Álgebra I (Doble Grado Informática-Matemáticas)

Curso 22-23.

Relación 2

1.- Dar ejemplos de relaciones binarias en un conjunto que verifiquen una sola de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva.

2. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots, \}$ el conjunto de los números naturales, Sobre $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos $(a, b) \sim (c, d)$ si $a + d = b + c$.
   (a) Verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   (b) Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ la aplicación definida por $f(a, b) = a - b$. Verificar que f induce una biyección $\mathbb{N}^2/\!\sim\, \cong \mathbb{Z}$.

3. Sea $f : S \to T$ una aplicación.
   (a) Probar que f define una relación de equivalencia R_f en S, donde aR_fb si $f(a) = f(b)$ (esta relación se llama *la relación núcleo de* f).
   (b) Probar que, si f es sobreyectiva, induce una biyección $S/R_f \cong T$.

4. Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto. Sea $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ la aplicación tal que $f(A) = A \cap Y$, para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.
   (a) Probar que f es una sobreyección.
   (b) Describir la relación R_f, núcleo de f.
   (c) Probar que f induce una biyección $\mathcal{P}(X)/R_f \cong \mathcal{P}(Y)$.

5. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto S. La aplicación $p : S \to S/R$ definida por $p(a) = \bar{a}$ es llamada la *proyección canónica* de S sobre el cociente ¿Qué relación hay entre R y R_p?

6. Un subconjunto $P \subseteq \mathcal{P}(S)$ es llamado una *partición del conjunto* S si
   (a) $\forall A \in P,\ A \neq \emptyset$.
   (b) $\bigcup_{A \in P} A = S$.
   (c) Para cualesquiera $A, B \in P$, $A \neq B$, se verifica que $A \cap B = \emptyset$.

   Así, por ejemplo, el conjunto cociente S/R, para R una relación de equivalencia sobre S, es una partición.

   Sea P una partición de S. Definimos la aplicación $p : S \to P$ por $p(a) = A$ si $a \in A$. ¿Qué relación hay entre P y S/R_p?

7. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Calcular todas las particiones de X.

8. Sea $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y $f : X \to Y$ la aplicación dada por: $f(0) = c, f(1) = f(2) = a, f(3) = b$. Consideremos la aplicación $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.
   (a) ¿Es f^* inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?
   (b) Describir la relación R_{f^*} asociada a f^* y el conjunto cociente $\mathcal{P}(Y)/R_{f^*}$.

9. Sea X un conjunto e $Y \subseteq X$ un subconjunto suyo. En el conjunto $\mathcal{P}(X)$ se define la siguiente relación binaria:

$$A \sim B \iff A \cap Y = B \cap Y.$$

   Demostrad que dicha relación es de equivalencia. Para $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{1, 4\}$ describid el conjunto cociente.

10. Sea X un conjunto e $Y \in \mathcal{P}(X)$. Definimos la aplicación $f : X \to \mathcal{P}(X)$ por $f(x) = Y \cup \{x\}$, para $x \in X$ y consideramos en X la relación de equivalencia R_f (Ejercicio 3). Describir el conjunto cociente X/R_f. Si X es un conjunto finito con n elementos e Y tiene m elementos, calcular el cardinal de X/R_f.