



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026



# Índice general

0.1. Conexión . . . . .	5
0.2. Conexión por arcos . . . . .	6
<b>1. El grupo fundamental</b>	<b>11</b>
1.1. Homotopía por arcos . . . . .	11
1.2. El grupo fundamental . . . . .	16



# Introducción. Conexión por arcos

## 0.1. Conexión

**Notación.** Notaremos por e.t. al espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  o diremos  $X$  es un e.t.

**Definición 0.1.** Se dice que un e.t.  $X$  es no conexo si existen  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos y no vacíos tales que  $X = U \cup V$ .

**Proposición 0.1.** Dado un e.t.  $X$  equivalen las siguientes afirmaciones:

- (i)  $X$  es conexo.
- (ii) Los únicos subconjuntos de  $X$  que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.
- (iii) Los únicos subconjuntos de  $X$  con frontera vacía son el vacío y el total.

**Teorema 0.2.** El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).

**Teorema 0.3.** La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t.  $X$  es también conexa.

**Teorema 0.4.** Si  $A$  es un subconjunto del e.t.  $X$  y  $A$  es conexo, entonces dado  $B$  con  $A \subset B \subset \overline{A}$ , entonces se tiene que  $B$  también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.

**Teorema 0.5.** Dados dos espacios topológicos  $X, Y$  se cumple que  $X \times Y$  es conexo (con la topología producto) si y solo si  $X$  e  $Y$  son conexos.

**Teorema 0.6.** Los conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).

**Definición 0.2.** Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0$  se define la componente conexa de  $x_0$  en  $X$  como el mayor conexo de  $X$  que contiene a  $x_0$ .

**Teorema 0.7.** Las componentes conexas de un e.t.  $X$  forman una partición de  $X$  en conjuntos conexos maximales y cerrados.

## 0.2. Conexión por arcos

**Definición 0.3.** Un **arco** (o camino) en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ . Si además  $\alpha(0) = \alpha(1)$  diremos que  $\alpha$  es un lazo.

Diremos que un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  une  $x$  con  $y$  si se verifica que  $\alpha(0) = x$  y  $\alpha(1) = y$ . Si  $\alpha$  es un arco, diremos que está basado en  $x$  (o su punto base es  $x$ ) si  $\alpha(0) = x = \alpha(1)$ .

Denotaremos por

$$\Omega(X; x, y) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

al **conjunto de arcos** que unen  $x$  con  $y$ . Denotaremos además por

$$\Omega(X; x) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua} : \alpha(0) = x = \alpha(1)\}$$

al **conjunto de lazos** basados en  $x$ .

**Ejemplo.**

1. Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0 \in X$  siempre se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

es un lazo basado en  $x_0$  al que llamaremos **arco constante**. De hecho, si  $X$  tiene la topología discreta, entonces los únicos arcos que hay en  $X$  son los arcos constantes.

*Demostración.* Si  $X$  tiene la topología discreta, entonces como  $\alpha$  es continua  $\alpha^{-1}(\{x_0\})$  será abierto y cerrado y por tanto  $\alpha^{-1}(\{x_0\}) \in \{\emptyset, X\}$  por ser  $X$  conexo.  $\square$

2. Sean  $x, y, z \in X$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  un arco uniendo  $x$  con  $y$  y  $\beta : [0, 1] \rightarrow X$  un arco uniendo  $y$  con  $z$ . Buscaremos ahora un arco formado a partir de estos dos de la siguiente forma:

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X : (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $\alpha * \beta$  es continua ya que  $(\alpha * \beta)|_{[0, 1/2]}$  y  $(\alpha * \beta)|_{[1/2, 1]}$  lo son y para  $t = 1/2$  se tiene que

$$\alpha\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

con  $[0, \frac{1}{2}]$  y  $[\frac{1}{2}, 1]$  cerrados. Aplicando el lema de pegado<sup>1</sup> tenemos que  $\alpha * \beta$  es continua.

