Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Introducción. Conexión por arcos

0.1. Conexión

Notación. Notaremos por e.t al espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ o diremos X es un e.t.

Definición 0.1. Se dice que un e.t X es no conexo si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Proposición 0.1. Dado un e.t. X equivalen las siguientes afirmaciones:

(i) X es conexo.

(ii) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.

(iii) Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son el vacío y el total.

Teorema 0.2. El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).

Teorema 0.3. La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t. X es también conexa.

Teorema 0.4. Si A es un subconjunto del e.t. X y A es conexo, entonces dado B con $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces se tiene que B también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.

Teorema 0.5. Dados dos espacios topológicos X, Y se cumple que $X \times Y$ es conexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son conexos.

Teorema 0.6. Los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).

Definición 0.2. Dados un e.t. X y un punto x_0 se define la componente conexa de x_0 es X como el mayor conexo de X que contiene a x_0

Teorema 0.7. Las componentes conexas de un e.t. X forman una partición de X es conjuntos conexos maximales y cerrados.

0.2. Conexión por arcos

Definición 0.3. Un **arco** (o camino) en un espacio topológico X es una aplicación continua $\alpha : [0,1] \to X$. Si además $\alpha(0) = \alpha(1)$ diremos que α es un lazo.

Diremos que un arco $\alpha : [0,1] \to X$ une x con y si se verifica que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si α es un arco, diremos que está basado en x (o su punto base es x) si $\alpha(0) = x = \alpha(1)$.

Denotaremos por

$$\Omega(X; x, y) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y\}$$

al **conjunto de arcos** que unen x con y. Denotaremos además por

$$\Omega(X; x) = \{\alpha : [0,1] \to X \text{ continua } : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$$

al **conjunto de lazos** basados en x.

Ejemplo.

1. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

   es un lazo basado en x_0 al que llamaremos **arco constante**. De hecho, si X tiene la topología discreta, entonces los únicos arcos que hay en X son los arcos constantes.

   Demostración. Si X tiene la topología discreta, entonces como α es continua $\alpha^{-1}(\{x_0\})$ será abierto y cerrado y por tanto $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, X\}$ por ser X conexo. □

2. Sean $x, y, z \in X$, $\alpha : [0,1] \to X$ un arco uniendo x con y y $\beta : [0,1] \to X$ un arco uniendo y con z. Buscaremos ahora un arco formado a partir de estos dos de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta : [0,1] \to X : (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

   Entonces $\alpha * \beta$ es continua ya que $(\alpha * \beta)_{|[0,1/2]}$ y $(\alpha * \beta)_{|[1/2,1]}$ lo son y para $t = 1/2$ se tiene que

$$\alpha\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

   con $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ cerrados. Aplicando el lema de pegado[1] tenemos que $\alpha * \beta$ es continua.

[1] visto en Topología I

3. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un arco uniendo x con y, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : [0,1] &\to X \\ t &\mapsto \alpha(1-t) \end{aligned}$$

es un arco que une y con x.

Definición 0.4. Decimos que un e.t. X es **arcoconexo** (o **conexo por arcos**) si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un arco en X que une el punto x con el punto y.

Si X es un e.t. y $A \subset X$, diremos que A es arcoconexo si A es arcoconexo con la topología de inducida de X.

Teorema 0.8. Todo espacio topológico arcoconexo es conexo.

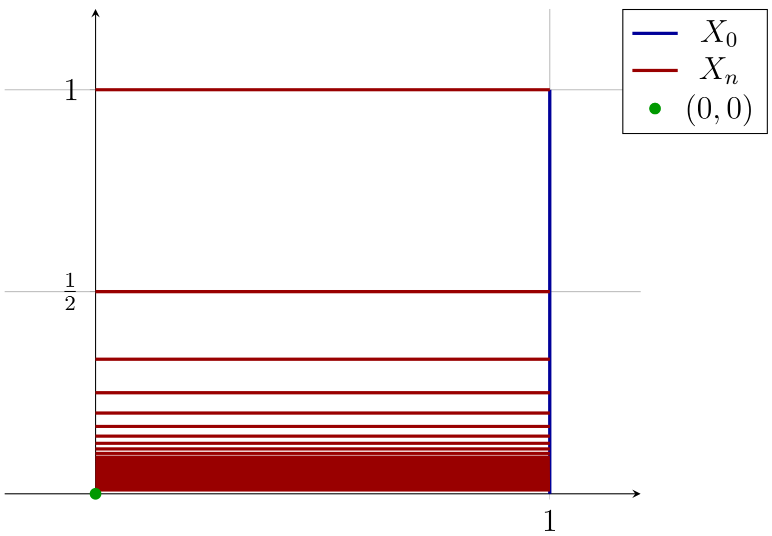
Demostración. Dado $x_0 \in X$ fijo y otro punto $x \in X$ cualquiera, sabemos que existe $\alpha : [0,1] \to X$ un arco tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x$. En particular, como el intervalo $[0,1]$ es conexo y α es continua, entonces se tiene que $\alpha([0,1])$ es conexo y podremos escribir

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0,1]) \in X \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x\{[0,1]\}$$

y además $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \alpha_x\{[0,1]\}$ por lo que X es conexo (por el lema del peine). □

Ejemplo. Veamos que la otra implicación no es cierta en general. Para ello consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{1\} \times [0,1] \qquad \text{y} \qquad X_n = [0,1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}, \ n \in \mathbb{N}$$



Llamamos $X = \{(0,0)\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \right)$ y queremos ver que X es conexo pero no es arcoconexo.

Si tomamos la segunda parte de esta unión, es decir,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$$

tenemos que Y es es conexo porque es unión de los X_n que son todos conexos y que intersecan con X_0. Entonces, como $Y \subset X \subset \overline{Y}$ tenemos que X es conexo. Veamos sin embargo que X no es arcoconexo.

Para ello vamos a demostrar que si $\alpha : [0,1] \to X : \alpha$ es continua con $\alpha(0) = (0,0)$, entonces $\alpha(t) = (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$.

Podemos escribir la curva como $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Como $\alpha(0) = (0,0)$, si tomamos $((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ un abierto que contiene al origen, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha([0,\varepsilon)) \subseteq ((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$ por ser α continua. Como $y(t)$ es continua y se tiene que $y([0,\varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left(\bigcup_{n>2} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$. Por el teorema del valor intermedio tenemos que $y([0,\varepsilon)) = \{0\}$ por lo que $\alpha([0,\varepsilon)) = \{(0,0)\}$. De esta forma hemos probado que no hay ningún arco que conecte $(0,0)$ con un punto distinto (el único arco es el constante).

Teorema 0.9. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces A es arcoconexo.

Demostración. Como A es estrellado existe un $x_0 \in A$ tal que para cualquier $x \in A$, el segmento que los une, $(1-t)x + tx_0 \in A$ para todo $t \in [0,1]$ y entonces $\alpha(t) = (1-t)x + tx_0$ es una curva continua uniendo x con x_0. Dados dos puntos cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$ es una curva continua que une x con y. □

Corolario 0.9.1. Cualquier conjunto A de $\mathbb{R}^n$ convexo es arcoconexo. Por ejemplo, las bolas abiertas o las bolas cerradas de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 0.9.2. En $\mathbb{R}$ coinciden los conjuntos conexos y arcoconexos (son solo los intervalos).

Teorema 0.10. La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

Demostración. Dados $x, y \in f(X)$, entonces existen $x_0, y_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x$ y $f(y_0) = y$. Por ser X arcoconexo, entonces existe un arco $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = y_0$. Entonces tenemos que $f \circ \alpha : [0,1] \to f(X)$ es continua y $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = x$ y $(f \circ \alpha)(1) = f(y_0) = y$ y tenemos demostrado el resultado que buscábamos. □

Teorema 0.11. Sean X un e.t y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de arcoconexos de X. Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entones $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

Observación. Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión. Por ejemplo, si en un e.t. X se tiene que $A \subseteq X$ es arcoconexo podría ocurrir que si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, se diera que B no sea arcoconexo (como en el ejemplo anterior).

Ejemplo. Veamos que $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ es arcoconexo. Podemos hacerlo sabiendo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, con $N = (0, \ldots, 0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ que es arcoconexo por lo que $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ es arcoconexo. Análogamente, $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ con $S = (0, \ldots, 0, -1)$ es arcoconexo y podemos escribir

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

por lo que $\mathbb{S}^n$ es unión de arcoconexos con puntos en común, luego es arcoconexo.

Teorema 0.12. Sean X, Y e.t., entonces $X \times Y$ es arcoconexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son arcoconexos.

Teorema 0.13. Dado un e.t. X, se tiene que X es arcoconexo si y solo si X es conexo y todo punto $x \in X$ tiene un entorno suyo arcoconexo.

Demostración.

$\Rightarrow$) Hemos visto que si X es arcoconexo, entonces X es conexo. Además, X es entorno de cualquier punto suyo luego todo punto tiene un entorno conexo.

$\Leftarrow$) Elegimos un $x \in X$ fijo y definimos $A = \{y \in X : \exists \alpha_y \text{ arco uniendo } x \text{ con } y\}$

Como $x \in A$ tenemos que $A \neq \emptyset$. Si probamos que A es abierto y cerrado, entonces como X es conexo tendremos que $A = X$, es decir podremos unir x con cualquier otro punto $y \in X$.

Veamos que A es abierto. Tomamos $z \in A$ y queremos demostrar que $\exists U$ entorno de z tal que $U \subseteq A$. Por hipótesis sabemos que existe un entorno U arcoconexo de z. Entonces dado $u \in U$ existe un arco α_u que une z con u. Por otro lado, como $z \in A$, entonces existe un arco β_z que une x con z. Tendremos entonces que $\beta_z * \alpha_u$ es un arco que une x con u y por defínción tendremos $u \in A$, luego $U \subseteq A$.

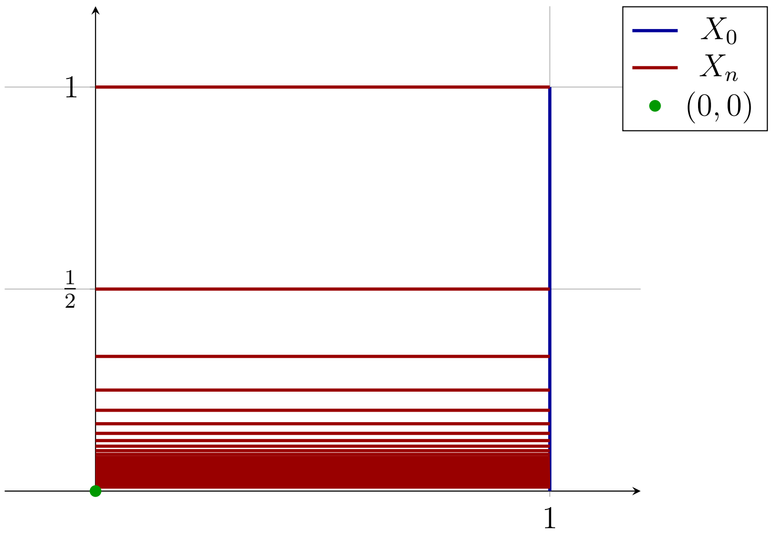
Nos queda ver que A es cerrado. Tomamos para ello $z \in \overline{A}$. Por hipótesis existe un entorno U de z arcoconexo. Por ser U entorno de z y $z \in \overline{A}$ necesariamente $U \cap A \neq \emptyset$ por lo que existe al menos un $u \in U \cap A$. Como $u \in A$ existe un arco α_u que une x con u y como $u \in U$ existe también un arco β_u que une u con z y tendríamos que $\alpha_u * \beta_u$ es un arco uniendo x con z llegando a que $z \in A$. Tendríamos $\overline{A} \subseteq A$ y como la otra inclusión se da siempre, tendremos que A coincide con su adherencia, por lo que es cerrado.

