GEOMETRÍA I. DGIIM

APLICACIONES LINEALES

Relación de problemas

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales o no:

   a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x-y,x+3y,2y)$.

   b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(2x-3y,z^2-x+2,3y-z-x)$.

   c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[u]$, $f(x,y,z)=(2x+z)u^2+(y-z)u+2y$.

   d) $f:\mathbb{R}^3\to M_2[\mathbb{R}]$, $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y-z & x+2z \\ y-3z & 2x+y+z \end{pmatrix}$.

   Para las aplicaciones que sean lineales, calcular su núcleo e imagen, y comprobar la fórmula de las dimensiones.

2. Calcular una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ cuyo núcleo esté generado por $\{(1,0,-1),(2,0,1)\}$ y cuya imagen esté generada por $(1,-2)$.

3. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ (esto es, f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ en sí mismo) de manera que $f(U)=U'$ donde

$$U=\{(a,b,0)\in\mathbb{R}^3 : a,b\in\mathbb{R}\},\qquad U'=\{(c,c+d,d)\in\mathbb{R}^3 : c,d\in\mathbb{R}\}.$$

4. Sea $f:V\to V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Demostrar que f es lineal si y sólo si el grafo de f, es decir, el conjunto:

$$G(f)=\{(v,v')\in V\times V' / \, v'=f(v)\}$$

   es un subespacio vectorial de $V\times V'$. Calcular también la dimensión de este subespacio cuando V y V' son espacios finitamente generados.

5. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Consideremos el espacio vectorial producto $V_1\times V_2$ definido en el ejercicio 3 de la relación de problemas anterior.

   a) Demostrar que la *proyección i-ésima* $\pi_i : V_1\times V_2\to V_i$ dada por $\pi_i(v_1,v_2)=v_i$ es un epimorfismo para cada $i=1,2$.

b) Demostrar que las *inclusiones* $i_1 : V_1 \to V_1 \times V_2$ e $i_2 : V_2 \to V_1 \times V_2$ dadas por:

$$i_1(v_1) = (v_1, 0), \quad i_2(v_2) = (0, v_2)$$

son monomorfismos.

6. Sea V un espacio vectorial sobre K y $f : V \to V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = f$. Demostrar que $V = \mathrm{Nuc}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = \mathrm{Id}_V$. Demostrar que f es un automorfismo y que $V = U \oplus W$, donde:

$$U = \{v \in V : f(v) = v\}, \quad W = \{v \in V : f(v) = -v\}.$$

8. En el espacio $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes complejos se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix}.$$

Definimos la aplicación $R : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ dada por $R(X) = X \cdot A$. Demostrar que R es un automorfismo y calcular su expresión matricial con respecto a una base B de $M_2(\mathbb{C})$. ¿Cuál es la matriz $M(R^{-1}, B)$?

9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z,t) = (x+z-t, y+t, x+y+z).$$

Se pide lo siguiente:

a) Calcular bases del núcleo y de la imagen de f. ¿Es f un monomorfismo o un epimorfismo?

b) Sean $U = L((1,2,1,2),(0,-1,2,3))$ y $U' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y=0\}$. Calcular $f(U)$ y $f^{-1}(U')$.

c) Encontrar bases B de $\mathbb{R}^4$ y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $M(f, B' \leftarrow B)$ sólo tenga unos y ceros.

10. Sean V y V' dos espacios vectoriales reales con bases $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, respectivamente. Si $f : V \to V'$ es la aplicación lineal definida por:

$$f(v_1) = v'_1 + v'_2 - 4v'_3, \; f(v_2) = 2v'_1 + v'_2 - 2v'_3, \; f(v_3) = 3v'_1 + v'_2, \; f(v_4) = v'_1 + 2v'_3,$$

calcular la matriz $M(f, B' \leftarrow B)$. Calcular bases de $\mathrm{Nuc}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

11. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que verifica las propiedades:

$$f(1,0,1) = (-1,2,0), \quad f(1,-1,0) = (1,2,1), \quad \operatorname{Nuc}(f) = L((0,3,7)).$$

Obtener la expresión matricial de f con respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$. Calcular la matriz de f con respecto a la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$.

12. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con núcleo $\operatorname{Nuc}(f) = L((1,1,0))$ e imagen dada por $\operatorname{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - 3y = 0\}$. ¿Es f único en estas condiciones? Analizar si es posible encontrar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ de forma que:

$$M(f,B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

øEs posible de modo que esta ˙ltima matriz sea $M(f,B)$?

13. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tiene por matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases $B = ((1,0,1),(1,1,1),(2,1,0))$ y $B' = (1, 1+2x, -x^2)$, respectivamente. Calcular la matriz que representa a f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ y la base $B_3 = (1,x,x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcular también bases del núcleo y de la imagen de f.

14. Calcular:

   a) Una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(Id_{\mathbb{R}^3}, B_u \leftarrow B)$ sea la matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(Id_{\mathbb{R}^3}, B' \leftarrow B_u)$ sea la matriz A anterior.

15. Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ dos aplicaciones lineales. Supongamos que B es una base de V, $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ es una base de V', B'' es una base de V'', y:

$$M(f,B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M(g,B'' \leftarrow \overline{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

donde $\overline{B}' = (2v'_2 - v'_3, v'_2 - v'_3, 3v'_1 + v'_2 - v'_3)$. Calcular $M(g \circ f, B'' \leftarrow B)$.

16. Se consideran dos aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $f : V \to V', g : V' \to V''$. Demuéstrese:

    $g \circ f$ es la aplicación nula si y sólo si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Nuc}(g)$.

17. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un e.v tal que $f \circ f = 0$. Demuéstrese:

    (a) Si $v_1, \dots, v_r \in V$ verifican que $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ es linealmente independiente entonces $(v_1, \dots, v_r, f(v_1), \dots, f(v_r))$ es linealmente independiente.

    (b) Si $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, existe una base B de V tal que, escribiendo la matriz por cajas:

$$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

    donde I_r es la matriz identidad de orden $r \leq n/2$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe que:

$$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1) \quad \text{y} \quad f(1,0,1,0) = (1,1,1,0).$$

    Calcular la matriz de f respecto de la base usual en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

    b) $f \circ f = f$.

    c) $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^4}$.

    ¿Cúal es, en cada caso, la imagen del vector $(1,3,7,1)$?

19. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

    a) Calcular los valores de a para los que A y A' son equivalentes.

    b) Para dichos valores de a encontrar matrices $P \in GL(4,\mathbb{R})$ y $Q \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

    c) Para los valores de a calculados en el primer apartado se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a las bases usuales es A. Calcular una base B de $\mathbb{R}^4$ y una base B' de $\mathbb{R}^3$ de forma que $M(f, B' \leftarrow B) = A'$.

20. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Existe un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1,0,0) = (2,0,1)$, $f(0,1,0) = (0,0,0)$ y $f(1,1,0) = (2,-1,7)$.

b) Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ distinta de la aplicación lineal cero y con núcleo distinto de $\{0\}$.

c) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ cumplen que $A \cdot B = I_m$ y $B \cdot A = I_n$ entonces $m = n$.

d) Existe un isomorfismo $f : \mathbb{C}_5[x] \to M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$.

e) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$ entonces existe un epimorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

f) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$ entonces existe un monomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

g) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n+m}$.

h) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene menos ecuaciones que incógnitas entonces el sistema no puede ser compatible determinado.

i) Existe un automorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de forma que:

$$f(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0\}.$$

j) Para cada $r \in \mathbb{R}$ la aplicación $f_r : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por:

$$f_r(ax^2 + bx + c) = rax^2 + bx + c$$

es un automorfismo.

21. (La traza de un endomorfismo) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Se define la *traza* de A como el escalar de K dado por:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que la aplicación $\operatorname{tr} : M_n(K) \to K$ que asocia a cada matriz cuadrada su traza es lineal.

b) Probar que $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$ para cualesquiera $A, B \in M_n(K)$. Deducir que dos matrices semejantes tienen la misma traza.

c) Utilizar el apartado anterior para definir la traza de un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre K.

d) Encontrar dos matrices con el mismo rango y la misma traza que no sean semejantes.

Arturo Olivares Martos 8/12/22

Rel. Geometría T.3

① ¿Son lineales? Si es lineal, calcular $Ker(f)$ y $Im(f)$

a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x,y) = (x-y, x+3y, 2y)$

Sea $a,b \in \mathbb{R}$, $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$f\big(a(x,y)+b(x',y')\big) = f(ax+bx', ay+by') =$$

$$= (ax+bx'-ay-by', ax+bx'+3ay+3by', 2ay+2by') =$$

$$= \big(a(x-y)+b(x'-y'), a(x+3y)+b(x'+3y'), a(2y)+b(2y')\big) =$$

$$= a(x-y, x+3y, 2y) + b(x'-y', x'+3y', 2y') =$$

$$= a f(x,y) + b f(x',y')$$

Por tanto, f sí es lineal.

Calculamos ahora $Ker(f)$ y $Im(f)$.

$$Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0 = (x-y, x+3y, 2y)\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{array}{l} x-y=0 \\ x+3y=0 \\ 2y=0 \end{array}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x=y=0\} = \{0\}$$

Para calcular $Im(f)$, calculo un sistema generador suyo.

