Algebra II

Aurora del Río

Departamento de Álgebra

Tema 1. Combinatoria y Teoría elemental de Grafos

Permutaciones

Definición

Una **permutación** *de un conjunto* X *es una aplicación biyectiva* $f : X \to X$*.*

El conjunto de todas las permutaciones de un conjunto X se denota $Perm(X)$. En particular, si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de permutaciones se representa por S_n y su cardinal es $n!$.
Podemos verlo como las ordenaciones de los elementos de un conjunto

Ejemplo:

$X = \{1, 2, 3\}$; $Perm(X) = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

Variaciones

Definición

Se llaman **variaciones sin repetición** *de n elementos, tomados de m en m a cada una de las posibles elecciones ordenadas de m elementos distintos, dentro de un conjunto de n elementos.*

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Definición

Se llaman **variaciones con repetición** *de n elementos, tomados de m en m,$1 \leq m \leq n$, a cada una de las posibles elecciones ordenadas de m elementos, dentro de un conjunto de n elementos, pudiéndose tomar elementos repetidos.*

$$VR_n^m = n^m$$

Variaciones

En ambos casos, dos posibles elecciones se diferencian, bien en la naturaleza de los elementos elegidos, bien en el orden en que se han elegido.

Ejemplo:

$X = \{1, 2, 3\}$;

$V_3^2 = \{12, 13, 21, 31, 23, 32\}$;

$V_3^3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} = Perm(X)$

$VR_3^2 = \{12, 13, 21, 31, 23, 32, 11, 22, 33\}$;

$VR_3^3 = \{121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 311, 312, 313, 231, 232, 233, 321, 322, 323, 111, 112, 113, 221, 222, 223, 331, 332, 333\}$

Combinaciones

Definición

Una **combinación sin repetición** *de n elementos tomados de m a m, $1 \leq m \leq n$, es cada uno de los posibles subconjuntos de m elementos distintos dentro de un conjunto de n elementos.*

El número de combinaciones sin repetición de n elementos tomados de m a m, $1 \leq m \leq n$, está dado por el número combinatorio $\binom{n}{m}$, esto es,

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Combinaciones

Definición

Una **combinación con repetición** *de n elementos tomados de m a m, $1 \leq m \leq n$, es cada uno de las posibles agrupaciones de m elementos (no necesariamente distintos), no importando el orden, dentro de un conjunto de n elementos.*

El número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de m a m, $1 \leq m \leq n$, está dado por la fórmula

$$CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Combinaciones

En ambos casos se tiene por tanto que dos combinaciones son iguales sí y sólo sí tienen los mismos elementos sin importar el orden

Ejemplo:

$X = \{1, 2, 3\};$

$C_3^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\};$

$C_3^3 = \{\{1, 2, 3\}\}$

$CR_3^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}\};$

$CR_3^3 = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 3\},$
$\{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 3, 3\}, \{3, 3, 3\}\}$

Números combinatorios. Teorema del binomio

Proposición (Propiedades de los números combinatorios)

1. $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. **Teorema del binomio**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

5. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Ejemplos

Dado $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, un ciclo de longitud m es una permutación $\sigma \in S_n$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(a_i) = a_{i+1} & i = 1, \ldots, a_{m-1} \\ \sigma(a_m) = a_1 & \\ \sigma(a_j) = a_j & \forall a_j \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \end{array} \right.$$

y lo representamos $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, pero también por $(a_2, \ldots, a_m, a_1) = (a_3, \ldots, a_1, a_2) \ \ldots = (a_m, a_1, \ldots, a_{m-1})$

Hay m formas distintas de representar un ciclo de longitud m.

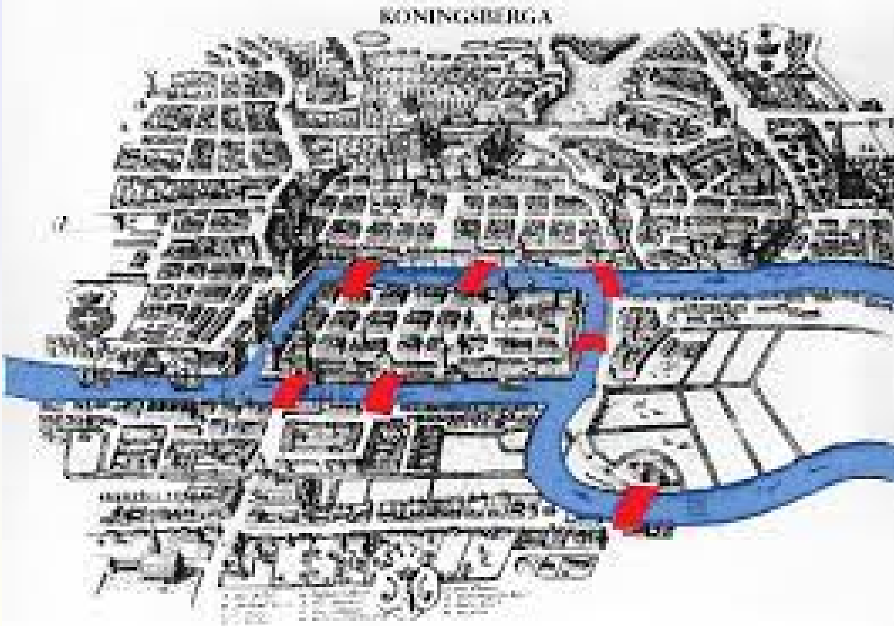
Ejemplo

En S_3 los ciclos de longitud 2 son: $(12), (13), (23)$ y los de longitud 3 son $(123) = (231) = (312); (132) = (321) = (213)$.

