Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

1. Espacios Recubridores

Observación. A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

1.1. Levantamiento de aplicaciones

Observación. Vamos a tener en cuenta que si X es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

Demostración. Si O es abierto y A es una componente arcoconexa de O, entonces dado $a \in A$, como X es localmente arcoconexo tendremos que existe un U entorno arcoconexo de a tal que $U \subseteq O$. Como A es el mayor arcoconexo en O que contiene al punto a tendremos que $U \subseteq A$, luego A es abierto. $\square$

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora $p : R \to B$ y un punto $b_0 \in B$. Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto O que contiene a b_0. Restringiéndonos a la componente arcoconexa de O que contiene a b_0 podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

Lema 1.1 (Unicidad del levantamiento)**.** Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora, $f_1, f_2 : X \to R$ continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, entonces $f_1 = f_2$.

Demostración. Para la demostración solo se necesita que X sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, "{f_1,f_2}"] \arrow[r, "f=p\circ f_1=p\circ f_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(X)\}$$

Como X es conexo y tenemos que $Y \neq \emptyset$, ya que por hipótesis $x_0 \in Y$, si probamos que Y es abierto y cerrado tendremos que $Y = X$, es decir, $f_1 = f_2$.

Veamos que Y es abierto. Para ello tomamos $y \in Y$, es decir, un punto y tal que $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos el punto $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$. Sea O abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a b, entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos de R y tal que

$$p_{|A_i} : A_i \to O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto A_{i_0} donde se encuentra $f_1(y) = f_2(y)$. Elegimos $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$. Veamos que $\forall x \in V$ se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$. Como $x \in V$ tendremos que $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$ por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \overset{(*)}{\Rightarrow} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en $(*)$ hemos usado que $p_{|A_i}$ es inyectiva. Tenemos finalmente que Y es abierto.

Veamos ahora que Y es cerrado. Para ello demostramos que $X \setminus Y$ es abierto. Tomamos $y \in X \setminus Y$ y vemos que existe un V abierto que contiene al punto y y tal que $V \subseteq X \setminus Y$. Sea $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ y de nuevo tomamos O regularmente recubierto que contiene a b. Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los A_i son abiertos disjuntos y tal que

$$p_{|A_i} : A_i \to O$$

es un homeomorfismo. Tendremos $f_1(y) \in A_{i_1}$ y $f_2 \in A_{i_2}$ y además se verificará que $A_{i_1} \neq A_{i_2}$ ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p_{|A_{i_1}} : A_{i_1} \to O$$

no sería intectiva. Elegimos ahora $V = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2)$, donde se tiene que $y \in V$. Además se tiene que

$$f_1(V) \subseteq A_{i_1}$$
$$f_2(V) \subseteq A_{i_2}$$

por lo que para cada $x \in V$ se tendrá que $f_1(x) \neq f_2(x)$ ya que $f_1(x) \in A_{i_1}$ y $f_2(x) \in A_{i_2}$. Esto nos dice que $V \subseteq X \setminus Y$, luego Y es cerrado. □

Teorema 1.2 (Teorema de monodromía)**.** Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in V$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$. El homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(R, r_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo. En partircular, $\pi_1(R, r_0)$ es isomorfo a $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que p_* es inyectiva si y solo si $\ker(p_*)$ es trivial. Tomamos α lazo basado en r_0 tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además $[p \circ \alpha] = p^*([\alpha])$ tenemos que existe una homotopía por lazos de ε_{b_0} en $p \circ \alpha$. Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en R de $\hat{\varepsilon}_{b_0}$ y $\widehat{p \circ \alpha}$ (empezando en r_0). Tenemos

$$\left.\begin{array}{r} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

Observación. Recordemos que dados dos subgrupos H_1, H_2 de un grupo G se dice que H_1 y H_2 son conjugados si existe un $g \in G$ tal que

$$H_2 = g^{-1} H_1 g$$

Corolario 1.2.1. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$. Elegimos un arco $\alpha : [0,1] \to R$ tal que

$$\alpha(0) = r_1$$
$$\alpha(1) = r_2$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular, $p_*(\pi_1(R, r_1))$ y $p_*(\pi_1(R, r_2))$ son conjugados en $\pi_1(B, b_0)$.

