ejemplo. Consideramos $1 \leqslant p < \infty$ y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p}$$

entonces $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar $x \in \mathcal{L}^p$, $y \in \mathcal{L}^{p'}$ y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \quad \text{y} \quad \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant \|x\|_{\mathcal{L}^p}\|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para $p = 2$ tenemos que $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert. Para $p = \infty$ podemos definir $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$ y con $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Banach.

Ejemplo. Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$ y es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

2. Podemos tomar otro subespacio de este, $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$ que de nuevo es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un par $(H, (\cdot,\cdot))$ donde H es un espacio vectorial y $(\cdot,\cdot)$ es una función bilineal simétrica y definida positiva.

Proposición 0.1. Si H es prehilbertiano entonces se tiene:

1. Se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|(u,v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u,v \in H$$

2. Se verifica la desigualdad del paralelogramo

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u,v \in H$$

Teorema 0.2 (Teorema de la Proyección)**.** Supongamos que H es un espacio Hilbertiano y $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H\ \exists_1 u \in K$ tal que $\|f-u\| = dist(f,K)$. Además, dicho u está caracterizado por:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Notaremos a dicha u por $P_K f$ y **diremos que es la proyección de f sobre K**

Demostración. En primer lugar tendremos que ver que $d(f,K) = \inf\{\|f-v\| : v \in K\}$ existe y se alcanza. Al ser un ínfimo de cantidades positivas sabemos que existe y nos quedará ver que se alcanza.
Por definición de ínfimo tenemos que

$$\exists \{v_n\} \subset K \text{ tal que } \|f-v_n\| \to d$$

Aplicando la desigualdad del paralelogramo para $u = f - v_n$ y $v = f - v_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{f-v_n+f-v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{f-v_n-(f-v_m)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right)$$

$$\left\| f - \frac{v_n+v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m-v_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right)$$

$$\frac{\|v_m-v_n\|^2}{4} = \frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) - \left\| f - \frac{v_n+v_m}{2} \right\|^2$$

$$\|v_m-v_n\|^2 = 2\left(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2\right) - 4\left\| f - \frac{v_n+v_m}{2} \right\|^2$$

Como K es convexo y $v_n, v_m \in K$ tendremos que $d\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ y además $\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geqslant d$ por lo que tenemos

$$\|v_m - v_n\|^2 = 2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - 4d^2$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos que $\|f - v_n\| \to d$ y $\|f - v_m\| \to d$ por lo que el término de la derecha tenderá a 0 cuando $n, m \to \infty$. Esto significa que la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy.
Como H es de Hilbert, en particular es completo por lo que sabemos que $\{v_n\} \to u$ en $(H, (\cdot, \cdot))$.
Como además $\{v_n\} \subset K$ y K es cerrado, el límite $u \in K$. Tendremos que

$$d = \lim_{n \to \infty} \|f - v_n\| = \|f - u\|$$

Y tendremos probada la existencia de u.

Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la segunda parte del teorema, es decir

$$\left.\begin{array}{l} u \in K \\ \|f - u\| = dist(f, K) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} u \in K \\ (f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{array}\right.$$

Veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f - u\| \leqslant \|f - v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0, 1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1 - t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f - u\|^2 \leqslant \|f - (1 - t)u - tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned} \|f - (1 - t)u - tw\|^2 &= (f - (1 - t)u - tw, f - (1 - t)u - tw) = \\ &= \|f - u\|^2 + t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leqslant t\|w - u\|^2 - 2(f - u, w - u) \quad \forall t \in (0, 1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2(f - u, w - u) \Rightarrow (f - u, w - u) \leqslant 0$$

Se deja como ejercicio demostrar la otra implicación y la unicidad de u. □