



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026



# Índice general

0.1. Conexión . . . . .	5
0.2. Conexión por arcos . . . . .	6
<b>1. El grupo fundamental</b>	<b>11</b>
1.1. Homotopía por arcos . . . . .	11
1.2. El grupo fundamental . . . . .	16
1.3. Espacios recubridores . . . . .	20
1.4. Levantamientos en espacios recubridores . . . . .	25
1.5. Grupo fundamental de la circunferencia . . . . .	29
1.6. Retracciones, tipos de homotopía y retractos de deformación . . . . .	33
1.7. El grupo fundamental de las esferas. Aplicaciones. . . . .	40
1.8. El teorema de Seifert-van Kampen . . . . .	48
1.8.1. Grupo cociente . . . . .	48
1.8.2. Subgrupo normal generado por un conjunto . . . . .	49
1.8.3. Producto libre de grupos . . . . .	49
1.8.4. Grupos libres y presentaciones de grupos . . . . .	51
1.8.5. Enunciado del teorema . . . . .	53
<b>2. Espacios Recubridores</b>	<b>61</b>
2.1. Levantamiento de aplicaciones . . . . .	61
2.2. Transformación de recubridores . . . . .	69



# Introducción. Conexión por arcos

## 0.1. Conexión

**Notación.** Notaremos por e.t. al espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  o diremos  $X$  es un e.t.

**Definición 0.1.** Se dice que un e.t.  $X$  es no conexo si existen  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos y no vacíos tales que  $X = U \cup V$ .

**Proposición 0.1.** Dado un e.t.  $X$  equivalen las siguientes afirmaciones:

- (i)  $X$  es conexo.
- (ii) Los únicos subconjuntos de  $X$  que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.
- (iii) Los únicos subconjuntos de  $X$  con frontera vacía son el vacío y el total.

**Teorema 0.2.** El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).

**Teorema 0.3.** La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t.  $X$  es también conexa.

**Teorema 0.4.** Si  $A$  es un subconjunto del e.t.  $X$  y  $A$  es conexo, entonces dado  $B$  con  $A \subset B \subset \overline{A}$ , entonces se tiene que  $B$  también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.

**Teorema 0.5.** Dados dos espacios topológicos  $X, Y$  se cumple que  $X \times Y$  es conexo (con la topología producto) si y solo si  $X$  e  $Y$  son conexos.

**Teorema 0.6.** Los conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).

**Definición 0.2.** Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0$  se define la componente conexa de  $x_0$  en  $X$  como el mayor conexo de  $X$  que contiene a  $x_0$ .

**Teorema 0.7.** Las componentes conexas de un e.t.  $X$  forman una partición de  $X$  en conjuntos conexos maximales y cerrados.

## 0.2. Conexión por arcos

**Definición 0.3.** Un **arco** (o camino) en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Si además  $\alpha(0) = \alpha(1)$  diremos que  $\alpha$  es un **lazo**.

Diremos que un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  une  $x$  con  $y$  si se verifica que  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ . Si  $\alpha$  es un lazo, diremos que está basado en  $x$  (o su punto base es  $x$ ) si  $\alpha(0) = x = \alpha(1)$ .

Denotaremos por

$$\Omega(X; x, y) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

al **conjunto de arcos** que unen  $x$  con  $y$ . Denotaremos además por

$$\Omega(X; x) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$$

al **conjunto de lazos** basados en  $x$ .

**Ejemplo.**

1. Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0 \in X$  siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

es un lazo basado en  $x_0$  al que llamaremos **arco constante**. De hecho, si  $X$  tiene la topología discreta, entonces los únicos arcos que hay en  $X$  son los arcos constantes.

*Demostración.* Si  $X$  tiene la topología discreta, entonces como  $\alpha$  es continua  $\alpha^{-1}(\{x_0\})$  será abierto y cerrado y por tanto  $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, X\}$  por ser  $[0, 1]$  conexo.  $\square$

2. Sean  $x, y, z \in X$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  un arco uniendo  $x$  con  $y$  y  $\beta : [0, 1] \rightarrow X$  un arco uniendo  $y$  con  $z$ . Buscaremos ahora un arco formado a partir de estos dos de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X \text{ dado por } (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $\alpha * \beta$  es continua ya que  $(\alpha * \beta)|_{[0, 1/2]}$  y  $(\alpha * \beta)|_{[1/2, 1]}$  lo son y para  $t = 1/2$  se tiene que

$$\alpha\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

con  $[0, \frac{1}{2}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$  cerrados. Aplicando el lema de pegado<sup>1</sup> tenemos que  $\alpha * \beta$  es continua.

---

<sup>1</sup>visto en Topología I

3. Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  es un arco uniendo  $x$  con  $y$ , entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \alpha(1 - t)\end{aligned}$$

es un arco que une  $y$  con  $x$ .

**Definición 0.4.** Decimos que un e.t.  $X$  es **arcoconexo** (o **conexo por arcos**) si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe un arco en  $X$  que une el punto  $x$  con el punto  $y$ .

Si  $X$  es un e.t. y  $A \subset X$ , diremos que  $A$  es arcoconexo si  $A$  es arcoconexo con la topología de inducida de  $X$ .

**Teorema 0.8.** Todo espacio topológico arcoconexo es conexo.

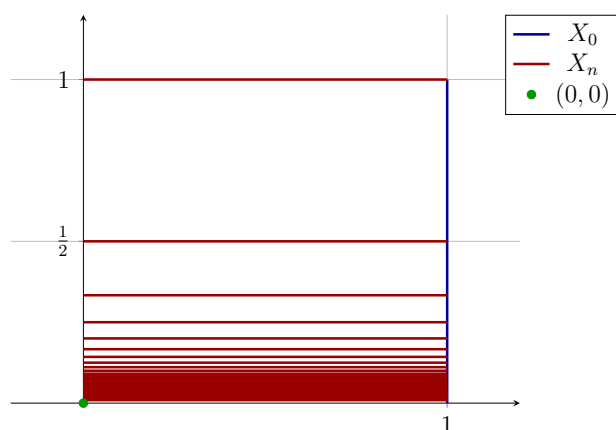
*Demostración.* Dado  $x_0 \in X$  fijo y otro punto  $x \in X$  cualquiera, sabemos que existe  $\alpha_x : [0, 1] \rightarrow X$  un arco tal que  $\alpha_x(0) = x_0$  y  $\alpha_x(1) = x$ . En particular, como el intervalo  $[0, 1]$  es conexo y  $\alpha_x$  es continua, entonces se tiene que  $\alpha_x([0, 1])$  es conexo y podremos escribir

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0, 1]) \subseteq X \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x\{[0, 1]\}$$

y además  $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \alpha_x\{[0, 1]\}$  por lo que  $X$  es conexo (por el lema del peine).  $\square$

**Ejemplo.** Veamos que la otra implicación no es cierta en general. Para ello consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{1\} \times [0, 1] \quad \text{y} \quad X_n = [0, 1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$



Llamamos  $X = \{(0, 0)\} \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \right)$  y queremos ver que  $X$  es conexo pero no es arcoconexo.

Si tomamos la segunda parte de esta unión, es decir,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$$

tenemos que  $Y$  es conexo porque es unión de los  $X_n$  que son todos conexos y que intersecan con  $X_0$ . Entonces, como  $Y \subset X \subset \overline{Y}$  tenemos que  $X$  es conexo. Veamos sin embargo que  $X$  no es arcoconexo.

Para ello vamos a demostrar que si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha$  es continua con  $\alpha(0) = (0, 0)$ , entonces  $\alpha(t) = (0, 0)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Podemos escribir la curva como  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Como  $\alpha(0) = (0, 0)$ , si tomamos  $((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$  un abierto que contiene al origen, entonces  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\alpha([0, \varepsilon)) \subseteq ((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$  por ser  $\alpha$  continua. Como  $y(t)$  es continua y se tiene que  $y([0, \varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 2} \{\frac{1}{n}\} \right)$ . Por el teorema del valor intermedio tenemos que  $y([0, \varepsilon)) = \{0\}$  por lo que  $\alpha([0, \varepsilon)) = \{(0, 0)\}$ . De esta forma hemos probado que no hay ningún arco que conecte  $(0, 0)$  con un punto distinto (el único arco es el constante).

**Teorema 0.9.** Si  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es estrellado, entonces  $A$  es arcoconexo.

*Demostración.* Como  $A$  es estrellado existe un  $x_0 \in A$  tal que para cualquier  $x \in A$ , el segmento que los une,  $(1-t)x + tx_0 \in A$  para todo  $t \in [0, 1]$  y entonces  $\alpha(t) = (1-t)x + tx_0$  es una curva continua uniendo  $x$  con  $x_0$ . Dados dos puntos cualesquiera  $x, y \in A$  se tiene que  $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$  es una curva continua que une  $x$  con  $y$ .  $\square$

**Corolario 0.9.1.** Cualquier conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  convexo es arcoconexo. Por ejemplo, las bolas abiertas o las bolas cerradas de  $\mathbb{R}^n$ .

**Corolario 0.9.2.** En  $\mathbb{R}$  coinciden los conjuntos conexos y arcoconexos (son solo los intervalos).

**Teorema 0.10.** La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

*Demostración.* Sea  $f$  la aplicación continua y consideramos  $x, y \in f(X)$  cualesquiera. Entonces existen  $x_0, y_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x$  y  $f(y_0) = y$ . Por ser  $X$  arcoconexo, entonces existe un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = y_0$ . Entonces tenemos que  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow f(X)$  es continua y  $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = x$  y  $(f \circ \alpha)(1) = f(y_0) = y$  y tenemos por tanto que  $(f \circ \alpha)$  es un arco que une  $x$  con  $y$ . Tenemos entonces que para cualesquiera dos puntos  $x, y \in f(X)$  existe un arco que los une luego  $f(X)$  es arcoconexo.  $\square$

**Teorema 0.11.** Sean  $X$  un e.t. y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de arcoconexos de  $X$ . Si  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es arcoconexo.

*Observación.* Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión. Por ejemplo, si en un e.t.  $X$  se tiene que  $A \subseteq X$  es arcoconexo podría ocurrir que si  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ , se diera que  $B$  no sea arcoconexo (como en el ejemplo anterior).



**Ejemplo.** Veamos que  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  es arcoconexo. Podemos hacerlo sabiendo que  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ , con  $N = (0, \dots, 0, 1)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  que es arcoconexo por lo que  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  es arcoconexo. Análogamente,  $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$  con  $S = (0, \dots, 0, -1)$  es arcoconexo y podemos escribir

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

por lo que  $\mathbb{S}^n$  es unión de arcoconexos con puntos en común, luego es arcoconexo.

**Teorema 0.12.** Sean  $X, Y$  e.t., entonces  $X \times Y$  es arcoconexo (con la topología producto) si y solo si  $X$  e  $Y$  son arcoconexos.

**Teorema 0.13.** Dado un e.t.  $X$ , se tiene que  $X$  es arcoconexo si y solo si  $X$  es conexo y todo punto  $x \in X$  tiene un entorno suyo arcoconexo.

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Hemos visto que si  $X$  es arcoconexo, entonces  $X$  es conexo. Además,  $X$  es entorno de cualquier punto suyo luego todo punto tiene un entorno arcoconexo.

$\Leftarrow$ ) Elegimos un  $x \in X$  fijo y definimos  $A = \{y \in X : \exists \alpha_y \text{ arco uniendo } x \text{ con } y\}$

Como  $x \in A$  tenemos que  $A \neq \emptyset$ . Si probamos que  $A$  es abierto y cerrado, entonces como  $X$  es conexo tendremos que  $A = X$ , es decir podremos unir  $x$  con cualquier otro punto  $y \in X$ .

Veamos que  $A$  es abierto. Tomamos  $z \in A$  y queremos demostrar que  $\exists U$  entorno de  $z$  tal que  $U \subseteq A$ . Por hipótesis sabemos que existe un entorno  $U$  arcoconexo de  $z$ . Entonces dado  $u \in U$  existe un arco  $\alpha_u$  que une  $z$  con  $u$ . Por otro lado, como  $z \in A$ , entonces existe un arco  $\beta_z$  que une  $x$  con  $z$ . Tendremos entonces que  $\beta_z * \alpha_u$  es un arco que une  $x$  con  $u$  y por definición tendremos  $u \in A$ , luego  $U \subseteq A$ .

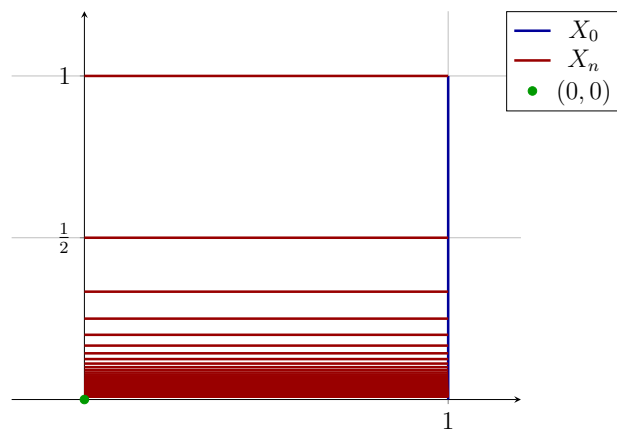
Nos queda ver que  $A$  es cerrado. Tomamos para ello  $z \in \overline{A}$ . Por hipótesis existe un entorno  $U$  de  $z$  arcoconexo. Por ser  $U$  entorno de  $z$  y  $z \in \overline{A}$  necesariamente  $U \cap A \neq \emptyset$  por lo que existe al menos un  $u \in U \cap A$ . Como  $u \in A$  existe un arco  $\alpha_u$  que une  $x$  con  $u$  y como  $u \in U$  existe también un arco  $\beta_u$  que une  $u$  con  $z$  y tendríamos que  $\alpha_u * \beta_u$  es un arco uniendo  $x$  con  $z$  llegando a que  $z \in A$ . Tendríamos  $\overline{A} \subseteq A$  y como la otra inclusión se da siempre, tendremos que  $A$  coincide con su adherencia, por lo que es cerrado.

□

**Definición 0.5.** Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0 \in X$ , llamamos **componente arcoconexa** de  $x_0$  al mayor arcoconexo en  $X$  que contiene a  $x_0$ .

**Teorema 0.14.** Las componentes arcoconexas de un e.t.  $X$  forman una partición de  $X$  en subconjuntos arcoconexos de  $X$  maximales.

**Ejemplo.** En el ejemplo que ya se trabajó se puede ver que el conjunto  $X$  que era



tiene dos componentes arcoconexas:  $\{(0,0)\}$  ,  $\bigcup_{u \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$

# 1. El grupo fundamental

## 1.1. Homotopía por arcos

**Definición 1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Decimos que  $f$  es **homotópica** a  $g$  si existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua tal que

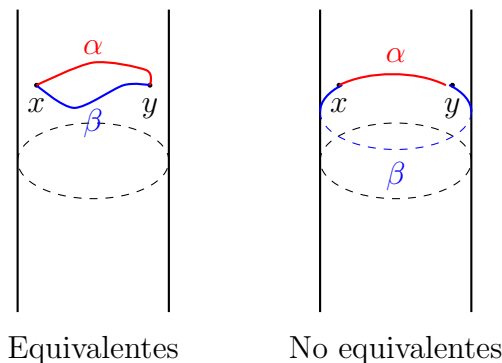
$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$



**Definición 1.2.** Dados  $X$  e.t.,  $x, y \in X$  y dos arcos  $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ , decimos que  $\alpha, \beta$  son **homotópicos por arcos** si existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x & \text{y} & & H(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

**Lema 1.1.** Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en  $\Omega(X; x, y)$ .



*Demostración.*

- (i) Dado  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$  queremos ver que  $\alpha$  es homotópica por arcos con  $\alpha$ . Para ello podemos definir la homotopía por arcos

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \alpha(s) \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$  tenemos que  $\alpha(s) \in X$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Además se verifica que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) = H(s, 1) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = x \quad H(1, t) = \alpha(1) = y \end{aligned}$$

- (ii) Dados  $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$  tales que existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x & \text{y} & & H(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Queremos ver que existe un  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= \beta(s) & \text{y} & & \tilde{H}(s, 1) &= \alpha(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \tilde{H}(0, t) &= x & \text{y} & & \tilde{H}(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Tomando  $\tilde{H}(s, t) := H(s, 1 - t)$  cumple claramente con lo que buscamos.

- (iii) Dado  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x, y)$  y  $H_1, H_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continuas tales que

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= \alpha(s) & H_2(s, 0) &= \beta(s) \\ H_1(s, 1) &= \beta(s) & H_2(s, 1) &= \gamma(s) \\ H_1(0, t) &= x & H_2(0, t) &= x \\ H_1(1, t) &= y & H_2(1, t) &= y \end{aligned}$$

Queremos ver que existe un  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & H(s, 1) &= \gamma(s) \\ H(0, t) &= x & H(1, t) &= y \end{aligned}$$

Para ello consideramos

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_2(s, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Y con el lema de pegado es fácil ver que es continua y que satisface las condiciones que buscábamos ya que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= H_1(s, 0) = \alpha(s) \\ H(s, 1) &= H_2(s, 1) = \gamma(s) \\ H(0, t) &= \begin{cases} H_1(0, 2t) = x \\ H_2(0, 2t - 1) = x \end{cases} = x \\ H(1, t) &= \begin{cases} H_1(1, 2t) = y \\ H_2(1, 2t - 1) = y \end{cases} = y \end{aligned}$$

□

*Observación.* Este resultado es análogo para homotopías. Es decir, ser homotópico da lugar a una relación de equivalencia en  $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ continua}\}$ .

**Ejemplo.**

1. Sean  $X$  un e.t. y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicaciones continuas, entonces vamos a ver que  $f$  y  $g$  son homotópicas.

*Demostración.* Vamos a definir la aplicación

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x)$$

que es continua y además verifica

$$H(x, 0) = f(x) \qquad H(x, 1) = g(x)$$

por lo que tenemos lo que buscábamos. □

En el caso particular de que  $f = \alpha$  y  $g = \beta$  fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro punto común, entonces la  $H$  anterior sería una homotopía por arcos.

2. Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  es un arco y  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una aplicación continua con  $h(0) = 0$  y  $h(1) = 1$ , entonces  $\dot{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$  es homotópica por arcos a  $\alpha(s)$ .

*Demostración.* Es claro que  $\dot{\alpha}$  es continua y existe una homotopía por arcos entre  $\alpha$  y  $\dot{\alpha}$  que es la siguiente

$$H(s, t) = \alpha((1 - t)s + th(s))$$

que es claramente continua y que verifica que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & H(s, 1) &= \alpha(h(s)) = \dot{\alpha}(s) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = \dot{\alpha}(1) & H(1, t) &= \alpha(1) = \dot{\alpha}(1) \end{aligned}$$

□

Intuitivamente podemos entender esto como que no importa a qué velocidad se recorra una curva para ser homotópica por arcos.

**Notación.** Por convenio, a la clase de equivalencia de un arco  $\alpha$  en  $\Omega(X; x, y)$  la denotaremos por  $[\alpha]$ .