Demostración. Sabemos que $p \circ \alpha$ es un lazo basado en b_0 por lo que $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$. Además,

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_2) &\xrightarrow{isom.} \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] &\longmapsto [\alpha * \beta * \widetilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que

$$\pi_1(R, r_1) = [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\widetilde{\alpha}]$$
$$p_*(\pi_1(R, r_1)) = [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \widetilde{\alpha}]$$

Como tenemos que

$$[p \circ \widetilde{\alpha}] = [\widetilde{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

Corolario 1.2.2. Sean $p : R \to B$ una aplicación recubridora, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p^{-1}(b_0)$. Sea H un subgrupo conjugado de $p_*(\pi_1(R, r_1))$ en $\pi_1(B, b_0)$. Entonces existe un punto $r_2 \in R$ tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que $p(r_1) = b_0$ y que $p_*(\pi_1(R, r_1))$ es conjugado con H en $\pi_1(B, b_0)$, es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con $g \in \pi_1(B, b_0)$, esto es, $g = [\gamma]$. Consideramos $\hat{\gamma}$ el levantamiento de γ a R con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos $r_2 = \hat{\gamma}(1)$ al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. Consideramos una aplicación recubridora $p : R \to B$, una aplicación continua $f : X \to B$, $x_0 \in X$, $b_0 = f(x_0)$ y $r_0 \in p^{-1}(b_0)$.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento $\hat{f} : X \to R$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$.
2. $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento $\hat{f}$ de f con $\hat{f}(x_0) = r_0$ es único.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(R, r_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\hat{f}_x"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(B, b_0) \end{tikzcd}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$ por lo que tenemos esta implicación simplemente desarrollando la composición.

(2) $\Rightarrow$ (1) Empezamos definiendo $\hat{f}$:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Dado $x \in X$ elegimos α_x un arco en X que una x_0 con x. Entonces $f \circ \alpha_x$ es un arco en B que une $b_0 = f(x_0)$ con $f(x)$. Consideramos ahora $\widehat{f \circ \alpha_x}$ el único arco en R tal que $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$ y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que $\hat{f}$ está bien definida, es decir, que no depende del arco α_x elegido. Tomamos otro arco β_x en X tal que $\beta_x(0) = x_0$ y $\beta_x(1) = x$ y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos $\gamma = \alpha_x * \widetilde{\beta_x}$ que es un lazo en X con base en x_0. Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \widetilde{\beta_x})$$

es un lazo con base en b_0. Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco δ con base en r_0 tal que $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$. Sea $\widehat{f \circ \gamma}$ el único levantamiento de $f \circ \gamma$ que comienza en r_0. Tenemos que $f \circ \gamma$ es homotópico por arcos con $p \circ \delta$. Como p_* es inyectiva tenemos que $\widehat{f \circ \gamma}$ es homotópico con δ, por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = \widehat{(f \circ \alpha_x) * \widetilde{f \circ \beta_x}} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde $\widehat{f \circ \alpha_x}$ es el levantamiento de $f \circ \alpha_x$ empezando en r_0 y ω es el levantamiento de $\widetilde{f \circ \beta_x}$ comenzando en $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$. Podemos ver que

$$\left.\begin{array}{c} p \circ \omega = \widetilde{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta_X} \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array}$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de $\hat{f}(x)$ está bien hecha.

Veamos ahora que $p \circ \hat{f} = f$. Para ello, dado $x \in X$ tenemos que ver que $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$. Veamos quién es $\hat{f}(x)$:

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$
$$p(\hat{f}(x)) = (p \circ (\widehat{f \circ \alpha_x}))(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)$$

También es claro que $\hat{f}(x_0) = r_0$ ya que para x_0 podemos elegir ε_{x_0} verificándose que $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$ luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que $\hat{f}$ es continua.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Comenzamos tomando un punto $x \in X$ y vemos que $\hat{f}$ es continua en x. Sea U un entorno de $\hat{f}(x)$. Tomamos O abierto arcoconexo de $f(x)$ que esté regularmente recubierto, es decir

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos}$$
$$p_{|A_i} : A_i \to O \text{ homeomorfismo}$$

Como $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$ tenemos que existe un único $i_0 \in I$ tal que $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$. Podemos suponer que $A_{i_0} \subseteq U$ (si no fuese así consideraríamos $U \cap A_{i_0}$). Como f es continua, existe un abierto V que contiene a x tal que $f(V) \subseteq O$. Podemos suponer que V es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de V que contenga a x).

Si probamos que $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$ tendríamos que $\hat{f}$ es continua en x. Para verlo consideramos un punto $y \in V$ y tomamos un arco γ dentro de V que una x con y. Tenemos entonces que $\alpha_x * \gamma$ es un arco que une x_0 con y. Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = f \circ \widehat{(\alpha_x * \gamma)}(1) = \widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}(1)$$

donde $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$ es la única curva que se proyecta por p en $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$ y comienza en r_0. Es decir, $\widehat{(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)}$ se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{\widehat{f \circ \gamma}}$$

donde $\widehat{\widehat{f \circ \gamma}}$ es el levantamiento de $f \circ \gamma$ pero comenzando en el punto $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$.

$$Im(\gamma) \subseteq V \Rightarrow Im(f \circ \gamma) \subseteq O \Rightarrow \widehat{\widehat{f \circ \gamma}} \subseteq A_{i_0}$$

ya que $p_{|A_{i_0}}$ es un homeomorfismo por lo que llegamos finalmente a

$$\hat{f}(y) = (\widehat{f \circ \alpha_x) * (f} \circ \gamma)(1) = \widehat{\widehat{f \circ \gamma}}(1) \in A_{i_0}$$

□

Observación. Una consecuencia inmediata es que si X es simplemente conexo, toda $X : X \to B$ continua se puede levantar.