---

<sup>1</sup>visto en Topología I

3. Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  es un arco uniendo  $x$  con  $y$ , entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} : [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto \alpha(1 - t)\end{aligned}$$

es un arco que une  $y$  con  $x$ .

**Definición 0.4.** Decimos que un e.t.  $X$  es **arcoconexo** (o **conexo por arcos**) si para cualesquiera  $x, y \in X$  existe un arco en  $X$  que une el punto  $x$  con el punto  $y$ .

Si  $X$  es un e.t. y  $A \subset X$ , diremos que  $A$  es arcoconexo si  $A$  es arcoconexo con la topología de inducida de  $X$ .

**Teorema 0.8.** Todo espacio topológico arcoconexo es conexo.

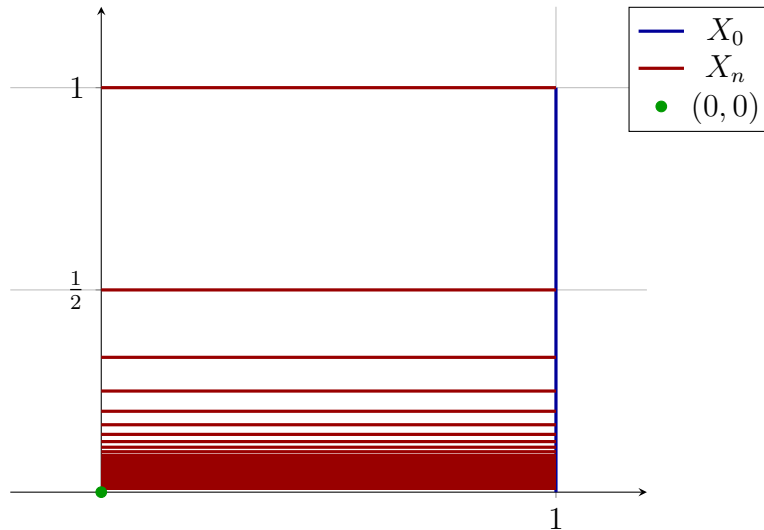
*Demostración.* Dado  $x_0 \in X$  fijo y otro punto  $x \in X$  cualquiera, sabemos que existe  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  un arco tal que  $\alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = x$ . En particular, como el intervalo  $[0, 1]$  es conexo y  $\alpha$  es continua, entonces se tiene que  $\alpha([0, 1])$  es conexo y podremos escribir

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0, 1]) \in X \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x\{[0, 1]\}$$

y además  $x_0 \in \bigcap_{x \in X} \alpha_x\{[0, 1]\}$  por lo que  $X$  es conexo (por el lema del peine).  $\square$

**Ejemplo.** Veamos que la otra implicación no es cierta en general. Para ello consideramos los siguientes conjuntos:

$$X_0 = \{1\} \times [0, 1] \quad \text{y} \quad X_n = [0, 1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$



Llamamos  $X = \{(0, 0)\} \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n \right)$  y queremos ver que  $X$  es conexo pero no es arcoconexo.

Si tomamos la segunda parte de esta unión, es decir,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$$

tenemos que  $Y$  es conexo porque es unión de los  $X_n$  que son todos conexos y que intersecan con  $X_0$ . Entonces, como  $Y \subset X \subset \overline{Y}$  tenemos que  $X$  es conexo. Veamos sin embargo que  $X$  no es arcoconexo.

Para ello vamos a demostrar que si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X : \alpha$  es continua con  $\alpha(0) = (0, 0)$ , entonces  $\alpha(t) = (0, 0)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Podemos escribir la curva como  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Como  $\alpha(0) = (0, 0)$ , si tomamos  $((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$  un abierto que contiene al origen, entonces  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $\alpha([0, \varepsilon)) \subseteq ((-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)) \cap X$  por ser  $\alpha$  continua. Como  $y(t)$  es continua y se tiene que  $y([0, \varepsilon)) \subseteq \{0\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 2} \{\frac{1}{n}\} \right)$ . Por el teorema del valor intermedio tenemos que  $y([0, \varepsilon)) = \{0\}$  por lo que  $\alpha([0, \varepsilon)) = \{(0, 0)\}$ . De esta forma hemos probado que no hay ningún arco que conecte  $(0, 0)$  con un punto distinto (el único arco es el constante).