**Lema 1.2.** Dados dos arcos  $\alpha_1, \alpha_2$  en  $\Omega(X; x, y)$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X; y, z)$ . Se verifica que si  $[\alpha_1] = [\alpha_2]$  y  $[\beta_1] = [\beta_2]$ , entonces  $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$(\alpha_1 * \beta_1) = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta_1(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha_2 * \beta_2) = \begin{cases} \alpha_2(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta_2(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Además, sabemos que existen  $H_1, H_2$  continuas tal que

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= \alpha_1(s) & H_2(s, 0) &= \beta_1(s) \\ H_1(s, 1) &= \alpha_2(s) & H_2(s, 1) &= \beta_2(s) \\ H_1(0, t) &= x & H_2(0, t) &= y \\ H_1(1, t) &= y & H_2(1, t) &= z \end{aligned}$$

Tomamos entonces  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{si } s \in [0, 1/2], t \in [0, 1] \\ H_2(2s - 1, t) & \text{si } s \in [1/2, 1], t \in [0, 1] \end{cases}$$

es continua y tenemos que

$$H(s, 0) = \begin{cases} H_1(2s, 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ H_2(2s - 1, 0) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta_1(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$

Análogamente se tiene que  $H(s, 1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$  con  $H(0, t) = x$  y  $H(1, t) = z$ .  $\square$

**Definición 1.3.** A partir del lema anterior podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

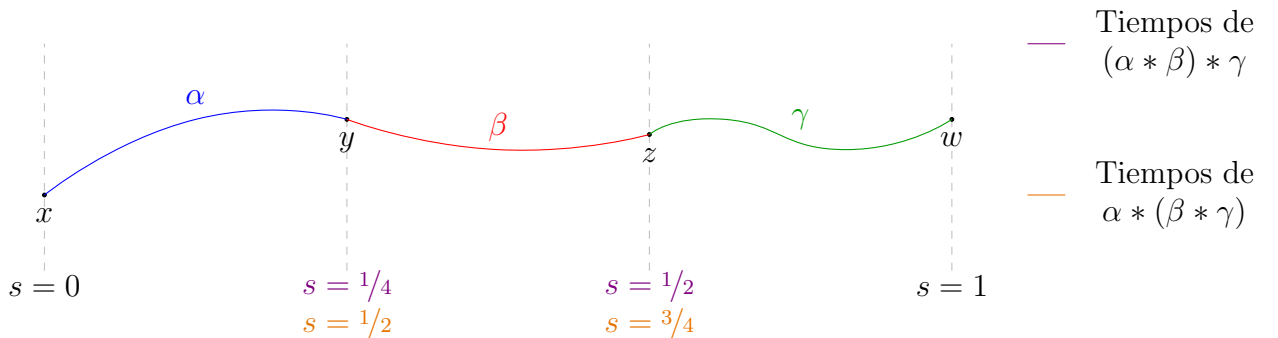
con  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ ,  $\beta \in \Omega(X; y, z)$

**Teorema 1.3.** Dado  $X$  e.t.,  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ ,  $\beta \in \Omega(X; y, z)$  y  $\gamma \in \Omega(X; z, w)$  se tiene que

- (i)  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$
- (ii)  $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$  y  $[\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$
- (iii)  $[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_x]$  y  $[\tilde{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$

*Demostración.*

- (i) Desarrollemos cada expresión



$$(\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \beta(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha * (\beta * \gamma)(s) &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (\beta * \gamma)(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(2s - 1)) & \text{si } s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(2(2s - 1) - 1) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s - 2) & \text{si } s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s - 3) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta) * \gamma(s) &= \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \alpha(2(2s)) & \text{si } s \in [0, 1/4] \\ \beta(2(2s) - 1) & \text{si } s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{si } s \in [0, 1/4] \\ \beta(4s - 1) & \text{si } s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Usando el ejemplo 2 anterior se tiene que  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$  (realmente se están recorriendo las mismas curvas pero a distinta velocidad).

- (ii) Tendremos que ver que  $\alpha * \varepsilon_y$  se relaciona por una homotopía con arcos con  $\alpha$ . Recordemos que

$$(\alpha * \varepsilon_y) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \varepsilon_y(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ y & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

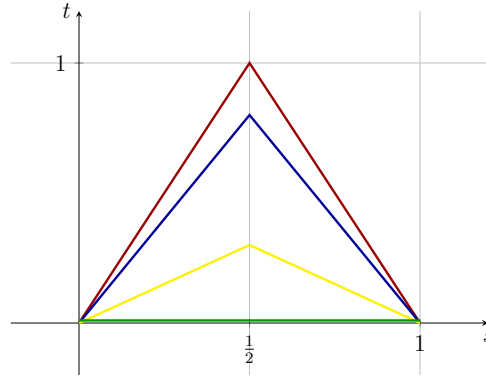
De nuevo del ejemplo 2 se tiene que son homotópicas

- (iii) Tendremos que ver en este caso que  $\alpha * \tilde{\alpha}$  es homotópico por arcos a  $\varepsilon_x$ . Describamos ambas curvas.

$$(\alpha * \tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2 - 2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0, 1]$$

Pensamos ahora una transformación  $H$  que haga que cada vez la curva se vaya quedando más cerca de  $x$  (cada vez vuelve antes de llegar a  $y$ ). Intuitivamente podríamos pensar en la siguiente gráfica, en la que vamos reduciendo la distancia desde la función roja hasta la verde



$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ 2 - 2s & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y podemos construir  $H(s, t) = \alpha((1 - t)h(s))$  que claramente es continua y verifica

$$\begin{aligned} H(s, 0) = \alpha(h(s)) = (\alpha * \tilde{\alpha}(s)) & \quad y \quad H(s, 1) = \alpha(0) = x = \varepsilon_x(s) & \quad \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) = \alpha(0) = x & \quad y \quad H(1, t) = \alpha(0) = x & \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

## 1.2. El grupo fundamental

**Corolario 1.3.1.** Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0 \in X$  se tiene que el conjunto de lazos en  $X$  basados en  $x_0$  bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación  $*$  forman un grupo algebraico.

*Demostración.* Definimos el siguiente conjunto

$$G = \frac{\Omega(X; x_0)}{R}$$

donde  $R$  es la relación de equivalencia “ser homotópico por arcos”. Veamos ahora que  $G$  tiene estructura de grupo:

1. **Propiedad asociativa.** Tendremos que ver que se verifica para cualesquiera  $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in G$ .

$$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

pero esto lo tenemos claramente del teorema anterior

2. **Existencia del elemento neutro.** Por el teorema anterior tenemos que para  $x = y = x_0$  se tiene que  $[\alpha] * [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\alpha]$  para cualquier  $[\alpha] \in G$  luego tenemos la existencia probada.



3. **Existencia del elemento opuesto.** De nuevo usamos el teorema anterior y nos dice que para cualquier  $[\alpha] \in G$  se tiene que

$$[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] = [\tilde{\alpha}] * [\alpha]$$

y se tiene directamente.

Con esto hemos probado finalmente que  $G$  es un grupo.  $\square$

**Definición 1.4.** Al grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamaremos el **grupo fundamental** de  $X$  en  $x_0$  y lo denotaremos por  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Ejemplo.** Consideramos  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  y un punto cualquiera  $x_0$ .



En este espacio tenemos que  $[\varepsilon_{x_0}] \neq [\alpha] \neq [\tilde{\alpha}] \neq [\beta]$ . Intuitivamente podríamos intentar identificar este espacio con  $\mathbb{Z}$  de la siguiente forma:

- La clase  $[\varepsilon_{x_0}]$  la podemos interpretar como el 0 de  $\mathbb{Z}$ .
- Identificaremos los números positivos como el número de vueltas que da cada curva al punto  $(0, 0)$  en sentido positivo (el que elijamos como positivo). Por ejemplo  $[\alpha]$  sería  $1 \in \mathbb{Z}$ ,  $[\beta]$  sería  $2 \in \mathbb{Z}$  y podríamos seguir así con todos los números enteros.
- Para los números negativos tomaremos los opuestos de los anteriores, es decir, las curvas recorridas en sentido contrario. Por ejemplo  $[\tilde{\alpha}]$  será el  $-1 \in \mathbb{Z}$ ,  $[\tilde{\beta}]$  será el  $-2$  y así sucesivamente.

Más adelante probaremos que  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  de una forma más rigurosa.

**Ejemplo.** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto estrellado desde un punto  $x_0$ . Entonces  $\pi_1(X; x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ , es decir, es trivial.

*Demostración.* Dado  $\alpha(s)$  un lazo basado en  $x_0$  dentro de  $X$ , entonces

$$H(s, t) = (1 - t)\alpha(s) + tx_0$$

es una aplicación continua dentro<sup>1</sup> de  $X$  tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= x_0 = \varepsilon_{x_0}(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x_0 & \text{y} & & H(1, t) &= x_0 & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

$\square$

<sup>1</sup>aquí es donde usamos que es estrellado

En particular, las bolas abiertas, las bolas cerradas y los convexos en general como  $\mathbb{R}^n$  tienen grupo fundamental trivial.

**Teorema 1.4.** Sean  $x, y$  dos puntos de un e.t.  $X$ . Si  $X$  es arcoconexo, entonces  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(X, y)$  son iguales salvo isomorfismo.

*Demostración.* Como  $X$  es arcoconexo podemos considerar  $\alpha$  un arco uniendo  $x$  con  $y$  y la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \pi_1(X, y) &\rightarrow \pi_1(X, x) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

que está bien definida por lo visto anteriormente sobre el operador  $*$ . Queremos ver ahora que  $F_\alpha$  es un isomorfismo de grupos. Para ello comencemos por ver que  $F_\alpha$  es un homomorfismo, es decir, que se verifica

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2])$$

Desarrollamos el segundo término de la expresión:

$$\begin{aligned} F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2]) &= ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}]) = [\alpha] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}] = \\ &= F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \end{aligned}$$

y tenemos la igualdad buscada. Veamos ahora que tiene inversa considerando  $F_{\tilde{\alpha}}$  que por definición es  $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$  y que además verifica

$$\begin{aligned} (F_{\tilde{\alpha}} \circ F_\alpha)([\gamma]) &= F_{\tilde{\alpha}}([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X, y)}([\gamma]) \\ (F_\alpha \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) &= F_\alpha([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\tilde{\alpha}] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X, x)}([\gamma]) \end{aligned}$$

por lo que es su inversa. Hemos encontrado por tanto un homomorfismo biyectivo, luego  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$   $\square$

**Definición 1.5.** Decimos que un e.t. es **simplemente conexo** si es arcoconexo y su grupo fundamental es el trivial en un punto (y, por tanto, en cualquier punto).

**Ejemplo.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es estrellado desde un punto  $x_0$ , entonces  $A$  es simplemente conexo.

**Lema 1.5.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre espacios topológicos y  $x \in X$ . Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} (f_x)_* : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

está bien definida y es un homomorfismo de grupos<sup>2</sup>.

*Demostración.* Para ver que  $(f_x)_*$  está bien definida tomamos  $\alpha_1, \alpha_2$  lazos basados en  $x$  tales que  $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ . Queremos comprobar que  $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$ . Para ello, sabemos que si  $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ , entonces existe  $H : [0, 1] \rightarrow X$  continua y tal que

$$H(s, 0) = \alpha_1(s) \quad , \quad H(s, 1) = \alpha_2(s) \quad , \quad H(0, t) = x = H(1, t)$$

<sup>2</sup>Cuando no haya confusión posible escribiremos solamente  $f_*$  en lugar de  $(f_x)_*$

Entonces podemos considerar la aplicación

$$f \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$$

que es continua y verifica

$$\begin{aligned}(f \circ H)(s, 0) &= (f \circ \alpha_1)(s) \\ (f \circ H)(s, 1) &= (f \circ \alpha_2)(s) \\ (f \circ H)(0, t) &= f(x) = (f \circ H)(1, t)\end{aligned}$$

por lo que  $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$ . Veamos ahora que  $(f_x)_*$  es un homomorfismo de grupos, es decir que se verifica

$$(f_x)_*([\alpha] * [\beta]) = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)_*([\beta])$$

Por definición sabemos que

$$\begin{aligned}(f_x)_*([\alpha] * [\beta]) &= (f_x)_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = \left[ \begin{cases} f(\alpha(2s)) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ f(\beta(2s - 1)) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \right] = \\ &= [(f * \alpha) * (f * \beta)] = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)_*([\beta])\end{aligned}$$

□

**Definición 1.6.** A la aplicación  $f_*$  dada por el lema la llamaremos **homomorfismo inducido** por  $f$ .

**Propiedades.** Algunas propiedades básicas de  $f_*$  son

1. Si tenemos dos aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$ , entonces se tiene que

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

2. Se verifica que la aplicación dada por

$$\begin{aligned}Id_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [\alpha]\end{aligned}$$

es la identidad en grupos fundamentales.

**Corolario 1.5.1.** Si  $h : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces la aplicación dada por

$$(h_x)_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, h(x))$$

es un isomorfismo de grupos, es decir, el grupo fundamental se conserva<sup>3</sup> por homeomorfismos.

---

<sup>3</sup>salvo isomorfismo

**Definición 1.7.** Si  $(G_1, *_1)$  y  $(G_2, *_2)$  son dos grupos algebraicos, consideramos sobre  $G_1 \times G_2$  el producto  $*$  dado por

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) := (a_1 *_1 a_2, b_1 *_2 b_2)$$

para  $a_1, a_2 \in G_1, b_1, b_2 \in G_2$

**Teorema 1.6.** Sean  $X, Y$  dos e.t.,  $x \in X, y \in Y$ . Entonces, con la topología producto en  $X \times Y$  se tiene que

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

*Demostración.* Veamos que

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\longmapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) \end{aligned}$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son las proyecciones a  $X$  y a  $Y$  respectivamente está bien definida. Esto es fácil de ver ya que

$$([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ((p_1)_*([\alpha]), (p_2)_*([\alpha]))$$

y además es un homomorfismo. Consideramos además la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) &\longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x, y)) \\ ([\beta], [\gamma]) &\longmapsto [(\beta, \gamma)] \end{aligned}$$

y es fácil ver que está bien definida y es un homomorfismo tal que

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi &= Id_{\pi_1(X \times Y, (x, y))} \\ \phi \circ \psi &= Id_{\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)} \end{aligned}$$

□

### 1.3. Espacios recubridores

**Definición 1.8.** Sea  $p : R \rightarrow B$  una aplicación continua y sobreyectiva entre dos espacios topológicos. Dado un punto  $b \in B$  decimos que un abierto  $O$  que contiene a  $b$  está **regularmente recubierto** si se verifican las siguientes propiedades

1.  $p^{-1}(O)$  es una unión disjunta de abiertos  $A_i \subseteq R, i \in I$ .
2. Para cada  $i \in I, p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$  es un homeomorfismo.

**Ejemplo.** En este caso, si consideramos la aplicación  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  descrita en la gráfica, que es claramente continua y sobreyectiva<sup>4</sup> podemos ver que  $O$ , que contiene al  $(1, 0)$  está regularmente recubierto

<sup>4</sup>de hecho es un homeomorfismo que estudiamos en Topología I



**Definición 1.9.** Decimos que una aplicación  $p : R \rightarrow B$  entre dos espacios topológicos es una **aplicación recubridora** si  $p$  es continua, sobreyectiva y todo punto  $b \in B$  está contenido en un abierto  $O_b$  regularmente recubierto.

*Observación.* Todo homeomorfismo es una aplicación recubridora<sup>5</sup>.

**Teorema 1.7.** La aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora

*Demostración.* Es claro que es sobreyectiva y continua por las propiedades del seno y el coseno en  $\mathbb{R}$ . Tendremos que ver que

$$O = \mathbb{S}^1 \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$$

está regularmente recubierto. Para ello consideramos

$$\begin{aligned} p^{-1}(O) &= \{x \in \mathbb{R} : \cos(2\pi x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2\pi x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Tomando  $A_k = \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right)$  falta ver que cada abierto  $A_{k_0}$  cumple que  $p : A_{k_0} \rightarrow O$  es un homeomorfismo.

Por las propiedades de  $(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$  es claro que  $p$  es inyectiva y sobreyectiva en  $A_{k_0}$ . Para ello podemos considerar

$$p' : \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right] \rightarrow \overline{O}$$

<sup>5</sup>Podemos verlo fácilmente tomando  $O_b = X$  el total.

que es continua y va desde un compacto en un conjunto T2, lo que nos dice que  $p|_{\left[k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4}\right]}$  es cerrada por lo que

$$p' : \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right] \rightarrow \overline{O}$$

es un homeomorfismo y por tanto su restricción en el dominio

$$p' : \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right) \rightarrow \overline{O}$$

también lo es y por la definición de  $A_k$  tenemos lo que buscábamos.

Si repetimos este razonamiento de forma análoga para los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$$

$$\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

$$\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$$

tendremos la demostración completa. □

**Ejemplo.** La aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$

que podemos entender como la aplicación que lleva

$$\begin{aligned} (x + iy) &\mapsto (x + iy)^2 \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \end{aligned}$$

es recubridora. Intuitivamente la podemos ver como



Esta aplicación se podría generalizar como

$$\begin{aligned} p_n : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos \theta, \sin \theta) &\mapsto (\cos n\theta, \sin n\theta) \\ (x + iy) &\mapsto (x + iy)^n \end{aligned}$$

con  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Propiedades.**

1. Sean  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  dos aplicaciones tales que una de ellas es un homeomorfismo y la otra una aplicación recubridora. Entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es una aplicación recubridora.
2. Sea  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $B_0$  un subconjunto de  $B$ , entonces

$$p|_{p^{-1}(B_0)} : p^{-1}(B_0) \rightarrow B_0$$

es una aplicación recubridora.

3. Si  $p_1 : R_1 \rightarrow B_1$  y  $p_2 : R_2 \rightarrow B_2$  son dos aplicaciones recubridoras, entonces

$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 &\rightarrow B_1 \times B_2 \\ (x, y) &\mapsto (p_1(x), p_2(y)) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora cuando consideramos la topología producto en  $R_1 \times R_2$  y  $B_1 \times B_2$ .

**Ejemplo.**

1.  $\mathbb{R}^2$  es un recubridor del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Para ello podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

y  $p_2 = Id_{\mathbb{R}}$  y como  $p_1$  es un recubrimiento y  $p_2$  es un homeomorfismo tendremos que la aplicación

$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora. Intuitivamente podemos entenderlo de forma gráfica como



2.  $\mathbb{R}^2$  es un recubridor del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  de  $\mathbb{R}^4$  (o el toro de rotación de  $\mathbb{R}^3$  porque ambos toros son homeomorfos). Para ello consideramos

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

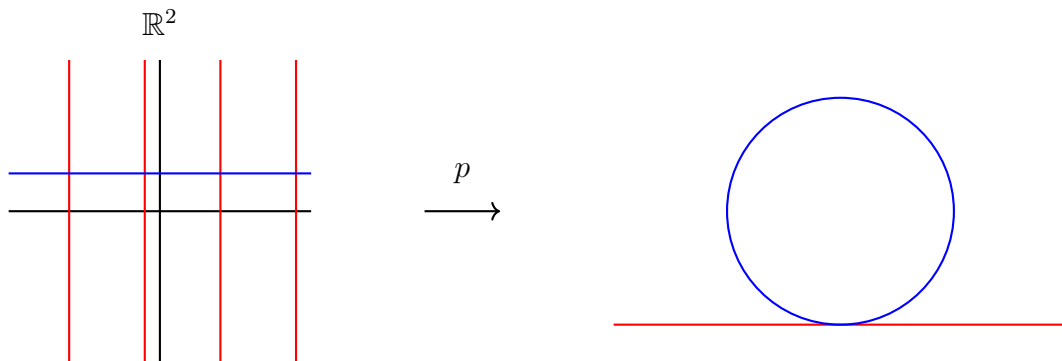
y su producto

$$\begin{aligned} p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que sería la aplicación recubridora. Intuitivamente podemos entenderlo de forma gráfica como



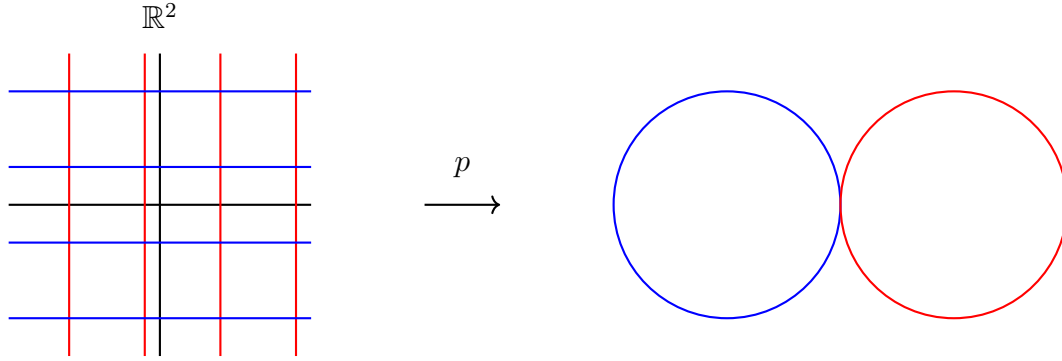
3. Intuitivamente podemos pensar en un recubrimiento de una circunferencia tangente a una recta como una colección de rectas paralelas y atravesadas por una común, como aparece en la figura. De esta forma (tal cual está en el dibujo) al “enrollar” el eje  $x$  de forma que hagamos coincidir todas las rectas rojas tendremos que la recta azul forma una circunferencia, que como originalmente solo tocaba en un punto a cada recta, resultará en la circunferencia tangente a la recta.



4. Por último podemos plantearnos cómo podría ser un recubrimiento de dos circunferencias tangentes. Para ello, tal como aparece en la figura podremos usar una **cuadrícula**. De forma análoga al ejemplo anterior podremos “enrollar” en



primer lugar el eje  $x$  y obtendremos una única recta roja tangente a infinitas circunferencias azules (como en el ejemplo anterior pero con las circunferencias azules periódicas). Ahora podremos “enrollar” la propia recta roja, haciendo coincidir todas las circunferencias azules de forma que obtendremos las dos circunferencias tangentes.