Ejemplo. Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{array}$$

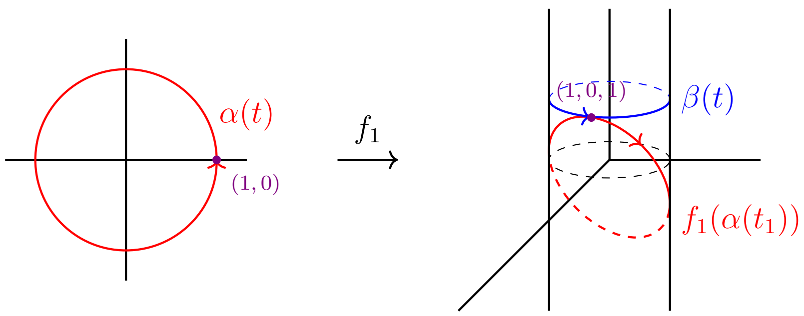
y las aplicaciones $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x, y, x) \\ f_2(x, y) &= (-2xy, x^2 - y^2, x^2) \end{aligned}$$

Nos preguntamos si existen levantamientos de f_1 y f_2, es decir si existen los $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur, dashed, "\hat{f}_1, \hat{f}_2"] \arrow[r, "f_1, f_2"'] & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Con la siguiente gráfica



$\mathbb{Z} \cong G = \pi_1(\mathbb{S}^1, (0, 1))$

$G' = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))$

podemos ver que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ está generado por $[\alpha]$ donde

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$

y $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1))$ está generado por $[\beta]$ done

$$\beta(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 1)$$

Además es fácil ver en la misma gráfica que

$$\begin{gathered} f_{1*}([\alpha]) = [f_1 \circ \alpha] = [\beta] \\ f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)) \end{gathered}$$

Ahora calculamos

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)))$$

Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)) = \{[\beta]^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y además

$$\begin{aligned} (p \circ \beta)(t) &= (\cos^2(2\pi t) - \operatorname{sen}^2(2\pi t), 2\cos(2\pi t)\operatorname{sen}(2\pi t), 1) = \\ &= (\cos(4\pi t), \operatorname{sen}(4\pi t), 1) = (\beta * \beta)(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{gathered} p_*([\beta]) = [p \circ \beta] = [\beta]^2 \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1))) = \{[\beta]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{gathered}$$

Sabemos por el teorema visto que existe un $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1,0) = (1,0,1)$ si y solo si se tiene que

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)))$$

Como tenemos que

$$\begin{gathered} f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))) = \{[\beta]^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1))) = \{[\beta]^{2m} : m \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \end{gathered}$$

no se dará la inclusión

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))) \not\subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)))$$

y tenemos que no existe $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ levantamiento de f_1 con $\hat{f}_1(1,0) = (1,0,1)$. Si tomamos otro punto r_1 cualquiera tal que $p(r_1) = (1,0,1)$ (r_1 colo podría ser el $(-1,0,1)$) entonces sabemos por un corolario anterior que

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, r_1)) \text{ es conjugado de } p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,1)))$$

Como el grupo total es abeliano, entonces estos dos grupos son idénticos.

Veamos qué ocurre con f_2. En este caso tenemos que

$$f_2(1,0) = (1,0,1)$$

Además, $[\alpha]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0))$ y $[\gamma]$ genera $\pi_1(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R},(0,1,1))$ donde

$$\gamma(t)=\left(\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right),\operatorname{sen}\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right),1\right)$$

Queremos calcular $f_2\circ\alpha$:

$$\begin{aligned}(f_2\circ\alpha)(t)&=(-2\cos(2\pi t)\operatorname{sen}(2\pi t),\cos^2(2\pi t)-\operatorname{sen}^2(2\pi t),\cos^2(2\pi t))=\\&=(-\operatorname{sen}(4\pi t),-\cos(4\pi t),\cos^2(2\pi t))=\\&=(\operatorname{sen}(-4\pi t),\cos(-4\pi t),\cos^2(2\pi t))=\\&=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+4\pi t\right),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi t\right),\cos^2(2\pi t)\right)\end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$f_{2*}([\alpha])=[f_2\circ\alpha]=[\gamma*\gamma]=[\gamma]^2$$

por lo que

$$\begin{aligned}f_{2*}(\pi_1(\mathbb{S}^1,(1,0)))&=\{[\gamma]^{2n}:n\in\mathbb{Z}\}=\\&=p_*\left(\mathbb{S}^1\times\mathbb{R},\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\right)\end{aligned}$$

y tenemos finalmente que existe el levantamiento $\hat{f}_2$ con $\hat{f}_2(1,0)=(0,1,1)$

1.2. Transformación de recubridores

Vamos a tratar en lo que queda de tema de clasificar los espacios recubridores de un espacio topológico B dado. Comenzamos estableciendo para ello una nomenclatura clásica.