$\square$

Definición 0.5. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$, llamamos **componente arcoconexa** de x_0 al mayor arcoconexo en X que contiene a x_0.

Teorema 0.14. Las componentes arcoconexas de un e.t. X forman una partición de X en subconjuntos arcoconexos de X maximales.

Ejemplo. En el ejemplo que ya se trabajó se puede ver que el conjunto X que era



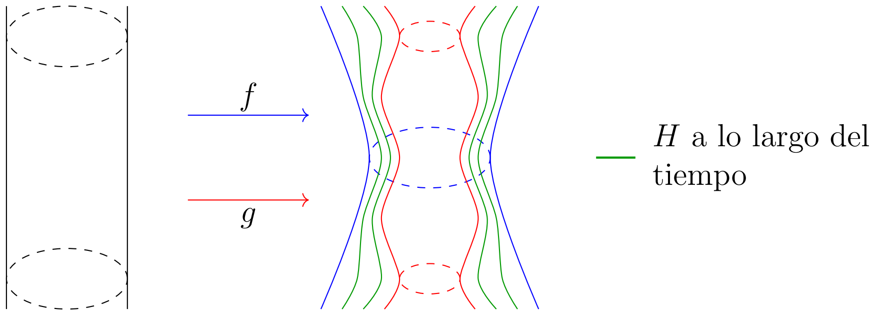
tiene dos componentes arcoconexas: $\{(0,0)\}$, $\bigcup\limits_{u\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n$

1. El grupo fundamental

1.1. Homotopía por arcos

Definición 1.1. Sean X e Y dos espacios topologicos y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f es **homotópica** a g si existe $H : X \times [0,1] \to Y$ continua tal que

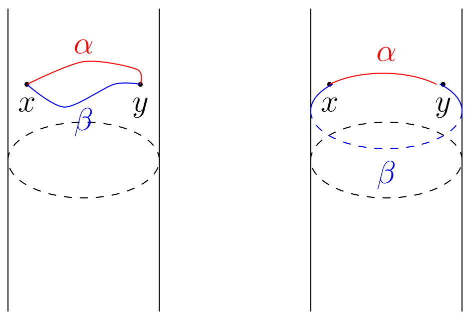
$$H(x,0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$



Definición 1.2. Dados X e.t., $x, y \in X$ y dos arcos $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$, decimos que α, β son **homotópicos por arcos** si existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) & \text{y} & H(s,1) = \beta(x) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x & \text{y} & H(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Lema 1.1. Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en $\Omega(X; x, y)$.



Equivalentes No equivalentes

Demostración.

(i) Dado $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ queremos ver que α es homotópica por arcos con α. Para ello tenemos

$$\begin{array}{rl} H(s,t) = \alpha(s) & H(s,0) = \alpha(s) = H(s,1) \\ H(0,t) = \alpha(0) = x & H(1,t) = \alpha(1) = y \end{array}$$

(ii) Dados $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ tales que existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) & \text{y} & H(s,1) = \beta(x) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x & \text{y} & H(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Queremos ver que existe un $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua tal que

$$\begin{array}{rcll} \tilde{H}(s,0) = \beta(s) & \text{y} & \tilde{H}(s,1) = \alpha(x) & \forall s \in [0,1] \\ \tilde{H}(0,t) = x & \text{y} & \tilde{H}(1,t) = y & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

Tomando $\tilde{H}(s,t) := H(s, 1-t)$ cumple claramente con lo que buscamos.

(iii) Dado $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x, y)$ y $H_1, H_2 : [0,1] \times [0,1] \to X$ continuas tales que

$$\begin{array}{cc} H_1(s,0) = \alpha(s) & H_2(s,0) = \beta(s) \\ H_1(s,1) = \beta(s) & H_2(s,1) = \gamma(s) \\ H_1(0,t) = x & H_2(0,t) = x \\ H_1(1,t) = x & H_2(1,t) = y \end{array}$$

Queremos ver que existe un $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{array}{rl} H(s,t) = \alpha(s) & H(s,0) = \alpha(s) = H(s,1) \\ H(0,t) = \alpha(0) = x & H(1,t) = \alpha(1) = y \end{array}$$

Para ello consideramos

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H_2(s, 2t-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Y con el lema de pegado es fácil ver que es continua y que satisface las condiciones que buscábamos.

□

Ejemplo.

1. Sean X un e.t. y $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas, entonces vamos a ver que f y g son homotópicas.

   Demostración. Vamos a definir la aplicación

   $$\begin{aligned} H : X \times [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ (x,t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

   que es continua y además verifica

   $$H(x,0) = f(x) \qquad H(x,1) = g(x)$$

   por lo que tenemos lo que buscábamos. □

En el caso particular de que $f = \alpha$ y $g = \beta$ fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro punto común, entonces la H anterior sería una homotopía por arcos.

2. Si $\alpha : [0,1] \to X$ es un arco y $h : [0,1] \to [0,1]$ es una aplicación continua con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, entonces $\dot{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$ es homotópica por arcos a $\alpha(s)$.

   Demostración. Es claro que $\dot{\alpha}$ es continua y existe una homotopía por arcos entre α y $\dot{\alpha}$ que es la siguiente
$$H(s,t) = \alpha((1-t)s + th(s))$$
   que es claramente continua y que verifica que
$$\begin{array}{rr} H(s,0) = \alpha(s) & H(s,1) = \alpha(h(s)) = \dot{\alpha}(s) \\ H(0,t) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(1) & H(1,t) = \alpha(1) = \dot{\alpha}(1) \end{array}$$
   □

   Intuitivamente podemos entender esto como que no importa a qué velocidad se recorra una curva para ser homotópico por arcos.

Notación. Como convenio a la clase de equivalencia de un arco α en $\Omega(X; x, y)$ lo denotaremos por $[\alpha]$.

Lema 1.2. Dados dos arcos α_1, α_2 en $\Omega(X; x, y)$ y $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X; y, z)$. Se verifica que si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, entonces $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$.

Demostración. Tenemos que
$$(\alpha_1 * \beta_1) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \beta_1(2s-1) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right.$$
$$(\alpha_2 * \beta_2) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_2(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \beta_2(2s-1) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right.$$
Además, sabemos que existen H_1, H_2 continuas tal que
$$\begin{array}{cc} H_1(s,0) = \alpha_1(s) & H_2(s,0) = \beta_1(s) \\ H_1(s,1) = \beta_1(s) & H_2(s,1) = \beta_2(s) \\ H_1(0,t) = x & H_2(0,t) = y \\ H_1(1,t) = y & H_2(1,t) = z \end{array}$$
Tomamos entonces $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ dada por
$$H(s,t) = \left\{ \begin{array}{lll} H_1(2s,t) & \text{si} & s \in [0, 1/2],\ t \in [0,1] \\ H_2(2s-1,t) & \text{si} & s \in [1/2, 1],\ t \in [0,1] \end{array} \right.$$
es continua y tenemos que
$$H(s,0) = \left\{ \begin{array}{lll} H_1(2s,0) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ H_2(2s-1,0) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1(2s) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ \beta_1(2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right. = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$
Análogamente se tiene que $H(s,1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$ con $H(0,t) = x$ y $H(1,t) = z$.

□

A partir del lema anterior podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

con $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$

Teorema 1.3. Dado X e.t., $\alpha \in \Omega(X; x, y)$, $\beta \in \Omega(X; y, z)$ y $\gamma \in \Omega(X; z, w)$ se tiene que

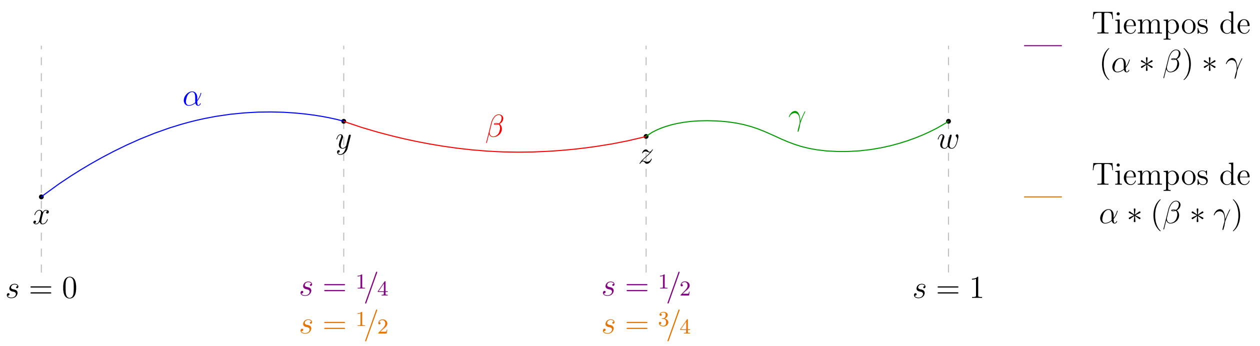
(i) $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$

(ii) $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$ y $[\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$

(iii) $[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_x]$ y $[\tilde{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$

Demostración.

(i) Desarrollemos cada expresión



$$(\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \beta(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ (\beta * \gamma)(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(2s-1)) & \text{si} \quad s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(2(2s-1)-1) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s-2) & \text{si} \quad s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s-3) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \alpha(2(2s)) & \text{si} \quad s \in [0, 1/4] \\ \beta(2(2s)-1) & \text{si} \quad s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{si} \quad s \in [0, 1/4] \\ \beta(4s-1) & \text{si} \quad s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s-1) & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Usando el ejemplo 2 anterior se tiene que $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ (realmente se están recorriendo las mismas curvas pero a distinta velocidad).