Como $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(\{(1,0),(0,1)\})$,

$$Im(f) = \mathcal{L}(\{f(1,0), f(0,1)\}) = \mathcal{L}(\{(1,1,0), (-1,3,2)\})$$

Como $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$, forman base.

Por tanto, como $\left.\begin{array}{l} dim(Ker f) = 0 \\ dim(Im(f)) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow dim(\mathbb{R}^2) = 2 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 0+2 = 2$

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x-3y,\ z^2-x+2,\ 3y-z-x)$

Como $f(0,0,0) = (0,2,0) \neq (0,0,0)$, f no es una aplicación lineal.

c) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[u]$ $f(x,y,z) = (2x+z)u^2 + (y-z)u + 2y$

Sea $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$,

$$f\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f(x+x', y+y', z+z') =$$
$$= (2x+2x'+z+z')u^2 + (y+y'-z-z')u + 2y + 2y'$$
$$= \big[(2x+z)u^2 + (y-z)u + 2y\big] + \big[(2x'+z')u^2 + (y'-z')u + 2y'\big] =$$
$$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$af(x,y,z) = a(2x+z)u^2 + a(y-z)u + 2ay =$$
$$= (2(ax)+(az))u^2 + ((ay)-(az))u + 2(ay) =$$
$$= f(ax, ay, az) = f(a(x,y,z))$$

Por tanto, sí es una aplicación lineal.

$\underline{Ker(f)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (2x+z)u^2 + (y-z)u + 2y = 0\}$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} 2x+z=0 \\ y-z=0 \\ 2y=0 \end{array}\right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=y=z=0\} = \underline{\{0\}}$$

Como $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$,

$$Im(f) = \mathcal{L}(\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}) =$$
$$= \underline{\mathcal{L}(\{2u^2,\ u+2,\ u^2-u\})} = \mathcal{L}(\{(2,0,0),(0,1,2),(1,-1,0)\})$$

al expresarlos en B_u

Arturo Olivares Martos 9/12/22

Como $rg \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$, son también linealmente independientes,

por lo que forman base.

Como $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V) = \dim(\mathbb{R}^3)$,
$$0 + 3 = 3 \Longrightarrow \text{se cumple}$$

d) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2[\mathbb{R}]$ $\quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-z & x+2z \\ y-3z & 2x+y+z \end{pmatrix}$

Sea $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$$f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y-z+x'+y'-z' & x+2z+x'+2z' \\ y-3z+y'-3z' & 2x+y+z+2x'+y'+z' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y-z & x+2z \\ y-3z & 2x+y+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y'-z' & x'+2z' \\ y'-3z' & 2x'+y'+z' \end{pmatrix} =$$

$$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$$

$$f(a(x,y,z)) = f(ax, ay, az) = \begin{pmatrix} a(x+y-z) & a(x+2z) \\ a(y-3z) & a(2x+y+z) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x+y+z & x+2z \\ y-3z & 2x+y+z \end{pmatrix} =$$

$$= a\, f(x,y,z).$$

Por tanto, sí es una aplicación lineal.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z)=0\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} x+y-z & x+2z \\ y-3z & 2x+y+z \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x+2z=0 \\ y-3z=0 \\ \cancel{2x+y+z=0} \\ 1^a+2^a \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x=-2z \\ y=3z \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{r} \cancel{-2z}+\cancel{3z}\cancel{-z}=0 \\ x=-2z \\ y=3z \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{r} x=-2z \\ y=+3z \end{array}\right\}$$

Como $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}) =$$

$$= \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right) =$$

$= \mathcal{L}(\{(1,1,0,2),(1,0,1,1),(-1,2,-3,1)\})$ expresados en la base canónica de $M_2[\mathbb{R}]$.

Como $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, el 3^{o} vector es lin. dep.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 1^{er}$ y 2^{o} vector lin. indep.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-6+2+3=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-4+3=0$$

$$\mathrm{Img}(f) = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \underline{\mathcal{L}(\{(1,1,0,2),(1,0,1,1)\})}$$

Para comprobar la fórmula de las dimensiones,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$1 + 2 = \underline{3}$$

Arturo Olivares Martos 9/12/22

② $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ / $\begin{array}{l} Ker(f) = \mathcal{L}(\{(1,0,-1),(2,0,1)\}) \\ Im(f) = \mathcal{L}(\{(1,-2)\}) \end{array}$

Sea $\mathcal{B}_u$ de $\mathbb{R}^3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Buscamos un vector linealmente independiente a $(1,0,-1)$ y $(2,0,1)$, para que no pertenezca a $Ker(f)$.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow e_2 \text{ es lin. indep.}$$

Por tanto, sabemos que:

$$f(1,0,-1) = 0 = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) \longrightarrow f(e_1) = f(e_3)$$
$$f(2,0,1) = 0 = f(2e_1 + e_3) = 2f(e_1) + f(e_3) \longrightarrow \underline{f(e_1) = f(e_3) = 0}$$
$$f(0,1,0) = (1,-2) = f(e_2)$$

Por tanto,

$$f(x,y,z) = x\overset{0}{\cancel{f(e_1)}} + yf(e_2) + z\overset{0}{\cancel{f(e_3)}} = yf(e_2) = y(1,-2) = (y,-2y)$$

Es decir,

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por } f(x,y,z) = (y,-2y)$$

③ $f \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ / $f(U) = U'$

$$U = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3\} \qquad U' = \{(c, c+d, d) \in \mathbb{R}^3\}$$

Como $f \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, $f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$

Por tanto, al ser f un isomorfismo, una base de $\mathbb{R}^3$ se aplica por f en una base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$

Como $e_1 \in U \Rightarrow f(e_1) \in U' \Rightarrow f(e_1) = (1,1,0)$

$e_2 \in U \Rightarrow f(e_2) \in U' \Rightarrow f(e_2) = (0,1,1)$

Como $e_3 \notin U$, no tengo restricción respecto a $f(e_3)$.

Sin embargo, para que $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ forme base, necesito que sean lin. indep.

Sea $f(e_3) = (0,0,1)$.

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Son lin. indep.} \rightarrow \text{Forman base de } \mathbb{R}^3.$$

Por tanto, una base de $\mathbb{R}^3$ se aplica por f en otra base de $\mathbb{R}^3$, siendo f por tanto un ~~epi~~ isomorfismo.

$$\underline{f(x,y,z)} = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) = x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(0,0,1) =$$
$$= \underline{(x, x+y, y+z)}$$

Si $z = 0 \Rightarrow (x,y,0) \in U \Rightarrow f(x,y,0) = (x, x+y, y) \in U'$

④ Sea $f: V \rightarrow V'$

f lineal $\Longleftrightarrow \mathcal{G}(f) = \{(v, f(v)) \in V \times V'\}$ es un sub. vectorial de $V \times V'$

$\Rightarrow$) Suponemos f lineal.

Sean $a, b \in K$, $u, v \in V \Rightarrow (u, f(u)), (v, f(v)) \in V \times V'$.

$$a(u, f(u)) + b(v, f(v)) = (au, f(au)) + (bv, f(bv)) =$$
$$= (au + bv, f(au+bv)) \in \mathcal{G}(f)$$

Por tanto, $\mathcal{G}(f)$ es un sub. vect. de $V \times V'$

$\Leftarrow$) Suponemos $\mathcal{G}(f)$ sub. vect. de $V \times V'$.

Sean $a, b \in K$, $v, u \in V$.

$$(au+bv, \underline{af(u)+bf(v)}) \overset{\text{op. en } V\times V'}{=} a(u, f(u)) + b(v, f(v)) \overset{\text{sup. vect.}}{=} (au+bv, \underline{f(au+bv)})$$

Por tanto, $af(u) + bf(v) = f(au+bv) \Rightarrow f$ es lineal

#

Arturo Olivares Martos 9/12/22

Calcular $\text{Dim}_K(\mathcal{G}(f))$

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

~~$[\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ base de $V']$~~

Sea $u \in V \to u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad a_i \in K \quad \forall i = 1, \dots, n$

Sea $(u, f(u)) \in \mathcal{G}(f)$

$(u, f(u)) = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)) =$ f es lineal por ser subespacio

$= (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)) =$

$= a_1 (v_1, 0) + \dots + a_n (v_n, 0) + a_1 (0, f(v_1)) + \dots + a_n (0, f(v_n))$

Por tanto,

$\{(v_1, 0), \dots (v_n, 0), (0, f(v_1)), \dots (0, f(v_n))\}$ sistema de generadores de $\mathcal{G}(f)$

Por tanto,

$\text{Dim}_K(\mathcal{G}(f)) = \dim_K(V) + \dim_K(\text{Im}(f))$

Los primeros n-vectores son lin. indep. por ser base de V; pero podría ocurrir que de la 2ª parte hubiere vectores lin. dep.