**Teorema 0.9.** Si  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es estrellado, entonces  $A$  es arcoconexo.

*Demostración.* Como  $A$  es estrellado existe un  $x_0 \in A$  tal que para cualquier  $x \in A$ , el segmento que los une,  $(1-t)x + tx_0 \in A$  para todo  $t \in [0, 1]$  y entonces  $\alpha(t) = (1-t)x + tx_0$  es una curva continua uniendo  $x$  con  $x_0$ . Dados dos puntos cualesquiera  $x, y \in A$  se tiene que  $\alpha_x * \tilde{\alpha}_y$  es una curva continua que une  $x$  con  $y$ .  $\square$

**Corolario 0.9.1.** Cualquier conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  convexo es arcoconexo. Por ejemplo, las bolas abiertas o las bolas cerradas de  $\mathbb{R}^n$ .

**Corolario 0.9.2.** En  $\mathbb{R}$  coinciden los conjuntos conexos y arcoconexos (son solo los intervalos).

**Teorema 0.10.** La imagen mediante una aplicación continua de un arcoconexo es un arcoconexo. En particular, ser arcoconexo es una propiedad topológica, es decir, se conserva por homeomorfismos.

*Demostración.* Dados  $x, y \in f(X)$ , entonces existen  $x_0, y_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x$  y  $f(y_0) = y$ . Por ser  $X$  arcoconexo, entonces existe un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = y_0$ . Entonces tenemos que  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow f(X)$  es continua y  $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = x$  y  $(f \circ \alpha)(1) = f(y_0) = y$  y tenemos demostrado el resultado que buscábamos.  $\square$

**Teorema 0.11.** Sean  $X$  un e.t. y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de arcoconexos de  $X$ . Si  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es arcoconexo.

*Observación.* Hay resultados de conexión que no son ciertos para arcoconexión. Por ejemplo, si en un e.t.  $X$  se tiene que  $A \subseteq X$  es arcoconexo podría ocurrir que si  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ , se diera que  $B$  no sea arcoconexo (como en el ejemplo anterior).



**Ejemplo.** Veamos que  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  es arcoconexo. Podemos hacerlo sabiendo que  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ , con  $N = (0, \dots, 0, 1)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  que es arcoconexo por lo que  $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  es arcoconexo. Análogamente,  $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$  con  $S = (0, \dots, 0, -1)$  es arcoconexo y podemos escribir

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\})$$

por lo que  $\mathbb{S}^n$  es unión de arcoconexos con puntos en común, luego es arcoconexo.

**Teorema 0.12.** Sean  $X, Y$  e.t., entonces  $X \times Y$  es arcoconexo (con la topología producto) si y solo si  $X$  e  $Y$  son arcoconexos.

**Teorema 0.13.** Dado un e.t.  $X$ , se tiene que  $X$  es arcoconexo si y solo si  $X$  es conexo y todo punto  $x \in X$  tiene un entorno suyo arcoconexo.

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Hemos visto que si  $X$  es arcoconexo, entonces  $X$  es conexo. Además,  $X$  es entorno de cualquier punto suyo luego todo punto tiene un entorno conexo.

$\Leftarrow$ ) Elegimos un  $x \in X$  fijo y definimos  $A = \{y \in X : \exists \alpha_y \text{ arco uniendo } x \text{ con } y\}$

Como  $x \in A$  tenemos que  $A \neq \emptyset$ . Si probamos que  $A$  es abierto y cerrado, entonces como  $X$  es conexo tendremos que  $A = X$ , es decir podremos unir  $x$  con cualquier otro punto  $y \in X$ .