## 1.4. Levantamientos en espacios recubridores

**Definición 1.10.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $f : X \rightarrow B$  una aplicación continua. Decimos que  $\hat{f} : X \rightarrow R$  es un **levantamiento** de  $f$  si se cumple que  $\hat{f}$  es continua y  $p \circ \hat{f} = f$ .

**Ejemplo.** Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{aligned}$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \end{aligned}$$

Si elegimos

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto s \end{aligned}$$

es claro que  $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$ . Otros posibles levantamientos de  $\alpha$  son

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ s &\mapsto k + s \end{aligned}$$

Nos planteamos ahora cuál sería un levantamiento de  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(1 - s)$ . Podemos ver que  $\tilde{\hat{\alpha}}_k(s) = k - s$  para  $k \in \mathbb{Z}$  es en efecto un levantamiento de  $\tilde{\alpha}(s)$ .



**Lema 1.8.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $r_0 \in R$  y  $b_0 \in B$  tales que  $p(r_0) = b_0$ . Entonces dado un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$  con  $\alpha(0) = b_0$ , existe un único arco  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow R$  tal que  $\hat{\alpha}(0) = r_0$  y  $\hat{\alpha}$  es un levantamiento de  $\alpha$ .

*Demostración.* Como  $p$  es una aplicación recubridora, cada punto  $b \in B$  tiene asociado un abierto  $O_b$  regularmente recubierto que contiene a  $b$ . Como  $\alpha([0, 1])$  es compacto tenemos que existe un recubrimiento finito, es decir,

$$\alpha([0, 1]) \subseteq O_{b_1} \cup O_{b_2} \cup \cdots \cup O_{b_n}$$

Entonces  $[0, 1] \subseteq \alpha^{-1}(O_{b_1}) \cup \alpha^{-1}(O_{b_2}) \cup \cdots \cup \alpha^{-1}(O_{b_n})$  por lo que tendremos el intervalo  $[0, 1]$  recubierto por una familia finita de abiertos. Por el lema del número de Lebesgue<sup>6</sup> sabemos que existe un  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in [0, 1]$  se tiene que  $B(x, \delta) \cap [0, 1]$  está contenido en algún  $p^{-1}(O_{b_j})$  para cierto  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Esto nos asegura que podemos hacer una subdivisión del intervalo  $[0, 1]$  tal que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = 1$$

tal que  $\alpha([t_j, t_{j+1}])$  está contenido en algún  $O_{b_l}$  para  $j \in \{0, \dots, r-1\}$ ,  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Definimos  $\hat{\alpha}$  de manera recursiva:

$\alpha([t_0, t_1])$  está contenido en algún  $O_{b_l}$ . Como  $O_{b_l}$  está regularmente recubierto

$$p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{unión disjunta de abiertos}$$

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O_{b_l} \text{ es homeomorfismo}$$

Como  $r_0 \in p^{-1}(b_0) = p^{-1}(\alpha(0)) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i$  se tiene que  $r_0 \in A_{i_0}$  para algún  $A_{i_0}$  con  $i_0 \in I$ . Como además  $p|_{A_{i_0}} : A_{i_0} \rightarrow O_{b_l}$  es un homeomorfismo, podemos definir

$$\hat{\alpha}(t) = (p|_{A_{i_0}})^{-1}(\alpha(t)), \quad t \in [0 = t_0, t_1]$$

Es claro que  $\hat{\alpha}$  en  $[0, t_1]$  es continua y  $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$ .

<sup>6</sup>visto probablemente en alguna asignatura de Análisis.

Para definir  $\hat{\alpha}$  en  $[t_1, t_2]$  repetimos el mismo procedimiento. Sabemos que  $\alpha([t_1, t_2])$  cae en un abierto  $O_{b_m}$  que está regularmente recubierto.

$$p^{-1}(O_{b_m}) = \bigcup_{i \in I'} A'_i \quad \text{con } A'_i \text{ abiertos disjuntos}$$

$$p|_{A'_i} : A'_i \rightarrow O_{b_m} \text{ homeomorfismo}$$

Además tenemos que  $\alpha(t_1) \in O_{b_m}$ . Como  $p(\hat{\alpha}(t_1)) = \alpha(t_1) \in O_{b_m}$ , entonces  $\hat{\alpha}(t_1) \in p^{-1}(O_{b_m})$  y por tanto  $\exists i'_0$  tal que  $\hat{\alpha}(t_1) \in A'_{i'_0}$ . Como  $p|_{A'_{i'_0}} : A'_{i'_0} \rightarrow O_{b_m}$  es un homeomorfismo, podemos definir  $\hat{\alpha}$  en  $[t_1, t_2]$  como

$$\hat{\alpha}(t) = (p|_{A'_{i'_0}})^{-1}(\alpha(t))$$

que es claramente continua y  $(p \circ \hat{\alpha})(t) = \alpha(t)$  para  $t \in [t_1, t_2]$ . Por el lema de pegado tenemos que  $\hat{\alpha}$  es continua en  $[t_0, t_2]$ . Siguiendo este procedimiento con cada  $t_i$ ,  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  tendremos el resultado que buscábamos probar.

Veamos ahora por qué  $\hat{\alpha}$  es única con  $\hat{\alpha}(0) = r_0$ . Si existiese otro arco  $\alpha^* : [0, 1] \rightarrow R$  tal que  $p \circ \hat{\alpha} = p \circ \alpha^*$  con  $\hat{\alpha}(0) = r_0 = \alpha^*(0)$ , entonces

$$\alpha([0, t_0]) \subset O_{b_l}$$

por lo que

$$\alpha^*([0, t_1]) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\hat{\alpha}([0, t_1]) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Por continuidad,  $\alpha^*([0, t_1]) \subseteq A_{i_1}$  y  $\hat{\alpha}([0, t_1]) \subseteq A_{i_0}$  pero  $\alpha^*(0) = r_0 = \hat{\alpha}(0) \in A_{i_0}$  y como los  $A_i$  son disjuntos tenemos que  $A_{i_1} = A_{i_0}$ . Además,  $p|_{A_{i_0}}$  es homeomorfismo de  $A_{i_0}$  en  $O_{b_l}$  por lo que

$$\alpha^*(t) = \hat{\alpha}(t), \quad t \in [0, 1]$$

De forma recursiva se verifica la unicidad en todos los intervalos  $[t_j, t_{j+1}]$  con  $j \in \{0, \dots, r-1\}$ .  $\square$

*Observación.* Es importante tener en cuenta que en general el levantamiento de un lazo no es un lazo, sino simplemente un arco.

**Lema 1.9.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora y  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  una aplicación continua. Dados  $b_0 = H(0, 0)$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ , entonces existe un único levantamiento  $\hat{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$  tal que  $\hat{H}(0, 0) = r_0$ . Si además  $H$  es una homotopía por arcos, entonces  $\hat{H}$  también lo será.

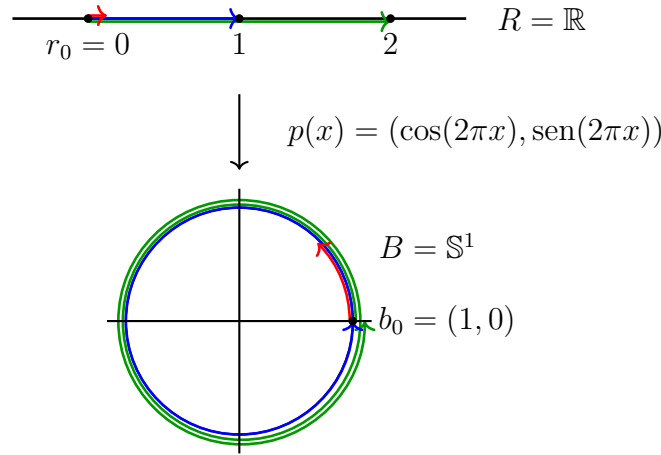
**Corolario 1.9.1.** Sea  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow B$  dos arcos con  $[\alpha] = [\beta]$  y tomamos un  $r_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$  ( $\alpha(0) = \beta(0)$ ). Si elegimos  $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow R$  como los únicos arcos con  $\hat{\alpha}(0) = r_0 = \hat{\beta}(0)$ , entonces  $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$ .

**Definición 1.11.** Consideramos una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$ , un punto  $b_0 \in B$  y otro  $r_0 \in R$  tal que  $p(r_0) = b_0$ . Entonces podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(B, b_0) &\rightarrow p^{-1}(b_0) \\ [\alpha] &\mapsto \hat{\alpha}(1) \end{aligned}$$

donde  $\hat{\alpha}$  es el único levantamiento de  $\alpha$  con  $\hat{\alpha}(0) = r_0$ . A la aplicación  $\phi$  la llamaremos **correspondencia del levantamiento**.

**Ejemplo.** Consideramos el caso de “enrollar”  $\mathbb{R}$  sobre una circunferencia. La aplicación  $\phi$  cuenta el número de vueltas que da cada arco, como se puede ver en el siguiente dibujo.



**Teorema 1.10.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$ ,  $r_0 \in R$  con  $p(r_0) = b_0$ . Si  $R$  es arcoconexo, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Además, si  $R$  es simplemente conexo, entonces  $\phi$  es biyectiva.

*Demostración.* Si  $R$  es arcoconexo tenemos que probar que dado  $r_1 \in p^{-1}(b_0) \subseteq R$  existe un lazo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$  de forma que  $\phi([\alpha]) = r_1$ , es decir, su único levantamiento  $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow R$  cumple que  $\hat{\alpha}(0) = r_0$  y  $\hat{\alpha}(1) = r_1$ .

Para ello tomo un arco cualquiera  $\alpha^* : [0, 1] \rightarrow R$  tal que  $\alpha^*(0) = r_0$  y  $\alpha^*(1) = r_1$  que existe por ser  $R$  arcoconexo. Elijo ahora  $\alpha = p \circ \alpha^*$  que es un arco en  $B$  tal que  $\alpha(0) = p(\alpha^*(0)) = p(r_0) = b_0$  y  $\alpha(1) = p(\alpha^*(1)) = p(r_1) = b_0$ . Tenemos entonces que  $\alpha$  es un lazo basado en  $b_0$  y como  $\alpha = p \circ \alpha^*$ , entonces  $\hat{\alpha} = \alpha^*$  es un levantamiento de  $\alpha$  con  $\hat{\alpha}(0) = \alpha^*(0) = r_0$  por lo que  $\phi([\alpha]) = \hat{\alpha}(1) = \alpha^*(1) = r_1$ .

Nos queda ver que si  $R$  es simplemente conexo, entonces  $\phi$  es biyectiva. Como todo simplemente conexo es necesariamente arcoconexo sabemos de la primera parte del teorema que  $\phi$  es sobreyectiva por lo que solo tenemos que probar la inyectividad. Eso es equivalente a considerar  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, b_0)$  y ver si se verifica la implicación

$$\phi([\alpha]) = \phi([\beta]) \stackrel{?}{\Rightarrow} [\alpha] = [\beta]$$

Sabiendo que  $\hat{\alpha}(1) = \phi([\alpha])$  y  $\hat{\beta}(1) = \phi([\beta])$ . Como  $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$  consideramos  $\hat{\alpha} * \tilde{\hat{\beta}}$  que es un lazo basado en  $r_0$ . Como  $R$  es simplemente conexo tenemos que

$$[\hat{\alpha}] * \left[ \tilde{\hat{\beta}} \right] = \left[ \hat{\alpha} * \tilde{\hat{\beta}} \right] = [\varepsilon_{r_0}]$$

por lo que se tiene

$$[\hat{\alpha}] = [\varepsilon_{r_0}] * [\hat{\beta}] = [\hat{\beta}]$$

Como coinciden los elementos del grupo fundamental tendremos que son homotópicos por arcos por lo que existe una homotopía por arcos  $H$  entre  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$ , es decir, una aplicación  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$  tal que

$$H(t, 0) = \hat{\alpha}(t) \quad \text{y} \quad H(t, 1) = \hat{\beta}(t)$$

Si consideramos ahora su composición con la aplicación recubridora,  $p \circ H$ , tendremos que es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$  ya que tendríamos  $p \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  que verifica

$$\begin{aligned} (p \circ H)(t, 0) &= p(H(t, 0)) = p(\hat{\alpha}(t)) = \alpha(t) \\ (p \circ H)(t, 1) &= p(H(t, 1)) = p(\hat{\beta}(t)) = \beta(t) \end{aligned}$$

por lo que podemos concluir que  $[\alpha] = [\beta]$ . □

## 1.5. Grupo fundamental de la circunferencia

**Definición 1.12.** Dado un lazo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  basado en  $(1, 0)$ , definimos el grado de  $\alpha$  como el único número entero  $\hat{\alpha}(1)$  dado por el levantamiento  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha$  mediante la aplicación recubridora

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \quad , \text{ con } \hat{\alpha}(0) = 0$$

Notaremos al grado de  $\alpha$  como  $\deg(\alpha)$

*Observación.* Como el grado es simplemente la correspondencia del levantamiento para  $p$  y  $r_0 = 0$ , entonces si  $[\alpha] = [\beta]$  se tiene que  $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$ , es decir el grado está bien definido para clases de equivalencia.

**Teorema 1.11.** El grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1$  en el  $(1, 0)$  es isomorfo al grupo aditivo  $(\mathbb{Z}, +)$ . De hecho, la aplicación

$$\begin{aligned} \deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\mapsto \deg(\alpha) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

*Demostración.* Como  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo, el teorema anterior nos dice que la aplicación  $\deg$  es biyectiva. Tendremos que probar que  $\deg$  es un homomorfismo, es decir que se verifica

$$\deg([\alpha] * [\beta]) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$$

Para verlo tomamos  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  levantamientos de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente con

$$\hat{\alpha}(0) = 0 = \hat{\beta}(0)$$

Recordemos que  $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ . Vamos a considerar

$$\widehat{\alpha * \beta}(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

y es claro que  $\widehat{\alpha * \beta}$  es continua. Queremos ver que  $p(\widehat{\alpha * \beta}) = \alpha * \beta$ . Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} p(\widehat{\alpha * \beta})(s) &= \begin{cases} p(\hat{\alpha}(2s)) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ p(\hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s - 1)) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(1) + \beta(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = (\alpha * \beta) \end{aligned}$$

por lo que  $\widehat{\alpha * \beta}$  es un levantamiento de  $\alpha * \beta$  con  $\widehat{\alpha * \beta}(0) = \hat{\alpha}(0)$  por lo que por definición tenemos que

$$\deg(\widehat{\alpha * \beta}) = \widehat{\alpha * \beta}(1) = \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(1) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$$

□

*Observación.* Algunas consecuencias elementales son las siguientes

- ) El grupo fundamental de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  es  $\mathbb{Z}$ . De aquí se deduce que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  ya que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  que tiene por grupo fundamental  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{R}^2$  tiene por grupo elemental el trivial.
- )  $\mathbb{R}^3 \setminus R$  es homeomorfo a  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$  donde  $R$  es una recta en  $\mathbb{R}^3$ .
- ) El grupo fundamental del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  o el toro de rotación de  $\mathbb{R}^3$  es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Proposición 1.12.** No existe ninguna aplicación continua<sup>7</sup>  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$

*Demostración.* Tomamos  $\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ , lazo basado en  $(1, 0)$ . Su clase de equivalencia en el disco sería

$$[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} = [\varepsilon_{(1,0)}]$$

---

<sup>7</sup> $\overline{\mathbb{D}}$  denota el disco cerrado de  $\mathbb{R}^2$  centrado en el  $(0,0)$  y con radio 1

ya que  $\overline{\mathbb{D}}$  es simplemente conexo. Si existiese una  $f$  continua, entonces tendríamos que

$$f_* : \pi_1(\overline{\mathbb{D}}(1, 0)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \text{ es homeomorfismo}$$

$$[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} \mapsto f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) \stackrel{def}{=} [f \circ \alpha]_{\mathbb{S}^1} = [\alpha]_{\mathbb{S}^1}$$

Pero  $[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} = [\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{\mathbb{D}}}$  por lo que

$$f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) = f_*([\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{\mathbb{D}}}) = [\varepsilon_{(1,0)}]_{\mathbb{S}^1}$$

pero como  $f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) = [\alpha]_{\mathbb{S}^1}$  llegamos a contradicción ya que  $\deg(\alpha) = 1$  y  $\deg(\varepsilon_{(1,0)}) = 0$   $\square$

**Teorema 1.13** (punto fijo de Brouwer). Si  $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  es continua, entonces existe  $x_0 \in \overline{\mathbb{D}}$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no tiene ningún punto fijo, es decir,  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in \overline{\mathbb{D}}$ . Buscaremos ahora construir una aplicación a partir de esta hipótesis que deje a los puntos de la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  fijos para poder aplicar la proposición anterior.

Para cada  $x$  consideramos la semirrecta abierta

$$f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \quad \forall \lambda_x > 0$$

y la intersección de dicha semirrecta con la circunferencia unidad. Como  $f(x), x \in \overline{\mathbb{D}}$  y  $f(x) \neq x$ , lo recién definido es efectivamente una semirrecta y ha de cortar exactamente en un único punto a  $\mathbb{S}^1$ .

$$\begin{aligned} 1 &= \langle f(x) + \lambda_x(x - f(x)), f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \rangle = \\ &\langle f(x) \rangle + 2\lambda_x \langle f(x), x - f(x) \rangle + \lambda_x^2 \langle x - f(x), x - f(x) \rangle \end{aligned}$$

Por lo que podemos despejar  $\lambda_x$  y nos queda

$$\lambda_x = \frac{-2\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{4\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - 4\langle f(x), f(x) - 1 \rangle \langle x - f(x), x - f(x) \rangle}}{2\langle x - f(x), x - f(x) \rangle}$$

Por lo que  $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$  es continua y  $|g(x)| = 1$ . Por tanto tenemos que si  $x \in \mathbb{S}^1$ , entonces  $g(x) = x$  lo que contradice la proposición anterior.  $\square$

*Observación.* El teorema del punto fijo de Brouwer no solo es cierto para  $\overline{\mathbb{D}}$  sino para cualquier espacio topológico  $X$  homeomorfo a  $\overline{\mathbb{D}}$ . Es decir, si  $f : X \rightarrow X$  es continua con  $X$  homeomorfo a  $\overline{\mathbb{D}}$ , entonces existe al menos un punto  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

*Demostración.* Notemos por  $h : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X$  al homeomorfismo y estaremos en la siguiente situación

$$\overline{\mathbb{D}} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h^{-1}} \overline{\mathbb{D}}$$

Entonces tendríamos  $h^{-1} \circ f \circ h : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  continua y por el teorema de Brouwer existe  $y_0 \in \overline{\mathbb{D}}$  tal que  $(h^{-1} \circ f \circ h)(y_0) = y_0$ .  $\square$

**Corolario 1.13.1.** Sea  $V : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  una aplicación continua. Entonces existen puntos  $x, y \in \mathbb{S}^1$  de forma que  $V(x) = \lambda x$ ,  $V(y) = -\mu y$  con  $\lambda, \mu > 0$ .

*Demostración.* Consideramos la aplicación  $f(x) = \frac{V(x)}{|V(x)|}$  que es continua (ya que  $V(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{D}$ ). Por el teorema de Brouwer tenemos que  $\exists x_0 \in \mathbb{D}$  tal que  $f(x_0) = x_0$  por lo que  $x_0 = \frac{V(x_0)}{|V(x_0)|}$  y entonces  $V(x_0) = |V(x_0)|x_0 = \lambda x_0$  (tomando  $\lambda = |V(x_0)|$ ). Si tomamos  $g(x) = -\frac{V(x)}{|V(x)|}$  tendríamos análogamente que existe un  $y_0$  tal que  $y_0 = g(y_0) = \frac{V(y_0)}{|V(y_0)|} \in \mathbb{S}^1$  y  $V(y_0) = -|V(y_0)|y_0 = -\mu y_0$  (tomando  $\mu = |V(y_0)|$ ). En general, para poder considerar cualquier ángulo  $\theta$  tendremos que considerar

$$h(x) = \frac{V(x)}{e^{i\theta}|V(x)|}$$

□

**Teorema 1.14** (Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio complejo de grado  $n \geq 1$  tiene al menos una raíz compleja

*Demostración.* Vamos a considerar  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$  con  $n \geq 1$  y supongamos que  $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , es decir, que no tiene raíces en  $\mathbb{C}$ . Consideramos la siguiente aplicación

$$H(s, t) = \begin{cases} \frac{p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi i s}\right) \cdot \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi i s}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} & \text{si } (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1[ \\ e^{2\pi i n s} & \text{si } (s, t) \in [0, 1] \times \{1\} \end{cases}$$

Esta aplicación lo que hace es considerar el plano complejo y su imagen mediante  $p$ . La aplicación  $p$  no pasa por el origen porque así lo hemos supuesto. Para  $t = 0$  (tiempo inicial) tenemos que  $H(s, 0) = (1, 0)_{\mathbb{R}^2} \equiv 1_{\mathbb{C}}$ . Además para  $s = 0$  tenemos  $H(0, t) = (1, 0)_{\mathbb{R}^2} \equiv 1_{\mathbb{C}}$ . Si la aplicación  $H$  fuera una homotopía, al principio (cuando  $t$  es bajo) no daría ninguna vuelta (en la imagen) y al final (cuando domina  $z^n$ ) daría  $n$  vueltas por lo que no puede ser.