5 $V_1(K), V_2(K)$

a) $\Pi_i : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_i \qquad \Pi_i(v_1, v_2) = v_i$

Demostrar que es un epimorfismo para cada $i = 1, 2$

Sea $\mathcal{B}_1$ base de $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow V_1 = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1)$

$\mathcal{B}_2$ " " $V_2 = \{w_1, \dots, w_m\} \to V_2 = \mathcal{L}(\mathcal{B}_2)$

Base de $V_1 \times V_2 \quad \mathcal{B}_{1\times 2} = \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)\}$

$\text{Im}(\Pi_i) = \mathcal{L}(\{\Pi_i(v_1, 0), \dots, \Pi_i(v_n, 0), \Pi_i(0, w_1), \dots, \Pi_i(0, w_m)\})$

Si $i=1 \Rightarrow Im(\Pi_1) = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_n, 0, \overset{m\text{-veces}}{0, \dots, 0}\}) =$

$= \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_n\}) = V_1$

Si $i=2 \Rightarrow Im(\Pi_2) = \mathcal{L}(\{\overset{n\text{-veces}}{0, \dots, 0}, w_1, \dots, w_m\}) =$

$= \mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_m\}) = V_2$

Por tanto, como $Im(\Pi_i) = V_i$ para $i=1,2, \Rightarrow \Pi_i$ es un epimorfismo

b) $i_1 : V_1 \longrightarrow V_1 \times V_2$ $\quad i_1(v_1) = (v_1, 0)$

$i_2 : V_2 \longrightarrow V_1 \times V_2$ $\quad i_2(v_2) = (0, v_2)$

Demostrar que son monomorfismos

$Ker(i_1) = \{v_1 \in V_1 / f(v_1) = 0 = (0,0)\} = \{v_1 \in V_1 / (v_1, 0) = (0,0)\} =$

$= \{0\} \Rightarrow i_1$ es un monomorfismo

$Ker(i_2) = \{v_2 \in V_2 / f(v_2) = 0 = (0,0)\} = \{v_2 \in V_2 / (0, v_2) = (0,0)\} =$

$= \{0\} \Rightarrow i_2$ es un monomorfismo.

c) $f \in End_K(V) \; / \; f \circ f = f$ Demostrar que $V = Ker(f) \oplus Im(f)$

Demostramos en primer lugar que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$

Sea $x \in Ker(f) \cap Im(f)$

$\left.\begin{array}{l} x \in Ker(f) \Rightarrow f(x) \overset{\circledast}{=} 0 \\ x \in Im(f) \Rightarrow \exists y \in V / f(y) \overset{\circledast\circledast}{=} x \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \overset{\circledast}{=} f(x) \overset{\circledast\circledast}{=} f(f(y)) \overset{f \circ f = f}{=} f(y) \overset{\circledast\circledast}{=} x$

Por tanto, $x = 0$

Es decir, $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$

Arturo Olivares Martos 9/12/22

Veamos ahora que $V = Ker(f) + Im(f)$ por doble inclusión.

$\forall x \in Ker(f) + Im(f) \Rightarrow x = av + bw \,/\, v \in Ker(f) \subseteq V,\ w \in Im(f) \subseteq V,\quad a, b \in K$

Como V es cerrado para $+$, $av + bw = x \in V \rightarrow$

$\Rightarrow Ker(f) + Im(f) \subseteq V$.

Para la otra inclusión, veamos en primer lugar que $x - f(x) \in Ker(f)$.

Sea $x \in V$.

$$f(x - f(x)) \underset{\text{ap. lineal}}{=} f(x) - f(f(x)) \overset{f\circ f = f}{=} f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow x - f(x) \in Ker(f)$$

$$\forall x \in V,\quad x = x - f(x) + f(x) = 1\,(\underbrace{x - f(x)}_{\in Ker(f)}) + 1 \cdot \underbrace{f(x)}_{\in Im(f)} \Rightarrow x \in Ker(f) + Im(f)$$

$\Rightarrow V \subseteq Ker(f) + Im(f)$

Por tanto, $V = Ker(f) + Im(f)$

7) $f \in End(V) \,/\, f \circ f = Id_V$. Demostrar que $f \in Aut(K)$

Como $f \circ f = Id_V \Rightarrow f^{-1} = f \Rightarrow f$ es un isomorfismo.

Como además $f \in End(V) \rightarrow f \in Aut(V)$

Demostrar que $V = U \oplus W$ $\quad U = \{v \in V \,/\, f(v) = v\}$; $\quad W = \{v \in V \,/\, f(v) = -v\}$

Veamos que $U \cap W = \{0\}$.

$$\forall x \in U \cap W, \Rightarrow \begin{cases} x \in U \Rightarrow f(x) = x \\ x \in W \Rightarrow f(x) = -x \end{cases} \rightarrow f(x) = x = -x \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0.$$

$\Rightarrow U \cap W \subseteq \{0\}$

Como $\{0\} \subseteq U \cap W \rightarrow U \cap W = \{0\}$

Veamos ahora que $V = \mathcal{U} + W$.

$$\forall x \in \mathcal{U} + W \Rightarrow x = au + bv \,/\, \left.\begin{matrix} a, b \in K \\ u \in \mathcal{U} \subseteq V \\ v \in W \subseteq V \end{matrix}\right\} \rightarrow x \in V \Rightarrow \mathcal{U} + V \subseteq V.$$

$$\forall x \in V, \rightarrow x = \frac{x + f(x)}{2} + \frac{x - f(x)}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Veamos que $\frac{x + f(x)}{2} \in \mathcal{U}$

$$f\left(\frac{x + f(x)}{2}\right) = \frac{1}{2} f[x + f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + f(f(x))] = \frac{1}{2}[f(x) + x] =$$

$$= \frac{x + f(x)}{2} \Rightarrow \frac{x + f(x)}{2} \in \mathcal{U}.$$

Veamos que $\frac{x - f(x)}{2} \in W$.

$$f\left(\frac{x - f(x)}{2}\right) = \frac{1}{2} f[x - f(x)] = \frac{1}{2}[f(x) - x] = \frac{f(x) - x}{2} =$$

$$= -\frac{x - f(x)}{2} \Longleftrightarrow \frac{x - f(x)}{2} \in W.$$

Como $x = \underset{\mathcal{U}}{\underset{\cap}{\frac{x + f(x)}{2}}} + \underset{W}{\underset{\cap}{\frac{x - f(x)}{2}}} \Rightarrow x \in \mathcal{U} + W$

$\Rightarrow V \subseteq \mathcal{U} + W$

Por tanto, $\left.\begin{matrix} V = \mathcal{U} + W \\ \text{Como } \mathcal{U} \cap W = \{0\} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow V = \mathcal{U} \oplus W$ #

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

Sea $R: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ $\quad R(X) = XA$

Demuestra que R es un automorfismo.

Demostramos primero que R es lineal. Sea $a, b \in \mathbb{C}$, $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$

$$R(aX + bY) = (aX + bY)A = aXA + bYA = a(XA) + b(YA) = aR(X) + bR(Y)$$

$\rightarrow R$ es lineal.

Arturo Olivares Martos

9/12/22

Como es lineal, $R \in End_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C}))$.

Veamos ahora si R es un epimorfismo.

Sea $R^{-1}: M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$. $R^{-1}(X) = X A^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} (R \circ R^{-1})(X) = R(R^{-1}(X)) = R(X \cdot A^{-1}) = X \cdot A^{-1} \cdot A = X = Id_{M_2\mathbb{C}}(X) \\ (R^{-1} \circ R)(X) = R^{-1}(R(X)) = X \cdot A \cdot A^{-1} = X = Id_{M_2\mathbb{C}}(X) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\rightarrow R^{-1}$ es la inversa de R. Como $\exists$ inversa $\rightarrow$

$\rightarrow$ R es un isomorfismo⊛

Por tanto, $R \in Aut_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C}))$

Calcular $M(R, \beta)$, siendo β base de $M_2(\mathbb{C})$

Sea $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 0)_\beta$$

$$R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (2, i, 0, 0)_\beta$$

$$R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, -1)_\beta$$

$$R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & i \end{pmatrix} = (0, 0, 2, i)_\beta$$

Por tanto,

$$M(R, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & i \end{pmatrix}$$

⊛Otra forma Como $|M(R, B)| \neq 0 \rightarrow M(R, B)$ es regular $\Rightarrow$ R es un isomorfismo

6

¿$M(R^{-1}, \beta)$?

$$M(R^{-1},\beta)\cdot M(R,\beta) = M(R^{-1}\circ R,\beta) = M(Id_{M_2\mathbb{C}},\beta) = Id_4$$

$$\to M(R^{-1},\beta) = [M(R,\beta)]^{-1}$$

9) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z,t) = (x+z-t,\ y+t,\ x+y+z)$

a) Ker(f) e Im(f)

$$\underline{Ker(f)} = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / f(x,y,z,t) = (x+z-t,\ y+t,\ x+y+z) = (0,0,0)\}$$

$$= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / \begin{array}{l} x+z-t=0 \\ y+t=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \quad (x+y+z)-(y+t) = (x+z-t)$$

$$= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+t=0 \end{array}\right\} \to Dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) = 2$$

$$= \mathcal{L}(\{\underline{(1,0,-1,0),(0,1,-1,-1)}\})$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \to \text{son lin. indep} \to \text{forman base.}$$

Base de Ker(f) $\beta = \{(1,0,-1,0),(0,1,-1,-1)\}$

Tomando $\beta_u^4 = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = (1,0,1) \\ f(e_2) = (0,1,1) \\ f(e_3) = (1,0,1) \\ f(e_4) = (-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Im(f)} = \mathcal{L}(\{(1,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(-1,1,0)\})$$

$$= \mathcal{L}(\{\underline{(1,0,1),(0,1,1)}\})$$

Base de Im(f) $\beta' = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

Arturo Olivares Martos 9/12/22

¿ $\exists$ f un monomorfismo o un epimorfismo?

