Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Análisis Funcional

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Repaso

Definición 0.1 (Espacio normado)**.** E un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ una función que verifica:

1. $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in E$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \forall x, y \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}$

A esta función la llamaremos **norma** y diremos que E es un **espacio normado**
Podemos definir además una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in E$ a la que llamaremos **distancia**.
Decimos que un espacio E es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.
Si E es un espacio normado completo, entonces $(E, \|.\|)$ es un **espacio de Banach**.

Definición 0.2 (Espacio prehilbertiano)**.** Sea H es un espacio vectorial, un **producto escalar** es una función $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Bilineal:** para todo $x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$
$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$$

2. **Simétrica:** $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in H$
3. **Positiva:** $(x, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in H$
4. **Definida positiva:** $(x, x) > 0 \quad \forall x \in H \setminus \{0\}$

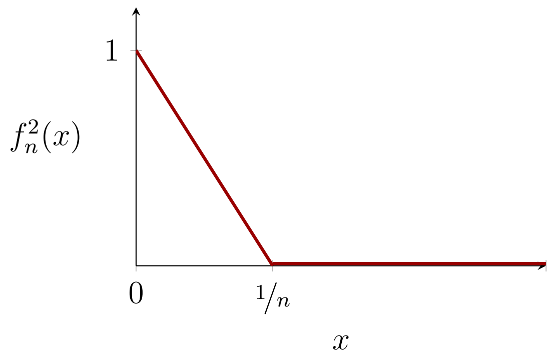
Las dos últimas propiedades se pueden resumir en $(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio prehilbertiano**.
Todo espacio prehilbertiano es en particular un espacio normado, ya que podemos definir $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ que es claramente una norma.

Si $\|\cdot\|$ es completa, diremos que $(H, (\cdot, \cdot))$ es un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo. Los siguientes espacios son de Banach:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$, donde $|x| = |(x_1, x_2, \ldots, x_N)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$. Además es de Hilbert ya que $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ es un producto escalar.
3. Dado[1] $A \subset \mathbb{R}^N$ tomamos $\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f$ es continua y acotada en $A\}$. Podemos definir una norma en este espacio como
$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(A)} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$
4. Tomamos $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Consideramos el conjunto de las funciones continuas en K denotado por $\mathcal{C}(K)$ y el espacio $(K, (\cdot,\cdot))$, donde
$$(f, g) = \int_K f(x)g(x)dx$$
es un producto escalar que hace a este un espacio prehilbertiano. Tendríamos
$$\|f\| = \left(\int_K f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Ejemplo (El espacio del punto 4 No es de Hilbert)**.** Veámoslo con un contraejemplo. Tomamos $K = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y podemos definir $\forall n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ tal que f_n^2 viene dada por la siguiente gráfica:



De esta forma tenemos que
$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n^2(x)dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$
y vemos que
$$\begin{cases} \{f_n(x)\} \to 0 & \forall x \in (0, 1] \\ \{f_n(0) = 1\} \to 1 \end{cases}$$
Con esto tenemos que la sucesión $\{f_n\} \to 0$ en $(\mathcal{L}([0, 1]), (\cdot,\cdot))$ (ya que la norma converge a 0).

PARA MAÑANA RESOLVER QUÉ ES LO QUE NO ESTÁ CLARO (la contradicción para ser espacio de Hilbert).

[1]la b de $\mathcal{C}_b$ viene de *bounded* (acotado en inglés)

Ejemplo. Consideramos $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ medible, entonces podemos definir

$$L^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)/\sim = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_\Omega f(x)^2 dx < \infty\}$$

$L^2(\Omega)$ con la norma definida anteriormente (en el punto 4) es un espacio de Hilbert (teorema de Fischer)

Ejemplo. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Consideramos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medibles } : \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\}$$

Entonces tenemos que con la norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Recordemos para este resultado la desigualdad de Hölder y Minkowski. Definimos para ello el conjugado de p de la siguiente forma[2]:

$$p' = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{p}{p-1} & \text{si} & 1 < p < \infty \\ & & \\ \infty & \text{si} & p = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$$