Comprobemos que  $H$  es continua. Para esto simplemente veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi i s_0}\right) \cdot \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi i s_0}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} &= e^{2\pi i n s_0} \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi i s_0}\right) \cdot \left|p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left|p\left(\frac{t}{1-t}e^{2\pi i s_0}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} &= \\ = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i n s_0} + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} e^{2\pi i (n-1)s_0} + \dots\right) \cdot \left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} + \dots\right|}{\left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i n s_0} + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} e^{2\pi i (n-1)s_0} + \dots\right| \cdot \left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} + \dots\right)} &= \\ = \frac{e^{2\pi i n s_0}}{|e^{2\pi i n s_0}|} \cdot \frac{|1|}{1} &= e^{2\pi i n s_0} \end{aligned}$$



y tenemos claramente que  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua. Además se tiene

$$\begin{aligned} H(0, t) &= 1 & t \in [0, 1] \\ H(1, t) &= 1 & t \in [0, 1] \\ H(s, 0) &= 1 & s \in [0, 1] \\ H(s, 1) &= e^{2\pi i n s} & s \in [0, 1] \end{aligned}$$

por lo que  $H$  es una homotopía por arcos entre los lazos  $\alpha_1(s) = 1$  y  $\alpha_2(s) = e^{2\pi i n s}$ . Entonces tendremos que

$$[\alpha_1] = [\alpha_2] \quad \text{y} \quad 0 = \deg(\alpha_1) = \deg(\alpha_2) = n$$

y llegamos a contradicción ya que  $n \geq 1$ . Por tanto  $\exists z \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = 0$ .  $\square$

## 1.6. Retracciones, tipos de homotopía y retracts de deformación

**Definición 1.13.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Decimos que una aplicación continua  $r : X \rightarrow A$  es una **retracción** si se cumple que  $r(a) = a \quad \forall a \in A$ .

Se dice que  $A$  es un **retracto** de  $X$  si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$ .

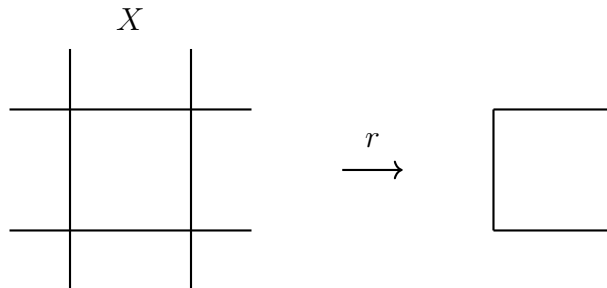
**Ejemplo.**

1.  $\mathbb{S}^1$  es un retracto de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Podemos considerar

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

que es claramente continua y  $r(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

2.  $\mathbb{S}$  no es un retracto de  $\overline{\mathbb{D}}$  por lo visto en la proposición 1.12.
3. La compresión de un cuadrado también es un retracto.



**Lema 1.15.** Sean  $X$  un e.t. y  $A \subseteq X$  tal que  $A$  es un retracto de  $X$ . Entonces la aplicación inclusión  $i : A \rightarrow X$  induce un homomorfismo inyectivo

$$i_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$$

*Demostración.* Si  $A$  es retracto de  $X$ , entonces por definición tenemos que  $\exists r : X \rightarrow A$  continua tal que  $r(a) = a$  para cualquier  $a \in A$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \xrightarrow{r} A \\ a & \longmapsto & a \longmapsto a \end{array}, r \circ i = Id_A$$

$$\pi_1(A, a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, a_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, a_0)$$

$\xrightarrow{r_* \circ i_*}$

$$r_* \circ i_* = (Id_A)_* = Id_{\pi_1(A, a_0)}$$

Como  $Id_{\pi_1(A, a_0)}$  es inyectiva, entonces se tiene que  $i_*$  es inyectiva.  $\square$

**Definición 1.14.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Decimos que  $f$  es una **equivalencia homotópica** si existe  $g : Y \rightarrow X$  continua tal que  $g \circ f$  es homotópica a  $Id_X$  y  $f \circ g$  es homotópica a  $Id_Y$ .

Decimos que  $X$  e  $Y$  son **homotópicamente equivalentes** si existe una equivalencia homotópica entre ambos.

A la aplicación  $g$  se le llama una **inversa homotópica** de  $f$ .

*Observación.*

- (i) La inversa homotópica no tiene por qué ser única
- (ii) La composición de equivalencias homotópicas sigue siendo una equivalencia homotópica, de lo que se deduce que ser homotópicamente equivalente es una relación de equivalencia.
- (iii) Una equivalencia homotópica no tiene por qué ser ni inyectiva ni sobreyectiva.
- (iv) Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica.

**Lema 1.16.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas,  $x_0 \in X$ . Si  $H$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$  y consideramos el arco  $\alpha(t) = H(x_0, t)$ . Entonces se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \\ f_* \nearrow & \downarrow \varphi \equiv \text{isomorfismo} & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, g(x_0)) \\ g_* \searrow & & \end{array}$$

donde  $\phi([\gamma]) = [\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$ . En particular,  $f_*$  es inyectiva (respectivamente sobreyectiva) si y solo si  $g_*$  lo es.

*Demostración.* Tenemos que demostrar que si  $\beta$  es un lazo en  $X$  basado en  $x_0$ , entonces:

$$(\varphi \circ f_*)([\beta]) = g_*([\beta]) = [g \circ \beta]$$

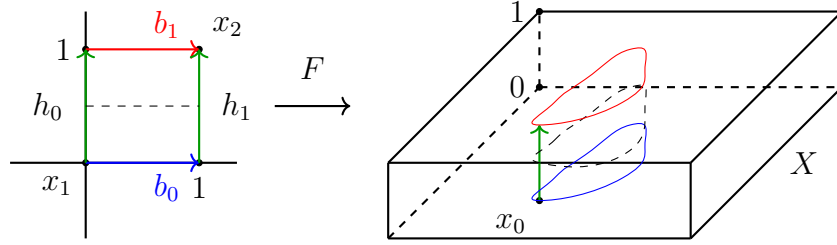
Pero tenemos además

$$(\varphi \circ f_*)([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [f \circ \beta] * [\alpha]$$

por lo que será equivalente a probar que

$$[\alpha] * [g \circ \beta] = [f \circ \beta] * [\alpha]$$

es decir, que existe una homotopía por arcos que lleva  $\alpha * (g \circ \beta)$  en  $(f \circ \beta) * \alpha$ .



Por hipótesis tenemos  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua tal que

$$\begin{aligned} (x, 0) &\mapsto f(x) \\ (x, 1) &\mapsto g(x) \\ \alpha(t) &= H(x_0, t) \end{aligned}$$

Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow X \times [0, 1] \quad \text{continua} \\ (s, t) &\mapsto (\beta(s), t) \end{aligned}$$

que verifica

$$\begin{aligned} b_0(s) &= (s, 0) & , s \in [0, 1] \\ b_1(s) &= (s, 1) & , s \in [0, 1] \\ h_0(s) &= (0, s) & , s \in [0, 1] \\ h_1(s) &= (1, s) & , s \in [0, 1] \end{aligned}$$

Como  $[0, 1] \times [0, 1]$  es simplemente conexo y  $b_0 * h_1 * \tilde{b}_1 * \tilde{h}_0$  es un lazo en el  $(0, 0)$ , entonces se tiene que

$$[b_0 * h_1 * \tilde{b}_1 * \tilde{h}_0] = [\varepsilon_{(0,0)}] \Rightarrow [b_0 * h_1] = [h_0 * b_1]$$

Por tanto tenemos que  $\exists G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  homotopía por arcos tal que  $G(s, 0) = (b_0 * h_1)(s)$  y  $G(s, 1) = (h_0 * b_1)(s)$  por lo que quedan los extremos fijos, es decir,  $G(0, t) = (0, 0)$  y  $G(1, t) = (1, 1)$ . Consideramos entonces

$$H \circ F \circ G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y \quad \text{continua}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}
(H \circ F \circ G)(0, t) &= H(F(0, 0)) = H(x_0, 0) = f(x_0) \\
(H \circ F \circ G)(1, t) &= H(F(1, 1)) = H(x_0, 1) = g(x_0) \\
(H \circ F \circ G)(s, 0) &= H(F((b_0 * h_1)(s))) = (H \circ F) \left( \left\{ \begin{array}{ll} b_0(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ h_1(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= (H \circ F) \left( \left\{ \begin{array}{ll} (2s, 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (1, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = H \left( \left\{ \begin{array}{ll} (\beta(2s), 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (x_0, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} f(\beta(2s)) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \alpha(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} = ((f \circ \beta) \circ \alpha)(s)
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$(H \circ F \circ G)(s, 1) = (\alpha * (g \circ \beta))(s)$$

Por lo que llegamos a que

$$[\alpha] * [g \circ \beta] = [f \circ \beta] * [\alpha]$$

como queríamos probar.  $\square$

**Teorema 1.17.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica, entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo.

*Demostración.* Como  $f$  es una equivalencia homotópica, existe  $g : Y \rightarrow X$  que es una inversa homotópica suya. Sabemos que  $g \circ f$  es homotópica a  $Id_X$  entonces:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(f_0)_*} \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \\
& \searrow (Id_X)_* \text{ isom.} & \parallel \\
& & \downarrow \varphi \equiv \text{isomorfismo} \\
& & \pi_1(X, x_0)
\end{array}$$

De aquí se deduce que  $(f_{x_0})_*$  es inyectiva y que  $g_*$  es sobreyectiva

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) & \xrightarrow{(f \circ g \circ f(x_0))_*} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \\
& \searrow (Id_Y)_* \text{ isom.} & \parallel \\
& & \downarrow \tilde{\varphi} \equiv \text{isomorfismo} \\
& & \pi_1(X, x_0)
\end{array}$$

$\square$

**Definición 1.15.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Decimos que  $A$  es un **retracto de deformación** de  $X$  si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  tal que  $i \circ r$  sea homotópica a la identidad en  $X$ , donde  $i : A \rightarrow X$  denota la inclusión.

Esta definición se escribe simplemente como que existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  homotopía tal que

$$H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) \in A \quad \forall x \in X$$

$$H(a, 1) = a \quad \forall a \in A$$

Aquí la retracción es simplemente  $r(x) = H(x, 1)$ .

**Ejemplo.**

$$1. X = \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\}).$$



Veamos que  $\mathbb{S}^1$  es retracto de deformación de  $X$ . Para ello buscamos  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  y la definimos de la siguiente forma:

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^1, t \in [0, 1] \\ (1-t)x + t(0, 1) & \text{si } x \in \mathbb{R} \times \{1\}, t \in [0, 1] \end{cases}$$

Con esta definición tenemos

$$H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{S}^1 \\ (0, 1) & \text{si } x \in \mathbb{R} \times \{1\} \end{cases} \Rightarrow H(x, 1) \in \mathbb{S}^1 \quad \forall x \in X$$

$$H(a, 0) = a \quad \forall a \in \mathbb{S}^1$$

y tenemos la retracción definida como se ha hecho en la definición.

$$2. X = (\mathbb{R} \times \{-1, 1\}) \cup (\{-1, 1\} \times \mathbb{R}).$$



Veamos que  $A = ([-1, 1] \times \{-1, 1\}) \cup (\{-1, 1\} \times [-1, 1])$  es un retracts de deformación de  $X$ . Para ello definimos la homotopía como

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ (1-t)x + t(1, 1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \geq 1, x_2 \geq 1 \\ (1-t)x + t(-1, 1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \leq -1, x_2 \geq 1 \\ (1-t)x + t(-1, -1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \leq -1, x_2 \leq -1 \\ (1-t)x + t(1, -1) & \text{si } x = (x_1, x_2) \text{ con } x_1 \geq 1, x_2 \leq -1 \end{cases}$$

**Corolario 1.17.1.** Sea  $A$  un retracts de deformación de  $X$ , entonces  $A$  y  $X$  son del mismo tipo de homotopía. En particular la aplicación inclusión  $i : A \rightarrow X$  induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

$$i_* : \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{\text{isomorf.}} \pi_1(X, a_0) \quad a_0 \in A$$

*Demostración.* Si  $A$  es un retracts de deformación de  $X$ , entonces  $\exists H$  homotopía cumpliendo

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x \quad \forall x \in X \\ H(x, 1) &\in A \quad \forall x \in X \\ H(a, 1) &= a \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

Si  $r(x) = H(x, 1)$  se tiene que  $H$  es una homotopía entre  $Id_X$  y  $i \circ r$  y por otro lado

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A \\ a &\mapsto a \mapsto a \end{aligned}$$

con  $r \circ i = Id_A$  por lo que  $r \circ i$  es homotópica a  $Id_A$ . Por el teorema anterior tenemos que  $A$  y  $X$  son del mismo tipo de homotopía y que  $i_*$  es isomorfismo.  $\square$

**Ejemplo.** Sabemos de ejemplos anteriores que  $A = \mathbb{S}^1$  es retracts de deformación de  $X = \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$ . Por el corolario recién estudiado tenemos que son del mismo tipo de homotopía y por tanto la inclusión induce un isomorfismo. Además el isomorfismo entre  $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$  y  $(\mathbb{Z}, +)$  ya se estudió previamente (con la aplicación que “cuenta vueltas”). Es decir, se tiene

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\cong_{\text{isom.}} \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong_{\text{isom.}} (\mathbb{Z}, +) \\ [\alpha]_X &\mapsto [\alpha]_{\mathbb{S}^1} \end{aligned}$$

*Observación.* Si  $A$  es retracts de  $X$ , entonces  $i_* : \pi(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$  es inyectiva. Si  $A$  es retracts de deformación de  $X$ , entonces se tiene que  $i_* : \pi(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$  es biyectiva.

**Ejemplo.**

1.  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $x_0 \in X$ . Sabemos que  $x_0$  es retracts de  $X$ , ya que

$$\begin{aligned} r : X &\rightarrow \{x_0\} \\ x &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

es continua pero  $x_0$  no es retracto de deformación de  $x$  ya que si lo fuese, entonces

$$i_* : \{0\} \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

sería biyectiva

2.  $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$  es un retracto de deformación de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), t) &\mapsto (x_1, x_2, (1-t)x_3) = (1-t)(x_1, x_2, x_3) + t(x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

Tenemos que verifica

$$\begin{aligned} H((x_1, x_2, x_3), 0) &= (x_1, x_2, x_3) \\ H((x_1, x_2, x_3), 1) &= (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\} \\ H((x_1, x_2, 0), 1) &= a \end{aligned}$$

3. Consideramos la cinta de Möbius  $X$  dada por  $Y = [0, 1] \times [0, 1]$  bajo la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \wedge y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Definimos la “circunferencia”

$$A = [0, 1] \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ bajo la relación de equivalencia de } R$$

Consideramos la homotopía:

$$\begin{aligned} H : Y \times [0, 1] &\rightarrow Y \\ ((x, t), t) &\mapsto (1-t)(x, y) + t \left( x, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

que es continua. Se deja como ejercicio ver que  $H$  está bien definida, es decir, que para cualesquiera 2 elementos relacionados tienen la misma imagen (bajo  $R$ ). De esta forma se tiene

$$\pi_1(X) \underset{\text{isom.}}{\cong} \pi_1(A) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

4. Consideramos  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$  [Terminar]

**Definición 1.16.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es **contráctil** si existe un punto  $x_0 \in X$  tal que  $x_0$  sea retracto de deformación de  $X$ .

**Corolario 1.17.2.** Todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.

*Demostración.* Sea  $X$  el e.t y  $x_0$  el punto de  $X$  para el cual existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  homotopía que verifica  $\forall x \in X$

$$H(x, 0) = x$$

$$H(x, 1) = x_0$$

En este caso tenemos que  $\alpha_*(t) = H(x, t)$  es un arco que une  $x$  con  $x_0$  por lo que  $X$  es arcoconexo.

Como  $\{x_0\}$  es retracto de deformación de  $X$  se tiene que

$$i_* : \pi_1(\{x_0\}, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es isomorfismo por lo que  $\pi_1(X, x_0)$  es trivial.  $\square$

## 1.7. El grupo fundamental de las esferas. Aplicaciones.

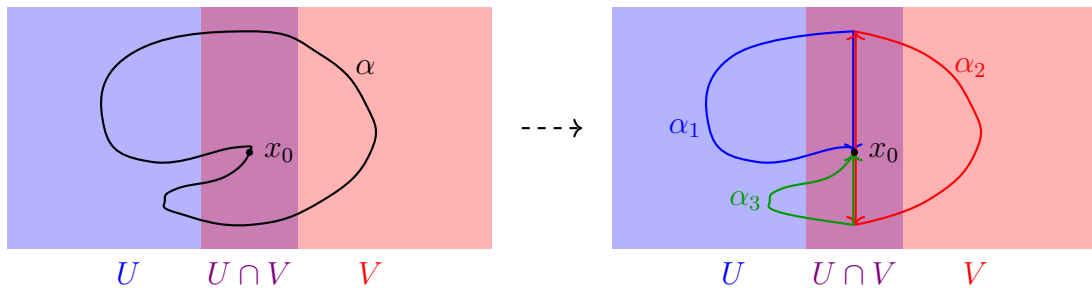
Parece intuitivo que el grupo fundamental de una circunferencia es el trivial ya que podríamos llevar cualquier lazo al trivial. Efectivamente la intuición no nos engaña pero tendremos que verlo de una forma más rigurosa para concluir la veracidad de esta afirmación.

**Lema 1.18.** Sean  $X$  un e.t. y  $U, V$  dos abiertos suyos tales que  $X = U \cup V$ . Si  $U \cap V$  es arcoconexo, entonces dado un punto  $x_0 \in U \cap V$  y  $\alpha$  un lazo basado en  $x_0$ , existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  una cantidad finita de lazos basados en  $x_0$  tales que

$$[\alpha] = [\alpha_1] * \dots * [\alpha_k]$$

donde la imagen de cada  $\alpha_i$  cae completamente en  $U$  o bien en  $V$ .

*Demostración.* Podemos entender de forma gráfica la demostración de la siguiente forma, en la que se podrá descomponer la curva  $\alpha$  en  $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3$



Comenzamos con el lazo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Consideramos  $\alpha^{-1}(U)$  y  $\alpha^{-1}(V)$  que son abiertos en  $[0, 1]$ . Por el lema del número de Lebesgue tenemos que existen

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1 \text{ partición del } [0, 1]$$

tal que  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  contenido en  $U$  o bien en  $V$  para  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ . Si  $\alpha(t_i) \notin U \cap V$  podemos quitar al  $t_i$  de la partición ya que  $\alpha([t_{i-1}, t_i] \cup [t_i, t_{i+1}])$  estaría



contenido en  $U$  o bien todo en  $V$ . Así suponemos todos los  $\alpha(t_i) \in U \cap V$ . Como  $U \cap V$  es arcoconexo existe un arco  $\beta_i$  uniendo  $x_0$  con  $\alpha(t_i)$  para cada  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ . Tenemos por tanto

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_m]$$

donde  $\alpha_i$  es una parametrización en  $[0, 1]$  de  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [\alpha_1] * [\tilde{\beta}_1] * [\beta_1] * [\alpha_2] * [\tilde{\beta}_2] * \dots * [\beta_{m-1}] * [\alpha_m] = \\ &= [\alpha_1 * \beta_1] * [\beta_1 * \alpha_2 * \tilde{\beta}_2] * \dots * [\beta_{m-1} * \alpha_m] \end{aligned}$$

Donde  $[\alpha_1 * \tilde{\beta}_1]$ , cada  $[\beta_i * \alpha_{i+1} * \tilde{\beta}_{i+1}]$  y  $[\beta_{m-1} * \alpha_m]$  son lazos basados en  $x_0$  completamente contenidos en  $U$  o bien en  $V$ .  $\square$

**Teorema 1.19.** Sean  $X$  un e.t y  $U, V$  abiertos de  $X$ . Supongamos que

1.  $X = U \cup V$
2.  $U \cap V$  es arcoconexo (no vacío)
3.  $U$  y  $V$  son simplemente conexos

Entonces  $X$  es simplemente conexo.