(ii) Tendremos que ver que $\alpha * \varepsilon_y$ se relaciona por una homotopía con arcos con α. Recordemos que

$$(\alpha * \varepsilon_y) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \varepsilon_y(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ y & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

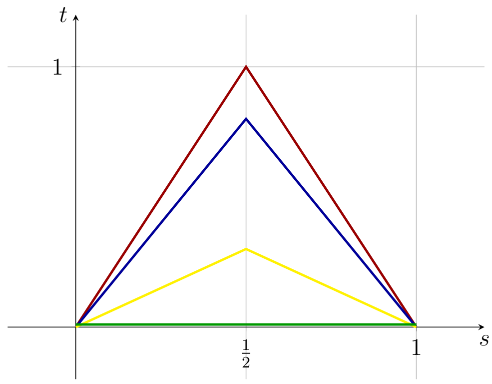
De nuevo del ejemplo 2 se tiene que son homotópicas

(iii) Tendremos que ver en este caso que $\alpha * \tilde{\alpha}$ es homotópico por arcos a ε_x. Describamos ambas curvas.

$$(\alpha * \tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2s-1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2-2s) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0,1]$$

Pensamos ahora una transformación H que haga que cada vez la curva se vaya quedando más cerca de x (cada vez vuelve antes de llegar a y). Intuitivamente podríamos pensar en la siguiente gráfica, en la que vamos reduciendo la distancia desde la función roja hasta la verde



$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{si} \quad s \in [0, 1/2] \\ 2-2s & \text{si} \quad s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y podemos construir $H(s,t) = \alpha((1-t)h(s))$ que claramente es continua y verifica

$$\begin{aligned} H(s,0) = \alpha(h(s)) = (\alpha * \tilde{\alpha}(s)) \quad &\text{y} \quad H(s,1) = \alpha(0) = x = \varepsilon_x(s) \qquad \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = \alpha(0) = x \quad &\text{y} \quad H(1,t) = \alpha(0) = x \qquad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

□

1.2. El grupo fundamental

Corolario 1.3.1. Dados un e.t. X y un punto $x_0 \in X$ se tiene que el conjunto de lazos en X basados en x_0 bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación $*$ forman un grupo algebraico.

Demostración. Definimos el siguiente conjunto

$$G = \frac{\Omega(X; x_0)}{R}$$

donde R es la relación de equivalencia "ser homotópico por arcos". Veamos ahora que G tiene estructura de grupo:

1. **Propiedad asociativa.** Tendremos que ver que se verifica para cualesquiera $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in G$.

   $$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

   pero esto lo tenemos claramente del teorema anterior

2. **Existencia del elemento neutro.** Por el teorema anterior tenemos que para $x = y = x_0$ se tiene que $[\alpha] * [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\alpha]$ para cualquier $[\alpha] \in G$ luego tenemos la existencia probada.

3. **Existencia del elemento opuesto.** De nuevo usamos el teorema anterior y nos dice que para cualquier $[\alpha] \in G$ se tiene que

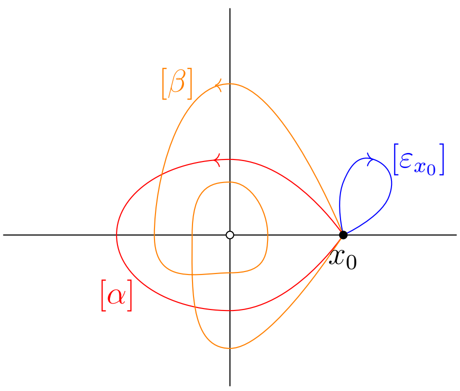
   $$[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] = [\tilde{\alpha}] * [\alpha]$$

   y se tiene directamente.

Con esto hemos probado finalmente que G es un grupo. □

Definición 1.3. Al grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamaremos el **grupo fundamental** de X en x_0 y lo denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$.

Ejemplo. Consideramos $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ y un punto cualquiera x_0.



En este espacio tenemos que $[\varepsilon_{x_0}] \neq [\alpha] \neq [\tilde{\alpha}] \neq [\beta]$. Intuitivamente podríamos intentar identificar este espacio con $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

•) La clase $[\varepsilon_{x_0}]$ la podemos interpretar como el 0 de $\mathbb{Z}$.

•) Identificaremos los números positivos como el número de vueltas que da cada curva al punto $(0,0)$ en sentido positivo (el que elijamos como positivo). Por ejemplo $[\alpha]$ sería $1 \in \mathbb{Z}$, $[\beta]$ sería $2 \in \mathbb{Z}$ y podríamos seguir así con todos los números enteros.

•) Para los números negativos tomaremos los opuestos de los anteriores, es decir, las curvas recorridas en sentido contrario. Por ejemplo $[\tilde{\alpha}]$ será el $-1 \in \mathbb{Z}$, $[\tilde{\beta}]$ será el -2 y así sucesivamente.

Más adelante probaremos que $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ de una forma más rigurosa.

Ejemplo. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto estrellado desde un punto x_0. Entonces $\pi_1(X; x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$, es decir, es trivial.

Demostración. Dado $\alpha(s)$ un lazo basado en x_0 dentro de X, entonces

$$H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$$

es una aplicación continua dentro[1] de X tal que

$$\begin{array}{rcll} H(s,0) = \alpha(s) = & \text{y} & H(s,1) = x_0 = \varepsilon_{x_0}(s) & \forall s \in [0,1] \\ H(0,t) = x_0 & \text{y} & H(1,t) = x_0 & \forall t \in [0,1] \end{array}$$

□

En particular, las bolas abiertas, las bolas cerradas, los convexos en general como $\mathbb{R}^n$ tienen grupo fundamental trivial.

Teorema 1.4. Sean x, y dos puntos de un e.t. X. Si X es arcoconexo, entonces $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son iguales salvo isomorfismo.

Demostración. Como X es arcoconexo podemos considerar α un arco uniendo x con y y la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \pi_1(X, y) &\to \pi_1(X, x) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

que está bien definida por lo visto anteriormente sobre el operador $*$. Queremos ver ahora que F_α es un isomorfismo de grupos. Para ello comencemos por ver que F_α es un homomorfismo, es decir, que se verifica

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2])$$

Desarrollamos el segundo término de la expresión:

$$\begin{aligned} F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2]) &= ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}]) = [\alpha] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}] = \\ &= F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \end{aligned}$$

[1] aquí es donde usamos que es estrellado

y tenemos la igualdad buscada. Veamos ahora que tiene inversa considerando $F_{\tilde{\alpha}}$ que por definición es $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$ y que además verifica

$$(F_{\tilde{\alpha}} \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) = F_{\tilde{\alpha}}([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X,y)}([\gamma])$$
$$(F_{\alpha} \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) = F_{\alpha}([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\tilde{\alpha}] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X,x)}([\gamma])$$

por lo que es su inversa. Hemos encontrado por tanto un homomorfismo biyectivo, luego $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y)$ □

Definición 1.4. Decimos que un e.t. es **simplemente conexo** si es arcoconexo y su grupo fundamental es el trivial en un punto (y, por tanto, en cualquier punto).

Ejemplo. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado desde un punto x_0, entonces A es simplemente conexo.

Lema 1.5. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos y $x \in X$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} (f_x)_* : \pi_1(X,x) &\to \pi_1(Y, f(x)) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

está bien definida y es un homomorfismo de grupos[2].

Demostración. Para ver que $(f_x)_*$ está bien definida tomamos $\alpha_1,\ \alpha_2$ lazos basados en x tales que $[\alpha_1] = [\alpha_2]$. Queremos comprobar que $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$. Para ello , sabemos que si $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, entonces existe $H : [0,1] \to X$ continua y tal que

$$H(s,0) = \alpha_1(s) \quad , \quad H(s,1) = \alpha_2(s) \quad , \quad H(0,t) = x = H(1,t)$$

Entonces podemos considerar la aplicación

$$f \circ H : [0,1] \times [0,1] \to Y$$

que es continua y verifica

$$\begin{aligned} (f \circ H)(s,0) &= (f \circ \alpha_1)(s) \\ (f \circ H)(s,1) &= (f \circ \alpha_2)(s) \\ (f \circ H)(0,t) = f(x) &= (f \circ H)(1,t) \end{aligned}$$

por lo que $[f \circ \alpha_1] = [f \circ \alpha_2]$. Veamos ahora que $(f_x)_*$ es un homomorfismo de grupos, es decir que se verifica

$$(f_x)_*([\alpha] * [\beta]) = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)_*([\beta])$$

Por definición sabemos que

$$(f_x)_*([\alpha] * [\beta]) = (f_x)_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = \left[\begin{cases} f(\alpha(2s)) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ f(\beta(2s-1)) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \right] =$$
$$= [(f * \alpha) * (f \circ \beta)] = (f_x)_*([\alpha]) * (f_x)_*([\beta])$$

□

[2]Cuando no haya confusión posible escribiremos solamente f_* en lugar de $(f_x)_*$

Definición 1.5. A la aplicación f_x dada por el lema la llamaremos **homomorfismo inducido** por f.

Propiedades. Algunas propiedades básicas de f_x son

1. Si tenemos dos aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces se tiene que
$$(g \circ f)_* = g_x \circ f_x$$
2. Se verifica que la aplicación dada por
$$\begin{aligned} Id_x : \pi_1(X, x_0) &\to \pi(X, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [\alpha] \end{aligned}$$
es la identidad en grupos fundamentales.

Corolario 1.5.1. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces la aplicación dada por
$$(h_x)_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, h(x))$$
es un isomorfismo de grupos, es decir, el grupo fundamental se conserva[3] por homeomorfismos.

Definición 1.6. Si $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ son dos grupos algebraicos, consideramos sobre $G_1 \times G_2$ el producto $*$ dado por
$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) := (a_1 *_1 a_2, b_1 *_2 b_2)$$
para $a_1, a_2 \in G_1$, $b_1, b_2 \in G_2$

Teorema 1.6. Sean X, Y dos e.t., $x \in X$, $y \in Y$. Entonces, con la topología producto en $X \times Y$ se tiene que
$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

Demostración. Veasmos que
$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y, (x, y)) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\longmapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) \end{aligned}$$
donde p_1 y p_2 son las proyecciones a X y a Y respectivamente está bien definida. Esto es fácil de ver ya que
$$([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ((p_1)_*([\alpha]), (p_2)_*([\alpha]))$$
y además es un homomorfismo. Consideramos además la siguiente aplicación
$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) &\longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x, y)) \\ ([\beta], [\gamma]) &\longmapsto [(\beta, \gamma)] \end{aligned}$$
y es fácil ver que está bien definida y es un homomorfismo tal que
$$\psi \circ \phi = Id_{\pi_1(X \times Y, (x,y))}$$
$$\phi \circ \psi = Id_{\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)}$$
□

[3]salvo isomorfismo

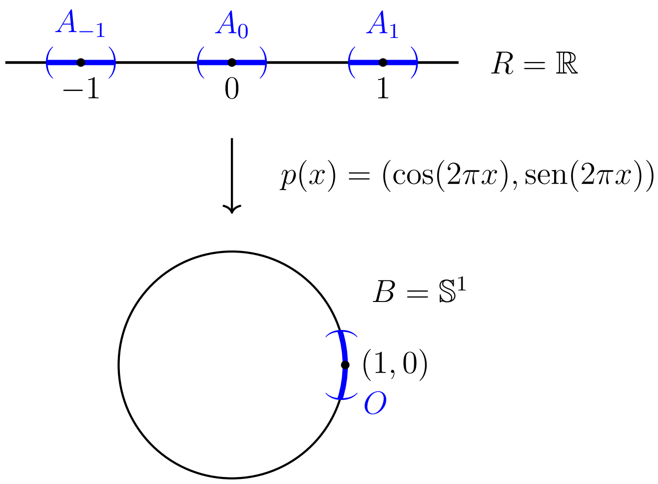
1.3. Espacios recubridores

Definición 1.7. Sea $p : R \to B$ una aplicación continua y sobreyectiva entre dos espacios topológicos. Dado un punto $b \in B$ decimos que un abierto O que contiene a b está **regularmente recubierto** si se verifican las siguientes propiedades

1. $p^{-1}(O)$ es una unión disjunta de abiertos $A_i \subseteq R$, $i \in I$.