Con esto tendremos que

$$\left. \begin{array}{c} f \in L^p(\Omega) \\ g \in L^{p'}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

Además, se tiene que

$$\int |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ con $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^N |x_i|^p)^{1/p} (x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$.
2. $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \ldots, N\}$
3. Sea $p = \infty$. Tenemos

   $$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} < \infty\}$$

   A este supremo lo llamaremos **supremo esencial**, que se define de la siguiente forma[3]:

   $$\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \quad a.e. \ x \in \Omega\}$$

[2] donde asumimos que $1/\infty = 0$

[3] *a.e* viene de *almost everywhere* (casi por doquier en inglés)

En algunos libros se denota por $ess\,\sup$.

Podremos reescribir lo anterior como

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible } : \sup_\Omega |f| < \infty\}$$

Entonces el espacio $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ con $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$ es un espacio de Banach.

La desigualdad de Hölder con $p = \infty$, $p' = 1$ nos dice que para $f \in L^\infty(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$ es una norma en H.

Ejemplo. Consideramos $1 \leqslant p < \infty$ y definimos el conjunto de sucesiones.

$$\mathcal{L}^p = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$$

Si definimos ahora

$$\|x\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p}$$

entonces $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach. Para verlo podemos tomar $x \in \mathcal{L}^p$, $y \in \mathcal{L}^{p'}$ y tenemos que

$$xy \in \mathcal{L}^1 \;\text{ y }\; \|xy\|_{\mathcal{L}^1} \leqslant \|x\|_{\mathcal{L}^p}\|y\|_{\mathcal{L}^{p'}}$$

de la que se deduce la desigualdad de Mikowsky.

Para $p = 2$ tenemos que $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert. Para $p = \infty$ podemos definir $\mathcal{L}^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ sucesión acotada}\}$ y con $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Banach.

Ejemplo. Podemos considerar los siguientes subespacios que seguirán siendo espacios de Banach:

1. Tomamos $C = \{x \in \mathcal{L}^\infty : x \text{ es convergente}\}$ y es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

2. Podemos tomar otro subespacio de este, $C_0 = \{x \in C : x \text{ es convergente a } 0\}$ que de nuevo es un subespacio de $\mathcal{L}^\infty$.

0.1. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert es un par $(H, (\cdot,\cdot))$ donde H es un espacio vectorial y $(\cdot,\cdot)$ es una función bilineal simétrica y definida positiva.

Proposición 0.1. Si H es prehilbertiano entonces se tiene:

1. Se cumple la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in H$$

2. Se verifica la desigualdad del paralelogramo

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right), \quad \forall u,v\in H$$

Teorema 0.2 (Teorema de la Proyección)**.** Supongamos que H es un espacio Hilbertiano y $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H\ \exists_1 u \in K$ tal que $\|f-u\| = dist(f,K)$. Además, dicho u está caracterizado por:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Notaremos a dicho u por $P_K f$ y **diremos que es la proyección de f sobre K**

Demostración. En primer lugar tendremos que ver que $d(f,K) = \inf\{\|f-v\| : v \in K\}$ existe y se alcanza. Al ser un ínfimo de cantidades positivas sabemos que existe y nos quedará ver que se alcanza.
Por definición de ínfimo tenemos que

$$\exists \{v_n\} \subset K \text{ tal que } \|f-v_n\| \to d$$

Aplicando la desigualdad del paralelogramo para $u = f - v_n$ y $v = f - v_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{f-v_n+f-v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{f-v_n-(f-v_m)}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)$$
$$\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)$$
$$\frac{\|v_m-v_n\|^2}{4}=\frac{1}{2}\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)-\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$$
$$\|v_m-v_n\|^2=2\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)-4\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2$$

Como K es convexo y $v_n, v_m \in K$ tendremos que $d\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ y además $\left\|f-\frac{v_n+v_m}{2}\right\| \geqslant d$ por lo que tenemos

$$\|v_m-v_n\|^2=2\left(\|f-v_n\|^2+\|f-v_m\|^2\right)-4d^2$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos que $\|f-v_n\| \to d$ y $\|f-v_m\| \to d$ por lo que el término de la derecha tenderá a 0 cuando $n, m \to \infty$. Esto significa que la sucesión $\{v_n\}$ es de Cauchy.
Como H es de Hilbert, en particular es completo por lo que sabemos que $\{v_n\} \to u$ en $(H, (\cdot,\cdot))$.
Como además $\{v_n\} \subset K$ y K es cerrado, el límite $u \in K$. Tendremos que

$$d = \lim_{n\to\infty} \|f-v_n\| = \|f-u\|$$

Y tendremos probada la existencia de u.

