Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad.
Relaciones de prácticas

ELÍAS MONGE SÁNCHEZ
DANIEL MORÁN SÁNCHEZ
JESÚS MUÑOZ VELASCO

Mayo 2023

Índice

4. Relación 4

4.1. Ejercicio 1:

En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es 0.6, la de que lo acierte el segundo es 0.3 y la de que lo acierte el tercero es 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?

Cabe destacar que dichos sucesos son independientes, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$P(A \cap B) = P(A) * P(B), \forall A, B, C$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

Entonces

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$
$0.6 + 0.3 + 0.1 - 0.6 * 0.3 - 0.6 * 0.1 - 0.3 * 0.1 + 0.6 * 0.3 * 0.1 = 0,748$

Por tanto podemos comprobar que la probabilidad de que algún barco acierte es de $0,748$

4.2. Ejercicio 2:

Un estudiante debe pasar durante el curso 5 pruebas selectivas. La probabilidad de pasar la primera es 1/6. La probabilidad de pasar la i-ésima, habiendo pasado las anteriores es $1/(7-i)$. Determinar la probabilidad de que el alumno apruebe el curso.

Si denoto por E_i al suceso de aprobar el examen i-ésimo tengo que:

$$P(E_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(E_i/E_{i-1} \cap E_{i-2} \cap ... \cap E_1) = \frac{1}{7-i} \ \ \forall i \in 2, 3, 4, 5$$

Con esta notación y aplicando el Teorema de la Probabilidad Compuesta tengo:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) = P(E_1)P(E_2/E_1)P(E_3/E_2 \cap E_1)P(E_4/E_3 \cap E_2 \cap E_1)P(E_5/E_4 \cap E_3 \cap E_2 \cap E_1) =$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 0.001389 \ \Rightarrow \ \text{Tiene un } 0.1389\,\% \text{ de posibilidades de aprobar}$$

4.3. Ejercicio 3:

En una ciudad, el 40 % de las personas tienen pelo rubio, el 25 % tienen ojos azules y el 5 % el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules,

b) tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio,

c) no tener pelo rubio ni ojos azules,

d) tener exactamente una de estas características.

Solución:

Llamemos A al suceso 'tener el pelo rubio' y B al suceso 'tener ojos azules'. En nuestra población, se tiene que $P(A) = 0.4,\ P(B) = 0.25,\ P(A \cap B) = 0.05$. Entonces podemos calcular las probabilidades:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2$$

b)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.4} = 0.125$$

c)

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.4 - 0.25 + 0.05 = 0.4$$

d)

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2 \times P(A \cap B) = 0.4 + 0.25 - 2 \times 0.05 = 0.55$$

4.4. Ejercicio 4:

En una población de moscas, el 25 % presentan mutación en los ojos, el 50 % presentan mutación en las alas, y el 40 % de las que presentan mutación en los ojos presentan mutación en las alas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?

Sean A, B los sucesos referidos a tener mutación en los ojos y en las alas, respectivamente, entonces $P(A) = 0.25\ y\ P(B) = 0.5$

Para empezar esto es un problema de probabilidad condicionada, donde $P(B/A) = 0.4$
Y según la definición de probabilidad condicionada:$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Entonces $P(B/A) = 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.25} \longrightarrow P(A \cap B) = 0.4 * 0.25 = 0.1$

Esto nos lleva a que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.5 - 0.1 = \underline{0.65}$

Para el apartado b), tomaremos $\bar{B}$ para negar la mutación en las alas, entonces
$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.5 = 0.5$ y $P(A/\bar{B}) = 1 - P(B/A) = 1 - 0.4 = 0.6$

Por el mismo razonamiento que antes:
$P(A/\bar{B}) = 0.4 = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{0.25} \longrightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.6 * 0.25 = \underline{0.15}$

4.5. Ejercicio 5:

Una empresa utiliza dos sistemas alternativos, A y B, en la fabricación de un artículo, fabricando por el sistema A el 20 % de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es 2/3 si éste se fabricó por el sistema A y 2/5 si se fabricó por el sistema B. Calcular la probabilidad de vender el producto.