2. Para cada $i \in I$, $p_{|A_i} : A_i \to O$ es un homeomorfismo.

Ejemplo. En este caso, si consideramos la aplicación $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ descrita en la gráfica, que es claramente continua y sobreyectiva[4] podemos ver que O, que contiene al $(1, 0)$ está regularmente recubierto



Definición 1.8. Decimos que una aplicación $p : R \to B$ entre dos espacios topológicos es una **aplicación recubridora** si p es continua, sobreyectiva y todo punto $b \in B$ está contenido en un abierto O_b regularmente recubierto.

Observación. Todo homeomorfismo es una aplicación recubridora[5].

Teorema 1.7. La aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{aligned}$$

es una aplicación recubridora

Demostración. Es claro que es sobreyectiva y continua por las propiedades del seno y el coseno en $\mathbb{R}$. Tendremos que ver que

$$O = \mathbb{S}^1 \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$$

[4]de hecho es un homeomorfismo que estudiamos en Topología I

[5]Podemos verlo fácilmente tomando $O_b = X$ el total.

está regularmente recubierto. Para ello consideramos

$$p^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(2\pi x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2\pi x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right)$$

Tomando $A_k = \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right)$ falta ver que cada abierto A_{k_0} cumple que $p : A_{k_0} \to O$ es un homeomorfismo.

Por las propiedades de $(\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ es claro que p es inyectiva y sobreyectiva en A_{k_0}. Para ello podemos considerar

$$p' : \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right] \to \overline{O}$$

que es continua y va desde un compacto en un conjunto T2, lo que nos dice que $p_{|_{\left[k-\frac{1}{4},k+\frac{1}{4}\right]}}$ es cerrada por lo que

$$p' : \left[k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right] \to \overline{O}$$

es un homeomorfismo y por tanto

$$p' : \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right) \to \overline{O}$$

también lo es y como por la definición de A_k tenemos lo que buscábamos.

Si repetimos este razonamiento de forma análoga para el conjunto $\mathbb{S}^1 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ tendremos la demostración completa. $\square$

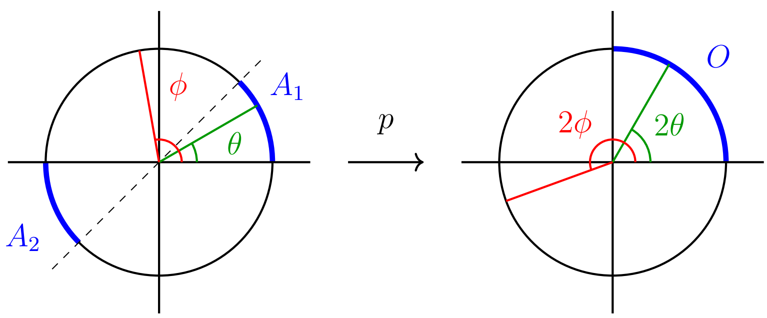
Ejemplo. La aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$

que podemos entender como la aplicación que lleva

$$\begin{aligned} (x + iy) &\mapsto (x + iy)^2 \\ (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) &\mapsto (\cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta) \end{aligned}$$

es recubridora. Intuitivamente la podemos ver como



Esta aplicación se podría generalizar como

$$\begin{aligned} p_n : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) &\mapsto (\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta) \\ (x+iy) &\mapsto (x+iy)^n \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Propiedades.

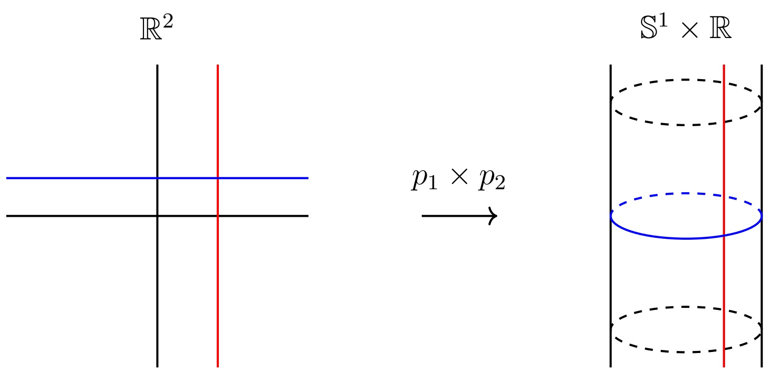
1. Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones tales que una de ellas es un homeomorfismo y la otra una aplicación recubridora. Entonces $g \circ f : X \to Z$ es una aplicación recubridora.

2. Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora y B_0 un subconjunto de B, entonces
$$p|_{p^{-1}(B_0)} : p^{-1}(B_0) \to B_0$$
es una aplicación recubridora.

3. Si $p_1 : R_1 \to B_1$ y $p_2 : R_2 \to B_2$ son dos aplicaciones recubridoras, entonces
$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 &\to B_1 \times B_2 \\ (x, y) &\mapsto (p_1(x), p_2(y)) \end{aligned}$$
es una aplicación recubridora cuando consideramos la topología producto en $R_1 \times R_2$ y $B_1 \times B_2$.

Ejemplo.

1. $\mathbb{R}^2$ es un recubridor del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Para ello podemos considerar la aplicación
$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{aligned}$$
y $p_2 = Id_{\mathbb{R}}$ y como p_1 es un recubrimiento y p_2 es un homeomorfismo tendremos que la aplicación
$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), y) \end{aligned}$$
es una aplicación recubridora. Intuitivamente podemos entenderlo de forma gráfica como



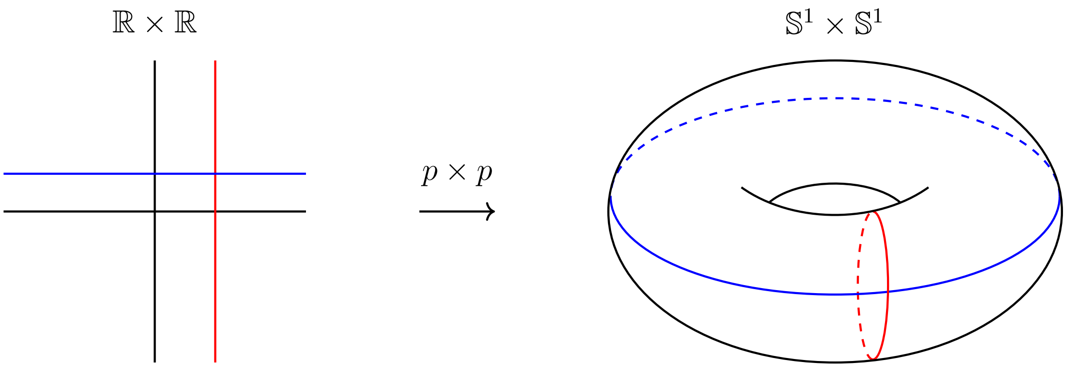
2. $\mathbb{R}^2$ es un recubridor del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^4$ (o el toro de rotación de $\mathbb{R}^3$ porque ambos toros son homeomorfos). Para ello consideramos

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{aligned}$$

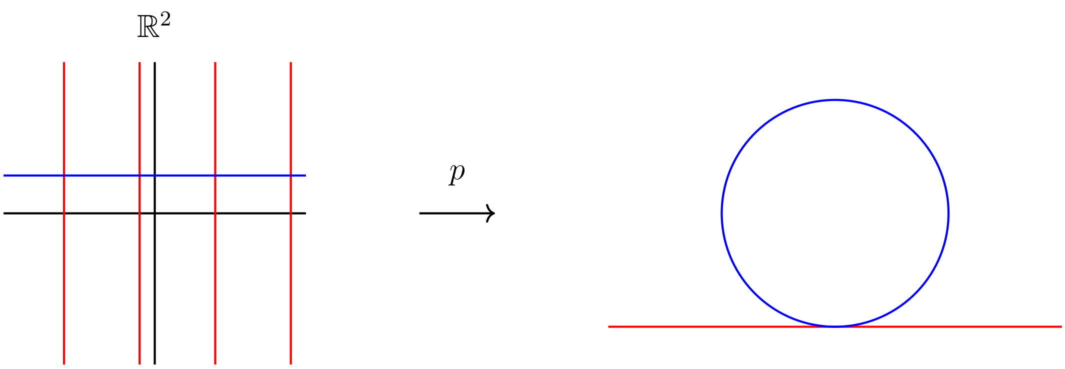
y su producto

$$\begin{aligned} p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), \cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{aligned}$$

que sería la aplicación recubridora. Intuitivamente podemos entenderlo de forma gráfica como

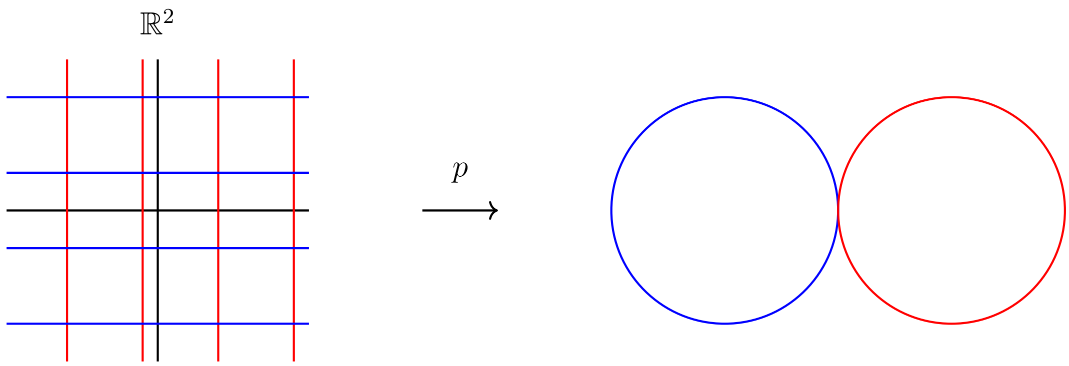


3. Intiutivamente podemos pensar en un recubrimiento de una circunferencia tangente a una recta como una colección de rectas paralelas y atravesadas por una común, como aparece en la figura. De esta forma (tal cual está en el dibujo) al "enrollar" el eje x de forma que hagamos coincidir todas las rectas rojas tendremos que la recta azul forma una circunferencia, que como originalmente solo tocaba en un punto a cada recta, resultará en la circunferencia tangente a la recta.



4. Por último podemos plantearnos cómo podría ser un recubrimiento de dos circunferencias tangentes. Para ello, tal como aparece en la figura podremos usar una **cuadrícula**. De forma análoga al ejemplo anterior podremos "enrollar" en

primer lugar el eje x y obtendremos una única recta roja tangente a infinitas circunferencias azules (como en el ejemplo anterior pero con las circunferencias azules periódicas). Ahora podremos "enrollar" la propia recta roja, haciendo coincidir todas las circunferencias azules de forma que obtendremos las dos circunferencias tangentes.



1.4. Levantamientos en espacios recubridores

Definición 1.9. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $f : X \to B$ una aplicación continua. Decimos que $\hat{f} : X \to R$ es un **levantamiento** de f si se cumple que $\hat{f}$ es continua y $p \circ \hat{f} = f$.