Notación. Diremos que (R,p) es un recubridor de B si $p:R\to B$ es una aplicación recubridora.

Definición 1.1. Sean (R_1,p_2), (R_2,p_2) dos espacios recubridores de un mismo e.t. base B,

$$\begin{tikzcd}R_1 \arrow[dr, "p_1"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

1. Un **homomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1,p_1) en (R_2,p_2) es una aplicación continua $\phi:R_1\to R_2$ tal que $p_2\circ\phi=p_1$. Dicha aplicación hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}R_1 \arrow[rr, "\hat{f}=\phi"] \arrow[dr, "f=p_1"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

O equivalentemente ϕ es un levantamiento de la aplicación continua p_1 usando la aplicación recubridora p_2.

2. Un **isomorfismo de recubridores** ϕ de (R_1, p_1) es (R_2, p_2) es un homeomorfismo $\phi : R_1 \to R_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$.

3. Un isomorfismo ϕ de (R_1, p_1) es sí mismo se le llama **automorfismo de recubridores**. Al conjunto de todos los automorfismos lo notaremos por $\mathcal{A}(R_1, p_1)$.

Observación.

1. Si (R, p) es un recubridor de un espacio base B y $\phi : \hat{R} \to R$ es un homeomorfismo, entonces $(\hat{R}, p \circ \phi)$ es un recubridor de B. Se puede ver fácilmente con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \hat{R} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p\circ\phi"'] & R \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

recordando que la composición de una aplicación recubridora con un homeomorfismo es también una aplicación recubridora (visto en las propiedades de las aplicaciones recubridoras). Además, ϕ de $(\hat{R}, p \circ \phi)$ en (R, p) es un isomorfismo de recubridores. De hecho, de la definición se deduce que todo isomorfismo de recubridores es de la forma anterior.

2. Si ϕ_1 de (R_1, p_1) es (R_2, p_2) es un homomorfismo de recubridores y ϕ_2 es otro desde (R_2, p_2) en (R_3, p_3), entonces $\phi_2 \circ \phi_1$ es un homomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_3, p_3). Tendríamos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & R_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "p_2"] & R_3 \arrow[dl, "p_3"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

3. Si ϕ es un isomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2), entonces ϕ^{-1} es un isomorfismo de recubridores desde (R_2, p_2) en (R_1, p_1).

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[rr, bend right, "\phi"'] \arrow[dr, "p_2"'] & & R_2 \arrow[ll, bend right, "\phi^{-1}"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

4. $\mathcal{A}(R, p)$ es un grupo con la composición.

Corolario 1.3.1. Sean ϕ_1, ϕ_2 dos homomorfismos de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2). Entonces se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2 \iff \exists r_1 \in R_1 : \phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$$

En particular, si ϕ es un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo, entonces

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = r$$

Demostración. Estamos en la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[rr, bend left, "\phi_2"] \arrow[rr, bend right, "\phi_1"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Veamos la doble implicación de la primera mitad del corolario

$\Rightarrow$) Es trivial que si $\phi_1 = \phi_2$ entonces $\forall r \in R_1$ se tiene que $\phi_1(r) = \phi_2(r)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\exists r_1 \in R_1$ tal que $\phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$. Entonces, como ϕ_1 y ϕ_2 son levantamientos de p_1, por el teorema de unicidad del levantamiento tenemos que $\phi_1 = \phi_2$.

Para probar la segunda parte del corolario aplicaremos lo ya probado tomando $\phi_1 = \phi$ un homomorfismo de un recubridor (R, p) en sí mismo y $\phi_2 = Id_R$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, bend left, "Id_R"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] \arrow[dr, "p"'] & & R \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Entonces tendríamos que

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = Id_R(r) = r$$

$\square$

Corolario 1.3.2. Sean (R_1, p_1), (R_2, p_2) dos recubridores de B, $b_0 \in B$ y $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Entonces:

1. Existe un homomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si
$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$
2. Existe un isomorfismo de recubridores ϕ de (R_1, p_1) en (R_2, p_2) con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si
$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Veamos cada punto por separado.

1. Estamos en la siguiente situación (donde se ha puesto la equivalencia con la notación que usamos para el teorema de existencia del levantamiento)

$$\begin{tikzcd} X = R_1 \arrow[rr, "\phi \overset{?}{\equiv} \hat{f}"] \arrow[dr, "f = p_1"'] & & R_2 = R \arrow[dl, "p_2 = p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Entonces por el teorema de existencia del levantamiento tenemos que existe ϕ levantamiento de p_1 con $\phi(r_1) = r_2$ si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Veamos la doble inclusión. En primer lugar denotamos por ϕ al isomorfismo y a su inversa la llamaremos φ. Esta aplicación verifica que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1} \quad \phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

y además es también un isomorfismo (por lo que en particular es un homomorfismo). Estaríamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & R_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_2"] & R_1 \arrow[dl, "p^1"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

donde ϕ y φ son homomorfismos. Por hipótesis tenemos que $\exists r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ tales que $\phi(r_1) = r_2$. Si componemos esta igualdad por la izquierda con φ tenemos

$$(\varphi \circ \phi)(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow Id_R(r_1) = \phi(r_2) \Rightarrow r_1 = \varphi(r_2)$$

