Ejercicio clase

(3) $$\int_a^b f(x)\,dx = T(a,b) + R(f)$$

a) $E(x) = f[a,b,x]\,\Pi(x)$ $\quad \Pi(x) = (x-a)(x-b)$

$\Pi(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$ $\quad \begin{matrix}(x-a)\geq 0\\(x-b)\leq 0\end{matrix} \Rightarrow$

$\Pi(x) \leq 0$

T. Val. Med. Int. Gen

$$R(f) = \int_a^b f[a,b,x]\,\Pi(x)\,dx = f[a,b,\mu]\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$x^2 - bx - ax + ab$

$$= \frac{f''(\xi)}{2!}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + abx\right]_a^b = \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot\frac{(a-b)^3}{6} =$$

$\to a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$= -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12} \qquad \xi \in [a,b]$$

Partición uniforme

b) $T(a,b) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ Sea $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{f''(\mu_i)(x_i - x_{i-1})^3}{12}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) - \frac{h^3 n}{12} f''(\xi) =$$

$\uparrow$ T. Valor Medio func. cont

$$= \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b) + \sum_{i=1}^{n} h f(a+ih) - \frac{h^3 n}{12} f''(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

c) $h = b - a \qquad m = \dfrac{a+b}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx = T(a,m) + T(m,b) - \frac{h^3 f''(\mu_1)}{8 \cdot 12} - \frac{h^3 f''(\mu_2)}{8 \cdot 12}$$

$$= T(a,m) + T(m,b) - \frac{h^3 f''(\tilde{\mu})}{4 \cdot 12} \qquad \tilde{\mu} \in [a,b]$$

$$\int_a^b f(x)dx = T(a,b) - \frac{h^3 f''(\mu)}{12} \qquad \mu \in [a,b]$$

Asumimos que $f''(\tilde{\mu}) \approx f''(\mu)$

$$T(a,b) - T(a,m) - T(m,b) \approx \frac{3 h^3 f''(\mu)}{4 \cdot 12}$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(a,m) - T(m,b) \right| =$$

$$= \left| T(a,b) - \frac{h^3 f''(\xi)}{12} - T(a,m) - T(m,b) \right|$$

$$= \left| - \frac{h^3 f''(\tilde{\mu})}{4 \cdot 12} \right| \approx \frac{1}{3} \left| T(a,b) - T(a,m) - T(m,b) \right| \Rightarrow$$

Si $|T(a,b) - T(a,m) - T(m,b)| < 3\varepsilon \Rightarrow$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T(a,m) - T(m,b) \right| \tilde{<} \varepsilon$$

d)

$T(4,8) = \frac{4}{2}(f(4)+f(8)) \approx 4.0092416$

$T(4,6) = \frac{2}{2}(f(4)+f(6)) \approx 2.004992$

$T(6,8) = \frac{2}{2}(f(6)+f(8)) \approx 2.000455$

$|T(4,8)-T(4,6)-T(6,8)| \approx 0.0037946 < 3\cdot\varepsilon \Rightarrow$

Para $\varepsilon = 0.0013$ se cumple $\Rightarrow$

$\left|\int_4^8 f(x)\,dx - T(4,6)-T(6,8)\right| \lesssim 0.0013$

El error cometido es menor que 10^{-2}

3 Considera la fórmula de cuadratura simple del trapecio en la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(a,b) + R(f).$$

a) Obtén la expresión del error $R(f)$ para f suficientemente regular.

b) Obtén la fórmula compuesta asociada y la correspondiente expresión del error.

c) Llama $h = b - a$. De forma similar a la vista en clase para la integración adaptativa con la fórmula de Simpson, obtén un criterio de estimación del error

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T(a,m) - T(m,b)\right|$$

basado en $T(a,b)$, $T(a,m)$ y $T(m,b)$, siendo $m = \frac{a+b}{2}$.

d) Estima el error cometido en la aproximación en dos subintervalos

$$\int_4^8 \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) dx \approx T(4,6) + T(6,8) = 4.0054471$$

sabiendo que $f(4) = 1.0045789$, $f(6) = 1.0004131$ y $f(8) = 1.0000419$.