Veamos que  $A$  es abierto. Tomamos  $z \in A$  y queremos demostrar que  $\exists U$  entorno de  $z$  tal que  $U \subseteq A$ . Por hipótesis sabemos que existe un entorno  $U$  arcoconexo de  $z$ . Entonces dado  $u \in U$  existe un arco  $\alpha_u$  que une  $z$  con  $u$ . Por otro lado, como  $z \in A$ , entonces existe un arco  $\beta_z$  que une  $x$  con  $z$ . Tendremos entonces que  $\beta_z * \alpha_u$  es un arco que une  $x$  con  $u$  y por definición tendremos  $u \in A$ , luego  $U \subseteq A$ .

Nos queda ver que  $A$  es cerrado. Tomamos para ello  $z \in \overline{A}$ . Por hipótesis existe un entorno  $U$  de  $z$  arcoconexo. Por ser  $U$  entorno de  $z$  y  $z \in \overline{A}$  necesariamente  $U \cap A \neq \emptyset$  por lo que existe al menos un  $u \in U \cap A$ . Como  $u \in A$  existe un arco  $\alpha_u$  que une  $x$  con  $u$  y como  $u \in U$  existe también un arco  $\beta_u$  que une  $u$  con  $z$  y tendríamos que  $\alpha_u * \beta_u$  es un arco uniendo  $x$  con  $z$  llegando a que  $z \in A$ . Tendríamos  $\overline{A} \subseteq A$  y como la otra inclusión se da siempre, tendremos que  $A$  coincide con su adherencia, por lo que es cerrado.

□

**Definición 0.5.** Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0 \in X$ , llamamos **componente arcoconexa** de  $x_0$  al mayor arcoconexo en  $X$  que contiene a  $x_0$ .

**Teorema 0.14.** Las componentes arcoconexas de un e.t.  $X$  forman una partición de  $X$  en subconjuntos arcoconexos de  $X$  maximales.

**Ejemplo.** En el ejemplo que ya se trabajó se puede ver que el conjunto  $X$  que era



tiene dos componentes arcoconexas:  $\{(0,0)\}$  ,  $\bigcup_{u \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X_n$

# 1. El grupo fundamental

## 1.1. Homotopía por arcos

**Definición 1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f, g : X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Decimos que  $f$  es **homotópica** a  $g$  si existe  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua tal que

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$



**Definición 1.2.** Dados  $X$  e.t.,  $x, y \in X$  y dos arcos  $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$ , decimos que  $\alpha, \beta$  son **homotópicos por arcos** si existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x & \text{y} & & H(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

**Lema 1.1.** Ser homotópico por arcos da lugar a una relación de equivalencia en  $\Omega(X; x, y)$ .



*Demostración.*

- (i) Dado  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$  queremos ver que  $\alpha$  es homotópica por arcos con  $\alpha$ . Para ello tenemos

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \alpha(s) & H(s, 0) &= \alpha(s) = H(s, 1) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = x & H(1, t) &= \alpha(1) = y \end{aligned}$$

- (ii) Dados  $\alpha, \beta \in \Omega(X; x, y)$  tales que existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & \text{y} & & H(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x & \text{y} & & H(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Queremos ver que existe un  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= \beta(s) & \text{y} & & \tilde{H}(s, 1) &= \alpha(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \tilde{H}(0, t) &= x & \text{y} & & \tilde{H}(1, t) &= y & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Tomando  $\tilde{H}(s, t) := H(s, 1 - t)$  cumple claramente con lo que buscamos.

- (iii) Dado  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X; x, y)$  y  $H_1, H_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continuas tales que

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= \alpha(s) & H_2(s, 0) &= \beta(s) \\ H_1(s, 1) &= \beta(s) & H_2(s, 1) &= \gamma(s) \\ H_1(0, t) &= x & H_2(0, t) &= x \\ H_1(1, t) &= x & H_2(1, t) &= y \end{aligned}$$

Queremos ver que existe un  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} H(s, t) &= \alpha(s) & H(s, 0) &= \alpha(s) = H(s, 1) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = x & H(1, t) &= \alpha(1) = y \end{aligned}$$

Para ello consideramos

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_2(s, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Y con el lema de pegado es fácil ver que es continua y que satisface las condiciones que buscábamos. □

### Ejemplo.

1. Sean  $X$  un e.t. y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicaciones continuas, entonces vamos a ver que  $f$  y  $g$  son homotópicas.