Por tanto aplicando el primer punto del corolario a ϕ (es un homomorfismo con $\phi(r_1) = r_2$) tenemos que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

y aplicando lo mismo de nuevo a φ (es un homomorfismo con $\varphi(r_2) = r_1$) tenemos que

$$p_{2*}(\pi_2(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

□

Teorema 1.4. Sean (R_1, p_1), (R_2, p_2) dos recubridores de un e.t. B. Entonces existe un isomorfismo entre amos recubridores si y solo si dado $b_0 \in B$, $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$ con $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$ tales que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

Demostración. Estamos en la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[dr, "p_1"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Veamos la doble implicación

$\Rightarrow$) Supongamos primero que existe ϕ isomorfismo de recubridores de (R_1, p_1) en (R_2, p_2). Tomamos $b_0 \in B$ y elegimos $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ cualquiera (que existe porque p_1 e sobreyectiva). Elegimos $r_2 = \phi(r_1)$ y entonces como $p_2 \circ \phi = p_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) &= (p_2 \circ \phi)_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \\ &= p_{2*}(\phi_*(\pi_1(R_1, r_1))) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \end{aligned}$$

ya que como ϕ es un homomorfismo tenemos que $\phi_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \pi_1(R_2, \phi(r_1))$.

$\Leftarrow$) Está probada aplicando el corolario anterior.

$\square$

Observación. Algunas consecuencias que podemos extraer de lo anterior son las siguientes:

Sean B un e.t. y $b_0 \in B$. Si consideramos H un subgrupo de $\pi_1(B, b_0)$ entonces

1. Existe como mucho un recubridor (R, p) (salvo isomorfismo) cumpliendo que $\exists r \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r)) = H$.

$$\begin{array}{ccc} R & \quad & \pi_1(R, r) \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\ B & & H \leqslant \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

2. Además si H y H' son subgrupos conjugados en $\pi_1(B, b_0)$, como mucho existe un recubridor correspondiente a ambos, es decir, si (R, p) es un recubridor con $r_0 \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r_0)) = H$, entonces también existe un $r_0' \in R$ tal que $p_*(\pi_1(R, r_0')) = H'$.

$$\begin{array}{ccccc} R & \quad & \pi_1(R, r) & \quad & \pi_1(R, r') \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\ B & & H \leqslant \pi_1(B, b_0) & & H' \leqslant \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

Ejemplo.

1. Consideramos $B = \mathbb{R}$ y buscamos los recubridores de $\mathbb{R}$. Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$$

Por lo que solo hay un subgrupo $H = \{[\varepsilon_0]\}$, luego $\mathbb{R}$ solo tiene un recubridor

$$(\mathbb{R}, p = Id_{\mathbb{R}})$$

2. En general, si B es simplemente conexo, entonces su único recubridor es él mismo (salvo isomorfismo de recubridores).

3. Consideramos ahora $\mathbb{RP}^n$ el espacio proyectivo con $n \geqslant 2$. Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2, \text{ con } x_0 \in \mathbb{RP}^n \text{ cualquiera}$$

Por tanto tendríamos que los únicos posibles subgrupos de $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)$ son

$$H_1 = \{[\varepsilon_{x_0}]\} \to \text{ Recubridor asociado } (\mathbb{S}^n, p) \text{ con } p(x) = [x]$$
$$H_2 \cong \mathbb{Z}_2 \to \text{ Recubridor asociado } (\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[d, "p"'] & r_0 \arrow[d, mapsto] & \{0\} \arrow[d, mapsto] & \mathbb{RP}^n \arrow[d, "Id"'] & x_0 \arrow[d, mapsto, "Id"'] & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \arrow[d, "Id_*"] \\
\mathbb{RP}^n & x_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)
\end{tikzcd}$$

por lo que los únicos recubridores de $\mathbb{RP}^2$ son $(\mathbb{S}^n, p)$ con $p(x) = [x]$ y $(\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$.

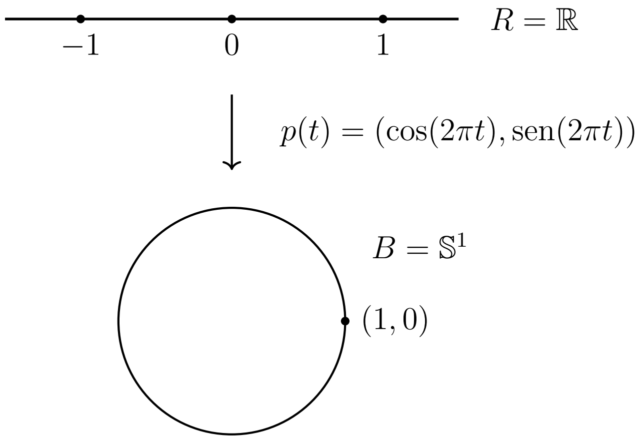
4. Consideramos $B = \mathbb{S}^1$. Recordemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t)),\ n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Los únicos subgrupos de $\mathbb{Z}$ son

$$H_k \cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+$$
$$H_0 \cong \{0\}$$

Recordamos el recubrimiento de $\mathbb{S}^1$ que estudiamos en el tema anterior:



Para este recubridor $(\mathbb{R}, p)$ donde $p(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$, su subgrupo asociado en $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ es H_0.