Ejemplo. Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \end{aligned}$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\to \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s)) \end{aligned}$$

Si elegimos

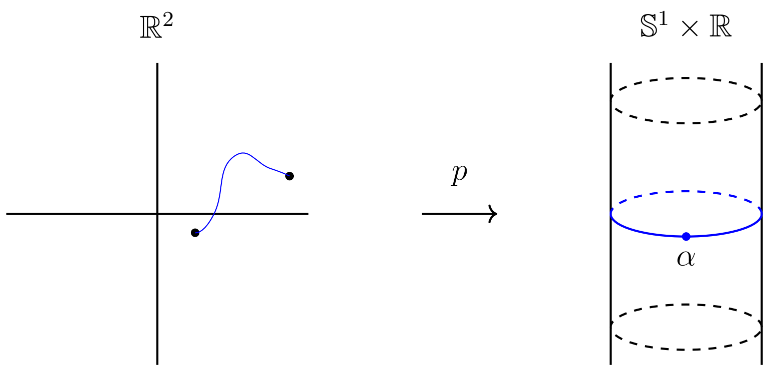
$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto s \end{aligned}$$

es claro que $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$. Otros posibles levantamientos de α son

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k : [0,1] &\to \mathbb{R} \qquad , k \in \mathbb{Z} \\ s &\mapsto k + s \end{aligned}$$

Nos planteamos ahora cuál sería un levantamiento de $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$. Podemos ver que $\hat{\tilde{\alpha}}_k(s) = k - s$ para $k \in \mathbb{Z}$ es en efecto un levantamiento de $\tilde{\alpha}(s)$.

[Terminar Gráfica]



Lema 1.8. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora, $r_0 \in R$ y $b_0 \in B$ tales que $p(r_0) = b_0$. Entonces dado un arco $\alpha : [0,1] \to B$ con $\alpha(0) = b_0$, exisste un único arco $\hat{\alpha}; [0,1] \to R$ tal que $\hat{\alpha}(0) = r_0$ y $\hat{\alpha}$ es un levantamiento de α.

Demostración. Como p es una aplicación recubridora, cada punto $b \in B$ tiene asociado un abierto O_b regularmente recubierto que contiene a b. Como $\alpha([0,1])$ es compacto tenemos que existe un recubrimiento finito, es decir,

$$\alpha([0,1]) \subseteq O_{b_1} \cup O_{b_2} \cup \cdots \cup O_{b_n}$$

Entonces $[0,1] \subseteq \alpha^{-1}(O_{b_1}) \cup \alpha^{-1}(O_{b_2}) \cup \cdots \cup \alpha^{-1}(O_{b_n})$ por lo que tendremos el intervalo $[0,1]$ recubierto por una familia finita de abiertos. Por el lema del número de Lebesgue[6] sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x \in [0,1]$ se tiene que $B(x,\delta) \cap [0,1]$ está contenido en algún $p^{-1}(O_{b_j})$ para cierto $j \in \{1,\dots,k\}$. Esto nos asegura que podemos hacer una subdivisión del intervalo $[0,1]$ tal que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r-1} < t_r = 1$$

tal que $\alpha([t_j, t_{j+1}])$ está contenido en algún O_{b_l} para $j \in \{0,\dots,r-1\}$, $l \in \{1,\dots,k\}$. Definimos $\hat{\alpha}$ de manera recursiva:

$\alpha([t_0,t_1])$ está contenido en algún O_{b_l}. Como O_{b_l} está regularmente recubierto

$$p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{unión disjunta de abiertos}$$
$$p_{|A_i} : A_i \to O_{b_l} \text{ es homeomorfismo}$$

Como $r_0 \in p^{-1}(b_0) = p^{-1}(\alpha(0)) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i\in I} A_i$ se tiene que $r_0 \in A_{i_0}$ para algún A_{i_0} con $i_0 \in I$. Como además $p_{|A_{i_0}} : A_{i_0} \to O_{b_l}$ es un homeomorfismo, podemos definir

$$\hat{\alpha}(t) = (p_{|A_{i_0}})^{-1}(\alpha(t)), \quad t \in [0 = t_0, t_1]$$

Es claro que $\hat{\alpha}$ en $[0,t_1]$ es continua y $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$.

[6] visto probablemente en alguna asignatura de Análisis.

Para definir $\hat{\alpha}$ en $[t_1, t_2]$ repetimos el mismo procedimiento. Sabemos que $\alpha([t_1, t_2])$ cae en un abierto O_{b_m} que está regularmente recubierto.

$$p^{-1}(O_{b_m}) = \bigcup_{i \in I'} A'_i \quad \text{con } A'_i \text{ abiertos disjuntos}$$
$$p_{|A'_i} : A'_i \to O_{b_m} \text{ homeomorfismo}$$

Además tenemos que $\alpha(t_1) \in O_{b_m}$. Como $p(\hat{\alpha}(t_1)) = \alpha(t_1) \in O_{b_m}$, entonces $\hat{\alpha}(t_1) \in p^{-1}(O_{b_m})$ y por tanto $\exists i'_0$ tal que $\hat{\alpha}(t_1) \in A'_{i'_0}$. Como $p_{|A'_{i'_0}} : A'_{i'_0} : O_{b_m}$ es un homeomorfismo, podemos definir $\hat{\alpha}$ en $[t_1, t_2]$ como

$$\hat{\alpha}(t) = (p_{|A'_{i'_0}})^{-1}(\alpha(t))$$

que es claramente contina y $(p \circ \hat{\alpha})(t) = \alpha(t)$ para $t \in [t_1, t_2]$. Por el lema de pegado tenemos que $\hat{\alpha}$ es continua en $[t_0, t_2]$. Siguiendo este procedimiento con cada t_i, $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ tendremos el resultado que buscábamos probar.

Veamos ahora por qué $\hat{\alpha}$ es única con $\hat{\alpha}(0) = r_0$. Si existiese otro arco $\alpha^* : [0,1] \to R$ tal que $p \circ \hat{\alpha} = p \circ \alpha^*$ con $\hat{\alpha}(0) = r_0 = \alpha^*(0)$, entonces

$$\alpha([0 = t_0, t_1]) \subset O_{b_l}$$

por lo que

$$\alpha^*([0, t_1]) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i$$
$$\hat{\alpha}([0, t_1]) \subseteq p^{-1}(O_{b_l}) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Por continuidad, $\alpha^*([0, t_1]) \subseteq A_{i_1}$ y $\hat{\alpha}([0, t_1]) \subseteq A_{i_0}$ pero $\alpha^*(0) = r_0 = \hat{\alpha}(0) \in A_{i_0}$ y como los A_i son disjuntos tenemos que $A_{i_1} = A_{i_0}$. Además, $p_{|A_{i_0}}$ es homeomorfismo de A_{i_0} en O_{b_l} por lo que

$$\alpha^*(t) = \hat{\alpha}(t), \quad t \in [0, 1]$$

De forma recursiva se verifica la unicidad en todos los intervalos $[t_j, t_{j+1}]$ con $j \in \{0, \ldots, r-1\}$. □

Observación. Es importante tener en cuenta que en general el levantamiento de un lazo no es un lazo, sino simplemente un arco.

Lema 1.9. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $H : [0,1] \times [0,1] \to B$ una aplicación continua. Dados $b_0 = H(0,0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$, entonces existe un único levantamiento $\hat{H} : [0,1] \times [0,1] \to R$ tal que $\hat{H}(0,0) = r_0$. Si además H es una homotopía por arcos, entonces $\hat{H}$ también lo será.

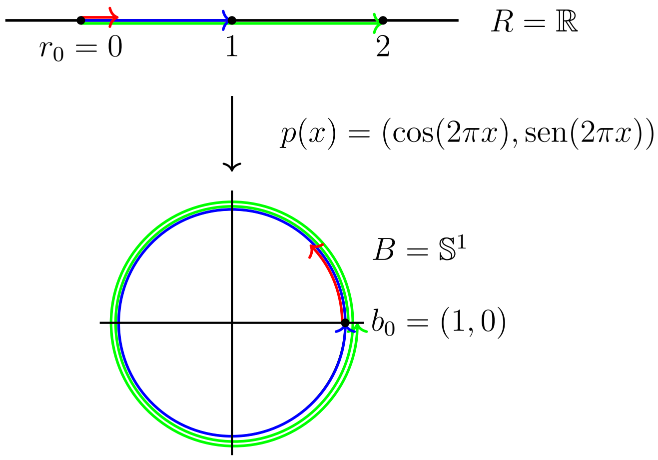
Corolario 1.9.1. Sea $p : R \to B$ una aplicación recubridora, α, $\beta : [0,1] \to B$ dos arcos con $[\alpha] = [\beta]$ y tomamos un $r_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$ $(\alpha(0) = \beta(0))$. Si elegimos $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : [0,1] \to R$ como los únicos arcos con $\hat{\alpha}(0) = r_0 = \hat{\beta}(0)$, entonces $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$.

Definición 1.10. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \to B$, un punto $b_0 \in B$ y otro $r_0 \in R$ tal que $p(r_0) = b_0$. Entonces podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(B, b_0) &\to p^{-1}(b_0) \\ [\alpha] &\mapsto \hat{\alpha}(1) \end{aligned}$$

donde $\hat{\alpha}$ es el único levantamiento de α con $\hat{\alpha}(0) = r_0$. A la aplicación ϕ la llamaremos **correspondencia del levantamiento**.

Ejemplo. Consideramos el caso de "enrollar" $\mathbb{R}$ sobre una circunferencia. La aplicación ϕ cuenta el número de vueltas que da cada arco, como se puede ver en el siguiente dibujo.



Teorema 1.10. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$, $r_0 \in R$ con $p(r_0) = b_0$. Si R es arcoconexo, entonces la correspondencia del levantamiento

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

es sobreyectiva. Además, si R es simplemente conexo, entonces ϕ es biyectiva.

Demostración. Si R es arcoconexo tenemos que probar que dado $r_1 \in p^{-1}(b_0) \subseteq R$ existe un lazo $\alpha : [0, 1] \to B$ de forma que $\phi([\alpha]) = r_1$, es decir, su único levantamiento $\hat{\alpha} : [0, 1] \to R$ cumple que $\hat{\alpha}(0) = r_0$ y $\hat{\alpha}(1) = r_1$.

Para ello tomo un arco cualquiera $\alpha^* : [0, 1] \to R$ tal que $\alpha^*(0) = r_0$ y $\alpha^*(1) = r_1$ que existe por ser R arcoconexo. Elijo ahora $\alpha = p \circ \alpha^*$ que es un arco en B tal que $\alpha(0) = p(\alpha^*(0)) = p(r_0) = b_0$ y $\alpha(1) = p(\alpha^*(1)) = p(r_1) = b_0$. Tenemos entonces que α es un lazo basado en b_0 y como $\alpha = p \circ \alpha^*$, entonces $\hat{\alpha} = \alpha^*$ es un levantamiento de α con $\hat{\alpha}(0) = \alpha^*(0) = r_0$ por lo que $\phi([\alpha]) = \hat{\alpha}(1) = \alpha^*(1) = r_1$.