*Demostración.* Vamos a definir la aplicación

$$\begin{aligned} H : X \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto (1 - t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

que es continua y además verifica

$$H(x, 0) = f(x) \qquad H(x, 1) = g(x)$$

por lo que tenemos lo que buscábamos. □

En el caso particular de que  $f = \alpha$  y  $g = \beta$  fuesen arcos comenzando en un punto común y acabando en otro punto común, entonces la  $H$  anterior sería una homotopía por arcos.

2. Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  es un arco y  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es una aplicación continua con  $h(0) = 0$  y  $h(1) = 1$ , entonces  $\dot{\alpha}(s) = \alpha(h(s))$  es homotópica por arcos a  $\alpha(s)$ .

*Demostración.* Es claro que  $\dot{\alpha}$  es continua y existe una homotopía por arcos entre  $\alpha$  y  $\dot{\alpha}$  que es la siguiente

$$H(s, t) = \alpha((1 - t)s + th(s))$$

que es claramente continua y que verifica que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s) & H(s, 1) &= \alpha(h(s)) = \dot{\alpha}(s) \\ H(0, t) &= \alpha(0) = \dot{\alpha}(1) & H(1, t) &= \alpha(1) = \dot{\alpha}(1) \end{aligned}$$

□

Intuitivamente podemos entender esto como que no importa a qué velocidad se recorra una curva para ser homotópico por arcos.

**Notación.** Como convenio a la clase de equivalencia de un arco  $\alpha$  en  $\Omega(X; x, y)$  lo denotaremos por  $[\alpha]$ .

**Lema 1.2.** Dados dos arcos  $\alpha_1, \alpha_2$  en  $\Omega(X; x, y)$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \Omega(X; y, z)$ . Se verifica que si  $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ , entonces  $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$(\alpha_1 * \beta_1) = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta_1(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha_2 * \beta_2) = \begin{cases} \alpha_2(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta_2(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Además, sabemos que existen  $H_1, H_2$  continuas tal que

$$\begin{aligned} H_1(s, 0) &= \alpha_1(s) & H_2(s, 0) &= \beta_1(s) \\ H_1(s, 1) &= \beta_1(s) & H_2(s, 1) &= \beta_2(s) \\ H_1(0, t) &= x & H_2(0, t) &= y \\ H_1(1, t) &= y & H_2(1, t) &= z \end{aligned}$$

Tomamos entonces  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{si } s \in [0, 1/2], t \in [0, 1] \\ H_2(2s - 1, t) & \text{si } s \in [1/2, 1], t \in [0, 1] \end{cases}$$

es continua y tenemos que

$$H(s, 0) = \begin{cases} H_1(2s, 0) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ H_2(2s - 1, 0) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta_1(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$

Análogamente se tiene que  $H(s, 1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$  con  $H(0, t) = x$  y  $H(1, t) = z$ .

□

A partir del lema anterior podemos definir

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

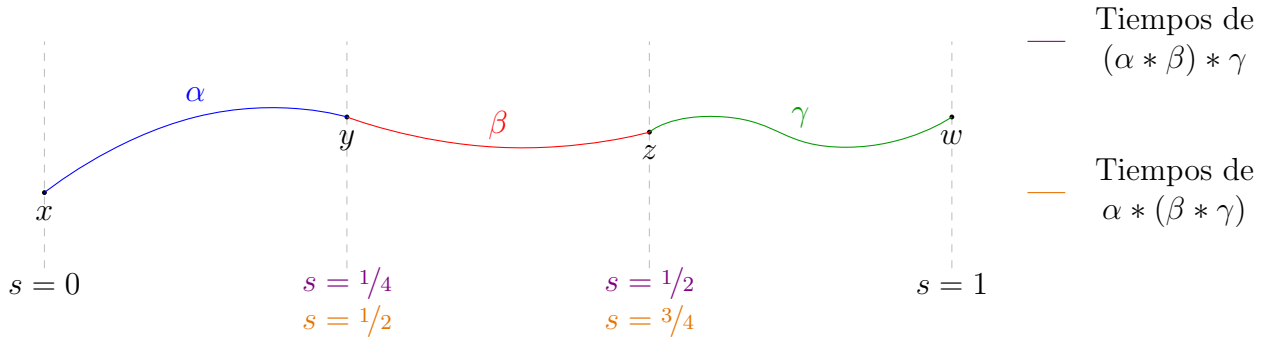
con  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ ,  $\beta \in \Omega(X; y, z)$