El número de ciclos de longitud 3, como importa el orden, hay $V_3^3 = P_3$, pero cada ciclo de longitud 3 se expresa de 3 maneras distintas, el número de ciclos es $\dfrac{V_3^3}{3} = 2$

En general, el número de ciclos de longitud m en $S_n = \dfrac{V_n^m}{m} = \binom{n}{m}$

Grafos. Introducción



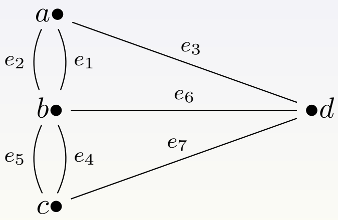
Indice

Generalidades sobre Grafos

Definición

Un grafo G es un par (V, E), donde V y E son dos conjuntos, junto con una aplicación $\gamma_G : E \to \{\{u, v\}/u, v \in V\}$. V es el conjunto de vértices, E el conjunto de lados o aristas, y γ_G aplicación de incidencia.

Ejemplo Puentes de Konisberg:



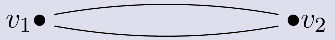
$\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2) = \{a, b\}; \gamma_G(e_3) = \{a, d\}; \gamma_G(e_4) = \gamma_G(e_5) = \{b, c\}; \gamma_G(e_6) = \{b, d\}; \gamma_G(e_7) = \{c, d\};$

Ejemplos de grafo

Ejemplos: $V = \{v_1, v_2\}$

$E = \emptyset$

$E = \{[v_1, v_2]_1, [v_1, v_2]_2\}$



Grafos Simples

$E = \{[v_1] = [v_1, v_1], [v_1, v_2]\}$

Grafo con lazos

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\}$

Grafo dirigido

Trabajaremos con grafos sin lazos ni lados paralelos, también llamados multigrafos.

Ejemplos de grafos

Un grafo dirigido u orientado es un par (V, E), donde V y E son conjuntos, junto con dos aplicaciones $s, t : E \to V$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo con aplicación de incidencia γ_G. Un subgrafo de G es un nuevo grafo $G' = (V', E')$ donde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y se verifica que $\gamma_{G'}(e) = \gamma_G(e)$ para cualquier $e \in E'$.

Un subgrafo G' se dice pleno si se verifica que $e \in E$ es tal que $\gamma(e) \subseteq (V')$ entonces $e \in E'$, es decir, si tiene todas las aristas de G que unen vértices de V'.
Para un grafo pleno basta con dar los vértices.

Caminos en un grafo.

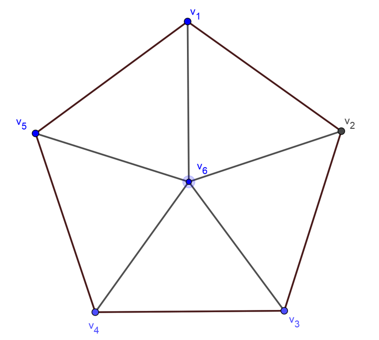
Un camino es una sucesión finita de lados con la propiedad de que cada lado acaba donde empieza el siguiente.
Un camino de longitud n es una sucesión de lados $e_1 e_2 \ldots e_n$, junto con una sucesión de vértices $v_0 v_1 \ldots v_n$ tales que $\gamma_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

- Cerrado: camino que empieza y acaba en el mismo vértice.
- Recorrido: camino sin lados repetidos
- Simple: recorrido en el no se repiten vértices (eventualmente el primer y último)
- Circuito: recorrido cerrado
- Ciclo: circuito que además es camino simple.

Caminos en un grafo.

Nombre	Aristas repetidas	Vértices repetidos	Abierto
Camino			
Recorrido	NO		
Camino Simple	NO	NO	
Camino Cerrado			NO
Circuito		NO	NO
Ciclo	NO	NO	NO

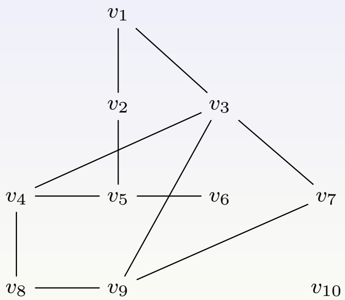
Caminos en un grafo.



