

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Métodos Numéricos II (curso 2024/25)

Ejercicios sobre derivación numérica

1 Derivación numérica.

- Obtén la fórmula progresiva de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$ a partir de $f(a)$ y $f(a+h)$, mediante desarrollo de Taylor de $f(a+h)$ en torno a a hasta el cuarto término.
- Si notamos por $F(a, h)$ la aproximación de $f'(a)$ obtenida anteriormente, expresa el valor exacto de $f'(a)$ en función de $F(a, h)$ y los restantes términos en el desarrollo de Taylor.
- A partir de una combinación de los valores $F(a, h)$ y $F(a, h/2)$ obtén una fórmula con mayor orden de precisión que $F(a, h)$.
- Aplica las dos fórmulas obtenidas para aproximar $f'(2)$ con $h = 0.1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 3]$.

2 Para evaluar el funcional $L(f) = 2f'(a) - f''(a)$ se propone una fórmula del tipo

$$2f'(a) - f''(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) :$$

- Imponiendo exactitud en el espacio correspondiente halla la fórmula anterior para que sea de tipo interpolatorio clásico.
- Obtén una expresión del error de la fórmula en función de unas o varias derivadas de la función de órdenes superiores a dos.
- Aplica la fórmula obtenida para aproximar $2f'(2) - f''(2)$ con $h = 0.1$ para la función $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1, 3]$.
- Compara el error real obtenido en el apartado anterior con respecto a una cota deducida de b).
- Aplica la fórmula para obtener $2f'(0) - f''(0)$ suponiendo que tienes la siguiente tabla de valores de f :

x_i	-0.2	0	0.2	0.4
$f(x_i)$	9	10	9	12

3 Considera la fórmula de tipo interpolatorio clásico siguiente

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a+3h)$$

- Da una expresión del error de dicha fórmula.
- Úsala para aproximar la derivada $f'(3)$ siendo $f(x) = x^3$ con $h = 0.1$.

4 Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

- Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.
- Determina los valores de α_0 , α_1 , α_2 , x_1 y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?
- Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f . ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?
- Aplica el resultado para la función $x e^{x^2+1}$.

5 Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f'(0) = \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \alpha_3 f(a) + R(f), \quad a \neq -1, 1, 2.$$

- a) Sin realizar ningún cálculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.
- b) Determina los valores de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y a para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?
- c) Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f .
- d) Aplica el resultado para la función $x e^{x^2+1}$.