Veamos ahora la equivalencia entre la primera y la segunda parte del teorema, es decir

$$\left.\begin{array}{l} u \in K \\ \|f-u\| = dist(f,K) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} u \in K \\ (f-u, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{array}\right.$$

Veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f-u\| \leqslant \|f-v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une u con w. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0,1]$, al ser K convexo tendremos que

$$(1-t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f-u\|^2 \leqslant \|f-(1-t)u-tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned} \|f-(1-t)u-tw\|^2 &= (f-(1-t)u-tw, f-(1-t)u-tw) = \\ &= \|f-u\|^2 + t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u, w-u) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w-u\|^2 - 2t(f-u,w-u) \quad \forall t \in (0,1]$$

Al dividir entre t nos queda

$$0 \leqslant t\|w-u\|^2 - 2(f-u,w-u) \quad \forall t \in (0,1]$$

y tomando ahora el límite cuando t tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2(f-u,w-u) \Rightarrow (f-u,w-u) \leqslant 0$$

Se deja como ejercicio demostrar la otra implicación y la unicidad de u. □

Proposición 0.3. La aplicación dada por

$$\begin{aligned} P_K : H &\to H \\ f &\mapsto P_K f \end{aligned}$$

es Lipschitziana, es decir, $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$ para todo $f_1, f_2 \in H$.

Demostración. Tomamos $f_1, f_2 \in H$ y consideramos $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$ y tenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, v - u_1) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \\ (f_2 - u_2, v - u_2) \leqslant 0 \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} (f_1 - u_1, u_2 - u_1) \leqslant 0 \\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Aprovechando la bilinealidad tenemos que

$$(f_2 - u_2, u_2 - u_1) \geqslant 0 \Rightarrow ((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) \leqslant 0$$

Y además

$$\begin{aligned}((f_1 - u_1) - (f_2 - u_2), u_2 - u_1) &= ((f_1 - f_2) - (u_1 - u_2), u_2 - u_1) = \\ &= (f_1 - f_2, u_2 - u_1) + (u_2 - u_1, u_2 - u_1)\end{aligned}$$

Y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|u_2 - u_1\|^2 = (u_2 - u_1, u_2 - u_1) &\leqslant -(f_1 - f_2, u_2 - u_1) \\ &\leqslant \|f_1 - f_2\|\|u_2 - u_1\| \Rightarrow \|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|\end{aligned}$$

□

Corolario 0.3.1 (Proyección ortogonal)**.** Sea H un espacio de Hilbert y $\emptyset \neq M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces se tiene que

$$\forall f \in H \quad \exists_1 u \in M \text{ tal que } \|f - u\| = dist(f, M)$$

Además, $u = F_M f$ está caracterizado por

- **•)** $u \in M$
- **•)** $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$

Y se tiene que $P_M : H \to H$ es lineal.

Demostración. Comencemos con la primera parte del corolario. Sabemos que $u \in K$ y $(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$ del teorema de la proyección. Tendremos que probar la equivalencia entre esto y $(f - u, w) = 0 \quad \forall w \in M$ cuando M es un subespacio vectorial. Veamos ambas implicaciones:

- $\Leftarrow$) Evidente por ser M un espacio vectorial.
- $\Rightarrow$) Tenemos que $(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$. Tomamos ahora $v \in M$, $t \neq 0$ y como M es un subespacio vectorial, entonces $\frac{v}{t} \in M$ por lo que

  $$(f - u, \frac{v}{t} - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in M,\ t \neq 0$$

