Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

Índice general

1. Espacios Topológicos

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es una par $(X, \mathcal{T})$, donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X.

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(A3) Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

A la familia $\mathcal{T}$ se le llama **topología** en el conjunto X. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama **abiertos** en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

Observación. De **(A1)** podemos concretar que si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{T}$. En general, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$ no tiene por qué ser abierto.

Ejemplo.

- •) **Topología trivial:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$ es un e.t[1].
- •) **Topología discreta:** Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$ es un e.t.
- •) **Topología del punto incluido:** Sea $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$ es un e.t.
- •) **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i \right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) (\text{intersección de finitos es finito})$$
$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) (\text{unión de finitos es finito})$$

- •) **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un e.t.
- •) $\mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}, \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un e.t.
- •) **Topología de Sierpinski:** $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$ es un e.t.
- •) **Topología de Sorgenfrey:** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_S$, $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subset U$. (es un caso particular del punto incluido, $\mathcal{T}_a$).

[1] A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

Observación. En $X = \{x\}$ solo existe una topología, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$ (todas las topologías son la misma).

Ejercicio 1. Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos $X = \{a, b\}$. Las topologías posibles son:

- •) Trivial: $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$
- •) Discreta: $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$
- •) Punto incluido (a): $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$
- •) Punto incluido (b): $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

■

Ejercicio 2. Sea $(X, \mathcal{T})$ e.t. Demostrar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \;\; \forall x \in X$.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$, como $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \;\; \forall x \in X$, se tiene que $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$.

$\Leftarrow$) Tenemos $\{x\} \in \mathcal{T} \;\; \forall x \in X$. Consideramos $U \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunto cualquiera de X. Podemos expresar $U = \bigcup\limits_{i \in I} \{x_i\}$, donde $\{x_i\} \in X \;\; \forall i \in I$. Por la propiedad **(A2)** tenemos $U \in \mathcal{T}$. Como U era un subconjunto arbitrario de X, tenemos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$.

■

1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

(D1) $d(x, y) \geqslant 0 \;\; \forall x, y \in X$. Además, $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D2) (simetría) $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y, \in X$.

(D3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \;\; \forall x, y, z \in X$

A la aplicación d la llamaremos **distancia**.

Ejercicio 1.1.1. Demostrar que a partir de las propiedades **(D2)**, **(D3)** y la segunda parte de **(D1)** se puede deducir la primera parte de **(D1)**, y como consecuencia se tiene $d : X \times X \to [0, \infty)$.

Para cualesquiera $x, y \in X$, tenemos:

$$0 \overset{\mathbf{(D1)}(2)}{=} d(x, x) \overset{\mathbf{(D3)}}{\leqslant} d(x, y) + d(y, x) \overset{\mathbf{(D2)}}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow d : X \times X \to [0, \infty)$$

■

Definición 1.3. (X, d) e.m. $x \in X$, $r > 0$, se definen:

•) La **bola (abierta)** de centro x y radio r como

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\} \subset X$$

•) La **bola cerrada** de centro x y radio r como

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant r\} \subset X$$

•) La **esfera** de centro x y radio r como

$$S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\} \subset X$$

Algunas propiedades que se deducen de la definición anterior son:

•) $\overline{B}(x,r) = B(x,r) \cup S(x,r)$

•) $S(x,r) = \overline{B}(x,r) \setminus B(x,r)$

•) Si $s < r$, entonces $\overline{B}(x,x) \subset B(x,r)$

Ejemplo. (Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ consideramos la **distancia usual**,

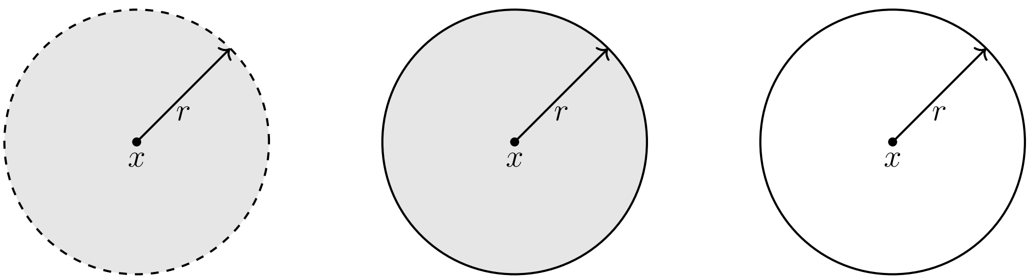
$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

•) Si $n = 1$, $d(x,y) = |x - y|$,,

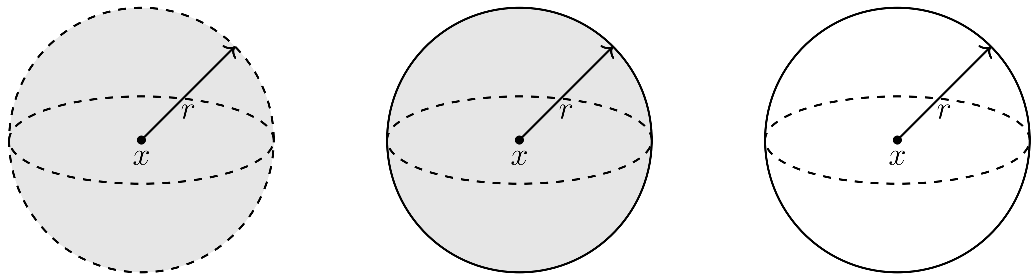
$$\begin{aligned} B(x,r) &= (x - r, x + r) \\ \overline{B}(x,r) &= [x - r, x + r] \\ S(x,r) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

•) En $n = 2$ tenemos



$B(x,r) \equiv$ disco $\quad \overline{B}(x,r) \equiv$ disco cerrado $\quad S(x,r) \equiv$ circunferencia

•) En $n = 3$ tenemos:



$B(x, r) \equiv$ bola $\overline{B}(x, r) \equiv$ bola cerrada $S(x, r) \equiv$ esfera

Ejemplo. $X \neq \emptyset$ se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x, y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r > 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x, y) = \begin{cases} X & \text{si} \quad r \geqslant 1 \\ \{x\} & \text{si} \quad r < 1 \end{cases}$$

$$S(x, y) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si} \quad r = 1 \\ \emptyset & \text{si} \quad r \neq 1 \end{cases}$$

Ejemplo.