Camino de longitud 6: $v_1 - v_2 - v_6 - v_1 - v_5 - v_6 - v_2$
Camino cerrado de longitud 6: $v_1 - v_2 - v_6 - v_1 - v_5 - v_6 - v_1$
Recorrido de longitud 4: $v_1 - v_2 - v_6 - v_1 - v_5$
Circuito de longitud 6: $v_6 - v_1 - v_5 - v_6 - v_4 - v_3 - v_6$
Camino simple de longitud 5: $v_6 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$
Ciclo (longitud 3 y longitud 5): $v_6 - v_1 - v_2 - v_6$;
$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6$

Caminos en un grafo

Sea G un grafo, si existe un camino de u a v, entonces existe un camino simple de u a v.
Sea G un grafo y sean u y v dos vértices distintos. Si existen dos caminos simples distintos de u a v, entonces hay un ciclo en G
Ejemplo



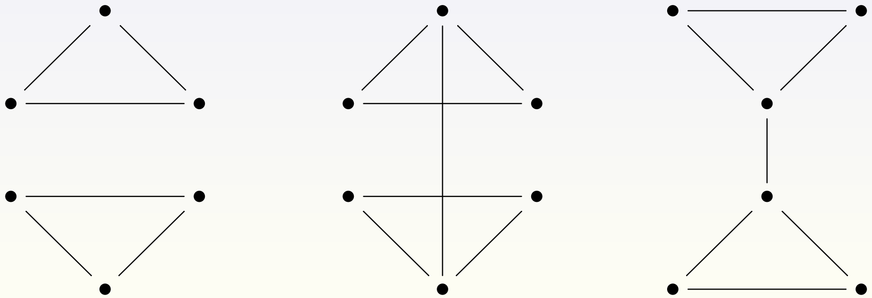
Camino de longitud 6: $v_1v_3v_9v_8v_4v_3v_7 \rightsquigarrow v_1v_3v_7$ camino simple.
Caminos simples $v_3v_4v_8$ y $v_3v_9v_8 \rightsquigarrow v_3v_4v_8v_9v_3$ ciclo.

Grafos conexos

En el conjunto de vértices de un grafo G se pued establecer la siguiente relación binaria R (que es de equivalencia)

$$u, v \in V, uRv \Leftrightarrow \text{existe un camino de u a v}$$

Un grafo se dice conexo si todo par de vértices están relacionados por la relación anterior, es decir, están conectados por un camino. El conjunto cociente V/R es unitario.



Matriz de adyacencia

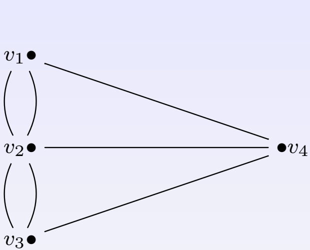
Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Se define su matriz de adyacencia como la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ cuyo coeficiente a_{ij} es el número de aristas que unen v_i con v_j.

Propiedades

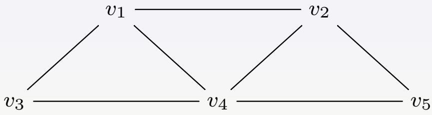
Para un grafo sin lazos y no dirigido:

- los elementos de la diagonal son todos 0
- es simétrica
- la matriz de adyacencia NO es única, depende de la ordenación de los vértices (se pasa de una a otra mediante una permutación, matriz invertible con un 1 por fila y lo demás ceros)
- toda matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{N}$ es la matriz de adyacencia de algún grafo.
- si el grafo no tiene lados paralelos, entonces la matriz de adyacencia sólo tiene 0 y 1.

Matriz de adyacencia. Ejemplos



$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia

Teorema

Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. En la posición ij de la matriz A^k aparece el número de caminos de longitud k que unen v_i y v_j.

Se demuestra por inducción sobre n.

Ejemplo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 22 & 4 & 11 \\ 22 & 8 & 22 & 11 \\ 4 & 14 & 4 & 7 \\ 11 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

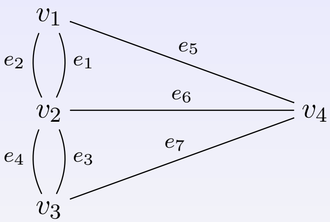
Matriz de incidencia

Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y cuyo conunto de lados es $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Se define su matriz de incidencia como la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{N})$ cuyo coeficiente a_{ij} vale 1 si $v_i \in \gamma_G(e_j)$ y 0 en otro caso.

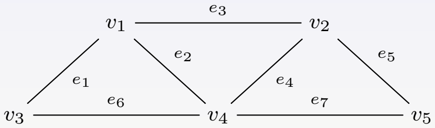
Propiedades

- La matriz de incidencia NO es única, depende de la ordenación de los vértices
- Si un grafo tiene lados paralelos, su matriz de incidencia tiene dos columnas iguales
- Los lazos se traducen en filas con un único coeficiente 1.