Si denoto por S_A al suceso de que el producto haya sido producido por el sistema A y S_B al suceso de de que haya sido producido por el sistema B tengo que:

$$P(S_A) = 0,2 \Rightarrow P(S_B) = 1 - P(S_A) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Denotando ahora por C el suceso de que el cliente compre el producto tengo que:

$$P(C/S_A) = \frac{2}{3} \qquad P(C/S_B) = \frac{2}{5}$$

La probabilidad de vender el producto es la probabilidad del suceso C que, aplicando el Teorema de la Probabilidad total se calcula como:

$$P(C) = P(S_A)P(C/S_A) + P(S_B)P(C/S_B) = 0,2 \times \frac{2}{3} + 0,8 \times \frac{2}{5} = \frac{34}{75} = 0.453$$

Por tanto hay una probabilidad del 45.3 % de posibilidades de vender el producto.

4.6. Ejercicio 6:

Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la primera; si a continuación, se extrae una bola de esta, calcular la probabilidad de que sea blanca.

Solución:

Denotamos los sucesos:

B_2: "sacar bola blanca de la segunda urna"
B_1: "sacar bola blanca de la primera urna"
X_1: "sacar bola de otro color de la primera urna"

La probabilidad la podemos calcular aplicando el Teorema de la probabilidad total:

$$P(B_1) = P(B_1|B_2)P(B_2) + P(B_1|X_1)P(X_1) = \frac{19}{21} \times \frac{9}{10} + \frac{18}{21} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

4.7. Ejercicio 7:

7. Se dispone de tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras:

U1: 5B y 5N U2: 6B y 4N U3: 7B y 3N.

Se elige una urna al azar y se sacan cuatro bolas sin reemplazamiento.

a) Calcular la probabilidad de que las cuatro sean blancas.
b) Si en las bolas extraídas solo hay una negra, ¿cual es la probabilidad de que la urna elegida haya sido U2?

Sea A el suceso 'sacar exactamente 4 bolas blancas', sea B el suceso 'sacar exactamente 1 bola negra' y sea U_i el suceso 'escoger la urna i' $i = 1, 2, 3$

Aplicando el Teorema de Probabilidad Total y combinatoria:

$$P(A) = P(U_1)P(A|U_1) + P(U_2)P(A|U_2) + P(U_3)P(A|U_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{\binom{5}{4}\binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{6}{4}\binom{4}{0}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}}\right) =$$

$$= \frac{\binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4}}{3\binom{10}{4}} = 0.087302$$

Aplicando el Teorema de Bayes y combinatoria:

$$P(U_2|B) = \frac{P(U_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(U_2)P(N|U_2)}{P(U_1)P(N|U_1) + P(U_2)P(N|U_2) + P(U_3)P(N|U_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}}}{\frac{1}{3}\left(\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}\right)} = \frac{4\binom{6}{3}}{5\binom{5}{3} + 4\binom{6}{3} + 3\binom{7}{3}} = 0.340426$$

4.8. Ejercicio 8:

La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es 2/3. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a 0.25. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?

Si denoto por I al suceso de inyectar el suero y M al suceso de mejorar tengo que:

$$P(\bar{I}) = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; P(I) = 1 - P(\bar{I}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(M/I) = 0,5 \qquad\qquad P(M/\bar{I}) = 0,25$$

Me piden calcular $P(\bar{I}/\bar{M})$. Aplicando propiedades y definiciones,

$$P(\bar{I}/\bar{M}) = \frac{P(\bar{I} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(\overline{I \cup M})}{P(\bar{M})} = \frac{1 - P(I \cup M)}{1 - P(M)} = \frac{1 - (P(I) + P(M) - P(I \cap M))}{1 - P(M)} \quad (*)$$

$$P(M/I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} \;\Rightarrow\; P(M \cap I) = P(I)P(M/I) = \frac{1}{3} \times 0,5 = \frac{1}{6}$$

$$P(M) = P(I)P(M/I) + P(\bar{I})P(M/\bar{I}) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \times 0,25 = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*) tengo:

$$P(\bar{I}/\bar{M}) = \frac{1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

4.9. Ejercicio 9:

N urnas contienen cada una 4 bolas blancas y 6 negras, mientras otra urna contiene 5 blancas y 5 negras. De las N + 1 urnas se elige una al azar y se extraen dos bolas sucesivamente, sin reemplazamiento, resultando ser ambas negras. Sabiendo que la probabilidad de que queden 5 blancas y 3 negras en la urna elegida es 1/7, encontrar N.