También podemos considerar el recubridor $(\mathbb{S}^1, p_1 = Id_{\mathbb{S}^1})$ cuyo subgrupo asociado es $H_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$.

Ahora nos planteamos de nuevo que $\mathbb{S}^1$ es recubridor de sí mismo pero que hay más formas de recubrirse, es decir, podemos encontrar funciones recubridoras

p_k con $k \in \mathbb{Z}^+$ de forma que todas recubran a la circunferencia pero "enrollandola más", es decir, llevando cada vuelta de $R = \mathbb{S}^1$ en k vueltas de $B = \mathbb{S}^1$. Definimos así la aplicación p_k para $k \geqslant 2$ (el caso $k = 1$ es la identidad que ya se ha estudiado) dada por

$$\begin{array}{rrcl} p_k: & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) & \longmapsto & (\cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta)) \end{array}$$

Además tendríamos que

$$\begin{array}{rrcl} p_{k*}: & \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0)) \\ & [\alpha] & \longmapsto & [\alpha]^k \end{array}$$

Llegando a que

$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))) = H_k = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, los únicos recubridores de $\mathbb{S}^1$ son

$$(\mathbb{R}, p) \text{ con } p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$
$$(\mathbb{S}^1, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = (\cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta)) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+$$

5. Vamos a estudiar ahora los recubridores del cilindro de $\mathbb{R}^3$, $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,0)) = \{[\alpha]^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

por lo que tenemos de nuevo que los únicos subgrupos de $\mathbb{Z}$ son

$$H_k \cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+$$
$$H_0 \cong \{0\}$$

y además sabemos que $(\mathbb{R}^2, p_0)$ es recubridor del cilindro con

$$\begin{array}{rrcl} p_0: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), y) \end{array}$$

asociado a $H_0 = \{[\varepsilon_{(1,0,0)}]\}$.

Buscamos ahora los recubridores cuyo subgrupo asociado es H_k. Con la misma idea que en el ejemplo anterior definimos la función p_k para $k \in \mathbb{Z}^+$ dada por

$$\begin{array}{rrcl} p_k: & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ & (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) & \longmapsto & (\cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta), y) \end{array}$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos que

$$p_{k*}([\alpha]) = [\alpha]^k$$
$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,0))) = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\} = H_k$$

Por tanto los únicos recubridores del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ son

$$(\mathbb{R}^2, p_0) \text{ con } p_0(x,y) = (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), y)$$
$$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) = (\cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta), y) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+$$

6. Veamos el caso del toro, $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1,0,1,0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

con generadores $[\alpha]$ y $[\beta]$.

Consideramos el recubridor $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ con

$$\begin{array}{rccc} p_0 \times p_0 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (x,y) & \longmapsto & (cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), \cos(2\pi y), \operatorname{sen}(2\pi y)) \end{array}$$

Como $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0,0)) = [\varepsilon_{(0,0)}]$ tenemos que

$$(p_0 \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, (0,0))) = \{[\varepsilon_{(1,0,1,0)}]\}$$

por lo que $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$ es el recubridor asociado al subgrupo trivial de $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1,0,1,0))$.

Consideramos ahora el cilindro como recubridor y definimos la aplicación recubridora

$$\begin{array}{rccc} p_k \times p_0 : & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) & \longmapsto & (cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta), \cos(2\pi y), \operatorname{sen}(2\pi y)) \end{array}$$

que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ "enrolla" el cilindro k veces. En este caso tendríamos que

$$(p_k \times p_0)(1,0,0) = (1,0,1,0)$$

y además tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,0)) = \{[\gamma]^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 0)$$

Tenemos además que $(p_k \times p_0)(\gamma(t)) = (\cos(2k\pi t), \operatorname{sen}(2k\pi t), 1, 0)$ de donde se deduce que

$$(p_k \times p_0)_*([\gamma]) = [(p_k \times p_0)(\gamma)] = [\alpha]^k$$

Una vez hemos calculado la imagen del generador podemos concluir que

$$(p_k \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1,0,0))) = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z} \times \{0\} \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Análogamente si consideramos

$$\begin{array}{rccc} p_0 \times p_k : & \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (x, \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) & \longmapsto & (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x), cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta)) \end{array}$$

tendríamos el siguiente recubridor

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Consideramos ahora el toro como recubridor de sí mismo y definimos

$$\begin{array}{rrcl} p_k \times p_l : & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi)) & \longmapsto & (cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta), \cos(l\varphi), \operatorname{sen}(l\varphi)) \end{array}$$