Matriz de incidencia. Ejemplos



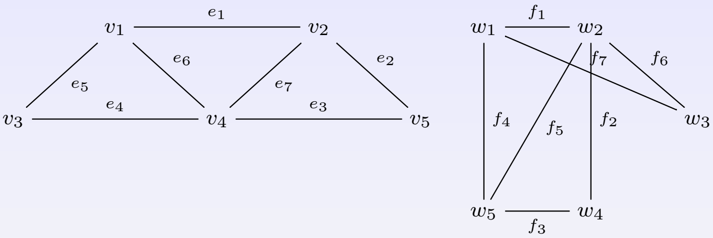
$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\rightsquigarrow B =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isomorfismo de grafos



h_V	h_E
$v_1 \mapsto w_1$	$e_1 \mapsto f_4$
$v_2 \mapsto w_5$	$e_2 \mapsto f_3$
$v_3 \mapsto w_4$	$e_3 \mapsto f_2$
$v_4 \mapsto w_3$	$e_4 \mapsto f_6$
$v_5 \mapsto w_2$	$e_5 \mapsto f_7$
	$e_6 \mapsto f_1$
	$e_7 \mapsto f_5$

Isomorfismo de grafos

Dos grafos G y G' se dice que son isomorfos si existen dos biyecciones $h_V : V \to V'$, $h_E : E \to E'$ tales que para cada lado $e \in E$ se verifica que $\gamma'_G(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v')\}$, donde $\gamma_G(e) = \{u, v\}$.

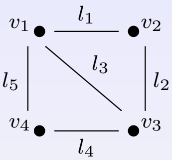
Observación

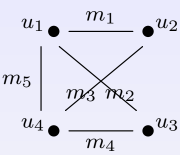
Dados dos grafos isomorfos, entonces existe una permutación de la matriz de adyacencia de uno en la matriz de adyacencia del otro, esto es, existe P tal que $P^{-1}AP = C$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isomorfismo de grafos.





$$
\begin{array}{ccccccc}
v_1 & \mapsto & u_1 & \quad & l_1 & \mapsto & m_1 \\
v_2 & \mapsto & u_2 & & l_2 & \mapsto & m_2 \\
v_3 & \mapsto & u_4 & & l_3 & \mapsto & m_5 \\
v_4 & \mapsto & u_3 & & l_4 & \mapsto & m_4 \\
 & & & & l_5 & \mapsto & m_3
\end{array}
$$

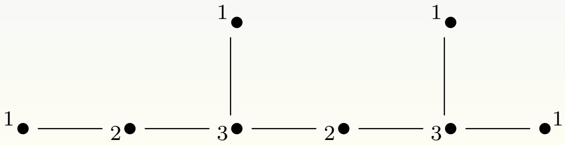
$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}
$$

Grado de un vértice

Una propiedad se dice invariante por isomorfismo si dados dos grafos isomorfos G y G', uno satisface la propiedad, sí y sólo sí, lo satisface el otro.Los dos primeros invariantes son el número de vértices y el número de lados.

Definición

Sea G un grafo y v un vértice de G. Se define el grado de v, y lo denotaremos $gr(v)$, como el número de lados que son incidentes en v. Denotaremos mediante $D_k(G)$ al número de vértices de V de grado k. A la sucesión $D_0(G), D_1(G), \ldots, D_k(G), \ldots$ la llamaremos sucesión de grados del grafo.



Sucesión de grados: 0, 4, 2, 2

Invariantes por isomorfismos. Grado de un vértice

Observación 1

El grado de un vértice es un invariante por isomorfismos, esto es, $gr(v) = gr(h_V(v))$.

Observación 2

Las sucesiones de grados de dos grafos isomorfos son iguales

Relación entre grados y lados 1

$$\sum_i gr(v_i) = 2 \cdot l$$

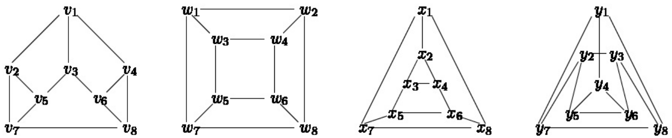
con $l = |E|$ el número de lados

Relación entre grados y lados 2

En un grafo, el número de vértices de grado impar es par.

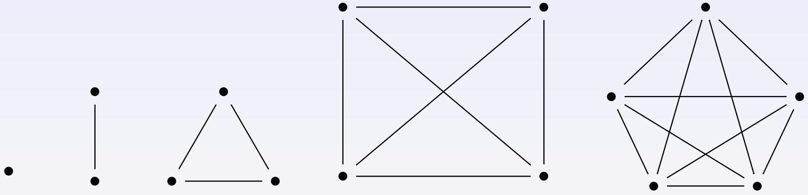
Se dice que un grafo es regular si todos los vértices tienen el

Grafos con igual sucesión de grados no son isomorfos



Familias de grafos. Grafos completos

Se llama grafo completo de n vértices y se denota K_n, al grafo (con n vértices) que no tiene lados paralelos, y dados dos vértices hay un lado que los une. $|V| = n; |E| = \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$