•) Si d es una distancia en X y $\lambda > 0$, entonces $\lambda \cdot d : X \times X \to [0, \infty)$ también es una distancia y $B_{\lambda d}(x, r) = B_d(x, \frac{r}{\lambda})$

•) Sean d y $\tilde{d}$ distancias en X y $d \leqslant \tilde{d}$, entonces $B_d(x, r) \geqslant B_{\tilde{d}}(x, r)$

Definición 1.4. (X, d) e.m. Un subconjunto $U \subset X$ se dice **abierto métrico** si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U, \ \exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

Proposición 1.1. *Si (X, d) es un espacio métrico, entonces*

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ es un abierto métrico en } (X, d)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

*es una topología en X que llamamos la **topología métrica** en (X, d).*

Demostración.

(A1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}_d$ trivialmente.

(A2) Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_d$. ¿$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$?

Si $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Supongamos $\bigcup_{i\in I} U_i \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists r > 0 :$ $B(x,r) \subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(A3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$. ¿$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$?

Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ se verifica.

Supongamos $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces puedo considerar $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : B(x, r_1) \subset U_1$ y $B(x, r_2) \subset U_2 \Rightarrow B(x, \text{mín}\{r_1, r_2\}) \subset U_1 \cap U_2$

□

Definición 1.5. Se llama **topología usual de** $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_u$, a la topología métrica en $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, es decir, $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ si $U = \emptyset$ o si $\forall x \in U \;\; \exists r > 0 : B(x,r) \subset U$.

Proposición 1.2. (X,d) *e.m. Se cumplen:*

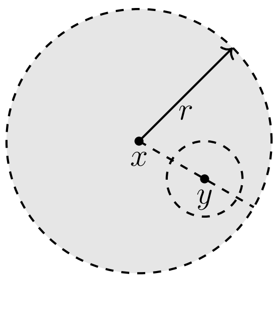
(i) Las bolas abiertas en (X,d) son abiertos.

(ii) Todo abierto no vacío en (X,d) se puede escribir como unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.

Demostración.

(i) Sea $x \in X$, $r > 0$, ¿$B(x,r) \in \mathcal{T}_d$?

Sea $y \in B(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : d(x,y) + \varepsilon < r \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$. Para ver esta última implicación tenemos que si tomamos un $z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B(x,r)$.



(ii) Sea $U \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall x \in U \;\; \exists r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x\in U} B(x, r_x) = \bigcup_{x\in U} \overline{B}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$.

□

Corolario 1.2.1. *En (X,d) tenemos*

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

Ejemplo.

- •) (X, d) e.m. En general, no todo abierto es una bola. Pir ejemplo la unión de bolas no concéntricas.
- •) No todo conjunto en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es abierto. Por ejemplo $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto.
- •) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ los únicos intervalos abiertos (topológicamente) son los intervalos abiertos, es decir, los del tipo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, (a, b) con $a < b$, $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$.
- •) En (X, d), en general la intersección infinita de abiertos no es abierto. Por ejemplo, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ que no es abierto.
- •) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$ (la topología asociada a la distancia discreta es la distancia discreta).

Definición 1.6. Sean $X \neq \emptyset$ y d_1, d_2 distancias en X. Decimos que d_1 y d_2 son **equivalentes** si existen $a, b > 0$ tal que

$$a \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant b \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Proposición 1.3. *Si d_1, d_2 son distancias en $X \neq \emptyset$ y existe $a > 0$ tal que $a \cdot d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \quad \forall x, y \in X$, entonces $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. En particular, si d_1 y d_2 son equivalentes, entonces $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{T}_{d_1}$, $U \neq \emptyset$, ¿$U \in \mathcal{T}_{d_2}$?
Sea $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1} \Rightarrow \exists r > 0 : B_{d_1}(x, r) \subset U$. Como $a \cdot d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset B_{d_1}(x, r)$. Para verlo sea $y \in B_{d_2}(x, a \cdot r) \Rightarrow d_2(x, y) < a \cdot r \Rightarrow a \cdot d_1(x, y) < r \Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r)$. Por tanto $B_{d_1}(x, r) \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2} \Rightarrow T_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$. □

Definición 1.7. Un e.t. $(X, \mathcal{T})$ se dice **metrizable** si existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Ejemplo.

- •) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es metrizable.
- •) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ es metrizable.

Ejercicio 1.1.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un e.t. metrizable, entonces cumple la condición de Hausdorff:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} : U \cap V = \emptyset$$

Ejemplo.

- •) $(X, \mathcal{T}_t)$ no es metrizable si $\#X > 2$ (cardinal del conjunto) ya que no verifica la condición de Hausdorff.
- •) $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ no es metrizable por la misma razón (ya que la intersección de cualesquiera dos abiertos va a contener a x_0).

- •) $(X, \mathcal{T}_{CF})$ no es metrizable si X es infinito (aplicar las leyes de morgan para la intersección).
- •) $(X, \mathcal{T}_{CN})$ no es metrizable si X no es numerable.
- •) $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$.
- •) La topología de Sierpinski tampoco es metrizable (ya que el único abierto que contiene a b es el total).
- •) La topología de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ cumple la propiedad de Hausdorff.