Si estudiamos la imagen de los generadores tenemos

$$(p_k \times p_l)_*([\alpha]) = [\alpha]^k$$
$$(p_k \times p_l)_*([\beta]) = [\beta]^k$$

y llegamos a que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l)$ es recubridor y está asociado al subgrupo $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$. El grupo imagen sería

$$\{[\alpha]^{kn_1} * [\beta]^{ln_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

En este punto nos damos cuenta de que aún no hemos estudiado todos los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si consideramos 2 puntos de $\mathbb{Z}$ podemos generar un subgrupo a partir de ellos, por ejemplo, para $(1,3),(2,4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos construir $\{a(1,3)+b(2,4) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y es un subgrupo de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Esto también ocurre con un solo generador. Es decir, tenemos que los subgrupos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que nos queda por considerar son de la forma

$$\{n(a,b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
$$\{n_1(a,b) + n_2(c,d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Pensamos ahora entonces en la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rrcl} p' : & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) & \longmapsto & (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta + y), \operatorname{sen}(\theta + y)) \end{array}$$

y nos planteamos quién sería $p'_*([\gamma])$. Aplicamos p' en un generador y tenemos

$$p'(\gamma(t)) = p(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 0) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$

Intuitivamente podemos llegar a ver que $p'_*([\gamma]) = [\alpha] * [\beta]$. Esto se ha hecho considerando de fondo el generador $(1,1)$. Buscamos generalizar esta nueva aplicación recubridora para cualquier generador $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Se puede construir una aplicación $p'_{(a,b)}$ para cada $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrcl} p'_{(a,b)} : & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) & \longmapsto & (\cos(a\theta), \operatorname{sen}(a\theta), \cos(b\theta + y), \operatorname{sen}(b\theta + y)) \end{array}$$

Aplicando $p'_{(a,b)}$ en el generador tenemos

$$p'_{(a,b)}(\gamma(t)) = p'(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 0) = (\cos(2a\pi t), \operatorname{sen}(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \operatorname{sen}(2b\pi t))$$

y con mucha intuición se puede llegar a que

$$(p'_{(a,b)})_*([\gamma]) = [\alpha]^a * [\beta]^b$$

Por tanto tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)})$ es recubridor del toro con subgrupo asociado $\{n(a,b) : n \in \mathbb{Z}\}$ para cada generador que tomemos $(a,b) \in \mathbb{Z}$.

De hecho, si tomamos un par de generadores $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos definir la aplicación $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dada por

$$\begin{aligned}(p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi)) =\\ = (\cos(a\theta + c\varphi), \operatorname{sen}(a\theta + c\varphi), \cos(b\theta + d\varphi), \cos(b\theta + d\varphi))\end{aligned}$$

De esta forma, aplicando $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}$ en los generadores tenemos

$$\begin{aligned}(p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\alpha(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 1, 0) =\\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(0), \operatorname{sen}(0)) =\\ &= (\cos(2a\pi t), \operatorname{sen}(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \operatorname{sen}(2b\pi t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\beta(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(1, 0, \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) =\\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(0), \operatorname{sen}(0), \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) =\\ &= (\cos(2c\pi t), \operatorname{sen}(2c\pi t), \cos(2d\pi t), \operatorname{sen}(2d\pi t))\end{aligned}$$

Por lo que de nuevo usando mucho la intuición (habría que demostrarlo formalmente) llegamos a que

$$\begin{aligned}(p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\alpha]) = [\alpha]^a * [\beta]^b\\ (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\beta]) = [\alpha]^c * [\beta]^d\end{aligned}$$

y tenemos que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})$ es recubridor del toro asociado al subgrupo $\{n_1(a,b) + n_2(c,d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ para cada par de generadores $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Resumiendo, tenemos que todos los recubridores del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son

$$\begin{gathered}(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0) \text{ asociado a } \{0\}\\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k \times p_0) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z}\\ (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z}\\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z} \text{ para cada } k, l \in \mathbb{Z}\\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)}) \text{ asociado a } \{n(a,b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}) \text{ asociado a } \{n_1(a,b) + n_2(c,d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}\\ \text{para cada } (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\end{gathered}$$

Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no tiene más subgrupos estos serán todos los recubridores del toro.

Hasta ahora lo que hemos visto es que para estudiar el número de recubridores de un espacio B podemos elegir un punto $b_0 \in B$ y pasar a estudiar $\pi_1(B, b_0)$ y estudiando sus subgrupos $H > \pi_1(B, b_0)$ podíamos afirmar que como mucho había un recubridor por cada uno de ellos (o sus conjugados). Por tanto cuanto más "grande" sea el grupo fundamental, más recubridores podremos encontrar a priori.