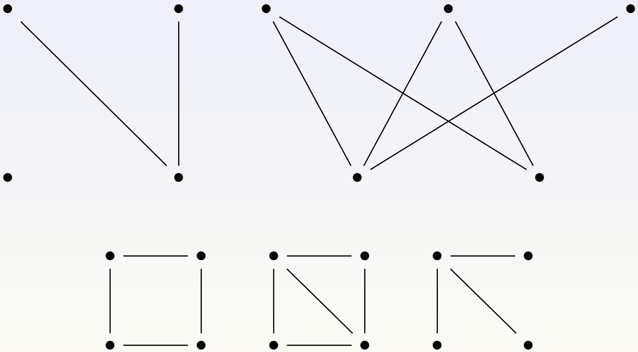


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Su matriz de adyacencia vale 0 en la diagonal principal y $n-1$ en el resto.

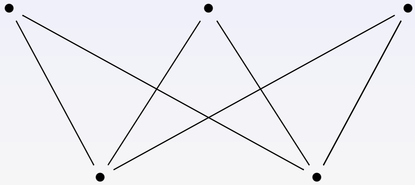
Familias de grafos. Grafos bipartidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es bipartido si podemos descomponer V en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 de manera que todo lado incide en un vértice de V_1 y en un vértice de V_2. $|V| = |V_1| + |V_2|$

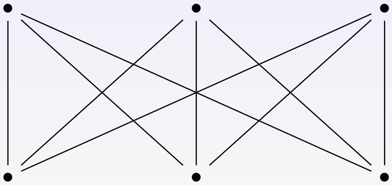


Familias de grafos. Grafos bipartidos completos

Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartido completo si es bipartido, y para cada $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ existe un único lado $e \in E$ tal que $\gamma(e) = \{v_1, v_2\}$. Se denotan mediante $K_{n,m}$, donde $n = |V_1|$ y $m = |V_2|$. En este caso, $|V| = m + n$ y $|E| = m \cdot n$



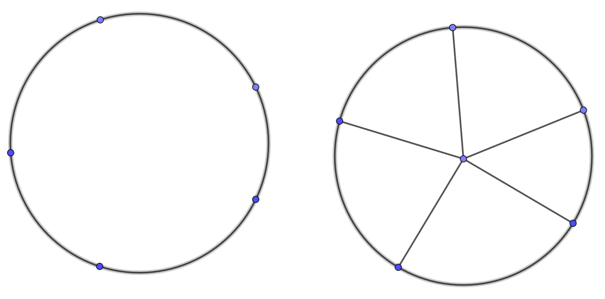
$K_{3,2}$



$K_{3,3}$

Otras familias de grafos.

Un grafo $G = (V, E)$ se dice ciclo con n vértices si cada vértice es incidente únicamente con los vértices anterior y posterior. $|V| = n$ y $|E| = n$. Se denota mediante C_n



C_5 $\qquad$ W_5

Un grafo $G = (V, E)$ se dice rueda con n vértices si cada vértice es incidente únicamente con los vértices anterior y posterior y con un tercer vértice central. $|V| = n + 1$ y $|E| = 2n$. Se denota mediante W_n

Sucesiones gráficas

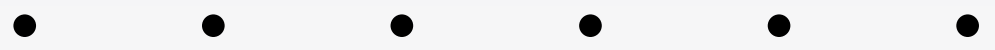
¿Cualquier lista de números naturales se corresponde con los grados de algún grafo?

Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$. Decimos que la sucesión $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es una sucesión gráfica si existe un grafo G sin lazos, ni lados paralelos con n vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y tal que $gr(v_i) = d_i$.

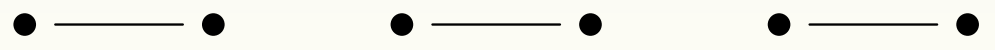
Diremos que G es una realización de la sucesión $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Ejemplos

- La sucesión 0,0,. . . , 0, es una sucesión gráfica y su realización es un grafo con n vértices y 0 aristas.

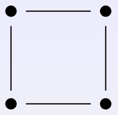


- La sucesión 1,1,1,1,1,1 es una sucesión gráfica siempre y cuando el número de términos (vértices) sea par.



Sucesiones gráficas. Ejemplos

- La sucesión 2,2,2,2 es una sucesión gráfica. Una realización es:



- La sucesión 5,4,4,3,2,2,1 no es una sucesión gráfica, pues la suma de los grados es 17 (impar).
- La sucesión 5,3,3,2,1 no es una sucesión gráfica, pues tengo 5 vértices y un vértice de grado 5.

Sucesiones gráficas. Teorema de Havel-Hakini

Sea $d_1, d_2, \ldots, d_n$ una sucesión de números naturales ordenada $(d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$ y con $d_1 < n$. Entonces $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es una sucesión gráfica sí y sólo sí $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots d_n$ es una sucesión gráfica.