*Demostración.* Dado  $\alpha$  lazo basado en  $x_0 \in U \cup V$  se tiene por el lema anterior que

$$[\alpha] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \dots * [\alpha_k]$$

donde cada  $\alpha_i$  es un lazo completamente contenido en  $U$  o bien en  $V$ . Como  $U, V$  son simplemente conexos tenemos

$$[\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\varepsilon_{x_0}] * \dots * [\varepsilon_{x_0}] = [\varepsilon_{x_0}]$$

$\square$

**Corolario 1.19.1.** Las esferas  $\mathbb{S}^n$  para  $n \geq 2$  son simplemente conexas. En particular su grupo fundamental es el trivial.

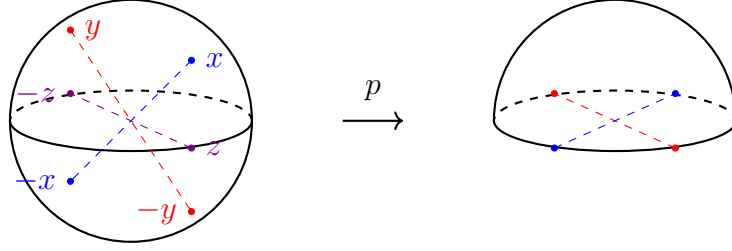
*Demostración.* Definimos los siguientes conjuntos

$$U = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 1)\} \quad V = \mathbb{S}^n \setminus \{(1, \dots, 0)\}$$

$U$  y  $V$  son homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  por lo que son simplemente conexos,  $\mathbb{S}^n = U \cup V$  y además, como  $U \cap V$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  que es arcoconexo (ya que  $n \geq 2$ ), tenemos que  $U \cap V$  es arcoconexo.  $\square$

**Corolario 1.19.2.** El grupo fundamental de  $\mathbb{RP}^n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$  para  $n \geq 2$ .

*Demostración.*



Veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{R}P^n \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

es recubridora. Es claro que  $p$  es continua y sobreyectiva. Por otro lado, dado cualquier punto  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  tenemos que el abierto

$$U_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle \neq 0\}$$

es saturado, es decir, que  $p^{-1}(p(U_{x_0})) = U_{x_0}$  y además podemos escribir

$$U_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle < 0\} = U_{x_0}^+ \cup U_{x_0}^-$$

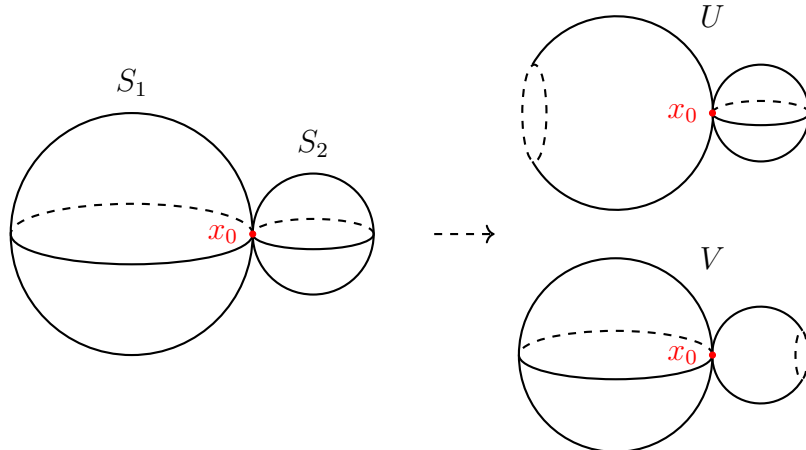
Es fácil probar que  $p|_{U_{x_0}^+}$  y  $p|_{U_{x_0}^-}$  son homeomorfismos. Entonces la correspondencia del levantamiento

$$\varphi : \pi_1(\mathbb{R}P^n, [a_0]) \rightarrow p^{-1}([a_0]) = \{a_0, -a_0\}$$

es biyectiva (ya que  $\mathbb{S}^1$  es simplemente conexo). Entonces  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [a_0])$  solo tiene dos elementos, luego  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [a_0]) \cong \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

**Ejemplo.**

1. Calculamos el grupo fundamental de dos esferas  $S_1, S_2$  de  $\mathbb{R}^3$  que se cortan en un único punto.



Sea  $\{x_0\} = S_1 \cap S_2$  y tomamos  $U = X \setminus \{y_1\}$  con  $y_1 \in S_1 \setminus \{x_0\}$  y  $V = X \setminus \{y_2\}$  con  $y_2 \in S_2 \setminus \{x_0\}$ . Es claro que  $X = U \cap V$  y  $U, V$  son abiertos.  $U \cap V$  es arcoconexo por ser unión de dos arcoconexos  $(S_1 \setminus \{y_1\}) \cup (S_2 \setminus \{y_2\})$  ya que

$$S_1 \setminus \{y_1\} \text{ homeomorfo a } \mathbb{R}^2 \Rightarrow S_1 \setminus \{y_1\} \text{ es arcoconexo}$$

$$S_2 \setminus \{y_2\} \text{ homeomorfo a } \mathbb{R}^2 \Rightarrow S_2 \setminus \{y_2\} \text{ es arcoconexo}$$

y que tienen un punto común  $x_0$ . Veamos ahora que  $U$  tiene a  $S_2$  por retracto de deformación. Si esto es cierto, entonces

$$\pi(U) \stackrel{\text{isom.}}{\cong} \pi_1(S_2) \cong \{0\}$$

Sabemos que  $S_1 \setminus \{y_1\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  y podemos suponer que la imagen mediante ese homeomorfismo de  $x_0$  es el origen  $(0, 0)$ . Entonces la composición de este homeomorfismo y la homotopía

$$H(x, t) = (1 - t)x \quad x \in \mathbb{R}^2$$

nos da una homotopía  $\hat{H} : (S_1 \setminus \{y_1\}) \times [0, 1] \rightarrow S_1 \setminus \{y_1\}$  tal que  $\hat{H}(x_0, t) = x_0$ . Entonces

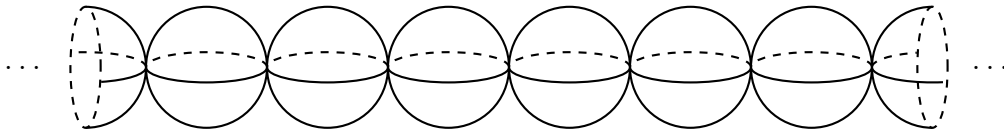
$$\begin{aligned} \tilde{H} : U \times [0, 1] &\rightarrow U \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} \hat{H}(x, t) & \text{si } x \in S_1 \setminus \{y_1\} \\ x & \text{si } x \in S_2 \end{cases} \end{aligned}$$

es una homotopía desde la identidad hasta la que deja fijos a todos los puntos de  $S_1$ , luego  $S_2$  es un retracto de deformación de  $U$ .

2. Si llamamos  $S(x, r)$  a la esfera centrada en  $x \in \mathbb{R}^3$  de radio  $r > 0$  y consideramos

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S\left((k, 0, 0), \frac{1}{2}\right)$$

veamos que su grupo fundamental es el trivial.

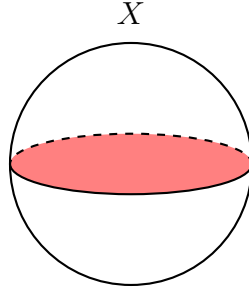


Para ello, con una simple inducción se puede demostrar que esto es cierto para una cantidad finita de esferas usando el ejemplo anterior. En este caso tenemos una cantidad infinita de esferas pero como un lazo es un compacto en  $\mathbb{R}^3$ , tiene que caer en una unión finita de esferas (unidas dos a dos por un único punto) por lo que se podrá reducir al trivial.

3. Vamos a definir el siguiente conjunto

$$X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

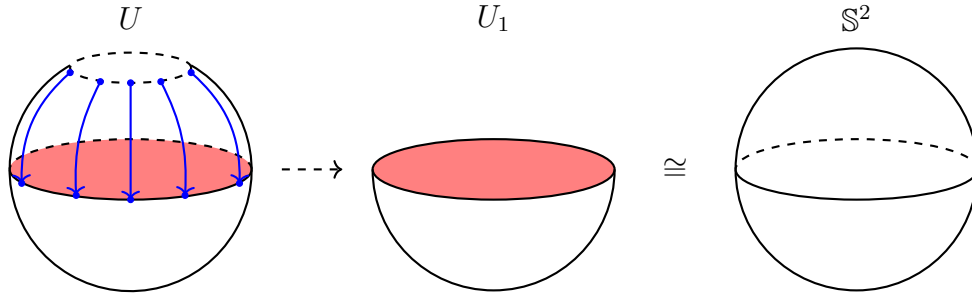
y veamos cual es su grupo fundamental.



Para ello tomamos  $U = X \setminus \{(0, 0, 1)\}$  que es retracto de deformación de  $U_1$  donde

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 : x_3 \leq 0\} \cup \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

y además  $U_1$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$  por lo que  $\pi_1(U)$  es el trivial.



De forma análoga si consideramos  $V = X \setminus \{(0, 0, -1)\}$  se tiene que  $\pi_1(V)$  es trivial. Claramente se tiene que  $U \cap V$  es arcoconexo<sup>8</sup> y por el teorema anterior se tiene que  $X$  es simplemente conexo, luego su grupo fundamental es el trivial.

**Lema 1.20.** Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  una aplicación continua que conserva antípodas, es decir,  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ . Si consideramos el lazo

$$\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$$

entonces se tiene que el grado del lazo  $f \circ \alpha$  es impar.

*Demostración.* La curva  $\alpha$  la podemos ver como  $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$  con

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= \alpha\left(\frac{s}{2}\right) & s \in [0, 1] \\ \alpha_2(s) &= \alpha\left(\frac{s+1}{2}\right) & s \in [0, 1] \end{aligned}$$

<sup>8</sup>en un examen habrá que demostrarlo de forma más rigurosa

Como  $(f \circ \alpha_1)$  es un arco que comienza en  $(1, 0)$  y acaba en  $(-1, 0)$ , entonces su levantamiento por  $\widetilde{p}$  lo podemos elegir para que comience en 0 (ya que  $p(0) = (1, 0)$ ) y un punto final  $(f \circ \alpha_1)(1)$  que ha de cumplir que  $p((f \circ \alpha_1)(1)) = (-1, 0)$ . Es decir,

$$\begin{aligned}\cos(2\pi((f \circ \alpha_1)(1))) &= -1 \\ \sin(2\pi((f \circ \alpha_1)(1))) &= 0\end{aligned}$$

y tenemos que  $(f \circ \alpha)(1) = k + \frac{1}{2}$  para un cierto  $k \in \mathbb{Z}$ . Veamos que  $\widetilde{f \circ \alpha}$  es la siguiente curva

$$\widetilde{f \circ \alpha} = \widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma$$

donde  $\gamma(s) = k + \frac{1}{2} + \widetilde{f \circ \alpha_1}$ .

Tenemos que comprobar que  $\widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma$  está bien definida, lo cual es claro porque

$$(\widetilde{f \circ \alpha_1})(1) = k + \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(0) = \gamma(0)$$

y que  $p(\widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma) = f \circ \alpha$ . Tenemos que

$$p((\widetilde{f \circ \alpha_1}) * \gamma) = p(\widetilde{f \circ \alpha_1}) * p(\gamma) = (f \circ \alpha_1) * p(\gamma)$$

y si desarrollamos tenemos

$$\begin{aligned}p(\gamma) &= p\left(k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)\right) = \\ &= \left(\cos\left(2\pi\left(k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)\right)\right), \sin\left(2\pi\left(k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)\right)\right)\right) = \\ &= (\cos(\pi + 2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)), \sin(\pi + 2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s))) = \\ &= -(\cos(2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)), \sin(2\pi(\widetilde{f \circ \alpha_1})(s))) = \\ &= -p((\widetilde{f \circ \alpha_1})(s)) = -(f \circ \alpha_1)(s) \stackrel{hip.}{=} f(-\alpha_1(s)) = \\ &= f(\alpha_2(s))\end{aligned}$$

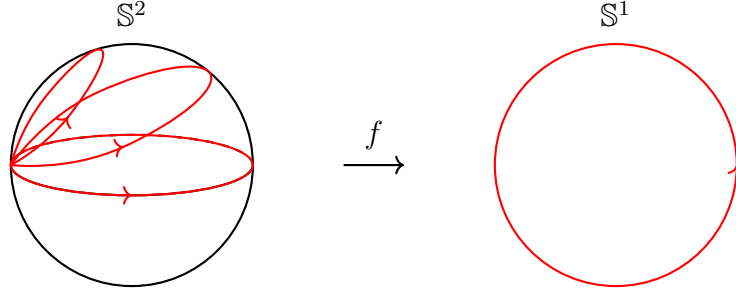
y llegamos a que  $p(\widetilde{f \circ \alpha_1} * \gamma) = (f \circ \alpha_1) * (f \circ \alpha_2) = f \circ \alpha$ . Por tanto finalmente tenemos

$$\begin{aligned}\deg(f \circ \alpha) &= (\widetilde{f \circ \alpha})(1) = \gamma(1) = k + \frac{1}{2} + (\widetilde{f \circ \alpha_1})(1) = \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) + \left(k + \frac{1}{2}\right) = 2k + 1 \text{ impar}\end{aligned}$$

□

**Lema 1.21.** No existe una aplicación continua  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  que conserve antípodas, es decir, tal que  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ .

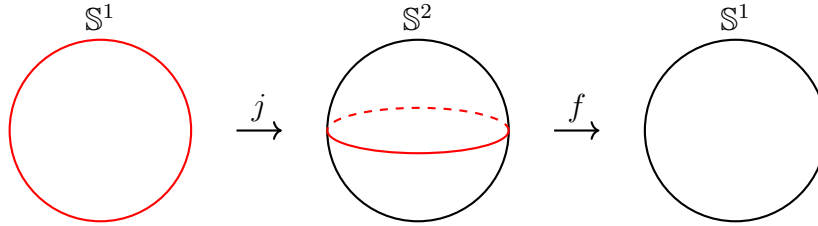
*Demostración.*



Supongamos que existiese  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continua con  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$ . Entonces consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} j : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

que es continua.



Tenemos además que  $f \circ j : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  conserva antípodas (salvo rotación de  $\mathbb{S}^1$  podemos suponer que  $(f \circ j)(1, 0) = (1, 0)$ ). Por el lema anterior tenemos que existe un lazo  $\alpha$  tal que  $\deg((f \circ j)(\alpha))$  es impar. En particular se tiene que

$$\begin{aligned} (f \circ j)_*([\alpha]) &\neq [\varepsilon_{(1,0)}] \\ (f \circ j)_*([\alpha]) &= (f_* \circ j_*)([\alpha]) = [\varepsilon_{(1,0)}] \end{aligned}$$

lo que contradice la existencia de  $f$  continua.  $\square$

**Teorema 1.22** (Teorema de Borsuk-Ulam). Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua. Entonces existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x_0) = f(-x_0)$ .

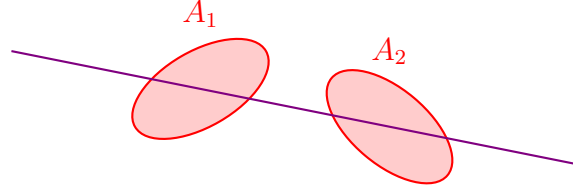
*Demostración.* Si no existiese  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ , entonces podríamos considerar

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|} \text{ continua de } \mathbb{S}^2 \text{ en } \mathbb{S}^1$$

y se tendría que  $g(-x) = -g(x)$ , lo que contradice el lema anterior.  $\square$

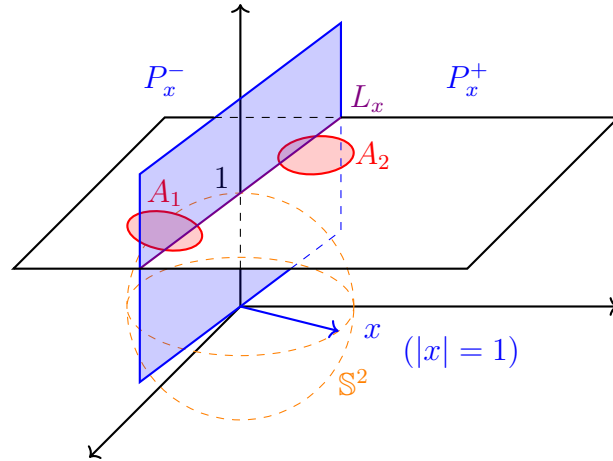
*Observación.* Del teorema de Borsuk-Ulam se deduce que no existen aplicaciones continuas e inyectivas de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Se deduce que  $\mathbb{S}^2$  no es homeomorfo a ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.23** (de las tortitas). Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos compactos de  $\mathbb{R}^2$ , entonces existe una única que divide a ambos a la vez dejando la mitad del área de cada uno a cada lado de la recta.



*Demostración.* Identificamos  $\mathbb{R}^2$  dentro de  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ . Para cada  $x \in \mathbb{S}^2$  consideramos

$$\begin{aligned} P_x^+ &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, x \rangle > 0\} \\ P_x^- &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, x \rangle < 0\} \\ L_x &= \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, x \rangle = 0\} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) \end{aligned}$$



Observamos que si  $x \neq \pm(0,0,1)$ , entonces  $L_x$  es una recta. En otro caso, si  $x = \pm(0,0,1)$ , entonces  $L_x = \emptyset$ . Observemos además que  $P_x^+ = P_{-x}^-$ . Además, si  $area(A_1) = area(A_2) = 0$ , entonces cualquier recta nos vale. Vamos a suponer entonces que  $area(A_1) > 0$  y definimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (area(A_1 \cap P_x^+), area(A_2 \cap P_x^+)) \end{aligned}$$

Como  $f$  es continua, entonces el teorema de Borsuk Ulam  $\exists x_0 \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x_0) = f(-x_0)$ , es decir, tal que

$$(area(A_1 \cap P_{x_0}^+), area(A_2 \cap P_{x_0}^+)) = (area(A_1 \cap P_{x_0}^-), area(A_2 \cap P_{x_0}^-))$$

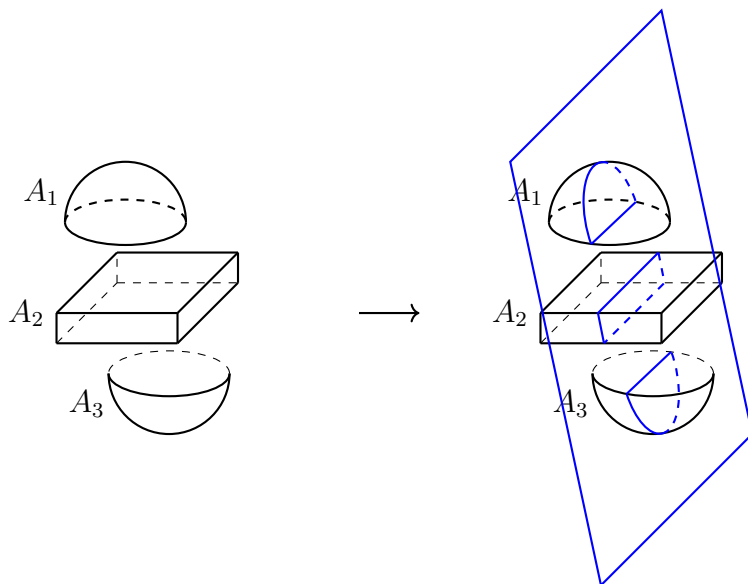
por lo que llegamos a que

$$\begin{cases} area(A_1 \cap P_{x_0}^+) = area(A_1 \cap P_{x_0}^-) \\ area(A_2 \cap P_{x_0}^+) = area(A_2 \cap P_{x_0}^-) \end{cases}$$

(recordemos que  $x_0 \neq (0,0,1)$ ).

□

**Teorema 1.24** (del bocadillo de jamón). Sean  $A_1, A_2, A_3$  tres compactos en  $\mathbb{R}^3$ , entonces existe un plano que divide a la vez a cada uno de ellos en dos partes de igual volumen.



Podemos interpretar este resultado geométricamente como que se tienen 3 volúmenes:  $A_1$  (la tapa superior de pan),  $A_2$  (el jamón) y  $A_3$  (la tapa inferior de pan).

Entonces existe un corte (plano) que divide a todos los volúmenes por la mitad (se pueden dividir todas las partes del “bocadillo” exactamente por la mitad con un único corte).