Proposición 1.5. Sea ϕ un homomorfismo de recubridores desde (R_1, p_1) en (R_2, p_2). Entonces $\phi : R_1 \to R_2$ es una aplicación recubridora.

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sabemos que ϕ es continua porque es homomorfismo. Veamos que ϕ es sobreyectiva (no es elemental). Consideramos un elemento cualquiera $r_2 \in R_2$ y queremos ver si existe un $r_1 \in R_1$ tal que $\phi(r_1) = r_2$.

Tomamos $r_0 \in R_1$ cualquiera y elegimos un arco α en R_2 que una $\phi(r_0)$ con r_2, es decir

$$\alpha \in \Omega(R_2; \phi(r_0), r_2)$$

Si proyectamos tendremos que $p_2 \circ \alpha$ es un arco en el espacio topológico base B que une $p_2(\phi(r_2))$ con $p_2(r_2)$, es decir

$$(p_2 \circ \alpha) \in \Omega(B; p_2(\phi(r_0)), p_2(r_2))$$

Sabiendo que el diagrama de la proposición es conmutativo tenemos que $p_2(\phi(r_0)) = p_1(r_0)$. Como p_1 es aplicación recubridora, entonces tenemos que existe un único levantamiento $\widehat{p_2 \circ \alpha}$ que comienza en r_0. Entonces tenemos que $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ es un arco en R_2 que comienza en $\phi(r_0)$. Es decir, α y $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ son dos arcos que empiezan en $\phi(r_0)$ y además

$$p_2 \circ (\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}) = p_1 \circ (\widehat{p_2 \circ \alpha}) \overset{def}{=} p_2 \circ \alpha$$

Por unicidad del levantamiento de p_2 tenemos que $\alpha = \phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$ por lo que tenemos que

$$r_2 = \alpha(1) = \phi(\widehat{p_2 \circ \alpha}(1))$$

Nos queda demostrar que todo punto de R_2 está regularmente recubierto.

Sea $r_2 \in R_2$ fijado. Sabemos que $p_2(r_2) \in B$ y podemos elegir U abierto arcoconexo en B que contiene a $p_2(r_2)$ y que está regularmente recubierto por p_1 y por p_2. Por la definición de regularmente recubierto tenemos que

$$\begin{cases} p_1^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} A_i, \quad A_i \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{1|_{A_i}} : A_i \to U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2^{-1}(U) = \bigcup\limits_{j \in J} B_j, \quad B_j \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{2|_{B_j}} : B_j \to U \text{ homeomorfismo} \end{cases}$$

Observamos que

$$\phi^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \phi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = (p_2\circ\phi)^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} A_i$$

Alijamos un A_{i_0} y veamos que $\phi(A_{i_0})$ está completamente contenida en algún B_{j_0}. Para ello, sabemos que $\phi(A_{i_0})$ es conexo y además

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j$$

Tenemos entonces que

$$\phi(A_{i_0}) = \phi(A_{i_0}) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J}(\phi(A_{i_0})\cap B_j)$$

Como puedo escribir $\phi(A_{i_0})$ como unión de abiertos y $\phi(A_{i_0})$ es conexo tenemos que $\exists_1 j_0 \in J$ tal que

$$\phi(A_{i_0}) \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \in J\setminus\{j_0\}$$

y podemos escribir

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq B_{j_0}$$

Así, si tomamos B_{j_0} como el abierto que contiene a r_2, entonces

$$\phi^{-1}(B_{j_0}) = \bigcup_{i\in I'} A_i$$

con $I' \subseteq I$. Además,

$$\begin{tikzcd} \phi_{|A_i}: & A_i \arrow[rr] \arrow[dr, "homeom.\equiv p_{1|A_i}"'] & & B_{j_0} \arrow[dl, "p_{2|B_{j_0}}\equiv homeom."] & \text{homeomorfismo} \\ & & U & & \end{tikzcd}$$

por ser composición de dos homeomorfismos □

Corolario 1.5.1. Sean (R_1, p_1), (R_2, p_2) dos recubridores de un espacio topológico B, $b_0 \in B$, $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ u $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$. Si se verifica que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

entonces existe una aplicación recubridora de R_1 en R_2 que lleva el punto r_1 en el punto r_2.

Definición 1.2. Decimos que (R, p) es un **recubridor universal** de un espacio topológico B si (R, p) es un recubridor con R simplemente conexo.

Observación. Dos recubridores universales tienen que ser necesariamente isomorfos. Es decir, son salvo un homeomorfismo, el mismo. Esto se debe a que por ser R simplemente conexo ambos tiene grupo fundamental trivial por lo que si hubiera dos tendrían que estar asociados al mismo subgrupo H y sabemos que como mucho hay uno salvo isomorfismo. Por eso se suele decir **el** recubridor universal y no **un** recubridor universal.

Observación. El adjetivo "universal" se debe a que si (R_2, p_2) también recubre al espacio topológico base B, entonces el recubridor universal también recubre a R_2.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & R_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$