Ejemplos

2,2,2,2 es una sucesión gráfica

Quitamos el 2 y restamos 1 a los 2 primeros términos

1,1,2 reordenamos $\rightsquigarrow$ 2,1,1

Quitamos el 2 y restamos 1 a los 2 primeros términos

0,0 esta sí es una sucesión gráfica y por tanto lo es la inicial.

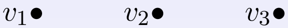
5	4	4	2	2	1	Quitamos el 5 y restamos 1 a los 5 primeros
	3	3	1	1	0	Quitamos el 3 y restamos 1 a los 3 primeros
		2	0	0	0	Quitamos el 2 y restamos 1 a los 2 primeros
			-1	-1	0	NO es sucesión gráfica $-1 \notin \mathbb{N}$

Teorema de Havel-Hakini. Ejemplo

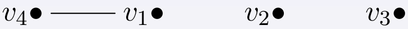
4	4	3	2	2	2	1	Quitamos el 4 y restamos 1 a los 4 primeros
	3	2	1	1	2	1	Reordenamos
	3	2	2	1	1	1	Quitamos el 3 y restamos 1 a los 3 primeros
		1	1	0	1	1	Reordenamos
		1	1	1	1	0	Quitamos el 1 y restamos 1 al primero
			0	1	1	0	Reordenamos
			1	1	0	0	Quitamos el 1 y restamos 1 al primero
				0	0	0	Sucesión gráfica

Teorema de Havel-Hakini. Algoritmo de reconstrucción

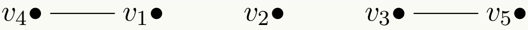
4,4,3,2,2,2,1 es una sucesión gráfica. Empezamos a reconstruir por 0,0,0



1,1,0,0 agregamos un vértice de grado 1



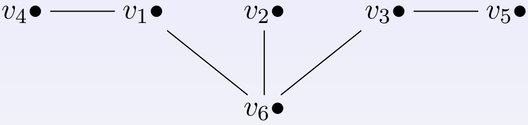
1,1,1,1,0 agregamos un vértice de grado 1 y uno de los que había aumenta



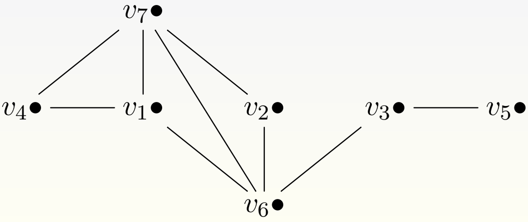
3,2,2,1,1,1 agregamos un vértice de grado 3 y ya no queda ninguno de grado 0

Algoritmo de reconstrucción

3,2,2,1,1,1 agregamos un vértice de grado 3 y ya no queda ninguno de grado 0

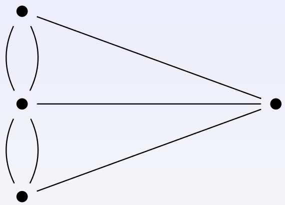


4,4,3,2,2,2,1 agregamos un vértice de grado 4 y el de grado 3 aumenta en 1.



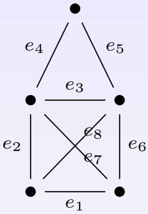
El problema de los puentes de Konisberg

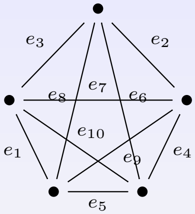
Encontrar un circuito en el aparezcan TODOS los lados del grafo.
Cuando existe un circuito así, se dice que es un circuito de Euler.



Un camino de Euler en un grafo G es un recorrido en el aparecen todos los lados.
Un circuito de Euler es un camino de Euler cerrado.
Un grafo G es un grafo de Euler si es conexo y tiene un circuito de Euler

Ejemplo





$e_2e_4e_5e_8e_1e_7e_3e_6$;
Camino de Euler;

$e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_8e_{10}e_7e_9$
Circuito de Euler

Grafos de Euler

Teorema

Un grafo conexo es de Euler sí y sólo sí todos sus vértices son de grado par.

Corolario

Un grafo conexo tiene un camino de Euler sí y sólo sí tiene exactamente 2 vértices de grado impar.

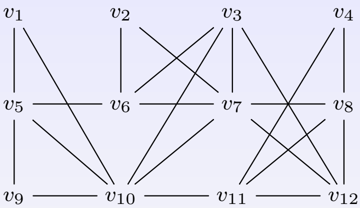
Observación 1

Cuando tengamos un camino (no circuito) de Euler empezaremos siempre en uno de los vértices de grado impar.