Solución:

Sean los siguientes sucesos:

A: escoger la urna mayoritaria
B: escoger la urna especial
N: sacar dos bolas negras

Entonces la probabilidad de que queden 5 bolas blancas y 3 negras será:

$$P(B|N) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)}$$

Se proceden a calcular las probabilidades necesarias:

$$P(A \cap N) = P(A)P(N) = \frac{N}{N+1} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{N}{N+1} \times \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{N}{3(N+1)}$$

$$P(B \cap N) = P(B)P(N) = \frac{1}{N+1} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{N+1} \times \frac{5 \times 4}{10 \times 9} = \frac{2}{9(N+1)}$$

$$P(N) = P(A \cap N) + P(B \cap N) = \frac{N}{3(N+1)} + \frac{2}{9(N+1)} = \frac{3N+2}{9(N+1)}$$

Entonces quedaría:

$$P(B|N) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{9(N+1)}}{\frac{3N+2}{9(N+1)}} = \frac{2}{3N+2} = \frac{1}{7} \Rightarrow 3N + 2 = 14 \Rightarrow \underline{N = 4}$$

4.10. Ejercicio 10:

Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con reemplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cual es la probabilidad de que la caja elegida contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?
Sean C_1, C_2, C_3 los sucesos referidos a elegir cada una de las tres opciones de cajas.

- (caso C_1) = 8 buenos y 4 defectuosos, $P(C_1) = 1/6$
- (caso C_2) = 6 buenos y 6 defectuosos, $P(C_2) = 2/6 = 1/3$
- (caso C_3) = 4 buenos y 8 defectuosos, $P(C_3) = 3/6 = 1/2$

se extraen 3 tornillos, 2 buenos y 1 defectuoso, sea este suceso B_2D_1, buscamos
$P(C_2/B_2D_1) = \frac{P(C_2 \cap B_2D_1)}{P(B_2D_1)}$

- $P(C_2 \cap B_2D_1)$ Esto es una permutación con repetición (puesto que los tornillos se reemplazan) cuya probabilidad es: $P(C_2 \cap B_2D_1) = P(C_2) * P(B_2D_1) = \frac{1}{3} * (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{24}$
- $P(B_2D_1) = P(C_1) * P(B_2D_1/C_1) + P(C_2) * P(B_2D_1/C_2) + P(C_3) * P(B_2D_1/C_3) =$
$\frac{1}{6} * (\frac{8*8*4}{12*12*12}) + \frac{1}{3} * (\frac{2}{2})^3 + \frac{1}{2} * (\frac{4*4*8}{12*12*12}) = 0.10339506172$
- $P(C_2/B_2D_1) = \frac{P(C_2 \cap B_2D_1)}{P(B_2D_1)} = \frac{\frac{1}{24}}{0.10339506172} = \frac{1}{2.48148148148} = \underline{0.40298507462}$

4.11. Ejercicio 11:

Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = 1/2^n, n \in \mathbb{N}$. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?

