Cálculo II
(Grupo 1º A)
Relación de Ejercicios nº 5

Ejercicio 5.1: Calcular usando el Teorema de Cauchy para integrales que
$$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}, \qquad (p \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Ejercicio 5.2: Justificar las siguientes desigualdades:

(i) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < 1.$

(ii) $\frac{1}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{4}.$

Ejercicio 5.3: Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(x) \geq 0$, para cada $x \in [a,b]$. Demostrar que si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $f = 0$.

Ejercicio 5.4: Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función continua verificando que $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$, para cada $x \in [0,1]$. Demostrar que $f = 0$.

Ejercicio 5.5: Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$
Demostrar que entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Ejercicio 5.6: Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\alpha = \int_a^b f(x)dx$ sí, y solo si, para cada partición P de $[a,b]$ existe al menos una suma de Riemann $\sigma(f,P)$ tal que $\alpha = \sigma(f,P)$.

Ejercicio 5.7: Sea $r > 0$ y sea $f\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que:

i) Si f es par entonces $\int_{-r}^r f(x)dx = 2\int_0^r f(x)dx$.

ii) Si f es impar entonces $\int_{-r}^r f(x)dx = 0$.

Ejercicio 5.8: Demostrar que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica, de periodo T entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t+x)dt.$$

Ejercicio 5.9: Calcular los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}\ldots+\frac{1}{2n^2}\right)\right]$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\cdots+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)\right]$.

Ejercicio 5.10: Demostrar que la función $f(x)=\frac{e^x\operatorname{sen}x}{x}$ es integrable en $[0,1]$ verificándose que $0\leq\int_0^1 f(x)dx\leq e-1$.

Ejercicio 5.11: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable. Demostrar que si para cada $c,d\in[a,b]$ tales que $a<c<d<b$ existe $x\in]c,d[$ verificando que $f(x)=0$, entonces $\int_a^b f(x)dx=0$.

Ejercicio 5.12: Demostrar que la composición de dos funciones integrables puede no ser una función integrable.

Ejercicio 5.13: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada que es integrable. Sea $c\in\mathbb{R}$. Si $g:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$ está dada por $g(x)=f(x-c)$, para $x\in[a+c,b+c]$, demostrar que g es integrable siendo

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+c}^{b+c} g(x)dx.$$

Dedúzcase que, para cada $h\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a-h}^{b-h} f(x+h)dx.$$

Ejercicio 5.14: Sea $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ una función positiva y estrictamente decreciente. Demuéstrese que para cada $n,p\in\mathbb{N}$ se verifica que

$$f(n+p)+\int_n^{n+p} f(x)dx<f(n)+f(n+1)+\cdots+f(n+p)<f(n)+\int_n^{n+p} f(x)dx.$$

Como consecuencia demostrar que $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}}>\sqrt{p}$, para $p\geq 2$.

Ejercicio 5.15: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-x^2}$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $h(x)=\int_0^{\operatorname{sen}x} f(t)dt$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Demostrar que h es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.

Ejercicio 5.16: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-x^2}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Sea $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Estudiar la continuidad uniforme de la función g y su derivabilidad.

Ejercicio 5.17: Estudiar la derivabilidad de la función F: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$ y calcular $F'(1)$.

Ejercicio 5.18: Probar que todas las funciones continuas $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3} f(x)$ son derivables en $\mathbb{R}_0^+$. Determinar el conjunto de dichas funciones.

Ejercicio 5.19: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua. Justificar que la función dada por $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)dt$, para cada $x \in \mathbb{R}$, es derivable y calcular su derivada.

Ejercicio 5.20: Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

i) $F_1(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^3 t \, dt$,

ii) $F_2(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$,

iii) $F_3(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$.

Ejercicio 5.21: Sea $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y determinar los extremos relativos de dicha función. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3-x^2)}$.

Ejercicio 5.22: Sea $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \int_0^{x-1} \left(e^{-t^2} - e^{-2t}\right) dt$. Calcular su máximo absoluto. Sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi} - 1\right)$, calcular el mínimo absoluto de f.

Ejercicio 5.23: Sea H : [-1,1] $\to \mathbb{R}$ la función dada por $H(x) = \int_0^{\pi x^2} e^{2t} \operatorname{sen} t \, dt$, para cada $x \in$ [-1,1]. Estudiar los extremos absolutos y relativos de la función H y determinar su imagen.

Ejercicio 5.24: Probar que la función f: [1,2]$\to \mathbb{R}$ dada por $f(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}}$, para cada $y \in$ [1,2] es lipschitziana.

Ejercicio 5.25: Dado $a > 0$, calcular la imagen de la función $G: [-a, a] \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2}dt$.

Ejercicio 5.26: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = 0$ y $\int_a^b f(t)dt = 0$. Definimos la función $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ como $F(a) = 0$ *y*

$$F(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a} \text{ si } x \neq a \,.$$

Probar que F es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b]$. Demostrar que si f es derivable en a entonces F es derivable en $[a, b]$ y existe $c \in]a, b[$ tal que $F'(c) = 0$.

Ejercicio 5.27: Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \int_0^x \operatorname{sen} t^2 \, dt}{\operatorname{sen} x^4}$.

Ejercicio 5.28: Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln(t) \arctan(t) \, dt}{x^2 e^x}$.

Ejercicio 5.29: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $I_n := \int_a^b f(x) \cos nx \, dx$ y $J_n := \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$. Demostrar que las sucesiones $\{I_n\}$ y $\{J_n\}$ convergen a cero.

Ejercicio 5.30: Demostrar que para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se verifica que

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen} \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4}.$$