Como $\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) = 2 \Rightarrow Ker(f) \neq \{0\} \rightarrow$ f no es un monomorfismo

$\dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = 2 \Rightarrow Im(f) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ f no es un epimorfismo

b) $U = \mathcal{L}(\{(1,2,1,2),(0,-1,2,3)\})$

$U' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2,1,2) = (0,4,4) \\ f(0,-1,2,3) = (-1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(U) = \mathcal{L}(\{(0,4,4),(-1,2,1)\})$$

~~[Sin embargo, como f no es biyectiva, $\nexists f^{-1}$]~~ p. 11 por delante

(10) $\mathcal{B}$ base de $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$\mathcal{B}'$ " " $V' = \{v_1', v_2', v_3'\}$

$f: V \rightarrow V'$

$f(v_1) = v_1' + v_2' - 4v_3'$

$f(v_2) = 2v_1' + v_2' - 2v_3'$

$f(v_3) = 3v_1' + v_2'$

$f(v_4) = v_1' + 2v_3'$

¿$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$?

$$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8-6+12+2=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2+4-4=0$$

Base de Im(f)

Como $rg(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})) = 2 \rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = 2$.

$Im(f) = \mathcal{L}(\{(1,1,-4)_{\mathcal{B}'}, (2,1,-2)_{\mathcal{B}'}\}) = (\{v_1' + v_2' - 4v_3', 2v_1' + v_2' - 2v_3'\})$

Base de $Img(f) = \{v_1' + v_2' - 4v_3', 2v_1' + v_2' - 2v_3'\}$

Base de Ker(f).

$$Ker(f) = \{v \in V / f(v) = 0\} = \left\{(x,y,z,t)_\beta \in V / \mathcal{M}(f,\beta'-B)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z,t)_\beta \in V / \begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&1&1&0\\-4&-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z,t)_\beta \in V / \begin{array}{l} x+2y+3z+t=0 \\ x+y+z=0 \\ -4x-2y+2t=0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+t=0 \\ x+y+z=0 \\ -4x-2y+2t=0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+t=0 \\ -y-2z-t=0 \\ 6y+12z+6t=0 \end{array}\right. \sim_f \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{array}\right.$$

Por tanto, $Ker(f) = \left\{(x,y,z,t)_\beta \in V / \begin{array}{l} x+2y+3z+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{array}\right\} =$

$$= \left\{(x,y,z,t) \in_\beta V / \begin{array}{l} x = -(\lambda+\gamma) \\ y = \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \gamma \in \mathbb{R} \\ t = -\lambda - 2\gamma \end{array}\right\}$$

Para $\lambda = 1,\ \gamma = 0, \rightarrow (-1, 1, 0, -1)$
$\lambda = 0,\ \gamma = 1 \rightarrow (-1, 0, 1, -2)$ lin. indep.

$$rg\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\\-1&-2\end{pmatrix} = 2.$$

Como $\dim_K(Ker(f)) = 2 \Rightarrow$ forman base.

Base de $Ker(f) = \{(-1,1,0,-1), (-1,0,1,-2)\}$

$Ker(f) = \mathcal{L}(\{(-1,1,0,-1), (-1,0,1,-2)\}) =$

$= \mathcal{L}(\{-v_1+v_2-v_4,\ -v_1+v_3-2v_4\})$

Arturo Olivares Martos 10/12/22

(11) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ / $f(1,0,1) = (-1,2,0)$
$f(1,-1,0) = (1,2,1)$
$Ker(f) = \mathcal{L}(\{(0,3,7)\})$

¿$M(f, \mathcal{B}_U^3)$?

Sea $\mathcal{B}_U^3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{cases} f(1,0,1) = f(e_1) + f(e_3) = (-1,2,0) \longrightarrow f(e_1) = (-1,2,0) - f(e_3) \\ f(+1,-1,0) = f(e_1) - f(e_2) = (1,2,1) \\ f(0,3,7) = 3f(e_2) + 7f(e_3) = (0,0,0) \end{cases}$$

Restando la 1ª y la 2ª,

$$\begin{cases} f(e_2) + f(e_3) = (-2,0,-1) \longrightarrow f(e_2) = (-2,0,-1) - f(e_3) \\ 3f(e_2) + 7f(e_3) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$3(-2,0,-1) - 3f(e_3) + 7f(e_3) = (0,0,0) \longrightarrow f(e_3) = \frac{-1}{4} \cdot 3(-2,0,-1) = $$
$$= (3/2, 0, +3/4)$$

Por tanto, $f(e_2) = (-7/2, 0, -7/4)$

$f(e_1) = (-5/2, 2, -3/4)$

Por tanto,

$$M(f, \mathcal{B}_U^3) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & -7/2 & 3/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3/4 & -7/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Sea $\beta = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

¿$M(f,\beta)$?

$$M(f,B) = M_{B\leftarrow B_u^3} \cdot M(f, \beta_u^3) \cdot M_{B_u^3 \leftarrow B}$$

Sea $M_{\beta_u^3 \leftarrow \beta} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left[M_{\beta_u^3 \leftarrow \beta}\right]^{-1} = M_{\beta \leftarrow \beta_u^3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\underline{\underline{M(f,\beta)}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/2 & -7/2 & 3/2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3/4 & -7/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5/4 & -7/4 & 3/4 \\ -13/4 & -21/4 & 9/4 \\ -1/2 & -7/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -13 & -21 & 9 \\ -2 & -14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -9 & 15 & -5 \\ 1 & 17 & -43 \\ -6 & 18 & -22 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -9/8 & 15/8 & -5/8 \\ 1/8 & 17/8 & -43/8 \\ -3/4 & 9/4 & -11/4 \end{pmatrix}}}$$

Arturo Olivares Martos 11/12/22

(12) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) /$ $Ker(f) = \mathcal{L}(\{(1,1,0)\})$
$Im(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y = 0\}$

Sea $\mathcal{B}_u^3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

$Im(f) = \mathcal{L}(\{(0,0,1),(3,2,0)\})$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{son lin. indep.}$$

Como $(1,1,0) \in Ker(f) \Rightarrow f(1,1,0) = 0 = f(e_1) + f(e_2) \Rightarrow f(e_2) = -f(e_1)$

Calculamos $f(\mathcal{B}_u^3)$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = (3,2,0) \\ f(e_2) = (-3,-2,0) \\ f(e_3) = (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow M(f, \mathcal{B}_u^3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} +3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

¿Es f único en estas condiciones?

No, ya que

$$M(f', \mathcal{B}_u^3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ representa otro endomorfismo distinto que cumple las mismas condiciones.

Analizar si es posible encontrar β, β' bases de $\mathbb{R}^3$ /

$$M(f, \beta' \leftarrow \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hecho en p. 14 por detrás

⊕p. 14.

¿Es posible de modo que esa matriz sea $M(f, \beta)$?

$$M(f, \beta) = M_{\beta \leftarrow \beta_u} \cdot M(f, \beta_u) \cdot M_{\beta_u \leftarrow \beta}$$

Sea $M_{\beta_u \leftarrow \beta} = A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-3d & 3b-3e & 3c-3f \\ 2a-2d & 2b-2e & 2c-2f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} 3a - 3d = a \\ 2a - 2d = d \end{cases} \longrightarrow a = \tfrac{3}{2} d$$

$$\begin{cases} 3b - 3e = b \\ 2b - 2e = e \end{cases} \longrightarrow b = \tfrac{3}{2} e$$

$$\begin{cases} 3c - 3f = 0 \\ 2c - 2f = 0 \end{cases} \longrightarrow f = c$$

$$\begin{cases} g = g \\ h = h \\ i = 0 \end{cases}$$

$$M_{\beta_u \leftarrow \beta} = \begin{pmatrix} \tfrac{3}{2}d & \tfrac{3}{2}e & f \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

Para $d=2$, $e=0$, $f=1$, $g=0$, $h=1$

$$M_{\beta_u \leftarrow \beta} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\beta = \{(3,2,0), (0,0,1), (1,1,0)\}$.

Sí es posible.

Arturo Olivares Martos 11/12/22

(13) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ lineal.