Nos queda ver que si R es simplemente conexo, entonces ϕ es biyectiva. Como todo simplemente conexo es necesariamente arcoconexo sabemos de la primera parte del teorema que ϕ es sobreyectiva por lo que solo tenemos que probar la inyectividad. Eso es equivalente a considerar $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ y ver si se verifica la implicación

$$\phi([\alpha]) = \phi([\beta]) \overset{?}{\Rightarrow} [\alpha] = [\beta]$$

Sabiendo que $\hat{\alpha}(1) = \phi([\alpha])$ y $\hat{\beta}(1) = \phi([\beta])$. Como $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$ consideramos $\hat{\alpha} * \hat{\beta}$ que es un lazo basado en r_0. Como R es simplemente conexo tenemos que

$$[\hat{\alpha}] * [\hat{\beta}] = [\hat{\alpha} * \hat{\beta}] = [\varepsilon_{r_0}]$$

por lo que se tiene

$$[\hat{\alpha}] = [\varepsilon_{r_0}] * [\hat{\beta}] = [\hat{\beta}]$$

Usando p_* tenemos que

$$p_*([\hat{\alpha}]) = [p \circ \hat{\alpha}] = [\alpha]$$
$$p_*([\hat{\beta}]) = [p \circ \hat{\beta}] = [\beta]$$

y como $p_*([\hat{\alpha}]) = p_*([\hat{\beta}])$ llegamos a que $[\alpha] = [\beta]$ como queríamos demostrar. □

1.5. Grupo fundamental de la circuferencia

Definición 1.11. Dado un lazo $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ basado en $(1, 0)$, definimos el grado de α como el único número entero $\hat{\alpha}(1)$ dado por el levantamiento $\hat{\alpha}$ de α mediante la aplicación recubridora

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x)) \quad \text{, con } \hat{\alpha}(0) \neq 0$$

Notaremos al grado de α como $\deg(\alpha)$

Observación. Como el grado es simplemente la correspondencia del levantamiento para p y $r_0 = 0$, entonces si $[\alpha] = [\beta]$ se tiene que $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$, es decir el grado está bien definido para clases de equivalencia.

Teorema 1.11. El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ en el $(1, 0)$ es isomorfo al grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$. De hecho, la aplicación

$$\begin{aligned} \deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) &\to \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\mapsto \deg(\alpha) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, el teorema anterior nos dice que la aplicación deg es biyectiva. Tendremos que probar que deg es un homomorfismo, es decir que se verifica

$$\deg([\alpha] * [\beta]) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$$

Para verlo tomamos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ levantamientos de α y β respectivamente con

$$\hat{\alpha}(0) = 0 = \hat{\beta}(0)$$

Recordemos que $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$. Vamos a considerar

$$\widehat{\alpha * \beta}(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(2s) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s - 1) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

y es claro que $\widehat{\alpha * \beta}$ es continua. Queremos ver que $p(\widehat{\alpha * \beta}) = \alpha * \beta$. Desarrollando tenemos

$$p(\widehat{\alpha * \beta})(s) = \begin{cases} p(\hat{\alpha}(2s)) & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ p(\hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(2s-1)) & \text{si} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} \alpha(2s) & \text{si} & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ p(\hat{\beta}(2s-1)) & \text{si} & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{array} \right\} = (\alpha * \beta)$$

por lo que $\alpha \hat{*} \beta$ es un levantamiento de $\alpha * \beta$ con $\alpha \hat{*} \beta(0) = \hat{\alpha}(0)$ por lo que por definición tenemos que

$$\deg(\alpha * \beta) = \widehat{\alpha * \beta}(1) = \hat{\alpha}(1) + \hat{\beta}(1) = \deg(\alpha) + \deg(\beta)$$

□

Observación. Algunas consecuencias elementales son las siguientes

- •) El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es $\mathbb{Z}$. De aquí se deduce que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ ya que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que tiene por grupo fundamental $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}^2$ tiene por grupo elemental el trivial.
- •) $\mathbb{R}^3 \setminus R$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$ donde R es una recta en $\mathbb{R}^3$.
- •) El grupo fundamental del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ o el toro de rotación de $\mathbb{R}^3$ es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Proposición 1.12. No existe ninguna aplicación continua[7] $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$

Demostración. Tomamos $\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$, lazo basado en $(1,0)$. Su clase de equivalencia en el disco sería

$$[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} = [\varepsilon_{(1,0)}]$$

ya que $\overline{\mathbb{D}}$ es simplemente conexo. Si exisitiese una f continua, entonces tendríamos que

$$f_* : \pi_1(\overline{\mathbb{D}}(1,0)) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \text{ es homeomorfismo}$$
$$[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} \mapsto f_*([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) \overset{def}{=} [f \circ \alpha]_{\mathbb{S}^1} = [\alpha]_{\mathbb{S}^1}$$

Pero $[\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}} = [\varepsilon_{(1,0)}]$ por lo que

$$f_x([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) = f_*([\varepsilon_{(1,0)}]_{\overline{\mathbb{D}}}) = [\varepsilon_(1,0)]_{\mathbb{S}^1}$$

pero como $f_x([\alpha]_{\overline{\mathbb{D}}}) = [\alpha]_{\mathbb{S}^1}$ llegamos a contradicción ya que $\deg(\alpha) = 1$ y $\deg(\varepsilon_{(1,0)}) = 0$ □

Teorema 1.13 (punto fijo de Brouwer)**.** Si $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ es continua, entonces existe $x_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $f(x_0) = x_0$.

[7] $\overline{\mathbb{D}}$ denota el disco cerrado de $\mathbb{R}^2$ centrado en el $(0,0)$ y con radio 1

Demostración. Supongamos que f no tiene ningún punto fijo, es decir, $f(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{\mathbb{D}}$. Buscaremos ahora construir una aplicación a partir de esta hipótesis que deje a los puntos de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ fijos para poder aplicar la proposición anterior.

Para cada x consideramos la semirrecta abierta

$$f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \quad \forall \lambda_x > 0$$

y la intersección de dicha semirrecta con la circunferencia unidad. Como $f(x), x \in \overline{\mathbb{D}}$ y $f(x) \neq x$, lo recién definido es efectivamente una semirrecta y ha de cortar exactamente en un único punto a $\mathbb{S}^1$.

$$1 = \langle f(x) + \lambda_x(x - f(x)), f(x) + \lambda_x(x - f(x))\rangle =$$
$$\langle f(x)\rangle + 2\lambda_x\langle f(x), x - f(x)\rangle + \lambda_x^2\langle x - f(x), x - f(x)\rangle$$

Por lo que podemos despejar λ_x y nos queda

$$\lambda_x = \frac{-2\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{4\langle f(x), x - f(x)\rangle^2 - 4(\langle f(x), f(x) - 1\rangle)\langle x - f(x), x - f(x)\rangle}}{2\langle x - f(x), x - f(x)\rangle}$$

Por lo que $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$ es continua y $|g(x)| = 1$. Por tanto tenemos que si $x \in \mathbb{S}^1$, entonces $g(x) = x$ lo que contradice la proposición anterior. $\square$

Observación. El teorema del punto fijo de Brouwer no solo es cierto para $\overline{\mathbb{D}}$ sino para cualquier espacio topológico X homeomorfo a $\overline{\mathbb{D}}$. Es decir, si $f : X \to X$ es continua con X homeomorfo a $\overline{\mathbb{D}}$, entonces existe al menos un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demostración. Notemos por $h : \overline{\mathbb{D}} \to X$ al homeomorfismo y estaremos en la siguiente situación

$$\overline{\mathbb{D}} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{h^{-1}} \overline{\mathbb{D}}$$

Entonces tendríamos $h^{-1} \circ f \circ h : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ continua y por el teorema de Brower existe $y_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $(h^{-1} \circ f \circ h)(y_0) = y_0$. $\square$

Corolario 1.13.1. Sea $V : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ una aplicación continua. Entonces existen puntos $x, y \in \mathbb{S}^1$ de forma que $V(x) = \lambda x$, $V(y) = -\mu y$ con $\lambda, \mu > 0$.

Demostración. Consideramos la aplicación $f(x) = \frac{V(x)}{|V(x)|}$ que es continua (ya que $V(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{\mathbb{D}}$). Por el teorema de Brouwer tenemos que $\exists x_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $f(x_0) = x_0$ por lo que $x_0 = \frac{V(x_0)}{|V(x_0)|}$ y entonces $V(x_0) = |V(x_0)|x_0 = \lambda x_0$ (tomando $\lambda = |V(x_0|)$. Si tomamos $g(x) = -\frac{V(x_0)}{|V(x_0)|}$ tendríamos análogamente que existe un y_0 tal que $y_0 = g(y_0) = \frac{V(y_0)}{|V(y_0)|} \in \mathbb{S}^1$ y $V(y_0) = -|V(y_0)|y_0 = -\mu y_0$ (tomando $\mu = |V(y_0)|$). En general, para poder considerar cualquier ángulo θ tendremos que considerar

$$h(x) = \frac{V(x)}{e^{i\theta}|V(x)|}$$

$\square$

Teorema 1.14 (Teorema fundamental del álgebra)**.** Todo polinomio complejo de grado $n \geqslant 1$ tiene al menos una raíz compleja

Demostración. Vamos a considerar $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ con $n \geqslant 1$ y supongamos que $p(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$, es decir, que no tiene raíces en $\mathbb{C}$. Consideramos la siguiente aplicación

$$H(s,t) = \begin{cases} \dfrac{p\left(\dfrac{t}{1-t} e^{2\pi i s}\right) \cdot \left| p\left(\dfrac{t}{1-t}\right)\right|}{\left| p\left(\dfrac{t}{1-t} e^{2\pi i s}\right)\right| \cdot p\left(\dfrac{t}{1-t}\right)} & \text{si} \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1[\\ \\ e^{2\pi i n s} & \text{si} \quad (s,t) \in [0,1] \times \{1\} \end{cases}$$

Esta aplicación lo que hace es considerar el plano complejo y su imagen mediante p. La aplicación p no pasa por el origen porque así lo hemos supuesto. Para $t = 0$ (tiempo inicial) tenemos que $H(s,0) = (1,0)_{\mathbb{R}^2} \equiv 1_{\mathbb{C}}$. Además para $s = 0$ tenemos $H(0,t) = (1,0)_{\mathbb{R}^2} \equiv 1_{\mathbb{C}}$. Si la aplicación H fuera una homotopía, al principio (cuando t es bajo) no daría ninguna vuelta (en la imagen) y al final (cuando domina z^n) daría n vueltas por lo que no puede ser.

