Álgebra I (Doble grado Informática-Matemáticas)

Curso 22-23.

Relación 3

1. (a) Si A y B son anillos conmutativos, probar que el conjunto producto cartesiano $A \times B$, con las operaciones
$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'), \quad (a, a')(b, b') = (ab, a'b').$$
es efectivamente un anillo conmutativo. Se llama el "*anillo producto cartesiano*" de A y B.
   (b) Escribir las tablas de sumar y multiplicar del anillo producto $\mathbb{Z}_2 \times Z_2$.
2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ definimos las operaciones de suma $\oplus$ y producto $\otimes$ por
$$a \oplus b = a + b - 1,$$
$$a \otimes b = a + b - ab.$$
Así, por ejemplo, $2 \oplus 3 = 5$ y $2 \otimes 3 = -1$. ¿Es $\mathbb{Z}$ un anillo conmutativo con estas operaciones?
3. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos las operaciones
$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'),$$
$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b).$$
¿Es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un anillo conmutativo con estas operaciones?
4. Calcula el cociente y el resto de dividir
   (a) 17.544 entre 123,
   (b) −17.544 entre −123,
   (c) 17.544 entre −123,
   (d) −17.544 entre 123.
5. Escribir las tablas de sumar y multiplicar de los anillos $\mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_6$.
6. Sea $R : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ la aplicación que asigna a cada entero su resto al dividirlo por n ($n \geq 2$). Probar que, para cualquier natural $m \geq 1$ y $r \in \mathbb{Z}_n$, se verifica que
$$m\,r = R(m\,r) = R(m)\,r$$
donde el término $m\,r = \sum_1^m r$ es el resultado de sumar, en $\mathbb{Z}_n$, r consigo mismo m veces, el término $R(m\,r)$ es el resto de dividir por n el número natural producto de m y r, y el término $R(m)\,r$ es el producto en $\mathbb{Z}_n$, del resto de dividir m entre n por r.
   Utilizando lo anterior ¿es verdad que si, en $\mathbb{Z}_8$, sumas 7 consigo mismo 23 veces obtienes 1, o que si sumas 6 consigo mismo 125 veces obtienes 6?
7. Efectuar los siguientes cálculos en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$:
$$(3 + 2\sqrt{3}) + (4 - 5\sqrt{3}), \quad (3 + 2\sqrt{3})(4 - 5\sqrt{3}), (2 - \sqrt{3})^3.$$
8. ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?
   (*i*) $\{a \in \mathbb{Q} \mid 3a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$,
   (*ii*) $\{m + 2n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$.
9. Determinar las unidades del anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con las operaciones $(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b')$ y $(a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b)$ (ver el Ejercicio 3).
10. Encontrar todas las unidades de los anillos $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_8$.

11. ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?
 (i) $\{\sum a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \mid a_1 \text{ es par}\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$,
 (ii) $\{\sum a_i X^i \in \mathbb{Z}[X] \mid a_2 \text{ es par}\} \subseteq \mathbb{Z}[X]$.
12. Efectuar las siguientes operaciones en el anillo $\mathbb{Z}_5[X]$
$$\begin{array}{l}(3+4X+X^2+2X^3)+(3+4X+4X^4+3X^3),\\(3+4X+X^2+2X^3)(3+4X+4X^4+3X^3),\\(2-4X+X^2-2X^3)+(3-4X+4X^2-3X^3),\\(2-4X+X^2-2X^3)(3-4X+4X^2-3X^3).\end{array}$$
13. Si $p(X) \in \mathbb{Z}_5[X]$ es cualquiera de los cuatro polinomios obtenidos al realizar el ejercicio anterior, calcular $p(1)$ y $p(-1)$ en cada caso.
14. El conjunto $\mathbb{R}^2$ es un anillo con las operaciones $(a,a')+(b,b')=(a+b,a'+b')$ y $(a,a')\cdot(b,b')=(ab-a'b',ab'+a'b)$. Probar que hay un isomorfismo $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.
15. Sea A un anillo conmutativo y $u \in A$ una unidad del anillo. Demostrar que la aplicación $f_u : A \to A$ dada por $f_u(x) = uxu^{-1}$ es un automorfismo de A.
16. Dado un anillo A demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en A.
17. Para un anillo A, se define la **característica** de A como el menor entero positivo n tal que $n \cdot 1 = 1 + \overset{n\, sumandos}{\cdots\cdots} + 1 = 0$, siendo 1 el uno del anillo A. Si no existe tal n diremos que la característica de A es 0,

 Demostrar que si A es un anillo de característica $n \geq 2$ entonces existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}_n$ en A.
18. Dados dos números naturales $n, m \geq 2$, dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{Z}_m$