Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales I

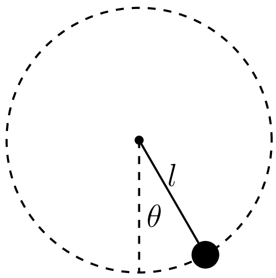
Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

0. Introducción

La mayoría de ecuaciones diferenciales han sido planteadas por campos como la física. Veamos el caso de un péndulo:



Las condiciones que definen el péndulo son $g > 0$, ya que se encuentra en la Tierra, l que es la longitud del péndulo y θ que es el ángulo con respecto a la vertical.
La ecuación que define el ángulo a lo largo del tiempo es la siguiente:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\operatorname{sen}(\theta(t)) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden (ya que aparece una segunda derivada). En ella tenemos que t es la variable independiente y θ es la incógnita o variable dependiente (que es una función).
Si estudiamos las soluciones de esta ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
&\theta(t) = 0,\ t \in \mathbb{R} \text{ es una solución (trivialmente)}\\
&\theta(t) = \pi,\ t \in \mathbb{R} \text{ es también solución}\\
&\theta(t) = 2n\pi,\ \theta(t) = n\pi,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \text{ son infinitas soluciones}
\end{aligned}$$

De esta forma podemos ver que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones.

Definición 0.1. Podemos definir una **ecuación diferencial de primer orden** como la relación funcional dada por

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

donde t es la **variable independiente** y $x = x(t)$ es la **variable independiente** o **incógnita**.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial dada por

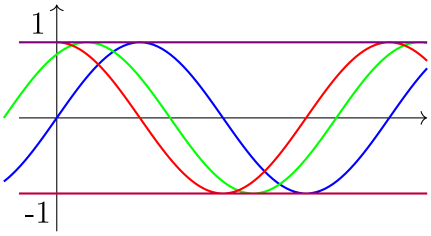
$$x(t) + x'(t)^2 = 1$$

Podemos definir[1] $\Phi = \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1$, o equivalentemente[2]

$$\begin{aligned}
\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\
(t, x, y) &\mapsto \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1
\end{aligned}$$

[1]Notación física
[2]Notación moderna (matemática)

Estudiemos las soluciones a esta ecuación:



- $x(t) = \text{sen}(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = -1$, $t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \text{sen}(t + c)$, $t \in \mathbb{R}$ $\forall c \in \mathbb{R}$ (familia uniparamétrica).

Podemos construir otra solución uniendo las ya dadas como por ejemplo

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable y por tanto solución a la ecuación.

Típicamente estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden en **forma normal**, es decir, ecuaciones que se pueden escribir como

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Esto es una subfamilia de las ecuaciones previamente descritas.