## 1.8. El teorema de Seifert-van Kampen

En primer lugar fijaremos los preliminares algebraicos necesarios para estudiar el teorema relativo a esta sección. Utilizaremos la notación multiplicativa de grupos que facilitará su comprensión.

**Notación.** Dado un grupo  $(G, \cdot)$  denotaremos por  $e$  a su elemento neutro y para cada  $g \in G$  usaremos la notación  $g^{-1}$  para denotar a su inverso.

Dado  $n \in \mathbb{Z}$  denotaremos por  $g^n$  a

$$g^n = \begin{cases} g \cdot \overset{(n)}{\dots} \cdot g & \text{si } n \geq 1 \\ e & \text{si } n = 0 \\ g^{-1} \cdot \overset{(n)}{\dots} \cdot g^{-1} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

Recordemos que  $H \subseteq G$  es un subgrupo de  $G$  si  $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$  para todo  $h_1, h_2 \in H$ .

Si  $H$  es un subgrupo de  $G$  lo denotaremos por  $H < G$ . Si además se tiene que  $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$  para todo  $g \in G, \forall h \in H$  se dice que  $H$  es un subgrupo normal. En este caso lo denotamos por  $H \triangleleft G$ .

### 1.8.1. Grupo cociente

**Definición 1.17.** Dado  $H$  un subgrupo de  $G$  definimos la relación de equivalencia  $R$  dada por

$$g_1 R g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} g_1 \cdot g_2^{-1} \in H \quad \forall g_1, g_2 \in G$$



Dado  $g \in G$  denotamos por

$$[g] = H \cdot g = \{h \cdot g : h \in H\}$$

a la clase de equivalencia de  $g$  bajo la relación de equivalencia  $R$ .

*Observación.* Es importante observar que la definición

$$[g_1] \cdot [g_2] \stackrel{def}{=} [g_1 \cdot g_2]$$

no está bien hecha para  $H < G$  cualquiera. De hecho solo estaría bien definida si y solo si  $H \triangleleft G$ . En este caso podemos considerar el conjunto cociente

$$G/H = \{[g] : g \in G\}$$

que con la operación anterior tiene la estructura de grupo.

**Ejemplo.** Para  $G = \mathbb{Z}$  y  $H = n\mathbb{Z}$  con  $n \geq 2$  entero tendremos que  $H \triangleleft G$  por ser  $H$  conmutativo. Además se tendrá que

$$G/H \equiv \mathbb{Z}_n$$

### 1.8.2. Subgrupo normal generado por un conjunto

*Observación.* Dado un grupo  $G$ , la intersección cualquiera de subgrupos normales de  $G$  es un subgrupo normal en  $G$ .

**Definición 1.18.** Dado  $C \subseteq G$  subconjunto cualquiera de  $G$  no vacío, existe el menor subgrupo normal que lo contiene (dado por la intersección de todos los subgrupos normales que contienen a  $C$ , que al menos es el total). Lo notaremos por  $\langle C \rangle_N$  y diremos que es el **subgrupo normal de  $G$  generado por  $C$** .

*Observación.* Se puede caracterizar el subgrupo normal de  $G$  generado por  $C$  de la siguiente forma:

$$g \in \langle C \rangle_N \iff g = (g_1 \cdot c_1^{n_1} \cdot g_1^{-1}) \cdot (g_2 \cdot c_2^{n_2} \cdot g_2^{-1}) \cdot \dots \cdot (g_k \cdot c_k^{n_k} \cdot g_k^{-1})$$

donde  $g_i \in G$ ,  $c_i \in C$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i \in 1, 2, \dots, k$

### 1.8.3. Producto libre de grupos

**Definición 1.19.** Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos donde todos los elementos de la familia son disjuntos, es decir,  $G_i \cap G_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Denotamos por  $e_i$  al elemento neutro de  $G_i$ .

Llamamos **letra** a un elemento  $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$  de cualquiera de los grupos.

Llamamos **palabra** a una yuxtaposición de letras,  $w = x_1 x_2 \dots x_m$  donde  $m$  es un entero no negativo. Si  $m = 0$  se le suele llamar **palabra vacía** y la denotaremos por  $w = 1$ . Al número  $m$  lo llamaremos **longitud de la palabra**.

Llamaremos **sílaba** a cada palabra con 2 letras.

Diremos que 2 palabras  $w_1 = x_1 x_2 \dots x_m$  y  $w_2 = y_1 y_2 \dots y_k$  son iguales si  $m = k$  y  $x_i = y_i$  para todo  $i \in 1, 2, \dots, m = k$ .

**Definición 1.20.** En el conjunto de todas las palabras definimos la aplicación yuxtaposición que a cada dos palabras  $w_1 = x_1x_2\dots x_m$  y  $w_2 = y_1y_2\dots y_k$  le hace corresponder la nueva palabra

$$w_1w_2 = x_1x_2, \dots x_my_1, y_2\dots y_k$$

Esta operación tiene un elemento neutro ( $w = 1$ ) y es asociativa.

**Definición 1.21.** Dada una palabra  $w = x_1x_2\dots x_m$  diremos que es **reducida** si verifica las siguientes propiedades:

1. No existen dos letras consecutivas del mismo grupo.
2. No aparece ningún elemento neutro  $e_i$ .

*Observación.* Dada una palabra cualquiera  $w = x_1x_2\dots x_m$  podemos reducirla con el siguiente procedimiento:

1. Cuando hay dos letras consecutivas del mismo grupo se multiplican usando la operación de ese grupo.
2. Se eliminan todos los elementos neutros  $e_i$  de la palabra.

**Definición 1.22.** En el conjunto de las palabras reducidas podemos definir la operación yuxtaposición + reducción. Esto dota al conjunto de las palabras reducidas de estructura de grupo. A este grupo se le suele denotar por  $\ast_{i \in I} G_i$  y se llama **producto libre** de los  $G_i$ .

**Ejemplo.** Consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} G_1 = \mathbb{Z}_2 &= \{e_1, a\} : e_1 \text{ es el neutro, } a \cdot a = e_1 \\ G_2 = \mathbb{Z}_2 &= \{e_2, b\} : e_2 \text{ es el neutro, } b \cdot b = e_2 \end{aligned}$$

y las siguientes palabras:

$$\begin{aligned} w_1 &= e_1aae_2ab \\ w_2 &= be_2e_1ab \end{aligned}$$

y tendríamos

$$\begin{aligned} w_1 &\sim aa e_2 ab \sim e_1 e_2 ab \sim ab \\ w_2 &\sim bab \end{aligned}$$

Si pensamos en el conjunto de las palabras reducidas tenemos

$$G_1 \ast G_2 = \{1, a, b, ab, ba, aba, bab, \dots\}$$

donde

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad (ab)^{-1} = ba, \quad (aba)^{-1} = aba, \quad (bab)^{-1} = bab$$

**Lema 1.25** (Propiedad universal del producto libre). Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos disjuntos <sup>9</sup>. Consideramos una familia de homeomorfismos

$$f_i : G_i \rightarrow G$$

sobre un grupo  $G$  fijo. Entonces existe un único homomorfismo

$$f_i * G_i \rightarrow G$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{f_i} & G \\ & \searrow h_i & \nearrow f \\ & *_{i \in I} G_i & \end{array}$$

donde  $h_{i_0} : G_{i_0} \rightarrow *_{i \in I} G_i$  es el homomorfismo inclusión. En la práctica se tendrá que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{i_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{i_n}(x_n)$$

donde  $x_k \in G_{i_k}$  para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

#### 1.8.4. Grupos libres y presentaciones de grupos

Vamos a ver ahora productos libres donde cada  $G_i$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Sea  $S = \{a\}$  un conjunto con un único elemento. Definimos el conjunto

$$F(a) = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

donde definimos además la operación

$$a^k \cdot a^l := a^{k+l}$$

De esta forma,  $(F(a), \cdot)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$

$$a^k \leftrightarrow k$$

**Definición 1.23.** A  $F(a)$  se le suele llamar el **grupo libre de rango 1** generado por  $a$ .

**Definición 1.24.** Dado un conjunto  $S$  cualquiera no vacío definimos  $F(S)$  como

$$F(S) = *_{a \in S} F(a)$$

y se le suele llamar **grupo libre** generado por  $S$ .

**Ejemplo.**  $F(a, b)$  tiene como elementos:

$$a^2, b^3, ab, ba \quad (ab \neq ba), a^3b^7a^8, a^{-2}b^{-1}, 1, \dots$$

Algunos de los elementos que no están en el grupo libre son:

$$a^0, a^2a^3b^2b^7$$

---

<sup>9</sup>dos a dos

**Definición 1.25.** Cuando el conjunto  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  es finito con  $n$  elementos se suele decir que  $F(S)$  es el **grupo libre de rango  $n$**  sobre  $S$  y se suele denotar por  $\mathbb{Z} * \overset{(n)}{\dots} * \mathbb{Z}$ .

*Observación.* Esto se puede hacer ya que el nombre de los elementos no es importante, y por ejemplo se tendría que  $F(a, b) \cong F(c, d)$ .

**Corolario 1.25.1** (Propiedad universal del grupo libre). Dados  $S$  un conjunto no vacío,  $G$  un grupo y  $\rho : S \rightarrow G$  una aplicación, existe un único homomorfismo

$$f : F(S) \rightarrow G$$

tal que  $f|_S = \rho$ . En la práctica se tendrá que

$$f(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = \rho(a_1)^{n_1} \cdot \rho(a_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot \rho(a_k)^{n_k}$$

con  $a_i \in S$  y  $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Observación.* Podemos considerar  $\rho = Id_G$  y aplicando el primer teorema de isomorfía sobre la  $f$  que da la propiedad universal tenemos que

$$G \cong \frac{F(G)}{\ker(f)}$$

De esta forma se deduce que todo grupo  $G$  puede verse como un grupo libre sobre un subgrupo normal suyo.

**Definición 1.26.** Sean  $S$  un conjunto no vacío y  $F(S)$  el grupo libre sobre  $S$ . Dado un subconjunto no vacío  $R \subseteq F(S)$ . Entonces al grupo cociente

$$\frac{F(S)}{\langle R \rangle_N}$$

lo denotaremos de la forma  $\langle S | R \rangle$  o bien  $\langle S; R \rangle$ . El resultado anterior nos dice que todo grupo  $G$  es de la forma  $\langle S; R \rangle$  para ciertos  $S$  y  $R$ , donde  $S$  serán los generadores y  $R$  las relaciones. A  $\langle S; R \rangle$  se le suele llamar **presentación**.

**Ejemplo.**

1.  $\langle a; a^n \rangle$  es una presentación de  $\mathbb{Z}_n$

$$\frac{F(a)}{\langle a^n \rangle_N} = \frac{\{a^k : k \in \mathbb{Z}\}}{\{a^{ln} : l \in \mathbb{Z}\}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$$

2.  $\langle a; \emptyset \rangle$  es una presentación de  $\mathbb{Z}$ .
3.  $\langle a, b; b \rangle$  es una presentación de  $\mathbb{Z}$  ya que

$$\frac{F(a, b)}{\langle b \rangle_N} \cong F(a) \cong \mathbb{Z}$$

Esto es más fácil de ver si entendemos que el cociente lleva al denominador al elemento neutro por lo que un elemento de este grupo será  $[a^2 a^3 b^{-2} a b^4 a^5] = [a^2 a^3 a a^5] = [a^9]$

4.  $\langle a, b; a^n, b^m \rangle$

$$\frac{F(a, b)}{\langle \{a^n, b^m\} \rangle} \cong \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$$

Veámoslo para un caso particular, por ejemplo  $\langle a, b; a^2, b^3 \rangle$ . Consideramos el elemento

$$[b^7 a^5 b^{-2} a^{-4}] = [(b^3 b^3 b)(a^2 a^2 a)b^{-2}((a^2)^{-1}(a^2)^{-1})] = [bab^{-2}]$$

5.  $\langle a, b; aba^{-1}b^{-1} \rangle$

$$\frac{F(a, b)}{\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Veamos algunos casos particulares para entenderlo mejor

$$\begin{aligned} [aba^{-1}b^{-1}] &= [1] \\ [ab] &= [ba] \\ [a^3 b^7 a^2 b^5] &= [a^5 b^{12}] \end{aligned}$$

### 1.8.5. Enunciado del teorema

**Teorema 1.26** (Seifert-van Kampen). Sean  $X$  un e.t. y  $U, V$  dos abiertos suyos cumpliendo:

1.  $X = U \cup V$
2.  $U, V$  y  $U \cap V$  son arcoconexos

Si denotamos por  $i_1, i_2, j_1, j_2$  las inclusiones naturales dadas por el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ i_1 \nearrow & & \searrow j_1 \\ U \cap V & & X \\ i_2 \searrow & & \nearrow j_2 \\ & V & \end{array}$$

y  $x_0 \in U \cap V$ , entonces el homomorfismo

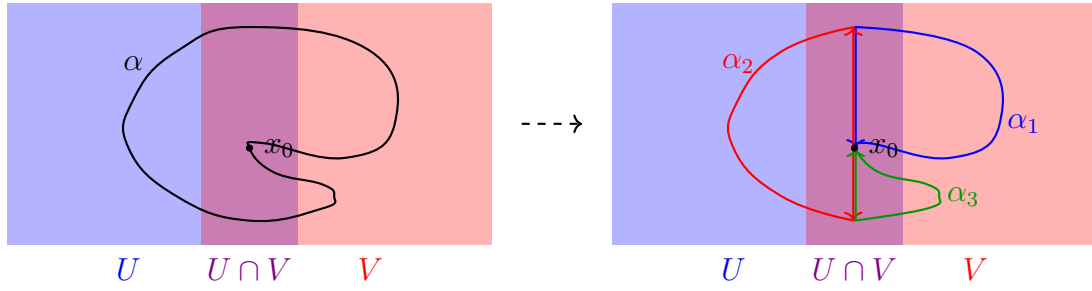
$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

que extiende a  $j_{i_*}$  y  $j_{j_*}$  es sobreyectivo. Además, el núcleo viene dado por el subgrupo normal generado por

$$R = \{i_{1*}^{-1}(g)i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$$

Por tanto,

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\langle R \rangle_N}$$



$$[\alpha]_X = [\alpha_1]_X * [\alpha_2]_X * [\alpha_3]_X$$

Si consideramos ahora  $g = [\beta]_{U \cap V}$  tendríamos que

$$i_{1*}(g)^{-1} = [\beta]_U^{-1} \text{ y } i_{2*}(g) = [\beta]_V$$

*Observación.* Algunos casos especiales a considerar son los siguientes:

1. Si  $U$  y  $V$  son simplemente conexos, caso que ya estudiamos anteriormente y que resultó en que  $X$  es simplemente conexo.
2. Si  $U \cap V$  es simplemente conexo, entonces

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(U, x_0) * \pi_2(V, x_0)$$

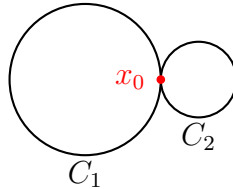
3. Si  $U$  es simplemente conexo, entonces

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{\pi_1(V, x_0)}{\langle R \rangle_N}$$

donde  $R = \{i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$

**Ejemplo.**

1. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias de  $\mathbb{R}^2$  que se tocan en un único punto  $x_0$ . Queremos calcular el grupo fundamental de  $C_1 \cup C_2$ .



Tomamos  $x_1 \in C_1 \setminus \{x_0\}$  y  $x_2 \in C_2 \setminus \{x_0\}$ . Consideramos entonces los siguientes conjuntos:

$$U = X \setminus \{x_1\}$$

$$V = X \setminus \{x_2\}$$

y tenemos que  $U$  es abierto y arcoconexo (ya que  $C_1$  es arcoconexo,  $C_2 \setminus \{x_2\}$  es arcoconexo y se tocan en un punto) y de forma análoga  $V$  también es abierto y arcoconexo. Es por esto que  $U \cap V$  es arcoconexo (dos abiertos arcoconexos que se intersecan).

Tenemos que  $C_1$  es retracts de deformación de  $U$  por lo que

$$\pi_1(U, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(C_1, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z}$$

De la misma forma

$$\pi_1(V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(C_2, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z}$$

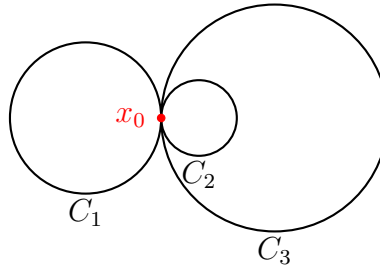
Además,  $\{x_0\}$  es retracts de deformación de  $U \cap V$  por lo que

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

2. Sean  $C_1, C_2, C_3$  tres circunferencias que solo se tocan en un punto común  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ .



Tomamos  $x_1 \in C_1 \setminus \{x_0\}$ ,  $x_2 \in C_2 \setminus \{x_0\}$  y consideramos

$$U = X \setminus \{x_1\}$$

$$V = X \setminus \{x_2\}$$

Tenemos con el mismo razonamiento del apartado anterior que  $U, V$  son abiertos arcoconexos y  $U \cap V$  arcoconexo. Como  $U$  tiene a  $C_2 \cup C_3$  como retracts de deformación suyo tendremos que<sup>10</sup>

$$\pi_1(U, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

---

<sup>10</sup>del apartado anterior

Sus generadores son  $[\beta]_U$  y  $[\gamma]_U$ . Como  $V$  tiene a  $C_1 \cup C_3$  como retracto de deformación suyo se tendrá que

$$\pi_1(V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

con generadores  $[\alpha]_V$  y  $[\gamma]_V$ . Tendremos también que

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z}$$

ya que  $C_3$  es retracto de deformación de  $U \cap V$ . Su generador es  $[\gamma]_{U \cap V}$ .

En este punto podríamos pensar que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})}{\mathbb{Z}}$$

y que podríamos “cancelar” un  $\mathbb{Z}$  resultando en que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

y aunque en este caso de pura casualidad se verifica, esto es **ABSOLUTAMENTE INCORRECTO** en general.

El razonamiento correcto sería el siguiente. Sabemos que

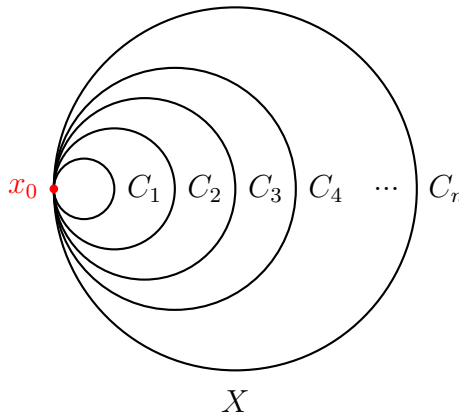
$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{\langle R \rangle_N}$$

donde  $R = \{i_{1*}(g)^{-1}i_{2*}(g) : g \in \pi_1(U \cap V, x_0)\}$ . Tenemos entonces que

$$\pi_1(X, x_0) \stackrel{isom.}{\cong} \langle [\beta]_U, [\gamma]_U, [\alpha]_V, [\gamma]_V; i_{1*}([\gamma]_{U \cap V})^{-1}, i_{2*}([\gamma]_{U \cap V}) \rangle$$

donde  $i_{1*}([\gamma]_{U \cap V})^{-1} = [\gamma]_U^{-1}[\gamma]_V$

3. Consideramos  $n$  circunferencias  $C_1, \dots, C_n$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que se tocan entre sí en un único punto  $x_0$ .



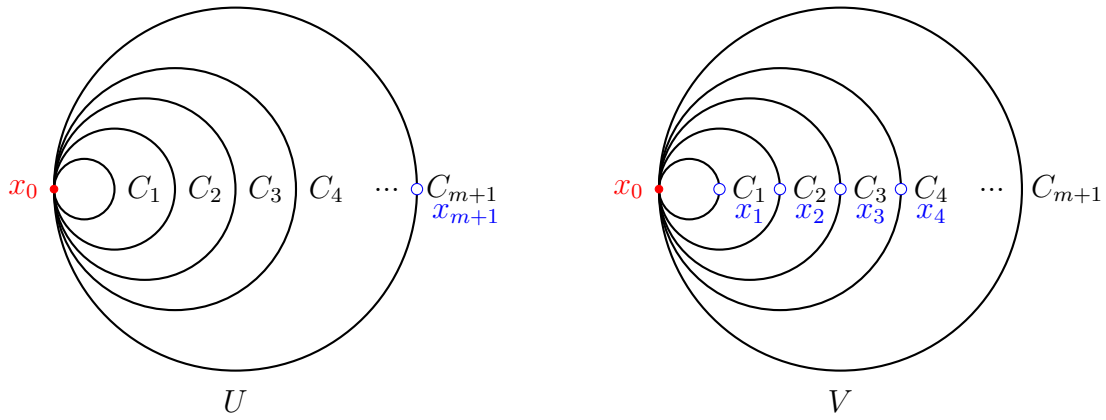


Vamos a demostrar que  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} * \binom{n}{!} * \mathbb{Z}$  con  $X = \bigcup_{k=1}^n C_k$  donde el conjunto de generadores son los lazos basados en  $x_0$  y que dan una vuelta alrededor de cada circunferencia.