$\beta = \{(1,0,1), (1,1,1), (2,1,0)\}$

$\beta' = \{1, 1+2x, -x^2\}$

$$A = M(f, \beta' \leftarrow \beta) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular $M(f, \beta_3 \leftarrow \beta_u^3)$, siendo $\beta_3 = \{1, x, x^2\}$

$$M_{\beta_3 \leftarrow \beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\beta \leftarrow \beta_u} = (M_{\beta_u \leftarrow \beta})^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$M(f, \beta_3 \leftarrow \beta_u^3) = M_{\beta_3 \leftarrow \beta'} \, M(f, \beta' \leftarrow \beta) \, M_{\beta \leftarrow \beta_u} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = M(f, \beta_3 \leftarrow \beta_u^3)$$

10

Calcular bases de Ker(f) y Im(f)

$$Ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0^t \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x - 2z = 0 \\ 4x - 6y - 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x = 2z \\ y = z \end{array} \right\}$$

$$= \mathcal{L}(\{(2,1,1)\})$$

$\mathcal{B}$ base de $Ker(f) = \{(2,1,1)\}$

$$\left. \begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,4,1) \\ f(0,1,0) = (0,-6,0) \\ f(0,0,1) = (-2,-2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow Im(f) = \mathcal{L}(\{(1,4,1), (0,-6,0), (-2,-2,-2)\}) =$$

$$= \mathcal{L}(\{(1,4,1), (0,1,0), (1,1,1)\})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow 1^{er} \text{ vector lin. dep.}$$

$$Im(f) = \mathcal{L}(\{(0,1,0), (1,1,1)\})$$

$\mathcal{B}'$ base de $Im(f) = \{(0,1,0), (1,1,1)\}$

Arturo Olivares Martos 11/12/22

(8) Cont b)

$$f^{-1}(U') = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / f(x,y,z,t) \in U'\} =$$

$$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / (x+z-t,\ y+t,\ x+y+z) \in U'\} =$$

$$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / (x+z-t)-(y+t)=0\} =$$

$$= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+z-2t=0\} =$$

$$= \mathcal{L}(\{(1,1,0,0),(1,0,-1,0),(2,0,0,1)\})$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

c) Encontrar β base de $\mathbb{R}^4$, β' " " $\mathbb{R}^3$ / $M(f, \beta' \leftarrow \beta)$ solo tenga 1s y 0s

Como $rg(M(f, \beta' \leftarrow \beta)) = \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = 2$, tomamos la matriz más sencilla con rango 2.

Sabemos que tiene 3 filas pq $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3$
4 columnas pq $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)=4$

Por tanto,

$$M(f, \beta' \leftarrow \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$

$f(v_1) = (1,0,0)_{\beta'} = u_1$
$f(v_2) = (0,1,0)_{\beta'} = u_2$
$f(v_3) = (0,0,0)_{\beta'} = 0 \Rightarrow v_3 \in Ker(f)$
$f(v_4) = (0,0,0)_{\beta'} = 0 \Rightarrow v_4 \in Ker(f)$

11

Por tanto, si $\beta' = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$v_1 = e_1 = (1,0,0,0)$

$v_2 = e_2 = (0,1,0,0)$

$v_3 \in Ker(f) \rightarrow v_3 = (1,0-1,0)$

$v_4 \in Ker(f) \rightarrow v_4 = (0,1,-1,-1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Por tanto, $\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (1,0,-1,0), (0,1,-1,-1)\}$

$\beta' = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

---

(14) Sea $Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ / $Id(x,y,z) = (x,y,z)$

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular β base de $\mathbb{R}^3$ / $M(Id_{\mathbb{R}^3}, \beta_u \leftarrow \beta) = A$

$A = M(Id_{\mathbb{R}^3}, \beta_u \leftarrow \beta) = M_{\beta_u \leftarrow \beta_u} \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, \beta_u) \cdot M_{\beta_u \leftarrow \beta}$

$= Id_3 \cdot Id_3 \cdot M_{\beta_u \leftarrow \beta} = M_{\beta_u \leftarrow \beta} = A$

Por tanto, $A = M_{\beta_u \leftarrow \beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $\beta = \{(0,0,1), (0,1,3), (-1,1,2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

---

b) Calcular β' base de $\mathbb{R}^3$ / $M(Id_{\mathbb{R}^3}, \beta' \leftarrow \beta_u) = A$

$A = M(Id_{\mathbb{R}^3}, \beta' \leftarrow \beta_u) = M_{\beta' \leftarrow \beta_u} \cdot M(Id_{\mathbb{R}^3}, \beta_u) \cdot M_{\beta_u \leftarrow \beta_u} =$

$= M_{\beta' \leftarrow \beta_u} \cdot Id_3 \cdot Id_3 = M_{\beta' \leftarrow \beta_u} = A$

Como $M_{\beta' \leftarrow \beta_u} = A$, $M_{\beta_u \leftarrow \beta'} = A^{-1}$.

Arturo Olivares Martos 11/12/2022

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&+1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}-1&-3&1\\1&+1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=M_{\beta_u\leftarrow\beta'}$$

Por tanto, $\underline{\beta'=\{(-1,1,-1),(-3,1,0),(1,0,0)\}}$

(15) $f: V\to V'$, $g: V'\to V''$ apli. lineales. β base de V

$\beta'=\{v_1',v_2',v_3'\}$ base de V'

$\overline{\beta'}=\{2v_2'-v_3',\ v_2'-v_3',\ 3v_1'+v_2'-v_3'\}$ base de V'

β'' base de V''

$$M(f,\beta'\leftarrow\beta)=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&-2&1&1\\2&3&0&-2\end{pmatrix}\qquad M(g,\beta''\leftarrow\overline{\beta'})=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-2&1\\2&0&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

Calcular $M(g\circ f,\beta''\leftarrow\beta)$

$$M(g\circ f,\beta''\leftarrow\beta)=M(g,\beta''\leftarrow\overline{\beta'})\cdot M_{\overline{\beta'}\leftarrow\beta'}\cdot M(f,\beta'\leftarrow\beta)$$

$$M_{\overline{\beta'}\leftarrow\beta'}=\left[M_{\beta'\leftarrow\overline{\beta'}}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&3\\2&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&3&0\\-3&6&0\end{pmatrix}^{t}\cdot\frac{1}{-3}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-3&-3\\1&3&6\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{3}=\begin{pmatrix}0&+1&+1\\-1/3&-1&-2\\1/3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underline{M(g\circ f,\beta''\leftarrow\beta)}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-2&1\\2&0&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\-1/3&-1&-2\\1/3&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&-2&1&1\\2&3&0&-2\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2/3 & 2 & 2 \\ -2/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4/3 & -5/3 & -1 & 7/3 \\ 9 & 7 & 2 & -4 \\ 10/3 & 8/3 & 2 & -10/3 \\ -8/3 & -7/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

16 $f: V \to V'$
$f: V' \to V''$ apl. lineales Demuestra:

$$g \circ f = 0 \iff Im(f) \subset Ker(g)$$

$\Rightarrow)$ Sea $x \in V \Rightarrow f(x) \in Im(f)$.

Como $(g \circ f)(x) = 0(x) = 0$
$= g(f(x)) \overset{g \circ f = 0}{=} 0 \to f(x) \in Ker(g)$

Por tanto, $Im(f) \subset Ker(g)$

$\Leftarrow)$ Supongamos $Im(f) \subset Ker(g)$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \overset{\circledast}{=} 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \to g \circ f = 0$

$\circledast$ $f(x) \in Im(f) \subseteq Ker(g) \to g(f(x)) = 0$

Por tanto, $g \circ f = 0$

//

Arturo Olivares Martos 11/12/22

18) $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$. $f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$
$f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$

Calcular $M(f, \mathcal{B}_u)$ si:

a) $Ker(f) = Im(f)$

$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1) \Rightarrow (0,1,0,-1) \in Im(f) = Ker(f)$

$f(0,1,0,1) = (0,0,0,0) = 0$

$f(1,0,1,0) = (1,1,1,0) \Rightarrow (1,1,1,0) \in Im(f) = Ker(f)$

$f(1,1,1,0) = (0,0,0,0) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

Sea $\mathcal{B}' = \{(1,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,1,0), (1,1,1,0)\}$

$$M(f, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(f, \mathcal{B}_u) = M(f, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_u}$$

$$M_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_u} = (M_{\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(1,3,7,1) = M(f,\beta_u)\cdot \begin{pmatrix}1\\3\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\-1\\6\end{pmatrix}$$

b) $f \circ f = f$

$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$

$f(0,1,0,-1) = f(f(1,1,0,0)) = (0,1,0,-1)$

$f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$

$f(1,1,1,0) = (1,1,1,0)$

Sea $\beta_u = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = e_2 + e_4 \\ f(e_2) - f(e_4) = e_2 - e_4 \\ f(e_1) + f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$\cancel{f(e_1)} + \cancel{e_2} - e_4 - \cancel{f(e_1)} + f(e_3) = e_1 + \cancel{e_2} + e_3 \Longrightarrow f(e_3) = e_1 + e_3 + e_4 =$
$= (1,0,1,1)$

$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 - f(e_3) = \cancel{e_1} + e_2 + \cancel{e_3} - \cancel{e_1} - \cancel{e_3} + e_4 = e_2 - e_4 =$
$= (0,1,0,-1)$

$f(e_2) = e_2 - e_4 - f(e_1) = \cancel{e_2} - \cancel{e_4} - \cancel{e_2} + \cancel{e_4} = 0 =$
$= (0,0,0,0)$

