Álgebra I. Doble grado Infromática-Matemáticas. Cuestiones-II

1. Sean X e Y dos conjuntos finitos con $|X| = |Y|$ y $f : X \to Y$ una aplicación. La afirmación *"Si f es inyectiva o sobreyectiva, entonces f es biyectiva"* es

   □ verdad o falsa, depende de f.

   ■ siempre verdad.

   □ siempre falsa.

   Justifica brevemente la respuesta: *Si es inyectiva, entonces $|X| = |Img(f)|$, luego $|Img(f)| = |Y|$ y por tanto $Img(f) = Y$ y f es sobreyectiva. Si es sobreyectiva, entonces $|Y| = |Img(f)|$, luego $|Img(f)| = |X|$ y por tanto f es necesariamente inyectiva.*

2. Sea $f : X \to Y$ una aplicación inyectiva y sean A, B, subconjuntos de X. Selecciona la afirmación verdadera:

   □ $f_*(A) - f_*(B)$ es un subconjunto propio de $f_*(A - B)$.

   □ $f_*(A - B)$ es un subconjunto propio de $f_*(A) - f_*(B)$-

   ■ $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$.

   Justifica brevemente la respuesta: *En efecto, sea $y \in f_*(A - B) \Rightarrow \exists x \in A - B \mid y = f(x)$, esto es, $\exists x \in A \wedge x \notin B \mid y = f(x)$. Como $x \in A \Rightarrow y = f(x) \in f_*(A)$, además, por ser f inyectiva $y \notin f_*(B)$ (pues si $y \in f_*(B) \Rightarrow \exists b \in B \mid y = f(b)$ y entonces $f(x) = f(b)$ con lo que $x = b \in B$ en contradicción con que $x \notin B$). Así $y \in f_*(A) - f_*(B)$ y $f_*(A - B) \subseteq f_*(A) - f_*(B)$.*

   Recíprocamente, sea $y \in f_*(A) - f_*(B) \Rightarrow y \in f_*(A) \wedge y \notin f_*(B)$. Como $y \in f_*(A)$ entonces $\exists x \in A \mid y = f(x)$ y como $y \notin f_*(B)$ entonces $x \notin B$. Así $x \in A - B$ e $y = f(x) \in f_*(A - B)$. Consecuentemente $f_*(A) - f_*(B) \subseteq f_*(A - B)$.

   De ambas inclusiones obtenemos la igualdad indicada.

3. Sea $f : X \to X$ una aplicación tal que $f_*(c(A)) = c(f_*(A))$, para todo $A \in P(X)$. Entonces,

   □ f es inyectiva, pero no necesariamente sobreyectiva.

   □ f es sobreyectiva, pero no necesariamente inyectiva.

   ■ f es biyectiva.

   Justifica brevemente la respuesta: $f_*(c(\emptyset)) = f_*(X) = Img(f) = c(f_*(\emptyset)) = c(\emptyset) = X$, *luego f es sobreyectiva. Para la inyectividad, supongamos que $x \neq x'$. Entonces $x' \in c(\{x\})$ y $f(x') \in f_*(c(\{x\}) = cf_*(\{x\}) = c\{f(x)\}$, luego $f(x') \neq f(x)$.*

4. Sea X un conjunto con $|X| \geq 2$. La afirmación *"Todo subconjunto de $X \times X$ es de la forma $A \times B$, para ciertos subconjuntos $A, B \subseteq X$"* es

   □ verdad o falsa, depende de X.

   □ siempre verdad.

   ■ siempre falsa.

   Justifica brevemente la respuesta: *Sea $D = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Si $D = A \times B$ para ciertos $A, B \subseteq X$, entonces, para todo $x \in X$, $(x, x) \in A \times B$ y, por tanto, $x \in A$ y $x \in B$. Así que $A = X = B$ y, necesariamente $D = X \times X$. Pero $|X| \geq 2$, luego existen $a, b \in X$ con $a \neq b$; esto es, $(a, b) \notin D$, y $D \neq X \times X$.*

5. Sea R una relación simétrica y transitiva en un conjunto $X \neq \emptyset$ ¿Prueba el siguiente razonamiento que R es reflexiva?:

   "Por simetría, aRb implica bRa y entonces, por transitividad, concluimos que aRa."

- ☐ Sí.
- ■ No.

Justifica brevemente la respuesta: *Dado un $a \in X$, a priori no tiene por que existir un $b \in X$ tal que aRb. Por ejemplo, en el conjunto de la población humana, "ser hermano de" es una relación simétrica y transitiva, pero no reflexiva (asumiendo que una persona no es hermano de sí mismo).*