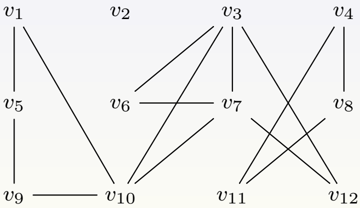
Observación 2

Para construir un camino de Euler, construímos ciclos sobre un vértice y eliminando los lados que en él aparecen. Después "pegaremos" los ciclos que obtengamos por los vértices que comparten

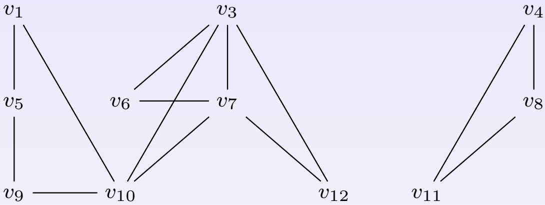
Grafos de Euler. Ejemplo



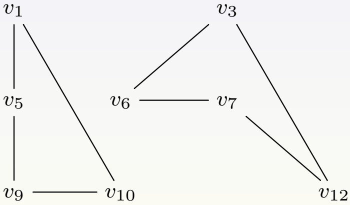
$v_2v_6v_5v_{10}v_{11}v_{12}v_8v_7v_2$



Grafos de Euler. Ejemplo



$v_2 v_6 v_5 v_{10} v_7 v_3 v_{10} v_{11} v_{12} v_8 v_{11} v_4 v_8 v_7 v_2$



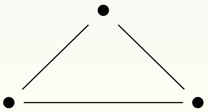
$v_2 v_6 v_5 v_{10} v_1 v_5 v_9 v_{10} v_7 v_3 v_{10} v_{11} v_{12} v_8 v_{11} v_4 v_8 v_7 v_{12} v_3 v_6 v_7 v_2$

Algoritmo de Fleury

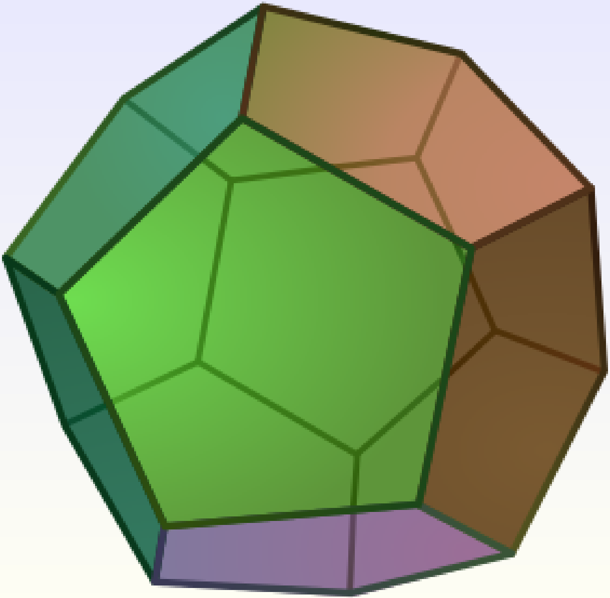
1. Verificar que el grafo es conexo con todos los vértices de grado par
2. Seleccionar un vértice arbitrario
3. Seleccionar una arista a partir de ese vértice que no sea puente, a menos que no haya otra alternativa
4. Desconectar los vértices que están unidos por la arista seleccionada
5. Reiterar desde el punto 3 hasta que todos los vértices estén desconectados, en cuyo caso ya se tiene el circuito de Euler.

Grafos de Euler. Ejemplos

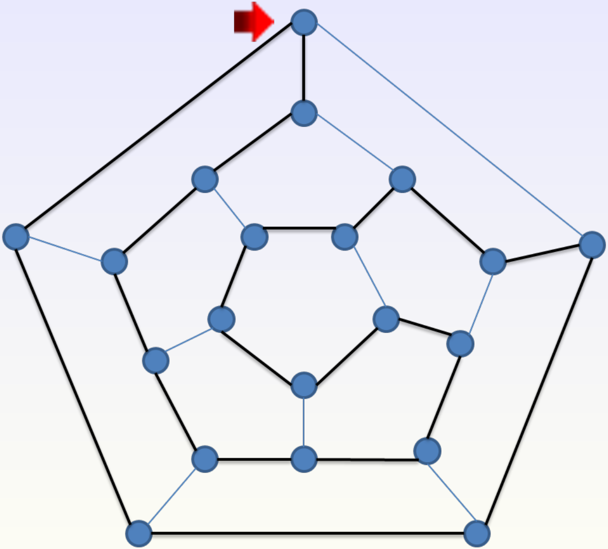
- K_n es de Euler cuando n es impar.
  $gr(v_i) = n - 1$ y si el grado debe ser par, entonces $n - 1$ es par y por tanto n impar.
- $K_{m,n}$ es de Euler cuando n y m son pares.
  $$\begin{array}{ll} gr(v_i) = n & \text{cuando el vértice está en el primer conjunto} \\ gr(v_j) = m & \text{cuando el vértice está en el segundo conjunto} \end{array},$$
  por lo tanto n y m son pares.
- W_n Nunca es de Euler, excepto W_2
  $$\begin{array}{ll} gr(v_i) = 3 & \text{cuando el vértice no es el central} \\ gr(v_j) = n & \text{cuando el vértice es el central} \end{array}$$
  En el caso W_2, lo que tenemos es un triángulo y por lo tanto el grado de todos los vértices es 2.