$f(e_4) = f(e_2) - e_2 + e_4 = \cancel{(e_1 + e_2)} - e_2 + e_4 = (0,-1,0,+1)$

Por tanto,

$$M(f,\beta_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$f(1,3,7,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}1\\3\\7\\1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}7\\0\\7\\5\end{pmatrix}^t = (7,0,7,5)$$

Arturo Olivares Martos 11/12/22

c) $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^4}$

$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$

$f(0,1,0,-1) = f(f(1,1,0,0)) = (1,1,0,0)$

$f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$

$f(1,1,1,0) = (1,0,1,0)$

Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = e_2 - e_4 \\ f(e_2) - f(e_4) = e_1 + e_2 \\ f(e_1) + f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_1 + e_3 \end{cases}$$

$\cancel{f(e_1)} + e_2 - e_4 - \cancel{f(e_1)} + f(e_3) = e_1 + e_3 \Rightarrow f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 + e_4 = (1,-1,1,1)$

$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 - f(e_3) = \cancel{e_1} + e_2 + \cancel{e_3} - \cancel{e_1} + e_2 - \cancel{e_3} - e_4 = 2e_2 - e_4 = (0,2,0,-1)$

$f(e_2) = e_2 - e_4 - f(e_1) = e_2 - \cancel{e_4} - 2e_2 + \cancel{e_4} = -e_2 = (0,-1,0,0)$

$f(e_4) = f(e_2) - e_1 - e_2 = -e_2 - e_1 - e_2 = -e_1 - 2e_2 = (-1,-2,0,0)$

$$M(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(1,3,7,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}^t = (6,-6,7,6)$$

Cont (12) Analizar si es posible encontrar β, β' bases de $\mathbb{R}^3$ /

$$M(f, \beta' \leftarrow \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$f(0,0,1) = (0,0,1)$

$f(3,2,0) = (3,2,0)$

$f(1,1,0) = (0,0,0)$

Por tanto, sea $\underline{\underline{\beta = \{(0,0,1),(3,2,0),(1,1,0)\}}}$ base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$f(0,0,1)_{\beta_u} = f(e_1)_\beta = e_{1\beta}$

$f(3,2,0)_{\beta_u} = f(e_2)_\beta = e_{2\beta}$

$f(1,1,0)_{\beta_u} = 0 = (0,0,0)$

Por tanto,

$$\underline{\underline{M(f, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Arturo Olivares Matos 12/12/22

(19) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $a \in \mathbb{R} / \quad A \sim A'$

$A \sim A' \iff rg(A) = rg(A')$.

Calculemos en primer lugar el $rg(A')$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6+2-8=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 8+4-12=0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 6+6-8-4=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -16-6+18+4=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A') = 2$$

Por tanto, $A \sim A' \iff rg(A) = 2$

Calculamos ahora $rg(A)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+20-4+1-8-10=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a+5+8-2-2-10a = 9-9a = 9(1-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 4a+1+4-8-1+2a = 6a-6 = 6(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 20a \cancel{-2+2} -16-5+a = 21a-21 = 21(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por tanto, si $a = 1 \to rg(A) = 2$

$a \neq 1 \to rg(A) = 3$

Por tanto, $\underline{A \sim A' \iff a = 1}$

21 a) Demostrar que $tr: M_n(K) \longrightarrow K$ es lineal.

Sean $A, B \in M_n(K)$.

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B).$$

Sea $k \in K$.

$$tr(kA) = \sum_{i=1}^{n}(k a_{ii}) = k \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\, tr(A)$$

Por tanto, $tr: M_n(K) \longrightarrow K$ es lineal

b) Probar que $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$ $\forall A, B \in M_n(K)$.

Sea $AB = C$; $BA = C'$.

Los elementos de la diagonal principal de C se calculan:

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$c'_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Por tanto,

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} c'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$$

Por tanto, como itera sobre i, j y, por la propiedad conmutativa en K,

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Arturo Olivares Martos 12/12/22

Deducir que dos matrices semejantes tienen la misma traza

$A, C \in M_n(K)$ son semejantes $\iff \exists P \in M_n(K) / C = P^{-1} A P$

Por tanto, supuestas A y C semejantes,

$C = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$A = P \cdot C \cdot P^{-1}$

$$\underline{tr(A)} = tr(P \cdot [C \cdot P^{-1}]) \overset{tr(AB) = tr(BA)}{=} tr([C \cdot P^{-1}] \cdot P) = tr(C \cdot P^{-1} \cdot P) = \underline{tr(C)}$$

c) Definir $tr(f)$, con $f \in End_K(V)$

$tr(f) = tr(M(f, \mathcal{B}))$, con $\mathcal{B}$ base de V.

Veamos que no depende de la base escogida.

Sea $\mathcal{B}'$ base de V.

$M(f, \mathcal{B}')$ es semejante a $M(f, \mathcal{B})$, ya que son matrices asociadas al mismo endomorfismo f respecto de distintas bases.

Por tanto, $tr(M(f, \mathcal{B}')) = tr(M(f, \mathcal{B})) = tr(f)$.

Por tanto, no depende de la base escogida.

$$\underline{tr(f) = tr(M(f, \mathcal{B}))}$$

d) Encontrar $A, B \in M_n(K) \Big/ \begin{array}{l} rg(A) = rg(B) \\ tr(A) = tr(B) \end{array}$ y A no semejante a B.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $|A| = -2$.

Vemos que $rg(A) = rg(B) = 3$
$tr(A) = tr(B) = 0$.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $|B| = -6$

Supongamos que A semejante a B. $\Rightarrow \exists P \in M_n(K) / B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Por tanto, $|B| = |P^{-1} \cdot A \cdot P| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \frac{1}{\cancel{|P|}} |A| \cdot \cancel{|P|} = |A|$.

Es decir, $|B| = |A|$ $\lightning$ Por tanto, A no es semejante a B.

A y B tienen el mismo rango, misma traza, pero no son semejantes.

20 Razona si son verdaderas o falsas

a) $\exists f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) /$ $f(1,0,0) = (2,0,1)$
$f(0,1,0) = (0,0,0)$
$f(1,1,0) = (2,-1,7)$

$$f(1,1,0) = f\big((1,0,0) + (0,1,0)\big) \overset{\text{apl lineal}}{=} f(1,0,0) + f(0,1,0) =$$
$$= (2,0,1) + (0,0,0) = (2,0,1) \neq (2,-1,7) \quad \lightning$$

Por tanto es falso.

b) $\exists f \in End_K(\mathbb{C}) / f \neq c_0 \wedge Ker(f) \neq \{0\}$

Sea $K = \mathbb{C}$. $Dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Como $dim_{\mathbb{C}}(Ker(f)) + dim_{\mathbb{C}}(Im(f)) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$,

$dim_{\mathbb{C}}(Ker(f)) = 0 \longrightarrow Ker(f) = \{0\}$

$\vee \qquad\qquad\qquad\qquad \vee$

$dim_{\mathbb{C}}(Ker(f)) = 1 \longrightarrow Ker(f) = \mathbb{C} \rightarrow f = c_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

Por tanto, es falso si $K = \mathbb{C}$.

Arturo Olivares Martos 12/12/22

Sea $K = \mathbb{R} \to \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

$\dim(Ker f) = 0 \to Ker(f) = \{0\}$

$\vee$

$\dim(Ker(f)) = 1$

$\vee$

$\dim(Ker(f)) = 2 \to Ker(f) = \mathbb{C} \to f = c_0$.

Supuesto $\dim(Ker(f)) = 1 \to Ker(f) = \mathcal{L}(\{x\})$, $x \in \mathbb{C}^*$.

Sea $f(a+bi) := b$.

$f((a+bi)+(c+di)) = f((a+c)+(b+d)i) = b+d = f(a+bi) + f(c+di)$

$f(k(a+bi)) = f(ka + kbi) = kb = k\cdot f(a+bi) = kb$.

Por tanto, f es lineal.

En este caso, $Ker(f) = \mathcal{L}(\{1\}) \neq \{0\}$.

Por tanto, si $K = \mathbb{R}$ es verdadero.

c) Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ / $\begin{array}{l} AB = I_m \\ B\cdot A = I_n \end{array} \Longrightarrow m = n$.

Hecho en p. 21 por detrás

d) $\exists$ isomorfismo $f : \mathbb{C}_5[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_5[x]) = 6$

$\dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2) = \dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C})) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 4 + 2 = 6$

Como $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_5[x]) = \dim_{\mathbb{C}}(M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2)$,

$\mathbb{C}_5[x] \cong M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$. Verdad

e) $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ $\longrightarrow \exists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ epimorfismo.

Sea $M(f, \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ya que

el nº de filas $= m = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$

" " columnas $= n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

Como $m \geq n$, $rg(M(f, \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m)) \leq n$.

No obstante, f epimorfismo $\Leftrightarrow rg(M(f, \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m)) = m$

Por tanto, tenemos $\left.\begin{array}{l} m \geq n \\ \wedge \\ rg(M(f, \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m)) = m \leq n \end{array}\right\} \Longrightarrow \underline{\underline{m = n}}$

Si $m > n$, $\lightning$, por lo que $\nexists$. $\underline{\underline{\exists f \text{ epimorfismo} \Leftrightarrow m = n}}$

Otra opción:

$\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) + \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n.$

f epimorfismo $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = m.$

Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) + m = n$

Si $m = n \rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) = 0$ ✓

Si $m > n \rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) < 0$ $\lightning$.

f) $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ $\longrightarrow \exists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ monomorfismo

f monomorfismo $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) = 0.$

$\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f)) + \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n.$

$0 + \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = n.$

Por tanto, f monomorfismo $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Im(f)) = n.$

Arturo Olivares Martos 12/12/22

Sea $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dado por la inclusión

$$i(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \overset{m-n \text{ veces}}{\dots}, 0)$$

Claramente la inclusión es un monomorfismo.