**Teorema 1.3.** Dado  $X$  e.t.,  $\alpha \in \Omega(X; x, y)$ ,  $\beta \in \Omega(X; y, z)$  y  $\gamma \in \Omega(X; z, w)$  se tiene que

- (i)  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$
- (ii)  $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$  y  $[\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$
- (iii)  $[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_x]$  y  $[\tilde{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$

*Demostración.*

- (i) Desarrollemos cada expresión



$$(\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \beta(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha * (\beta * \gamma)(s) &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ (\beta * \gamma)(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2(2s - 1)) & \text{si } s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(2(2s - 1) - 1) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s - 2) & \text{si } s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s - 3) & \text{si } s \in [3/4, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \beta(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta) * \gamma(s) &= \begin{cases} (\alpha * \beta)(2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \alpha(2(2s)) & \text{si } s \in [0, 1/4] \\ \beta(2(2s) - 1) & \text{si } s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{si } s \in [0, 1/4] \\ \beta(4s - 1) & \text{si } s \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Usando el ejemplo 2 anterior se tiene que  $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$  (realmente se están recorriendo las mismas curvas pero a distinta velocidad).

- (ii) Tendremos que ver que  $\alpha * \varepsilon_y$  se relaciona por una homotopía con arcos con  $\alpha$ . Recordemos que

$$(\alpha * \varepsilon_y) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \varepsilon_y(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ y & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

De nuevo del ejemplo 2 se tiene que son homotópicas

- (iii) Tendremos que ver en este caso que  $\alpha * \tilde{\alpha}$  es homotópico por arcos a  $\varepsilon_x$ . Describamos ambas curvas.

$$(\alpha * \tilde{\alpha}) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2s-1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}(2-2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_x(s) = x \quad \forall s \in [0, 1]$$

Pensamos ahora una transformación  $H$  que haga que cada vez la curva se vaya quedando más cerca de  $x$  (cada vez vuelve antes de llegar a  $y$ ). Intuitivamente podríamos pensar en la siguiente gráfica, en la que vamos reduciendo la distancia desde la función roja hasta la verde



$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ 2-2s & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y podemos construir  $H(s, t) = \alpha((1-t)h(s))$  que claramente es continua y verifica

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(h(s)) = (\alpha * \tilde{\alpha}(s)) & y & \quad H(s, 1) = \alpha(0) = x = \varepsilon_x(s) & \quad \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= \alpha(0) = x & y & \quad H(1, t) = \alpha(0) = x & \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

## 1.2. El grupo fundamental

**Corolario 1.3.1.** Dados un e.t.  $X$  y un punto  $x_0 \in X$  se tiene que el conjunto de lazos en  $X$  basados en  $x_0$  bajo la relación de equivalencia de ser homotópicos por arcos y con operación  $*$  forman un grupo algebraico.

*Demostración.* Definimos el siguiente conjunto

$$G = \frac{\Omega(X; x_0)}{R}$$

donde  $R$  es la relación de equivalencia “ser homotópico por arcos”. Veamos ahora que  $G$  tiene estructura de grupo:

1. **Propiedad asociativa.** Tendremos que ver que se verifica para cualesquiera  $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in G$ .

$$[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$$

pero esto lo tenemos claramente del teorema anterior

2. **Existencia del elemento neutro.** Por el teorema anterior tenemos que para  $x = y = x_0$  se tiene que  $[\alpha] * [\varepsilon_{x_0}] = [\alpha] = [\varepsilon_{x_0}] * [\alpha]$  para cualquier  $[\alpha] \in G$  luego tenemos la existencia probada.
3. **Existencia del elemento opuesto.** De nuevo usamos el teorema anterior y nos dice que para cualquier  $[\alpha] \in G$  se tiene que

$$[\alpha] * [\tilde{\alpha}] = [\varepsilon_{x_0}] = [\tilde{\alpha}] * [\alpha]$$

y se tiene directamente.