Lo vemos por inducción. El caso base,  $n = 2$  se ha estudiado en los apartados anteriores. Suponemos que el resultado es cierto para  $n = m$  y lo probamos para  $n = m + 1$ . Para ello, consideramos los siguientes conjuntos

$$U = X \setminus \{x_{m+1}\} \text{ con } x_{m+1} \in C_{m+1} \setminus \{x_0\}$$

$$V = X \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \text{ con } x_i \in C_i \setminus \{x_0\} \quad \forall i \in 1, \dots, m$$



Es claro que  $X = U \cup V$  y además,  $U, V$  y  $U \cap V$  son arcoconexos. Es fácil ver que  $U$  tiene por retracto de deformación a  $\bigcup_{k=1}^m C_k$ , es decir, podemos retraer la circunferencia  $C_{m+1}$  a  $x_0$  y dejar el resto igual. Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\pi_1(U, x_0) \cong \mathbb{Z} * \binom{n}{!} * \mathbb{Z}$$

Además,  $V$  tiene por retracto de deformación a  $C_{m+1}$  (se puede ver pensando en retraer todas las  $C_i$  con  $i = 1, \dots, m$  a  $x_0$ ), por lo que

$$\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

Si consideramos  $U \cap V$  tenemos que todas las circunferencias se pueden retraer ahora al punto  $x_0$  por lo que este será retracto de deformación y tenemos que

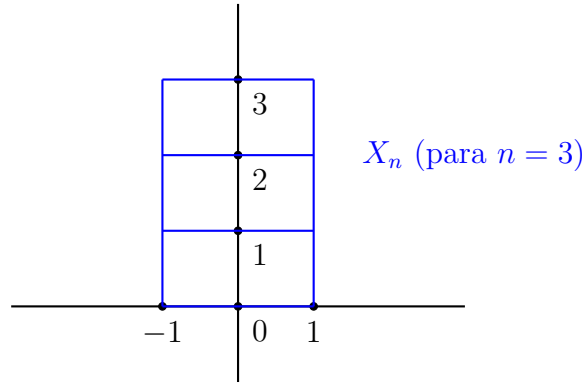
$$\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\mathbb{Z} * \binom{m}{!} * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \binom{m+1}{!} * \mathbb{Z}$$

4. Consideramos en  $\mathbb{R}^2$  el siguiente conjunto para  $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = (\{-1, 1\} \times [0, n]) \cup \left( \bigcup_{k=0}^n ([-1, 1] \times \{k\}) \right)$$

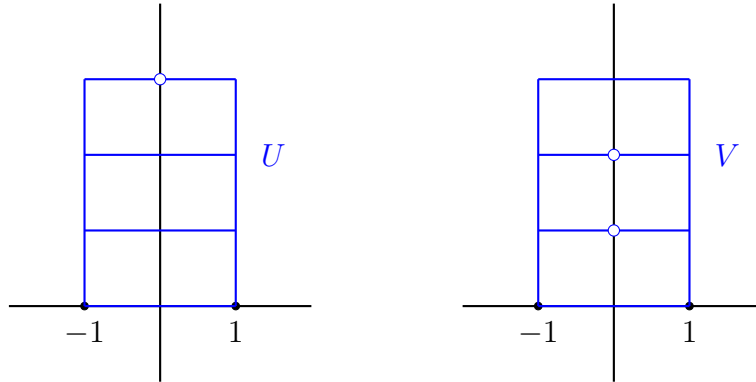


Veámos cuál es su grupo fundamental aplicando de nuevo una inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$ ,  $X$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ , luego  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Suponemos que para  $n = m$  ocurre que  $\pi_1(X_{m+1}) \cong \mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}$  y demostramos ahora que  $\pi_1(X_{m+1}) \cong \mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}$ . Considremos los siguientes conjuntos

$$U = X_{m+1} \setminus \{(0, m+1)\}$$

$$V = X_{m+1} \setminus \{(0, 1), \dots, (0, m)\}$$



Es claro que  $U, V$  son abiertos arcoconexos y  $U \cap V$  es arcoconexo y  $X_{m+1} = U \cup V$ . Tenemos que  $U$  tiene por retracto de deformación a  $X_m$  (podemos pensar en llevar el rectángulo superior, que está abierto, a las esquinas del penúltimo rectángulo superior) por lo que

$$\pi_1(U) \cong \mathbb{Z} * \overset{(m)}{\dots} * \mathbb{Z}$$

$V$  tiene por retracto de deformación al rectángulo exterior (ya que todas las barras horizontales excepto la primera y la última están abiertas por lo que se pueden retraer llevándolas a los laterales de forma que quede solo el rectángulo exterior). Dicho rectángulo será

$$(\{-1, 1\} \times [0, m+1]) \cup ([-1, 1] \times \{0, m+1\})$$

que es una circunferencia topológica por lo que

$$\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$$

Si pensamos ahora en la intersección  $U \cap V$  podemos ver con un razonamiento similar a los usados para  $U$  y  $V$  que se puede retraer  $U \cap V$  al origen  $(0, 0)$ , luego

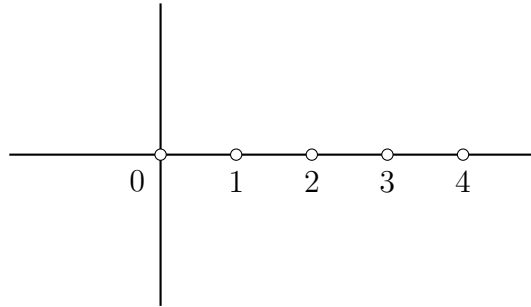
$$\pi_1(U \cap V) \cong \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

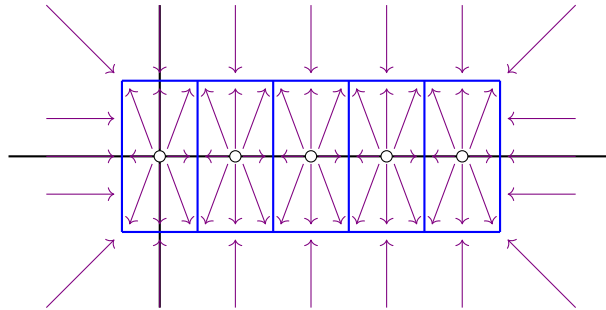
$$\pi_1(X_{m+1}) \cong (\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$$

5. Vamos a considerar el siguiente conjunto

$$Y_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), \dots, (n, 0)\}$$



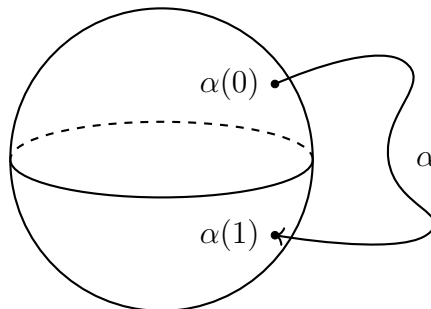
Podemos pensar en un retracts de deformación suyo y fácilmente llegamos a que  $X_{n+1}$  del apartado anterior (rotado y colocado adecuadamente) es retracto de deformación viéndolo de la siguiente forma:



Por tanto tenemos que

$$\pi_1(Y_n) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$$

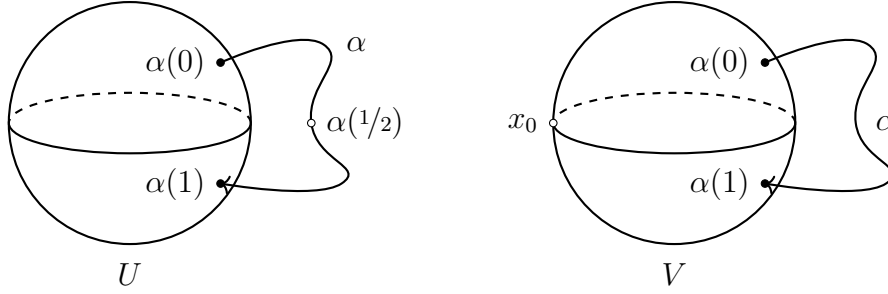
6. Sea  $X = \mathbb{S}^2 \cup Im(\alpha([0, 1])) \subseteq \mathbb{R}^3$  donde  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un arco inyectivo con  $\|\alpha(0)\| = 1 = \|\alpha(1)\|$  y  $\|\alpha(t)\| \neq 1$  para  $t \in (0, 1)$ .



Seleccionamos los siguientes conjuntos

$$U = X \setminus \{\alpha(1/2)\}$$

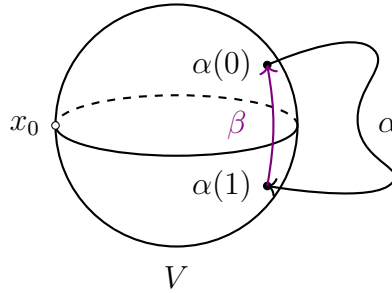
$$V = X \setminus \{x_0\} \text{ con } x_0 \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\alpha(0), \alpha(1)\}$$



Es claro que  $U$  y  $V$  son abiertos con  $X = U \cup V$ . También lo es que  $U, V$  y  $U \cap V$  son arcoconexos. Además, se puede ver que  $\mathbb{S}^2$  es retracto de deformación de  $U$  (llevando la mitad de  $\alpha$  a  $\alpha(0)$  y la otra mitad a  $\alpha(1)$ ) por lo que

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{S}) \cong \{0\}$$

Consideramos ahora un arco  $\beta$  en  $\mathbb{S}^2$  tal que  $\beta(0) = \alpha(1)$  y  $\beta(1) = \alpha(0)$



Para  $V$  se puede ver que  $Im(\alpha * \beta) = Im(\alpha) \cup Im(\beta)$  es retracto de deformación (llevando la esfera a la imagen de  $\beta$ , abriéndola por  $x_0$ ) y como  $Im(\alpha * \beta)$  es una circunferencia topológica tenemos que

$$\pi_1(V) \cong \pi_1(Im(\alpha * \beta)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

En el caso de la intersección podemos unir ambas ideas y podemos retraer  $U \cap V$  a  $Im(\beta)$  que es un segmento topológico por lo que

$$\pi_1(U \cap V) \cong \{0\}$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen tenemos que

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$$

## 2. Espacios Recubridores

*Observación.* A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

### 2.1. Levantamiento de aplicaciones

*Observación.* Vamos a tener en cuenta que si  $X$  es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

*Demostración.* Si  $O$  es abierto y  $A$  es una componente arcoconexa de  $O$ , entonces dado  $a \in A$ , como  $X$  es localmente arcoconexo tendremos que existe un  $U$  entorno arcoconexo de  $a$  tal que  $U \subseteq O$ . Como  $A$  es el mayor arcoconexo en  $O$  que contiene al punto  $a$  tendremos que  $U \subseteq A$ , luego  $A$  es abierto.  $\square$

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$  y un punto  $b_0 \in B$ . Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto  $O$  que contiene a  $b_0$ . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de  $O$  que contiene a  $b_0$  podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

**Lema 2.1** (Unicidad del levantamiento). Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $f_1, f_2 : X \rightarrow R$  continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un  $x_0 \in X$  tal que  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ , entonces  $f_1 = f_2$ .

*Demostración.* Para la demostración solo se necesita que  $X$  sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow f_1, f_2 & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f=p \circ f_1 = p \circ f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como  $X$  es conexo y tenemos que  $Y \neq \emptyset$ , ya que por hipótesis  $x_0 \in Y$ , si probamos que  $Y$  es abierto y cerrado tendremos que  $Y = X$ , es decir,  $f_1 = f_2$ .

Veamos que  $Y$  es abierto. Para ello tomamos  $y \in Y$ , es decir, un punto  $y$  tal que  $f_1(y) = f_2(y)$ . Elegimos el punto  $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ . Sea  $O$  abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a  $b$ , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los  $A_i$  son abiertos disjuntos de  $R$  y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto  $A_{i_0}$  donde se encuentra  $f_1(y) = f_2(y)$ . Elegimos  $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$ . Veamos que  $\forall x \in V$  se tiene que  $f_1(x) = f_2(x)$ . Como  $x \in V$  tendremos que  $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$  por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \xrightarrow{(*)} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en  $(*)$  hemos usado que  $p|_{A_i}$  es inyectiva. Tenemos finalmente que  $Y$  es abierto.

Veamos ahora que  $Y$  es cerrado. Para ello demostramos que  $X \setminus Y$  es abierto. Tomamos  $y \in X \setminus Y$  y vemos que existe un  $V$  abierto que contiene al punto  $y$  y tal que  $V \subseteq X \setminus Y$ . Sea  $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$  y de nuevo tomamos  $O$  regularmente recubierto que contiene a  $b$ . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los  $A_i$  son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos  $f_1(y) \in A_{i_1}$  y  $f_2(y) \in A_{i_2}$  y además se verificará que  $A_{i_1} \neq A_{i_2}$  ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora  $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$ , donde se tiene que  $y \in V$ . Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada  $x \in V$  se tendrá que  $f_1(x) \neq f_2(x)$  ya que  $f_1(x) \in A_{i_1}$  y  $f_2(x) \in A_{i_2}$ . Esto nos dice que  $V \subseteq X \setminus Y$ , luego  $Y$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 2.2** (Teorema de monodromía). Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ . El homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  es inyectivo. En particular,  $\pi_1(R, r_0)$  es isomorfo a  $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p_*$  es inyectiva si y solo si  $\ker(p_*)$  es trivial. Tomamos  $\alpha$  lazo basado en  $r_0$  tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además  $[p \circ \alpha] = p_*([\alpha])$  tenemos que existe una homotopía por lazos de  $\varepsilon_{b_0}$  en  $p \circ \alpha$ . Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en  $R$  de  $\hat{\varepsilon}_{b_0}$  y  $\widehat{p \circ \alpha}$  (empezando en  $r_0$ ). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

*Observación.* Recordemos que dados dos subgrupos  $H_1, H_2$  de un grupo  $G$  se dice que  $H_1$  y  $H_2$  son conjugados si existe un  $g \in G$  tal que

$$H_2 = g^{-1}H_1g$$

**Corolario 2.2.1.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$ . Elegimos un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$  tal que

$$\alpha(0) = r_1$$

$$\alpha(1) = r_2$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular,  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  y  $p_*(\pi_1(R, r_2))$  son conjugados en  $\pi_1(B, b_0)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p \circ \alpha$  es un lazo basado en  $b_0$  por lo que  $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$ . Además,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, r_2) & \xrightarrow{isom.} & \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] & \longmapsto & [\alpha * \beta * \tilde{\alpha}] \end{array}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\tilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \tilde{\alpha}] = [\widetilde{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

**Corolario 2.2.2.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_1 \in p^{-1}(b_0)$ . Sea  $H$  un subgrupo conjugado de  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  en  $\pi_1(B, b_0)$ . Entonces existe un punto  $r_2 \in R$  tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

*Demostración.* Por hipótesis sabemos que  $p(r_1) = b_0$  y que  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  es conju-  
gado con  $H$  en  $\pi_1(B, b_0)$ , es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con  $g \in \pi_1(B, b_0)$ , esto es,  $g = [\gamma]$ . Consideramos  $\hat{\gamma}$  el levantamiento de  $\gamma$  a  $R$  con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos  $r_2 = \hat{\gamma}(1)$  al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.3.** Consideramos una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$ , una aplicación  
continua  $f : X \rightarrow B$ ,  $x_0 \in X$ ,  $b_0 = f(x_0)$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ .

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento  $\hat{f} : X \rightarrow R$  de  $f$  con  $\hat{f}(x_0) = r_0$ .
2.  $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento  $\hat{f}$  de  $f$  con  
 $\hat{f}(x_0) = r_0$  es único.

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que  $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$  por lo que tenemos esta implicación simple-  
mente desarrollando la composición.



(2)  $\Rightarrow$  (1) Empezamos definiendo  $\hat{f}$ :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado  $x \in X$  elegimos  $\alpha_x$  un arco en  $X$  que una  $x_0$  con  $x$ . Entonces  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  es un arco en  $B$  que une  $b_0 = f(x_0)$  con  $f(x)$ . Consideramos ahora  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  el único arco en  $R$  tal que  $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$  y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que  $\hat{f}$  está bien definida, es decir, que no depende del arco  $\alpha_x$  elegido. Tomamos otro arco  $\beta_x$  en  $X$  tal que  $\beta_x(0) = x_0$  y  $\beta_x(1) = x$  y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos  $\gamma = \alpha_x * \beta_x$  que es un lazo en  $X$  con base en  $x_0$ . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \beta_x)$$

es un lazo con base en  $b_0$ . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco  $\delta$  con base en  $r_0$  tal que  $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$ . Sea  $\widehat{f \circ \gamma}$  el único levantamiento de  $f \circ \gamma$  que comienza en  $r_0$ . Tenemos que  $\widehat{f \circ \gamma}$  es homotópico por arcos con  $p \circ \delta$ . Como  $p_*$  es inyectiva tenemos que  $\widehat{f \circ \gamma}$  es homotópico con  $\delta$ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widetilde{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  es el levantamiento de  $f \circ \alpha_x$  empezando en  $r_0$  y  $\omega$  es el levantamiento de  $\widetilde{f \circ \beta_x}$  comenzando en  $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$ . Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widetilde{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta_x} \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de  $\hat{f}(x)$  está bien hecha.

Veamos ahora que  $p \circ \hat{f} = f$ . Para ello, dado  $x \in X$  tenemos que ver que  $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$ . Veamos quién es  $\hat{f}(x)$ :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ \widehat{f \circ \alpha_x})(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que  $\hat{f}(x_0) = r_0$  ya que para  $x_0$  podemos elegir  $\varepsilon_{x_0}$  verificándose que  $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$  luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que  $\hat{f}$  es continua.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B\end{array}$$

Comenzamos tomando un punto  $x \in X$  y vemos que  $\hat{f}$  es continua en  $x$ . Sea  $U$  un entorno de  $\hat{f}(x)$ . Tomamos  $O$  abierto arcoconexo de  $f(x)$  que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homeomorfismo}\end{aligned}$$

Como  $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$  tenemos que existe un único  $i_0 \in I$  tal que  $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$ . Podemos suponer que  $A_{i_0} \subseteq U$  (si no fuese así consideraríamos  $U \cap A_{i_0}$ ). Como  $f$  es continua, existe un abierto  $V$  que contiene a  $x$  tal que  $f(V) \subseteq O$ . Podemos suponer que  $V$  es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de  $V$  que contenga a  $x$ ).

Si probamos que  $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$  tendríamos que  $\hat{f}$  es continua en  $x$ . Para verlo consideramos un punto  $y \in V$  y tomamos un arco  $\gamma$  dentro de  $V$  que una  $x$  con  $y$ . Tenemos entonces que  $\alpha_x * \gamma$  es un arco que une  $x_0$  con  $y$ . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = \widehat{f \circ (\alpha_x * \gamma)}(1) = \widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}(1)$$

donde  $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$  es la única curva que se proyecta por  $p$  en  $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$  y comienza en  $r_0$ . Es decir,  $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$  se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{f \circ \gamma}$$

donde  $\widehat{f \circ \gamma}$  es el levantamiento de  $f \circ \gamma$  pero comenzando en el punto  $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$ .

$$Im(\gamma) \subseteq V \Rightarrow Im(f \circ \gamma) \subseteq O \Rightarrow \widehat{f \circ \gamma} \subseteq A_{i_0}$$

ya que  $p|_{A_{i_0}}$  es un homeomorfismo por lo que llegamos finalmente a

$$\hat{f}(y) = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)(1) = \widehat{f \circ \gamma}(1) \in A_{i_0}$$

□

*Observación.* Una consecuencia inmediata es que si  $X$  es simplemente conexo, toda  $X : X \rightarrow B$  continua se puede levantar.