Además, si $n=m$, el monomorfismo es la identidad.

Por tanto, es válido $\iff m \geq n$

g) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

Sí, ya que tienen la misma dimensión.

h) Si un SEL tiene menos ecuaciones que incógnitas $\rightarrow$ SEL no es SCD

Por el T. de Rouché-Frobenious,

SEL es SCD $\iff rg(A) = rg(A|C) = n^{\circ}$ incógnitas.

Sea $m = n^{\circ}$ ecuaciones, $n = n^{\circ}$ incógnitas. $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Como $m<n \Rightarrow rg(A) \leq m < n. \Rightarrow$ SEL no es SCD.

Verdad.

i) $\exists f \in Aut_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) / f(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z=0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=0\}$

Es decir, $\exists f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isomorfo.

Sea $\mathcal{B}_u^3 = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (0,1,0) \\ f(0,1,0) = (0,0,1) \end{array}\right\} \text{obligados por la cond.}$$

$f(0,0,1) = (1,0,0)$, ya que es lin. ind. al resto.

$$M(f, \mathcal{B}_u^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(M(f, \mathcal{B}_u^3)) = 3 \rightarrow M(f, \mathcal{B}_u^3)$ es invertible $\rightarrow f$ es un isomorfismo.

j) $\forall r \in \mathbb{R}$, $f_r : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$$f_r(ax^2+bx+c) = rax^2+bx+c$$

Es fácil ver que f_r es lineal.

Si $r=0 \rightarrow f_0(ax^2+bx+c) = bx+c \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \neq \mathrm{Im}(f)$, ya que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 2 \neq 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$.

Supuesto $r \neq 0$, y tomando $\beta_u = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$,

$$M(f, \beta_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

$|M(f, \beta_u)| = r \neq 0 \rightarrow M(f, \beta_u)$ es regular $\Rightarrow f$ es un isomorfismo

Por tanto, f_r automorfismo $\Leftrightarrow r \neq 0$.

$\Rightarrow$ Extra ① Sea $V(\mathbb{R})$ esp. vectorial. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) / f \circ f = -1_V$

Demostrar que $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ es par.

Si $V = \{0\} \longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V) = 0$, 0 par.

Supongamos $V \neq \{0\}$.

La dimensión de un espa. vectorial con dimensión finita es el número máximo de vectores linealmente independientes.

Si $V \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \in V$, $v \neq 0 / \{v\}$ linealmente independiente.

Veamos que $\{v, f(v)\}$ también son linealmente indep.

$$f(v) = av \Rightarrow f(f(v)) = f(av) \rightarrow -v = af(v) \rightarrow -v = a(av) = a^2v$$

$$\rightarrow a^2v + v = 0 \rightarrow (a^2+1)v = 0 \xrightarrow{v \text{ lin. indep.}} a^2+1=0 \; \text{⨉}. \; a \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, al no poder expresar un vector en función de su imagen, $\{v, f(v)\}$ son linealmente independientes.

Si forman base, $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$, y se habría terminado.

Arturo Olivares Martos 13/12/22

Si no forman base, $\exists w \in V / \{v, f(v), w\}$ lin. indep.

Veamos que $\{v, f(v), w, f(w)\}$ lin. indep.

Suponemos que no.

$$f(w) = a_1 v + a_2 f(v) + a_3 w \to -w = a_1 f(v) - a_2 (v) + a_3 f(w)$$
$$= a_1 f(v) - a_2 v + a_3 (a_1 v + a_2 f(v) + a_3 w) =$$
$$= a_1 f(v) - a_2 v + a_1 a_3 v + a_2 a_3 f(v) + a_3^2 w =$$
$$= (a_1 a_3 - a_2) v + (a_2 a_3 + a_1) f(v) + a_3^2 w \implies$$
$$\implies (a_1 a_3 - a_2) v + (a_2 a_3 + a_1) f(v) + (a_3^2 + 1) w$$

$\to$ Como $\{v, f(v), w\}$ lin. indep., $a_3^2 + 1 = 0$ ↯ $a_3 \in \mathbb{R}$

Por tanto $\{v, f(v), w, f(w)\}$ lin. indep.

Si forman base, $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$, y se habría terminado.

En caso contrario, $\exists u \in V / \{v, f(v), w, f(w), u\}$ lin. indep.

Se repite el proceso hasta encontrar una base, y por el procedimiento anterior siempre que un vector sea lin. indep. respecto a otros, su imagen también lo será, siendo por tanto la dimensión par.

$\implies$ Extra ② Sea $V = \{A \in M_2(\mathbb{C}) / A = \overline{A}^t, \ tr(A) = 0\}$

1) Probar que V es un esp. vect. real y calcular $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \in V$.

$$\left(\overline{aA_1 + bA_2}\right)^t = \left(\overline{aA_1} + \overline{bA_2}\right)^t = \left(\overline{a}\,\overline{A_1} + \overline{b}\,\overline{A_2}\right)^t \overset{a,b \in \mathbb{R}}{=}$$
$$= \left(a\overline{A_1} + b\overline{A_2}\right)^t = \left(a\overline{A_1}\right)^t + \left(b\overline{A_2}\right)^t = a\overline{A_1}^t + b\overline{A_2}^t =$$
$$= aA_1 + bA_2, \text{ ya que } A_1, A_2 \in V$$

$$tr(aA_1 + bA_2) = tr(aA_1) + tr(bA_2) = a\,tr(A_1) + a\,tr(A_2) = a0 + b0 = 0$$

Por tanto, $aA_1 + bA_2 \in V \to V$ es sub. vect. real de $M_2(\mathbb{C})$.

Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(V)$

$\forall A \in V,$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i & a_2 + b_2 i \\ a_3 + b_3 i & a_4 + b_4 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 i & a_2 - b_2 i \\ a_3 - b_3 i & a_4 - b_4 i \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 i & a_3 - b_3 i \\ a_2 - b_2 i & a_4 - b_4 i \end{pmatrix}$$

Además, $tr(A) = 0 \Rightarrow a_1 + b_1 i = -(a_4 + b_4 i) = -a_4 - b_4 i$

Por tanto,

$$\begin{cases} \cancel{a_1} + b_1 i = \cancel{a_1} - b_1 i \longrightarrow b_1 = 0 \\ a_2 + b_2 i = a_3 - b_3 i \\ a_3 + b_3 i = a_2 - b_2 i \\ \cancel{a_4} + b_4 i = \cancel{a_4} - b_4 i \longrightarrow b_4 = 0 \\ a_1 + b_1 i = -a_4 - b_4 i \longrightarrow a_1 = -a_4 \Rightarrow a_4 = -a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 i = a_3 - b_3 i \longrightarrow a_2 = a_3 - b_3 i - b_2 i \\ a_3 + b_3 i = a_2 - b_2 i \end{cases}$$

$$\cancel{a_3} + b_3 i = \cancel{a_3} - b_3 i - 2b_2 i \longrightarrow 2b_3 i = -2b_2 i \longrightarrow -b_3 = -b_2$$

Por tanto, $a_2 = a_3 - \cancel{b_3 i} + \cancel{b_3 i} = a_3$

Es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 - b_3 i \\ a_3 + b_3 i & -a_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, β base de $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3. \qquad \underline{\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3}$$

Otra opción: $\left. \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C})) = 8 \\ 5 \text{ ecuaciones implícitas} \end{array} \right\} \Longrightarrow \underline{\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3}$

Arturo Olivares Martos 13/12/22

2) Construir epimorfismo $f: V \to S_2(\mathbb{R})$, calculando $\ker(f)$

Calculo en primer lugar β' base de $S_2(\mathbb{R})$

$\forall A \in S_2(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ a_{12} = a_{21} \right.$$

Por tanto, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

β' base de $S_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Por tanto, $M(f, \beta' \leftarrow \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ya

que $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0)_{\beta'}$

$f(0,1,0)_\beta = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0)_{\beta'}$

$f(0,0,1)_\beta = f\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,1)_{\beta'}$

Como $rg(M(f, \beta' \leftarrow \beta)) = 3 \Rightarrow M(f, \beta' \leftarrow \beta)$ invertible $\to$

f es un isomorfismo $\Rightarrow$ f es un monomorfismo $\to$

$\to \ker(f) = \{0\}$

→ Extra 3 Calcular un isomorfismo $f: A_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ ⊛

Calculo en primer lugar una base β de $A_3(\mathbb{R})$.