Con esto hemos probado finalmente que  $G$  es un grupo.  $\square$

**Definición 1.3.** Al grupo algebraico dado por el corolario anterior lo llamaremos el **grupo fundamental** de  $X$  en  $x_0$  y lo denotaremos por  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Ejemplo.**

[Insertar gráfica]

En  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tenemos que  $[\varepsilon_{x_0}] \neq [\alpha] \neq [\tilde{\alpha}] \neq [\beta]$  y probaremos más adelante que  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  aunque intuitivamente se puede entender el 0 como el lazo trivial (el que no rodea a  $(0, 0)$ ), los números positivos son .

**Ejemplo.** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto estrellado desde un punto  $x_0$ . Entonces  $\pi_1(X; x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ , es decir, es trivial.

*Demostración.* Dado  $\alpha(s)$  un lazo basado en  $x_0$  dentro de  $X$ , entonces

$$H(s, t) = (1 - t)\alpha(s) + tx_0$$



es una aplicación continua dentro<sup>1</sup> de  $X$  tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) = \alpha(s) &= y & H(s, 1) &= x_0 = \varepsilon_{x_0}(s) & \forall s \in [0, 1] \\ H(0, t) &= x_0 & H(1, t) &= x_0 & \forall t \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

En particular, las bolas abiertas, las bolas cerradas, los convexos en general como  $\mathbb{R}^n$  tienen grupo fundamental trivial.

**Teorema 1.4.** Sean  $x, y$  dos puntos de un e.t.  $X$ . Si  $X$  es arcoconexo, entonces  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(X, y)$  son iguales salvo isomorfismo.

*Demostración.* Como  $X$  es arcoconexo podemos considerar  $\alpha$  un arco uniendo  $x$  con  $y$  y la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \pi_1(X, y) &\rightarrow \pi_1(X, x) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

que está bien definida por lo visto anteriormente sobre el operador  $*$ . Queremos ver ahora que  $F_\alpha$  es un isomorfismo de grupos. Para ello comencemos por ver que  $F_\alpha$  es un homomorfismo, es decir, que se verifica

$$F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) = F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2])$$

Desarrollamos el segundo término de la expresión:

$$\begin{aligned} F_\alpha[\gamma_1] * F_\alpha([\gamma_2]) &= ([\alpha] * [\gamma_1] * [\tilde{\alpha}]) * ([\alpha] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}]) = [\alpha] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\tilde{\alpha}] = \\ &= F_\alpha([\gamma_1] * [\gamma_2]) \end{aligned}$$

y tenemos la igualdad buscada. Veamos ahora que tiene inversa considerando  $F_{\tilde{\alpha}}$  que por definición es  $F_{\tilde{\alpha}}([\beta]) = [\tilde{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$  y que además verifica

$$\begin{aligned} (F_{\tilde{\alpha}} \circ F_\alpha)([\gamma]) &= F_{\tilde{\alpha}}([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) = [\tilde{\alpha}] * ([\alpha] * [\gamma] * [\tilde{\alpha}]) * [\alpha] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X, y)}([\gamma]) \\ (F_\alpha \circ F_{\tilde{\alpha}})([\gamma]) &= F_\alpha([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) = [\alpha] * ([\tilde{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\tilde{\alpha}] = [\gamma] = Id_{\pi_1(X, x)}([\gamma]) \end{aligned}$$

por lo que es su inversa. Hemos encontrado por tanto un homomorfismo biyectivo, luego  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$  □

---

<sup>1</sup>aquí es donde usamos que es estrellado