Comprobemos que H es continua. Para esto simplemente veamos que

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right) \cdot \left| p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left| p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} = e^{2\pi i n s_0}$$

$$\lim_{t \to 1^-} \frac{p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right) \cdot \left| p\left(\frac{t}{1-t}\right)\right|}{\left| p\left(\frac{t}{1-t} e^{2\pi i s_0}\right)\right| \cdot p\left(\frac{t}{1-t}\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \frac{\left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i n s_0} + a_{n-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} e^{2\pi i (n-1) s_0} + \ldots\right) \cdot \left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} + \ldots\right|}{\left|\left(\frac{t}{1-t}\right)^n e^{2\pi i n s_0} + a_{n-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n} e^{2\pi i (n-1) s_0} + \ldots\right| \cdot \left(\left(\frac{t}{1-t}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-1} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{e^{2\pi i n s_0}}{|e^{2\pi i n s_0|}} \cdot \frac{|1|}{1} = e^{2\pi i n s_0}$$

y tenemos claramente que $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ es continua. Además se tiene

$$\begin{aligned} H(0,t) &= 1 & t \in [0,1] \\ H(1,t) &= 1 & t \in [0,1] \\ H(s,0) &= 1 & s \in [0,1] \\ H(s,1) &= e^{2\pi i n s} & s \in [0,1] \end{aligned}$$

por lo que H es una homotopía por arcos entre los lazos $\alpha_1(s) = 1$ y $\alpha_2(s) = e^{2\pi i n s}$. Entonces tendremos que

$$[\alpha_1] = [\alpha_2] \quad \text{y} \quad 0 = \deg(\alpha_1) = \deg(\alpha_2) = n$$

y llegamos a contradicción ya que $n \geqslant 1$. Por tanto $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 0$. $\square$

1.6. Retracciones, tipos de homotopía y retractos de deformación

Definición 1.12. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que una aplicación continua $r : X \to A$ es una **retracción** si se cumple que $r(a) = a \ \ \forall a \in A$.

Se dice que A es un **retracto** de X si existe una retracción $r : X \to A$.

Ejemplo.

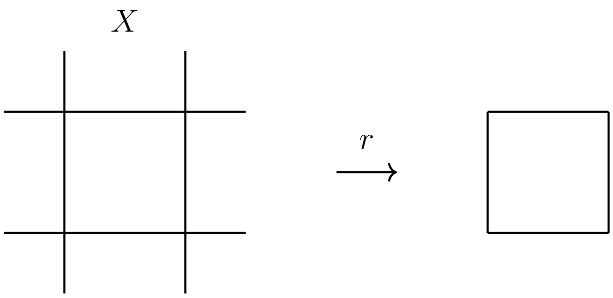
1. $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Podemos considerar

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

   que es claramente continua y $r(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

2. $\mathbb{S}$ no es un retracto de $\overline{\mathbb{D}}$ por lo visto en la proposición **??**.

3. La compresión de un cuadrado también es un retracto.



Lema 1.15. Sean X un e.t. y $A \subseteq X$ tal que A es un retracto de X. Entonces la aplicación inclusión $i : A \to X$ induce un homomorfismo inyectivo

$$i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$$

Demostración. Si A es retracto de X, entonces por definición tenemos que $\exists r : X \to A$ continua tal que $r(a) = a$ para cualquier $a \in A$.

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A \quad , r \circ i = Id_A \\ a \longmapsto a \longmapsto a \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A, a_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "r_* \circ i_*"'] & \pi_1(X, a_0) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(A, a_0) \end{tikzcd}$$

$$r_* \circ i_* = (Id_a)_* = Id_{\pi_1(A,a_0)}$$

Como $Id_{\pi_1(A,a_0)}$ es inyectiva, entonces se tiene que i_* es inyectiva. $\square$

Definición 1.13. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre dos espacios topológicos. Decimos que f es una **equivalencia homotópica** si existe $g : Y \to X$ continua tal que $g \circ f$ es homotópica a Id_X y $f \circ g$ es homotópica a Id_Y.

Decimos que X e Y son **homotópicamente equivalentes** si existe una equivalencia homotópica entre ambos.

A la aplicación g se le llama una **inversa homotópica** de f.

Observación.

(i) La inversa homotópica no tiene por qué ser única

(ii) La composición de equivalencias homotópicas sigue siendo una equivalencia homotópica, de lo que se deduce que ser homotópicamente equivalente es una relación de equivalencia.

(iii) Una equivalencia homotópica no tiene por qué ser ni inyectiva ni sobreyectiva.

(iv) Todo heomorfismo es una equivalencia homotópica.

Lema 1.16. Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas, $x_0 \in X$. Si H es una homotopía entre f y g y consideramos el arco $\alpha(t) = H(x_0, t)$. Entonces se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[dd, "\varphi \equiv \text{isomorfismo}"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"] & \\
 & \pi_1(Y, g(x_0))
\end{tikzcd}$$

donde $\phi([\gamma]) = [\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$. En particular, f_* es inyectiva (respectivamente sobreyectiva) si y solo si g_* lo es.

Demostración. Tenemos que demostrar que si β es un lazo en X basado en x_0, entonces:

$$(\varphi \circ f_*)([\beta]) = g_*([\beta]) = [g \circ \beta]$$

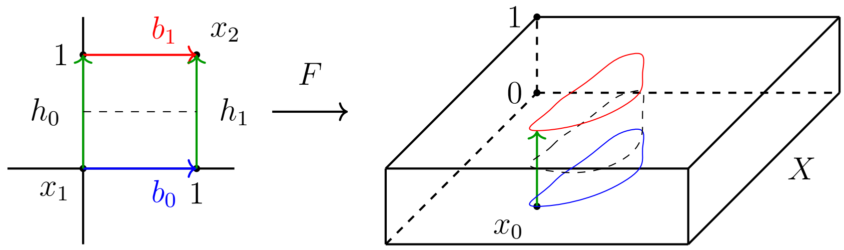
Pero tenemos además

$$(\varphi \circ f_*)([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [f \circ \beta] * [\alpha]$$

por lo que será equivalente a probar que

$$[\alpha] * [g \circ \beta] = [f \circ \beta] * [\alpha]$$

es decir, que existe una homotopía por arcos que lleva $\alpha * (g \circ \beta)$ en $(f \circ \beta) * \alpha$.



Por hipótesis tenemos $H : X \times [0,1] \to Y$ continua tal que

$$\begin{aligned} &(x,0) \mapsto f(x) \\ &(x,1) \mapsto g(x) \\ &\alpha(t) = H(x_0,t) \end{aligned}$$

Definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} F : [0,1] \times [0,1] &\to X \times [0,1] \qquad \text{continua} \\ (s,t) &\mapsto (\beta(s),t) \end{aligned}$$

que verifica

$$\begin{aligned} b_0(s) &= (s,0) \qquad , s \in [0,1] \\ b_1(s) &= (s,1) \qquad , s \in [0,1] \\ h_0(s) &= (0,s) \qquad , s \in [0,1] \\ h_1(s) &= (1,s) \qquad , s \in [0,1] \end{aligned}$$

Como $[0,1] \times [0,1]$ es simplemente conexo y $b_0 * h_1 * \tilde{b_1} * \tilde{h_0}$ es un lazo en el $(0,0)$, entonces se tiene que

$$[b_0 * h_1 * \tilde{b_1} * \tilde{h_0}] = [\varepsilon_{(0,0)}] \Rightarrow [b_0 * h_1] = [h_0 * b_1]$$

Por tanto tenemos que $\exists G : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ homotopía por arcos tal que $G(s,0) = (b_0 * h_1)(s)$ y $G(s,1) = (h_0 * b_1)(s)$ por lo que quedan los extremos fijos, es decir, $G(0,t) = (0,0)$ y $G(1,t) = (1,1)$. Consideramos entonces

$$H \circ F \circ G : [0,1] \times [0,1] \to Y \qquad \text{continua}$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} (H \circ F \circ G)(0,t) &= H(F(0,0)) = H(x_0,0) = f(x_0) \\ (H \circ F \circ G)(1,t) &= H(F(1,1)) = H(x_0,1) = g(x_0) \end{aligned}$$

$$(H \circ F \circ G)(s,0) = H(F((b_0 * h_1)(s))) = (H \circ F)\left(\left\{ \begin{array}{lll} b_0(2s) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ h_1(2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right\}\right) =$$

$$= (H \circ F)\left(\left\{ \begin{array}{lll} (2s,0) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ (1, 2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right\}\right) = H\left(\left\{ \begin{array}{lll} (\beta(2s),0) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ (x_0, 2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right\}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} f(\beta(2s)) & \text{si} & s \in [0, 1/2] \\ \alpha(2s-1) & \text{si} & s \in [1/2, 1] \end{array} \right\} = ((f \circ \beta) \circ \alpha)(s)$$

Análogamente se tiene que

$$(H \circ F \circ G)(s,1) = (\alpha * (g \circ \beta))(s)$$

Por lo que llegamos a que

$$[\alpha] * [g \circ \beta] = [f \circ \beta] * [\alpha]$$

como queríamos probar. □

Teorema 1.17. Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica, entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo.

Demostración. Como f es una equivalencia homotópica, existe $g : Y \to X$ que es una inversa homotópica suya. Sabemos que $g \circ f$ es homotópica a Id_X entonces:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "(f_0)_*"] \arrow[drr, "\substack{(Id_X)_* \\ \text{isom.}}"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[r, "g_*"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \pi_1(X,g(f(x_0))) \arrow[d, "\varphi \equiv \text{isomorfismo}"] \\
 & & \pi_1(X,x_0)
\end{tikzcd}$$

De aquí se deduce que $(f_{x_0})_*$ es inyectiva y que g_* es sobreyectiva

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[r, "g_*"] \arrow[drr, "\substack{(Id_Y)_* \\ \text{isom.}}"'] & \pi_1(X,g(f(x_0))) \arrow[r, "(f \circ g \circ f(x_0))_*"] \arrow[dr, phantom, "//"] & \pi_1(Y,f(g(f(x_0)))) \arrow[d, "\tilde{\varphi} \equiv \text{isomorfismo}"] \\
 & & \pi_1(X,x_0)
\end{tikzcd}$$

□

Definición 1.14. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un **retracto de deformación** de X si existe una retracción $r : X \to A$ que es homotópica a la identidad en X.

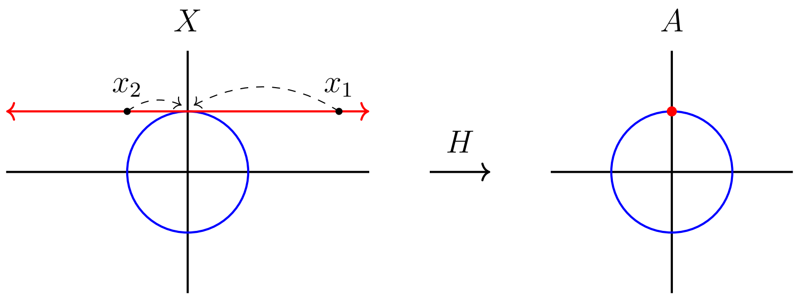
Esta definición se escribe simplemente como que existe $H : X \times [0,1] \to X$ homotopía tal que

$$\begin{aligned}
H(x,0) &= x \quad \forall x \in X \\
H(x,1) &\in A \quad \forall x \in X \\
H(a,1) &= a \quad \forall a \in A
\end{aligned}$$

Aquí la retracción es simplemente $r(x) = H(x,1)$.

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$.