$\forall A \in A_3(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\to \begin{cases} a_{11} = -a_{11} \longrightarrow a_{11} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} = -a_{31} \\ \cancel{a_{21} = -a_{12}} \\ a_{22} = -a_{22} \longrightarrow a_{22} = 0 \\ a_{23} = -a_{32} \\ \cancel{a_{31} = -a_{13}} \\ \cancel{a_{32} = -a_{23}} \\ a_{33} = -a_{33} \longrightarrow a_{33} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a_{11} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{33} = 0 \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} = -a_{31} \\ a_{23} = -a_{32} \end{matrix}$$

Por tanto, $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$$+ a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, β base de $A_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \{e_1, e_2, e_3\}$

⊛/ $f\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = x$

Arturo Olivares Martos 13/12/22

Sea $\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = f(2e_1 - e_3) = 2f(e_1) - f(e_3) = 1 - x^2 = (1,0,-1)_{\mathcal{B}_0}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f(e_2) = 1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}_0}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = f(e_3) = x = (0,1,0)_{\mathcal{B}_0}$$

Por tanto,

$$f(e_1) = \frac{(1,0,-1)_{\mathcal{B}_0} + f(e_3)}{2} = \frac{(1,0,-1)_{\mathcal{B}_0} + (0,1,0)_{\mathcal{B}_0}}{2} = \frac{(1,1,-1)_{\mathcal{B}_0}}{2} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}_0}$$

$f(e_2) = (1,0,0)_{\mathcal{B}_0}$

$f(e_3) = (0,1,0)_{\mathcal{B}_0}$

Por tanto, $M(f, \mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $|M(f, \mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B})| = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow M(f, \mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B})$

es invertible $\Rightarrow f$ es un isomorfismo.

20 c) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ cumplen

$$A \cdot B = I_m \wedge B \cdot A = I_n \longrightarrow m = n.$$

$$\left.\begin{array}{l} tr(AB) = tr(I_m) = m \\ tr(BA) = tr(I_n) = n. \\ tr(AB) = tr(BA) \end{array}\right\} \Longrightarrow m = n.$$

19 b) $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Encontrar $P \in GL(4,\mathbb{R})$ $Q \in GL(3,\mathbb{R})$ / $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$

Como tienen el mismo rango, $rg(A) = rg(A') = 2$.

$$\rightarrow \exists\, Q_1 \in GL(3,\mathbb{R}),\ \exists\, P_1 \in GL(4,\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1 A P_1$$

$$\rightarrow \exists\, Q_2 \in GL(3,\mathbb{R}),\ \exists\, P_2 \in GL(4,\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_2 A' P_2$$

Por tanto, $Q_1 A P_1 = Q_2 A' P_2 \Longrightarrow A' = Q_2^{-1} \cdot Q_1 \cdot A \cdot P_1 \cdot P_2^{-1} \Rightarrow$

$$\rightarrow Q^{-1} = Q_2^{-1} \cdot Q_1$$
$$P = P_1 \cdot P_2^{-1}$$

Encontremos ahora por tanto P_1, P_2, Q_1, Q_2.

Arturo Olivares Martos 14/12/22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{E_{31}(-1)}{\overset{E_{21}(-2)}{\sim_f}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_2(-1/3)}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{E_{32}(1)}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_2(1/3)}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_f$$

$$\overset{E_{12}(-5)}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{43}(2)}{\sim_c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_c$$

$$\overset{E_{13}(-3)}{\sim_c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{E_{24}(-1/3)}{\overset{E_{14}(-1/3)}{\sim_c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}(-5) \cdot E_2(1/3) \cdot E_{32}(1) \cdot E_2(-1/3) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{21}(-2) \cdot A \cdot E_{43}(2) \cdot E_{13}(-3) \cdot E_{14}(-1/3) \cdot E_{24}(-1/3)$$

$$Q_1 = E_{12}(-5) \cdot E_2(1/3) \cdot E_{32}(1) \cdot E_2(-1/3) \cdot E_{31}(-1) \cdot E_{21}(-2)$$

$$P_1 = E_{43}(2) \cdot E_{13}(-3) \cdot E_{14}(-1/3) \cdot E_{24}(-1/3)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \underset{f}{\overset{E_{21}(-1/2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \underset{E_2(-1)}{\overset{E_1(1/2)}{\sim_f}}$$

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \underset{f}{\overset{E_{32}(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{c}{\overset{E_{34}(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{23}(+3/2) \\ E_{24}(-1) \\ \sim_c \\ E_{13}(-1/2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\left[\underset{c}{\overset{E_{34}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{14}(-1/2) \\ \sim_c \\ E_{24}(3/2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{32}(-2) E_2(-1) E_1(1/2) E_{21}(-1/2) \cdot A' \cdot E_{34}(-2) \cdot$$
$$\cdot E_{23}(3/2) \cdot E_{24}(-1) \cdot E_{13}(-1/2)$$

$$Q_2 = E_{32}(-2)\ E_2(-1)\ E_1(1/2)\ E_{21}(-1/2)$$

$$P_2 = E_{34}(-2)\ E_{23}(3/2)\ E_{24}(-1)\ E_{23}(-1/3).$$

Por tanto, y usando que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

$$P = P_1 \cdot P_2^{-1} = E_{43}(2) \cdot E_{23}(-3) \cdot E_{24}(-1/3) \cdot E_{24}(-1/3) \cdot E_{13}^{-1}(-1/3) \cdot$$
$$\cdot E_{24}^{-1}(-1) \cdot E_{23}^{-1}(3/2) \cdot E_{34}^{-1}(-2)$$

$$Q = (Q^{-1})^{-1} = (Q_2^{-1} \cdot Q_1)^{-1} = Q_1^{-1} \cdot Q_2 = E_{21}^{-1}(-2) E_{21}^{-1}(-1) E_2^{-1}(-1/3) E_{32}^{-1}(1) \cdot$$
$$\cdot E_2^{-1}(1/3) \cdot E_{12}^{-1}(-5) \cdot E_{32}(-2) E_2(-1) E_1(1/2) E_{21}(-1/2)$$

Arturo Olivares Martos 14/12/22

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -16/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 3/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Para $a=1$, sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \,/\, M(f, \beta_u^3 \leftarrow \beta_u^4) = A$.

Encontrar β base de $\mathbb{R}^4$

β' " " $\mathbb{R}^3$ $/ \; M(f, \beta' \leftarrow \beta) = A'$

$$A' = M(f, \beta' \leftarrow \beta) = M_{\beta' \leftarrow \beta_u^3} \cdot M(f, \beta_u^3 \leftarrow \beta_u^4) \cdot M_{\beta_u^4 \leftarrow \beta}$$

$$\rightarrow A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -16/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = M_{\beta_u^4 \leftarrow \beta} \Rightarrow \beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (-5/2, -3/2, 1, 2), (-16/3, -7/3, 2, 5)\}$$

$$Q^{-1} = M_{\beta' \leftarrow \beta_u^3} \rightarrow Q = M_{\beta_u^3 \leftarrow \beta'} \rightarrow \beta' = \{(3, 3/2, 1/2), (-5, -1, 0), (0,0,1)\}$$

(17) Sea $f \in End_K(V) \,/\, f \circ f = 0$. Demuestre:

a) Si $v_1, \dots, v_r \in V \,/\, \{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ lin. indep $\Rightarrow$

$\rightarrow \{v_1, \dots, v_r, f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ lin. indep.

Sea la comb. lineal.

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + b_1 f(v_1) + \dots b_r f(v_r) = 0.$$

Veamos los valores de $a_1 \dots, a_r, b_1, \dots, b_r$.

Tomando imagen,

$a_1 f(v_1) + \dots + a_r f(v_r) + 0 = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r$, por ser $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ lin. indep.

Como $a_1 = \dots = a_r = 0$, la comb. lineal queda

$$0 + b_1 f(v_1) + \dots + b_r f(v_r) = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0.$$

Por tanto, son lin. independientes.

b) Si $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, $\exists \beta$ base de $V /$

$$M(f, \beta) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad r \leq n/2.$$

Sabemos que $\dim_K(\mathrm{Im}(f)) = r.$
$\dim_K(V) = n$
$\dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = n - r.$

Sea por tanto, $\beta_I = \{v_1, \dots, v_r\}$ base de $\mathrm{Im}(f)$.

Como $v_i \in \mathrm{Im}(f)$ para cada $i = 1, \dots, r \rightarrow \exists\, x_i \in V / f(x_i) = v_i$

Como $f(x_i) = v_i$ son lin. indep, por a),

$\{v_1, \dots, v_r, x_1, \dots, x_r\}$ lin. independientes.

Si $r = n/2 \rightarrow \beta = \{v_1, \dots, v_r, x_1, \dots, x_r\}$ tiene $2r = n$ vectores, por lo que forma base.

Además, $f(v_i) = 0$, y $f(x_i) = v_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(f, \beta) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $r > n/2 \rightarrow \{v_1, \dots, v_r, x_1, \dots, x_r\}$ tiene $2r > 2 \cdot \frac{n}{2} = n$ vectores, lin. independientes, todos ellos en V, por lo que $\dim_K(V) > n$. $\lightning$

Si $r < n/2 \Rightarrow$ Se amplía la base con elementos de $\mathrm{Ker}(f)$ lin. indep. al principio.

$\beta_K = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{n-2r}\}$ base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$\beta = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{n-2r}, x_1, \dots, x_r\}$