**Ejemplo.** Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{aligned}$$

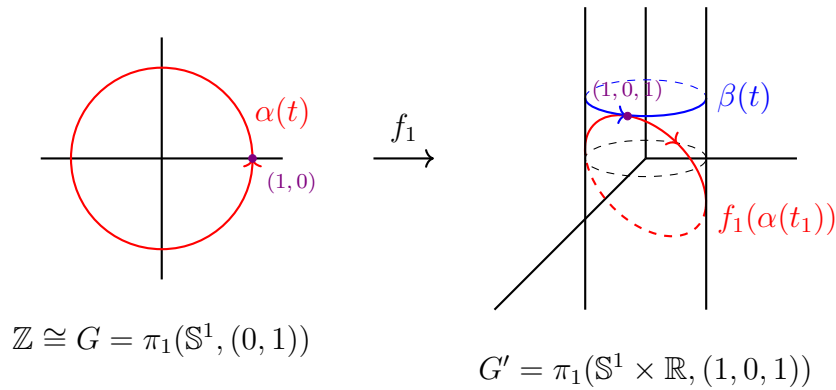
y las aplicaciones  $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x, y, x) \\ f_2(x, y) &= (-2xy, x^2 - y^2, x^2) \end{aligned}$$

Nos preguntamos si existen levantamientos de  $f_1$  y  $f_2$ , es decir si existen los  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & \nearrow \hat{f}_1, \hat{f}_2 & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_1, f_2} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{array}$$

Con la siguiente gráfica



podemos ver que  $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  está generado por  $[\alpha]$  donde

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

y  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))$  está generado por  $[\beta]$  done

$$\beta(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1)$$

Además es fácil ver en la misma gráfica que

$$\begin{aligned} f_{1*}([\alpha]) &= [f_1 \circ \alpha] = [\beta] \\ f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) = \{[\beta]^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y además

$$\begin{aligned} (p \circ \beta)(t) &= (\cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), 2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), 1) = \\ &= (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t), 1) = (\beta * \beta)(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_*([\beta]) &= [p \circ \beta] = [\beta]^2 \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Sabemos por el teorema visto que existe un  $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  levantamiento de  $f_1$  con  $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$  si y solo si se tiene que

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como tenemos que

$$\begin{aligned} f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\beta]^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2m} : m \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

no se dará la inclusión

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \not\subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

y tenemos que no existe  $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  levantamiento de  $f_1$  con  $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$ . Si tomamos otro punto  $r_1$  cualquiera tal que  $p(r_1) = (1, 0, 1)$  ( $r_1$  colo podría ser el  $(-1, 0, 1)$ ) entonces sabemos por un corolario anterior que

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, r_1)) \text{ es conjugado de } p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como el grupo total es abeliano, entonces estos dos grupos son idénticos.

Veamos qué ocurre con  $f_2$ . En este caso tenemos que

$$f_2(1, 0) = (1, 0, 1)$$

Además,  $[\alpha]$  genera  $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  y  $[\gamma]$  genera  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (0, 1, 1))$  donde

$$\gamma(t) = \left( \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), 1 \right)$$

Queremos calcular  $f_2 \circ \alpha$ :

$$\begin{aligned} (f_2 \circ \alpha)(t) &= (-2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (-\sin(4\pi t), -\cos(4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (\sin(-4\pi t), \cos(-4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \cos^2(2\pi t) \right) \end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$f_{2*}([\alpha]) = [f_2 \circ \alpha] = [\gamma * \gamma] = [\gamma]^2$$

por lo que

$$\begin{aligned} f_{2*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\gamma]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= p_*\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \right) \end{aligned}$$

y tenemos finalmente que existe el levantamiento  $\hat{f}_2$  con  $\hat{f}_2(1, 0) = (0, 1, 1)$

## 2.2. Transformación de recubridores

Vamos a tratar en lo que queda de tema de clasificar los espacios recubridores de un espacio topológico  $B$  dado. Comenzamos estableciendo para ello una nomenclatura clásica.

**Notación.** Diremos que  $(R, p)$  es un recubridor de  $B$  si  $p : R \rightarrow B$  es una aplicación recubridora.

**Definición 2.1.** Sean  $(R_1, p_1)$ ,  $(R_2, p_2)$  dos espacios recubridores de un mismo e.t. base  $B$ ,

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

1. Un **homomorfismo de recubridores**  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  es una aplicación continua  $\phi : R_1 \rightarrow R_2$  tal que  $p_2 \circ \phi = p_1$ . Dicha aplicación hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\hat{f}=\phi} & R_2 \\ & \searrow f=p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

O equivalentemente  $\phi$  es un levantamiento de la aplicación continua  $p_1$  usando la aplicación recubridora  $p_2$ .

2. Un **isomorfismo de recubridores**  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  es un homeomorfismo  $\phi : R_1 \rightarrow R_2$  tal que  $p_2 \circ \phi = p_1$ .
3. Un isomorfismo  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en sí mismo se le llama **automorfismo de recubridores**. Al conjunto de todos los automorfismos lo notaremos por  $\mathcal{A}(R_1, p_1)$ .

*Observación.*

1. Si  $(R, p)$  es un recubridor de un espacio base  $B$  y  $\phi : \hat{R} \rightarrow R$  es un homeomorfismo, entonces  $(\hat{R}, p \circ \phi)$  es un recubridor de  $B$ . Se puede ver fácilmente con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\phi} & R \\ & \searrow p \circ \phi & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

recordando que la composición de una aplicación recubridora con un homeomorfismo es también una aplicación recubridora (visto en las propiedades de las aplicaciones recubridoras). Además,  $\phi$  de  $(\hat{R}, p \circ \phi)$  en  $(R, p)$  es un isomorfismo de recubridores. De hecho, de la definición se deduce que todo isomorfismo de recubridores es de la forma anterior.

2. Si  $\phi_1$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  es un homomorfismo de recubridores y  $\phi_2$  es otro desde  $(R_2, p_2)$  en  $(R_3, p_3)$ , entonces  $\phi_2 \circ \phi_1$  es un homomorfismo de recubridores de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_3, p_3)$ . Tendríamos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_1} & R_2 & \xrightarrow{\phi_2} & R_3 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \nearrow p_3 & \\ & & B & & \end{array}$$

3. Si  $\phi$  es un isomorfismo de recubridores desde  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ , entonces  $\phi^{-1}$  es un isomorfismo de recubridores desde  $(R_2, p_2)$  en  $(R_1, p_1)$ .

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \\ R_1 & \xleftrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_2 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

4.  $\mathcal{A}(R, p)$  es un grupo con la composición.

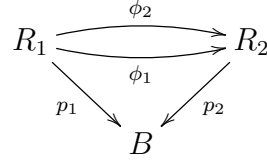
**Corolario 2.3.1.** Sean  $\phi_1, \phi_2$  dos homomorfismos de recubridores desde  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ . Entonces se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2 \iff \exists r_1 \in R_1 : \phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$$

En particular, si  $\phi$  es un homomorfismo de un recubridor  $(R, p)$  en sí mismo, entonces

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = r$$

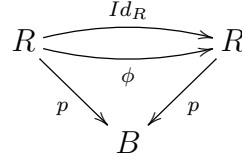
*Demostración.* Estamos en la siguiente situación



Veamos la doble implicación de la primera mitad del corolario

- $\Rightarrow$ ) Es trivial que si  $\phi_1 = \phi_2$  entonces  $\forall r \in R_1$  se tiene que  $\phi_1(r) = \phi_2(r)$ .
- $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\exists r_1 \in R_1$  tal que  $\phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$ . Entonces, como  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son levantamientos de  $p_1$ , por el teorema de unicidad del levantamiento tenemos que  $\phi_1 = \phi_2$ .

Para probar la segunda parte del corolario aplicaremos lo ya probado tomando  $\phi_1 = \phi$  un homomorfismo de un recubridor  $(R, p)$  en sí mismo y  $\phi_2 = Id_R$ .



Entonces tendríamos que

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = Id_R(r) = r$$

□

**Corolario 2.3.2.** Sean  $(R_1, p_1)$ ,  $(R_2, p_2)$  dos recubridores de  $B$ ,  $b_0 \in B$  y  $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ ,  $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ . Entonces:

1. Existe un homomorfismo de recubridores  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  con  $\phi(r_1) = r_2$  si y solo si

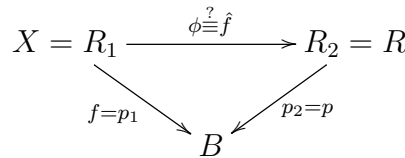
$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Existe un isomorfismo de recubridores  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  con  $\phi(r_1) = r_2$  si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

*Demostración.* Veamos cada punto por separado.

1. Estamos en la siguiente situación (donde se ha puesto la equivalencia con la notación que usamos para el teorema de existencia del levantamiento)



Entonces por el teorema de existencia del levantamiento tenemos que existe  $\phi$  levantamiento de  $p_1$  con  $\phi(r_1) = r_2$  si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Veamos la doble inclusión. En primer lugar denotamos por  $\phi$  al isomorfismo y a su inversa la llamaremos  $\varphi$ . Esta aplicación verifica que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1} \quad \phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

y además es también un isomorfismo (por lo que en particular es un homomorfismo). Estaríamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 & \xrightarrow{\varphi} & R_1 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p^1 & \\ & & B & & \end{array}$$

donde  $\phi$  y  $\varphi$  son homomorfismos. Por hipótesis tenemos que  $\exists r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ ,  $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$  tales que  $\phi(r_1) = r_2$ . Si componemos esta igualdad por la izquierda con  $\varphi$  tenemos

$$(\varphi \circ \phi)(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow Id_{R_1}(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow r_1 = \varphi(r_2)$$

Por tanto aplicando el primer punto del corolario a  $\phi$  (es un homomorfismo con  $\phi(r_1) = r_2$ ) tenemos que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

y aplicando lo mismo de nuevo a  $\varphi$  (es un homomorfismo con  $\varphi(r_2) = r_1$ ) tenemos que

$$p_{2*}(\pi_2(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

□

**Teorema 2.4.** Sean  $(R_1, p_1)$ ,  $(R_2, p_2)$  dos recubridores de un e.t.  $B$ . Entonces existe un isomorfismo entre ambos recubridores si y solo si dado  $b_0 \in B$ ,  $r_1 \in R_1$  y  $r_2 \in R_2$  con  $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$  tales que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

*Demostración.* Estamos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & B \end{array}$$

Veamos la doble implicación



$\Rightarrow$ ) Supongamos primero que existe  $\phi$  isomorfismo de recubridores de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ . Tomamos  $b_0 \in B$  y elegimos  $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$  cualquiera (que existe porque  $p_1$  es sobreyectiva). Elegimos  $r_2 = \phi(r_1)$  y entonces como  $p_2 \circ \phi = p_1$  tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) &= (p_2 \circ \phi)_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \\ &= p_{2*}(\phi_*(\pi_1(R_1, r_1))) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \end{aligned}$$

ya que como  $\phi$  es un homomorfismo tenemos que  $\phi_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \pi_1(R_2, \phi(r_1))$ .

$\Leftarrow$ ) Está probada aplicando el corolario anterior.

□

*Observación.* Algunas consecuencias que podemos extraer de lo anterior son las siguientes:

Sean  $B$  un e.t. y  $b_0 \in B$ . Si consideramos  $H$  un subgrupo de  $\pi_1(B, b_0)$  entonces

1. Existe como mucho un recubridor  $(R, p)$  (salvo isomorfismo) cumpliendo que  $\exists r \in R$  tal que  $p_*(\pi_1(R, r)) = H$ .

$$\begin{array}{ccc} R & & \pi_1(R, r) \\ p \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

2. Además si  $H$  y  $H'$  son subgrupos conjugados en  $\pi_1(B, b_0)$ , como mucho existe un recubridor correspondiente a ambos, es decir, si  $(R, p)$  es un recubridor con  $r_0 \in R$  tal que  $p_*(\pi_1(R, r_0)) = H$ , entonces también existe un  $r'_0 \in R$  tal que  $p_*(\pi_1(R, r'_0)) = H'$ .

$$\begin{array}{ccccc} R & & \pi_1(R, r) & & \pi_1(R, r') \\ p \downarrow & & p_* \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leq \pi_1(B, b_0) & & H' \leq \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

### Ejemplo.

1. Consideramos  $B = \mathbb{R}$  y buscamos los recubridores de  $\mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$$

Por lo que solo hay un subgrupo  $H = \{[\varepsilon_0]\}$ , luego  $\mathbb{R}$  solo tiene un recubridor

$$(\mathbb{R}, p = Id_{\mathbb{R}})$$

2. En general, si  $B$  es simplemente conexo, entonces su único recubridor es él mismo (salvo isomorfismo de recubridores).

3. Consideramos ahora  $\mathbb{RP}^n$  el espacio proyectivo con  $n \geq 2$ . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2, \text{ con } x_0 \in \mathbb{RP}^n \text{ cualquiera}$$

Por tanto tendríamos que los únicos posibles subgrupos de  $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)$  son

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[\varepsilon_{x_0}]\} \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{S}^n, p) \text{ con } p(x) = [x] \\ H_2 &\cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} R & r_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \\ \downarrow p & \downarrow & \downarrow & \downarrow Id & \downarrow Id & \downarrow Id_* \\ \mathbb{RP}^n & x_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \end{array}$$

por lo que los únicos recubridores de  $\mathbb{RP}^2$  son  $(\mathbb{S}^n, p)$  con  $p(x) = [x]$  y  $(\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$ .

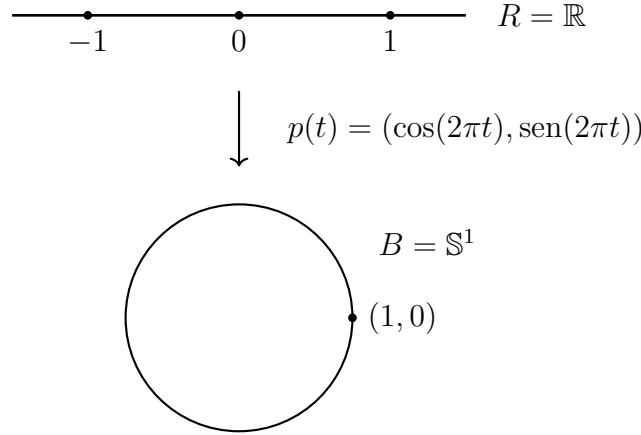
4. Consideramos  $B = \mathbb{S}^1$ . Recordemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Los únicos subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

Recordamos el recubrimiento de  $\mathbb{S}^1$  que estudiamos en el tema anterior:



Para este recubridor  $(\mathbb{R}, p)$  donde  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , su subgrupo asociado en  $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es  $H_0$ .

También podemos considerar el recubridor  $(\mathbb{S}^1, p_1 = Id_{\mathbb{S}^1})$  cuyo subgrupo asociado es  $H_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ .

Ahora nos planteamos de nuevo que  $\mathbb{S}^1$  es recubridor de sí mismo pero que hay más formas de recubrirse, es decir, podemos encontrar funciones recubridoras

$p_k$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$  de forma que todas recubran a la circunferencia pero “enrollanla más”, es decir, llevando cada vuelta de  $R = \mathbb{S}^1$  en  $k$  vueltas de  $B = \mathbb{S}^1$ . Definimos así la aplicación  $p_k$  para  $k \geq 2$  (el caso  $k = 1$  es la identidad que ya se ha estudiado) dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

Además tendríamos que

$$\begin{aligned} p_{k*} : \quad \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha]^k \end{aligned}$$

Llegando a que

$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) = H_k = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, los únicos recubridores de  $\mathbb{S}^1$  son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, p) \text{ con } p(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ (\mathbb{S}^1, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta)) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5. Vamos a estudiar ahora los recubridores del cilindro de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\alpha]^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

por lo que tenemos de nuevo que los únicos subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

y además sabemos que  $(\mathbb{R}^2, p_0)$  es recubridor del cilindro con

$$\begin{aligned} p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

asociado a  $H_0 = \{[\varepsilon_{(1,0,0)}]\}$ .

Buscamos ahora los recubridores cuyo subgrupo asociado es  $H_k$ . Con la misma idea que en el ejemplo anterior definimos la función  $p_k$  para  $k \in \mathbb{Z}^+$  dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_{k*}([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) &= \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\} = H_k \end{aligned}$$

Por tanto los únicos recubridores del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, p_0) \text{ con } p_0(x, y) &= (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta), y) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

6. Veamos el caso del toro,  $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

con generadores  $[\alpha]$  y  $[\beta]$ .

Consideramos el recubridor  $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$  con

$$\begin{aligned} p_0 \times p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

Como  $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0)) = [\varepsilon_{(0,0)}]$  tenemos que

$$(p_0 \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0))) = \{[\varepsilon_{(1,0,1,0)}]\}$$

por lo que  $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$  es el recubridor asociado al subgrupo trivial de  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0))$ .

Consideramos ahora el cilindro como recubridor y definimos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p_k \times p_0 : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que para cada  $k \in \mathbb{Z}^+$  “enrolla” el cilindro  $k$  veces. En este caso tendríamos que

$$(p_k \times p_0)(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$

y además tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\gamma]^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$$

Tenemos además que  $(p_k \times p_0)(\gamma(t)) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t), 1, 0)$  de donde se deduce que

$$(p_k \times p_0)_*([\gamma]) = [(p_k \times p_0)(\gamma)] = [\alpha]^k$$

Una vez hemos calculado la imagen del generador podemos concluir que

$$(p_k \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z} \times \{0\} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Análogamente si consideramos

$$\begin{aligned} p_0 \times p_k : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, \cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

tendríamos el siguiente recubridor

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Consideramos ahora el toro como recubridor de sí mismo y definimos

$$\begin{aligned} p_k \times p_l : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(l\varphi), \sin(l\varphi)) \end{aligned}$$

Si estudiamos la imagen de los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p_k \times p_l)_*([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ (p_k \times p_l)_*([\beta]) &= [\beta]^l \end{aligned}$$

y llegamos a que  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l)$  es recubridor y está asociado al subgrupo  $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$ . El grupo imagen sería

$$\{[\alpha]^{kn_1} * [\beta]^{ln_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

En este punto nos damos cuenta de que aún no hemos estudiado todos los subgrupos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Si consideramos 2 puntos de  $\mathbb{Z}$  podemos generar un subgrupo a partir de ellos, por ejemplo, para  $(1, 3), (2, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  podemos construir  $\{a(1, 3) + b(2, 4) : a, b \in \mathbb{Z}\}$  y es un subgrupo de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Esto también ocurre con un solo generador. Es decir, tenemos que los subgrupos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que nos queda por considerar son de la forma

$$\begin{aligned} \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} &\text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} &\text{ para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pensamos ahora entonces en la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} p' : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta + y), \sin(\theta + y)) \end{aligned}$$

y nos planteamos quién sería  $p'_*([\gamma])$ . Aplicamos  $p'$  en un generador y tenemos

$$p'(\gamma(t)) = p(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Intuitivamente podemos llegar a ver que  $p'_*([\gamma]) = [\alpha] * [\beta]$ . Esto se ha hecho considerando de fondo el generador  $(1, 1)$ . Buscamos generalizar esta nueva aplicación recubridora para cualquier generador  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Se puede construir una aplicación  $p'_{(a,b)}$  para cada  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p'_{(a,b)} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(a\theta), \sin(a\theta), \cos(b\theta + y), \sin(b\theta + y)) \end{aligned}$$

Aplicando  $p'_{(a,b)}$  en el generador tenemos

$$p'_{(a,b)}(\gamma(t)) = p'(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) = (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t))$$

y con mucha intuición se puede llegar a que

$$(p'_{(a,b)})_*([\gamma]) = [\alpha]^a * [\beta]^b$$

Por tanto tenemos que  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)})$  es recubridor del toro con subgrupo asociado  $\{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\}$  para cada generador que tomemos  $(a, b) \in \mathbb{Z}$ .

De hecho, si tomamos un par de generadores  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  podemos definir la aplicación  $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dada por

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &= \\ &= (\cos(a\theta + c\varphi), \sin(a\theta + c\varphi), \cos(b\theta + d\varphi), \sin(b\theta + d\varphi)) \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando  $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}$  en los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\alpha(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(0), \sin(0)) = \\ &= (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\beta(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(1, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(0), \sin(0), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (\cos(2c\pi t), \sin(2c\pi t), \cos(2d\pi t), \sin(2d\pi t)) \end{aligned}$$

Por lo que de nuevo usando mucho la intuición (habría que demostrarlo formalmente) llegamos a que

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\alpha]) &= [\alpha]^a * [\beta]^b \\ (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\beta]) &= [\alpha]^c * [\beta]^d \end{aligned}$$

y tenemos que  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})$  es recubridor del toro asociado al subgrupo  $\{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  para cada par de generadores  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Resumiendo, tenemos que todos los recubridores del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  son

$$\begin{aligned} &(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0) \text{ asociado a } \{0\} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k \times p_0) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z} \text{ para cada } k, l \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)}) \text{ asociado a } \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}) \text{ asociado a } \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &\text{para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no tiene más subgrupos estos serán todos los recubridores del toro.