Veamos que $\mathbb{S}^1$ es retracto de deformación de X. Para ello buscamos $H : X \times [0,1] \to X$ y la definimos de la siguiente forma:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{S}^1,\ t \in [0,1] \\ (1-t)x + t(0,1) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \times \{1\},\ t \in [0,1] \end{cases}$$

Con esta definición tenemos

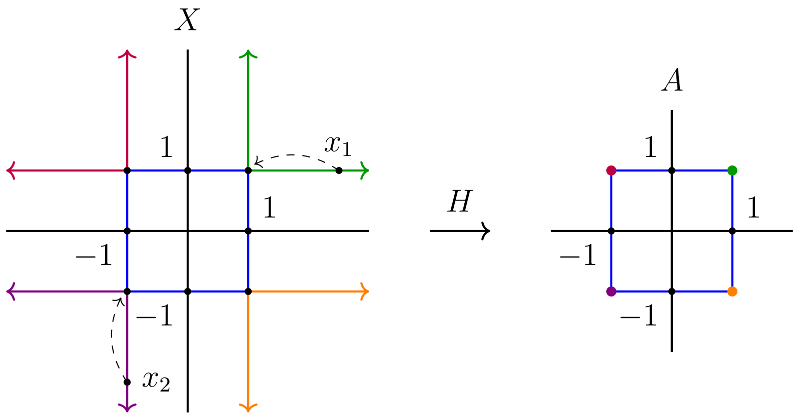
$$H(x,0) = x \quad \forall x \in X$$

$$H(x,1) = \left.\begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{S}^1 \\ (0,1) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \times \{1\} \end{cases}\right\} \Rightarrow H(x,1) \in \mathbb{S}^1 \quad \forall x \in X$$

$$H(a,0) = a \quad \forall a \in \mathbb{S}^1$$

y tenemos la retracción definida como se ha hecho en la definición.

2. $X = (\mathbb{R} \times \{-1,1\}) \cup (\{-1,1\} \times \mathbb{R})$.



Veamos que $A = ([-1,1] \times \{-1,1\}) \cup (\{-1,1\} \times [-1,1])$ es un retracto de deformación de X. Para ello definimos la homotopía como

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in A \\ (1-t)x + t(1,1) & \text{si} \quad x = (x_1,x_2) \text{ con } \quad x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \geqslant 1 \\ (1-t)x + t(-1,1) & \text{si} \quad x = (x_1,x_2) \text{ con } \quad x_1 \leqslant -1, \quad x_2 \geqslant 1 \\ (1-t)x + t(-1,-1) & \text{si} \quad x = (x_1,x_2) \text{ con } \quad x_1 \leqslant -1, \quad x_2 \leqslant -1 \\ (1-t)x + t(1,-1) & \text{si} \quad x = (x_1,x_2) \text{ con } \quad x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \leqslant -1 \end{cases}$$

Corolario 1.17.1. Sea A un retracto de deformación de X, entonces A y X son del mismo tipo de homotopía. En particular la aplicación inclusión $i : A \to X$ induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales.

$$i_* : \pi_1(A, a_0) \overset{\text{isomorf.}}{\longrightarrow} \pi_1(X, a_0) \quad a_0 \in A$$

Demostración. Si A es un retracto de deformación de X, entonces $\exists H$ homotopía cumpliendo

$$\begin{aligned} H(x,0) &= x \quad \forall x \in X \\ H(x,1) &\in A \quad \forall x \in X \\ H(a,1) &= a \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

Si $r(x) = H(x,1)$ se tiene que H es una homotopía entre Id_X y $i \circ r$ y por otro lado

$$\begin{gathered} A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A \\ a \mapsto a \mapsto a \end{gathered}$$

con $r \circ i = Id_A$ por lo que $r \circ i$ es homotópica a Id_A. Por el teorema anterior tenemos que A y X son del mismo tipo de homotopía y que i_* es isomorfismo. $\square$

Ejemplo. Sabemos de ejemplos anteriores que $A = \mathbb{S}^1$ es retracto de deformación de $X = \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$. Por el corolario recién estudiado tenemos que son del mismo tipo de homotopía y por tanto la inclusión induce un isomorfismo. Además el isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ ya se estudió previamente (con la aplicación que "cuenta vueltas"). Es decir, se tiene

$$\begin{gathered} \pi_1(X, x_0) \underset{\text{isom.}}{\cong} \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \underset{\text{isom.}}{\cong} (\mathbb{Z}, +) \\ [\alpha]_X \leftarrow\!\shortmid [\alpha]_{\mathbb{S}^1} \end{gathered}$$

Observación. Si A es retracto de X, entonces $i_* : \pi(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es inyectiva. Si A es retracto de deformación de X, entonces se tiene que $i_* : \pi(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es biyectiva.

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $x_0 \in X$. Sabemos que x_0 es retracto de X, ya que

$$\begin{gathered} r : X \to \{x_0\} \\ x \mapsto x_0 \end{gathered}$$

es continua pero x_0 no es retracto de deformación de x ya que si lo fuese, entonces

$$i_* : \{0\} \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

sería biyectiva

2. $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es un retracto de deformación de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Si consideramos la aplicación
$$H : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$$
$$((x_1, x_2, x_3), t) \mapsto (x_1, x_2, (1-t)x_3) = (1-t)(x_1, x_2, x_3) + t(x_1, x_2, 0)$$
Tenemos que verifica
$$H((x_1, x_2, x_3), 0) = (x_1, x_2, x_3)$$
$$H((x_1, x_2, x_3), 1) = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$$
$$H((x_1, x_2, 0), 1) = a$$

3. Consideramos la cinta de Möbius X dada por $Y = [0,1] \times [0,1]$ bajo la relación de equivalencia
$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \wedge y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$
Definimos la "circunferencia"
$$A = [0,1] \times \left\{\frac{1}{2}\right\} \text{ bajo la relación de equivalencia de } R$$
Consideramos la homotopía:
$$H : Y \times [0,1] \to Y$$
$$((x,t),t) \mapsto (1-t)(x,y) + y\left(x, \frac{1}{2}\right)$$
que es continua. Se deja como ejercicio ver que H está bien definida, es decir, que para cualesquiera 2 elementos relacionados tienen la misma imagen (bajo R). De esta forma se tiene
$$\pi_1(X) \underset{\text{isom.}}{\cong} \pi_1(A) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

4. Consideramos $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$ [Terminar]

Definición 1.15. Se dice que un espacio topológico X es **contráctil** si existe un punto $x_0 \in X$ tal que x_0 sea retracto de deformación de X.

Corolario 1.17.2. Todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.

Demostración. Sea X el e.t y x_0 el punto de X para el cual existe $H : X \times [0,1] \to X$ homotopía que verifica $\forall x \in X$
$$H(x, 0) = x$$
$$H(x, 1) = x_0$$
En este caso tenemos que $\alpha_*(t) = H(x,t)$ es un arco que une x con x_0 por lo que X es arcoconexo.

Como $\{x_0\}$ es retracto de deformación de X se tiene que
$$i_* : \pi_1(\{x_0\}, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
es isomorfismo por lo que $\pi_1(X, x_0)$ es trivial. □

1.7. El grupo fundamental de las esferas. Aplicaciones.

Parece intuitivo que el grupo fundamental de una circunferencia es el trivial ya que podríamos llevar cualquier lazo al trivial. Efectivamente la intuición no nos engaña pero tendremos que verlo de una forma más rigurosa para concluir la veracidad de esta afirmación.

Lema 1.18. Sean X un e.t. y U, V dos abiertos suyos tales que $X = U \cup V$. Si $U \cap V$ es arcoconexo, entonces dado un punto $x_0 \in U \cap V$ y α un lazo basado en x_0, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ una cantidad finita de lazos basados en x_0 tales que

$$[\alpha] = [\alpha_1] * \cdots * [\alpha_k]$$

donde la imagen de cada α_i cae completamente en U o bien en V.

Demostración. Comenzamos con el lazo $\alpha : [0,1] \to X$. Consideramos $\alpha^{-1}(U)$ y $\alpha^{-1}(V)$ que son abiertos en $[0,1]$. Por el lema del número de Lebesgue tenemos que existen

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1 \text{ partición del } [0,1]$$

tal que $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ contenido en U o bien en V para $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Si $\alpha(t_i) \notin U \cap V$ podemos quitar al t_i de la partición ya que $\alpha([t_{i-1}, t_i] \cup [t_i, t_{i+1}])$ estaría contenido en U o bien todo en V. Así suponemos todos los $\alpha(t_i) \in U \cap V$. Como $U \cap V$ es arcoconexo existe un arco β_i uniendo x_0 con $\alpha(t_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Tenemos por tanto

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_m]$$

donde α_i es una parametrización en $[0,1]$ de $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}[\alpha] &= [\alpha_1] * [\tilde{\beta_1}] * [\beta_1] * [\alpha_2] * [\tilde{\beta_2}] * \cdots * [\beta_{m-1}] * [\alpha_m] = \\ &= [\alpha_1 * \beta_1] * [\beta_1 * \alpha_2 * \tilde{\beta_2}] * \cdots * [\beta_{m-1} * \alpha_m]\end{aligned}$$

Donde $[\alpha_1 * \tilde{\beta_1}]$, cada $[\beta_i * \alpha_{i+1} * \tilde{\beta}_{i+1}]$ y $[\beta_{m-1} * \alpha_m]$ son lazos basados en x_0 completamente contenidos en U o bien en V. □

Teorema 1.19. Sean X un e.t y U, V abiertos de X. Supongamos que

1. $X = U \cup V$

2. $U \cap V$ es arcoconexo (no vacío)

3. U y V son simplemente conexos

Entonces X es simplemente conexo.

Demostración. Dado α lazo basado en $x_0 \in U \cup V$ se tiene por el lema anterior que

$$[\alpha] = [\alpha_1] * [\alpha_2] * \cdots * [\alpha_k]$$

donde cada α_i es un lazo completamente contenido en U o bien en V. Como U, V son simplemente conexos tenemos

$$[\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\varepsilon_{x_0}] * \cdots * [\varepsilon_{x_0}] = [\varepsilon_{x_0}]$$

□

Corolario 1.19.1. Las esferas $\mathbb{S}^n$ para $n \geqslant 2$ con simplemente conexas.En particular su grupo fundamental es el trivial.

Demostración. Definimos los siguientes conjuntos

$$U = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 1)\} \qquad\qquad V = \mathbb{S}^n \setminus \{(1, \ldots, 0)\}$$

U y V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ por lo que son simplemente conexos, $\mathbb{S}^n = U \cup V$ y además, como $U \cap V$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ que es arcoconexo (ya que $n \geqslant 2$), tenemos que $U \cap V$ es arcoconexo. □

Corolario 1.19.2. El grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ $\mathbb{R}\mathcal{P}^n$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ para $n \geqslant 2$.

Demostración. Veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{R}P^n \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

es recubridora. Es claro que p es continua y sobreyectiva. Por otro lado, dado cualquier punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tenemos que el abierto

$$U_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle \neq 0\}$$

es saturado, es decir, que $p^{-1}(p(U_{x_0})) = U_{x_0}$) y además podemos escribir

$$U_{x_0} = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbb{S}^n : \langle x, x_0 \rangle < 0\} = U_{x_0}^+ \cup U_{x_0}^-$$

Es fácil probar que $p|_{U_{x_0}^+}$ y $p|_{U_{x_0}^-}$ son homeomorfismos. Entonces la correspondencia del levantamiento

$$\varphi : \pi_1(\mathbb{R}P^n, [a_0]) \to p^{-1}([a_0]) = \{a_0, -a_0\}$$

es biyectiva (ya que $\mathbb{S}^1$ es simplemente conexo). Entonces $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [a_0])$ solo tiene dos elementos, luego $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [a_0]) \cong \mathbb{Z}^2$. □