Grafos de Hamilton. El dodecaedro viajero

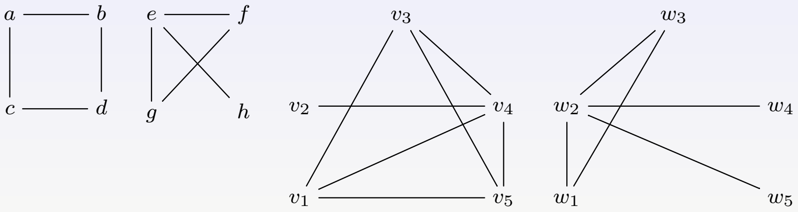


Grafos de Hamilton. El dodecaedro viajero



Grafos de Hamilton

Un camino de Hamilton es un camino que recorre todos los vértices una sola vez. Un circuito de Hamilton es un camino cerrado que recorre todos los vértices una sola vez (salvo los extremos). Un grafo con un circuito de Hamilton se denomina grafo hamiltoniano.
Ejemplo



abdca (circuito) ; hefg (camino); $v_1 v_3 v_5 v_4 v_2$ (camino) No hay ni circuito ni camino

Grafos de Hamilton

Teorema

Sea G un grafo con n vértices. Entonces:

1. Si el número de lados es mayor o igual que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ entonces el grafo es hamiltoniano.
2. Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices no adyacentes se verifica que $gr(u)+gr(w) \geq n$, entonces G es un grafo de Hamilton.

Observación 1

Un grafo con algún vértice de grado 1 no puede ser de Hamilton.

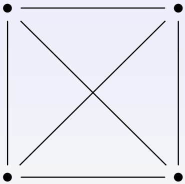
Observación 2

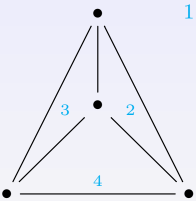
Un grafo de Hamilton con n vértices tiene al menos n lados.

Un grafo es plano si admite una representación sobre el plano en la que los lados no se cortan

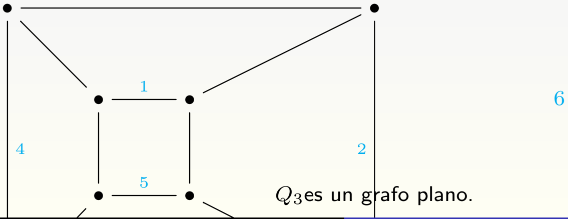
Ejemplos

- K_4 es plano





- Los poliedros son grafos planos, los vértices son los vértices y las aris



Q_3 es un grafo plano.

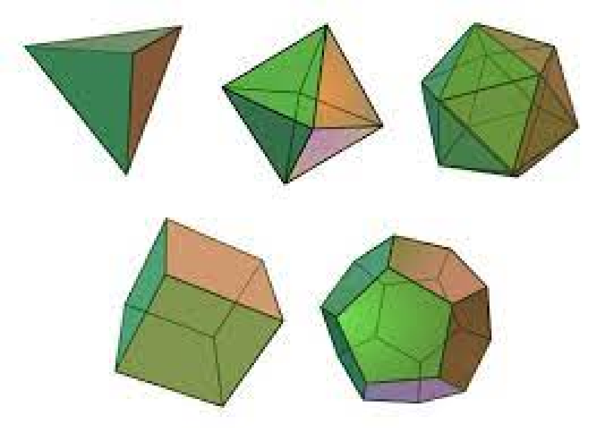
Característica de Euler

Sea G un grafo plano y conexo, entonces $v - l + c = 2$, donde v= números de vértices; l=número de lados; c= número de caras de una representación plana.
En general, si G es plano, y χ es el número de componenetes conexas $v - l + c = 1 + \chi$
En un poliedro, se cumple que $v - l + c = 2$, donde v= números de vértices; l=número de lados; c= número de caras

Ejemplos

- K_4 tiene 4 vértices, 6 lados y 4 caras
- Q_3 tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras
- Sólo existen 5 sólidos regulares.

Sólidos regulares



Grafos planos

Si un grafo es plano, conexo, sin lazos ni lados paralelos y sin vértices de gado 1, entonces

$$3c \leq 2l; \quad l \leq 3v - 6$$

K_5 y $K_{3,3}$ no son planos y son los grafos más pequeños que no son planos.
K_5 tiene $v = 5$. Si fuera plano $l \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, pero tiene $l = 10$
$K_{3,3}$ es bipartido, el problema de los suministros.
Dado un grafo G y dos vértices u y v adyacentes mediante e. Una contracción simple de G a través de e es el grafo cuyo conjunto de vértices es $V - \{v\}$ y cuyo conjunto de aristas es el obtenido al eliminar e y unir con u todos aquellos vértices que estaban unidos con v.
Una contracción de G es una cadena de contracciones simples.

Teorema de Kuratowski

Sea G un grafo. Entonces G es un grafo plano sí, y sólo sí, ningún subgrafo suyo puede contraerse a K_5 y $K_{3,3}$.

Ejemplos