  Hagamos una distinción de casos:

  $$\begin{cases} \text{Si } t > 0 & \Rightarrow \quad (f - u, v - tu) \leqslant 0 \quad \forall t > 0, v \in M \\ \text{Si } t < 0 & \Rightarrow \quad (f - u, v - tu) \geqslant 0 \quad \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

  Tomando límite cuando t tiende a 0

  $$\begin{cases} (f - u, v) \leqslant 0 & \forall t > 0, v \in M \\ (f - u, v) \geqslant 0 & \forall t < 0, v \in M \end{cases}$$

  Y por tanto $(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$

La demostración de que P_M es lineal se deja como ejercicio. □

0.2. Espacios Duales

Definición 0.3 (Dual algebráico)**.** Sea E un espacio vectorial, llamamos **dual algebráico** al siguiente espacio:

$$E^{\#} = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$$

Definición 0.4 (Dual topológico)**.** Dado $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, llamamos **dual topológico** a

$$E^{*} = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Observación. Si tenemos $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios normados y una aplicación $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(i) T es continua

(ii) T es continua en 0

(iii) $T(B_E(0,1))$ es un conjunto acotado de F, es decir que $\exists R > 0 : \|T(x)\|_F \leqslant R \quad \forall x \in E$ con $\|x\| < 1$

(iv) T es acotada, es decir, $T(A)$ es acotada en F para todo $A \subset E$ que esé acotado

(v) T es Lipschitziana.

Demostración.

(v)⇒(iv)) Trivial

(iv)⇒(iii)) Trivial

(iii)⇒(i)) Trivial

(i)⇒(ii)) Trivial

(ii)⇒(iii)) Sabemos que T es continua en 0. Luego para $\varepsilon = 1 \quad \exists \delta > 0$ tal que $\|x\|_E < \delta$ luego $\|T(x)\|_F < 1$. Tenemos que

$$\|T(x-y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leqslant M\|x-y\| \quad \forall x, y \in E$$

luego $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$. De esta forma tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\| \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta}\right)\right\| = \frac{2}{\delta}\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

(iii)⇒(vi)) Sabemos que $A \subset E$ está acotado, luego $T(A)$ también, es decir que $T(A) \subset B(0, M)$ para cierto $M > 0$. Tenemos que probar que

$$T(A) \subset T(B(0,R)) \subset B(0,M)$$

Dado $x \in A$ tal que $\|x\| \leqslant R$, como además es Lipschitziana tenemos que

$$\|T(x)\| \leqslant N\|x\| \leqslant N\|x\| < NR = M$$

y tenemos la inclusión que queríamos probar.

(iv)⇒(ii)) Por hipótesis tenemos que si $\|x\| < 1$ entonces $\|T(x)\| \leqslant R$ y queremos probar que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$, entonces $\|T(x)\| < \varepsilon$. Tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$ y suponiendo que $\|x\| < \delta$ tenemos que

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|} \cdot 2\|x\|\right) \right\| = 2\|x\| \left\| T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right) \right\| \leqslant 2\|x\|R < 2\delta R = \varepsilon$$

y ya lo tenemos.

□

Definición 0.5. Dado E un espacio vectorial, consideramos su dual topológico E^* y definimos la norma

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \quad \forall f \in E^*$$

Ejercicio 0.2.1. Demostrar que $\|f\|_{E^*}$ es una norma.

Ejercicio 0.2.2. Demostrar que $(E^*, \|\cdot\|_{E*})$ es de Banach.

Ejercicio 0.2.3. Demostrar que $\|f\|_{E^*} = \inf\{M \geqslant 0 : \|f(x)\| \leqslant M\|x\|_E \;\; \forall x \in E\}$

0.3. Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

Observación. Es elemental que si tomo $v \in H$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_v : H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi(u) = (u, v) \end{aligned}$$

verifica que $\varphi_v \in H^*$ y $\|\varphi_v\|_{H^*} = \|v\|_H$. Además, podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : H &\to H^* \\ v &\mapsto \phi_v \end{aligned}$$

que será lineal por lo que tenemos que un espacio de Hilbert y su dual topológico serán isomorfos.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. □

