Cálculo II
(Grupo 1º A)
Relación de Ejercicios nº 1

Ejercicio 1.1: Estudiar la derivabilidad de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = [-1,1]$ y $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,
b) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$,
c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$,
d) $A = \mathbb{R}_0^+$ y $f(x) = x^x$ si $x \in \mathbb{R}^+$, y $f(0) = 0$.

Ejercicio 1.2: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Determinar los valores de α y β que hacen que el punto $(2,4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

Ejercicio 1.3: Sea f una función tal que $f(x+h) = f(x) + 3xh + h^2 - 2h$, para cada $x, h \in \mathbb{R}$, calcular $f'(0)$ y $f'(2)$.

Ejercicio 1.4: Estudiar la derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y determinar su imagen.

Ejercicio 1.5: Estudiar la derivabilidad y el comportamiento en $\pm\infty$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 1.6: Calcular las siguientes derivadas en los puntos indicados:

a) $(f^{-1})'(9)$, siendo $f(x) = x^3 + 1$,
b) $(f^{-1})'(16)$, siendo $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 10$.
c) $(f^{-1})'(2)$, siendo $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x + 2}$.
d) $(g^{-1})'(9)$, siendo $f(x-2) = x^3 + 1$ y $g(x) = f(\operatorname{arctg} x)$.
e) $(g \circ f^{-1})'(6)$, siendo $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$ y $g(x) = \frac{x^3+6x^2+9x+5}{x^4+1}$.

Ejercicio 1.7: Calcular la imagen de las siguientes funciones:

a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, para cada $x \in [0,1]$,
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, para cada $x \in \mathbb{R}$,

c) $f:]0,1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x-1}{x(x+1)},$ para cada $x \in]0,1[$,

d) $f: [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^2},$ para cada $x \in [-1,1]$,

e) $f\ : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{1+|x|},$ para cada $x \in [-1,1]$,

f) $f:\ ]-1,1[\to \mathbb{R},\ f(x) = x(1-x^2)^{-1/2}$, para cada $x \in]-1,1[$.

Ejercicio 1.8: Demostrar las siguientes desigualdades para los valores de x indicados en cada caso:

a) $\frac{x}{1+x} < \mathrm{Ln}(1+x) < x$, para todo $x > 0$,

b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$ para todo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

c) $\frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x,$ para todo $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Ejercicio 1.9: Determinar el número de ceros y la imagen de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2,$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.10: Calcular el número de soluciones de la ecuación $3 \ln x - x = 0$.

Ejercicio 1.11: Dado $a > 1$, probar que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

Ejercicio 1.12: Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x + \ln x + \operatorname{arctg} x$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución.

Ejercicio 1.13: Probar que la ecuación $x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$ tiene una única raíz real y determinar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Ejercicio 1.14: Probar que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 1.15: Calcular la imagen de la función $f\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/x}$.

Ejercicio 1.16: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación dada por $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Ejercicio 1.17: Sea $f\ : [-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x},$ si $x \neq 0,$ y $f(0) = e^2$. Estudiar la derivabilidad de f.

Ejercicio 1.18: Estudiar el comportamiento de la función $f: A \to \mathbb{R}$ en el punto $\alpha,$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2, +\infty[\ ,\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \quad (x \in A), \quad \alpha = 2.$

b) $A = \mathbb{R}^+\backslash\{1\},\ f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \quad (x \in A), \quad \alpha = 1.$

c) $A =]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} \quad (x \in A), \quad \alpha = 1.$

d) $A = \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^5} \quad (x \in A), \quad \alpha = 0.$

e) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\operatorname{sen} x} \quad (x \in A), \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$

f) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x} \quad (x \in A), \quad \alpha = 0.$

g) $A = \mathbb{R}^+\backslash\{e\},\ f(x) = x^{\frac{1}{\ln x - 1}} \quad (x \in A), \quad \alpha = e.$

h) $= \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} \qquad (x \in A), \quad \alpha = 0.$

Ejercicio 1.19: Estudiar el comportamiento en cero de la función $f: A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}} \ (x \in A),$

b) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \ (x \in A),$

c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen}^3 x} \ (x \in A),$

d) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = (1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}} \ (x \in A),$

e) $A = \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$

Ejercicio 1.20: Sea $a \in \mathbb{R}$, y sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 - \operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} & \text{si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\backslash\{0\} \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en función del valor del parámetro a.

Ejercicio 1.21: Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f: A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}}, \qquad a \in \mathbb{R}^+.$

b) $A =]1, +\infty[,\ f(x) = \frac{x(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}.$

c) $A = \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^a \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad (a \in \mathbb{R}).$

d) $A = \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\ln x}.$

Ejercicio 1.22: Dadas las funciones $f, g: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$, demostrar que si f es derivable en a, siendo $f(a) = 0$, y si g es continua en a entonces fg es derivable en a.

Ejercicio 1.23: Sea $r > 1$. Si f es una función real de variable real tal que $|f(x)| \leq |x|^r$ en algún intervalo abierto que contenga al cero, demostrar que entonces f es derivable en cero.