Denotando por E_n a la probabilidad de elegir n dados tal que $P(E_n) = p_n = \frac{1}{2^n}$ y denotando por V_i la probabilidad de que salga el valor i en el dado sabiendo que $P(V_i) = \frac{1}{6}$ $(\forall i \in \mathbb{N} \cap [1, 6])$.
Como máximo puede haber 4 dados.

$$P(E_1) = \frac{1}{2} \qquad P(E_2) = \frac{1}{4} \qquad P(E_3) = \frac{1}{8} \qquad P(E_4) = \frac{1}{16}$$

Si S es el suceso de sumar 4 puntos se me pide calcular $P(E_4/S)$.
Teniendo en cuenta

a) Con un dado la posibilidad de sumar 4 es única que es un 4 $\Rightarrow P(S/E_1) = P(V_4) = \frac{1}{6}$

b) Con dos dados los posibles casos de sumar 4 son 2:

- 1 dado de 3 + 1 dado de 1
- 1 dado de 1 + 1 dado de 3
- 1 dado de 2 + 1 dado de 2

$$P(S/E_2) = P(V_1)P(V_3/V_1) + P(V_3)P(V_1/V_3) + P(V_2)P(V_2|V_2)$$

Como los sucesos V_i son independientes:

$$P(V_i/V_j) = \frac{P(V_i \cap V_j)}{P(V_j)} = \frac{P(V_i)P(V_j)}{P(V_j)} = P(V_i)$$

$$P(S/E_2) = P(V_1)P(V_3)+P(V_3)P(V_1)+P(V_2)P(V_2) = 2P(V_1)P(V_3)+P(V_2)(V_2) = 3\times\frac{1}{6^2} = \frac{1}{12}$$

c) Con 3 dados los casos son 3:

- 1 dado de 1 + 1 dado de 1 + 1 dado de 2
- 1 dado de 1 + 1 dado de 2 + 1 dado de 1
- 1 dado de 2 + 1 dado de 1 + 1 dado de 1

Con el razonamiento seguido anteriormente:

$$P(S/E_3) = P(V_1)P(V_1/V_1)P(V_2/V_1 \cap V_1) + P(V_1)P(V_2/V_1)P(V_1/V_2 \cap V_1)+$$
$$+P(V_2)P(V_1/V_2)P(V_1/V_1 \cap V_2) = P(V_2)P(V_1)P(V_1)+P(V_1)P(V_2)P(V_1)+P(V_2)P(V_1)P(V_1) =$$
$$= 3P(V_1)P(V_1)P(V_2) = 3 \times \frac{1}{6^3} = \frac{1}{72}$$

d) Con 4 dados que suman 4 solo cabe la posibilidad de 4 dados de 1

$$P(S/E_4) = P(V_1)P(V_1)P(V_1)P(V_1) = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

e) Con más de 4 dados es imposible que sumen 4

Con los datos calculados puedo aplicar el Teorema de Bayes:

$$P(E_4/S) = \frac{P(E_4 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(E_4)P(S/E_4)}{P(S)}$$

$$P(S) = P(E_1)P(S/E_1) + P(E_2)P(S/E_2) + P(E_3)P(S/E_3) + P(E_4)P(S/E_4) =$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{72} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{1296} = 0.105951$$

$$P(E_4/S) = \frac{\frac{1}{16} \times \frac{1}{1296}}{0.105951} = 0.000455$$

4.12. Ejercicio 12:

Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen 2k bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y 2h si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

Solución:

La urna puede tener 4 composiciones diferentes, cada una con la misma probabilidad 0.25:

- k bolas blancas y h bolas negras
$$P(N_1) = \frac{h}{k+h}$$
- 2k bolas blancas y h bolas negras
$$P(N_2) = \frac{h}{2k+h}$$
- k bolas blancas y 2h bolas negras
$$P(N_3) = \frac{2h}{k+2h}$$
- 2k bolas blancas y 2h bolas negras

$$P(N_4) = \frac{2h}{2k+2h} = \frac{h}{k+h} = P(N_1)$$

Entonces, por el Teorema de Probabilidad Total, la probabilidad quedaría como:

$$P(N) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P(N_i) = \frac{h}{4}\left(\frac{2}{k+h} + \frac{1}{2k+h} + \frac{2}{k+2h}\right)$$

Nótese que si $k = h$, queda $P(N) = \frac{k}{4}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{3k} + \frac{2}{3k}\right) = \frac{1}{2}\ \forall k \in \mathbb{N}$.