Teorema 0.4 (Teorema de Riesz-Fischer)**.** Para toda $\varphi \in H^*$, se tiene que $\exists_1 v \in H$ tal que $\varphi(u) = (u, v) \quad \forall u \in H$. Además, se tiene que $\|\varphi\|_{H^*} = \|v\|_H$

Ejercicio 0.3.1. Sea H un espacio de Hilbert, y tomamos un elemento cualquiera $y \in H$. Consideramos $f : H \to \mathbb{R}$ dada por $f_y(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$. Entonces se tiene que f_y es lineal, y además

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\| \;\; \forall x \in H \Rightarrow f_y \text{ acotada}$$

con lo que $\|f_y\|_{H^*} \leqslant \|y\|_H$.

Con la definición de la norma tenemos que

$\|f_y\|_{H^*} = \sup\{|(x,y)| : x \in H,\ \|x\|_H \leqslant 1\} \leqslant \|y\|_H \sup\{\|x\|_H : x \in H,\ \|x\|_H \leqslant 1\} = \|y\|_H$

Comenzamos con el caso $y \neq 0$ y tomamos $x = \frac{y}{\|y\|_H}$ y tenemos que

$$|(x,y)| = \left|\left(\frac{y}{\|y\|_H}, y\right)\right| = \frac{1}{\|y\|_H}(y,y) = \|y\|_H$$

por lo que hemos visto que se alcanza el máximo por lo que $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. Veamos ahora qué sucede cuando $y = 0$. En este caso tendremos $f_y(x) = (x, 0)$ y por tanto se tiene directamente que $\|f_y\|_{H^*} = 0 = \|y\|_H$.

La linealidad se deja como ejercicio.

Teorema 0.5 (Teorema de representación del dual de un espacio de Hilbert de Riesz-Fréchet)**.** Sea H un espacio de Hilbert, entonces $\forall f \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que $f(x) = (x,y)\ \ \forall x \in H$. Además, $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Demostración. Solo tenemos que probar la primera parte, pues la segunda es consecuencia del ejercicio anterior. Para ello tomamos $f \in H^*$ y tenemos dos casuísticas:

- •) Si $f = 0$, entonces puedo tomar $y = 0$ y es evidente.

- •) Si $f \neq 0$, entonces tenemos que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un subespacio vectorial cerrado (imagen inversa de un cerrado por una función continua[4] y lineal[5]). Podemos aplicar entonces el teorema de la proyección ortogonal. Sabemos que $\exists z_0 \in H \setminus M$. Llamamos $z_1 = P_M z_0 \in M$ y tenemos que $(z_0 - z_1, v) = 0$ para todo $v \in M$. Definimos ahora

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|_H}$$

y está bien definido ya que $z_0 \notin M$ y $z_1 \in M$ luego $z_0 - z_1 \neq 0$. Es claro que $\|z\| = 1$ y veamos cuánto vale (z, v) para todo $v \in M$:

$$(z,v) = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|}(z_0 - z_1, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

Veamos que $z \notin M$. Sabemos que M es un espacio vectorial y si $z_0 - z_1$ estuviera en M, entonces $z_0 \in M$ pero sabemos que $z_0 \notin M$ luego $z \notin M$ o equivalentemente $f(z) \neq 0$ (por la definición de M).

Tenemos ahora que para todo $x \in H$ tenemos que $x - \frac{f(x)}{f(z)} \in M = \ker f$ ya que

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

[4]nos dice que es cerrado.

[5]nos dice que es espacio vectorial.

luego $f(x) = f\left(\frac{f(x)}{f(z)}z\right)$ lo que nos dice que

$$0 = \left(z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = (z, x) - \frac{f(x)}{f(z)} \Rightarrow f(x) = f(z)(z, x) = (x, f(z)z)$$

Por tanto, tomando $y = f(z)z$ tenemos la existencia probada. Nos queda por ver la unicidad. Para ello, supongamos que existen $y_1, y_2 \in H$ tal que $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$ para todo $x \in H$. Con esto tendríamos que $(x, y_1 - y_2) = 0$ para todo $x \in H$. Elijo $x = y_1 - y_2$ y tenemos que $0 = (y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2$ por lo que finalmente $y_1 = y_2$.

$\square$