



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

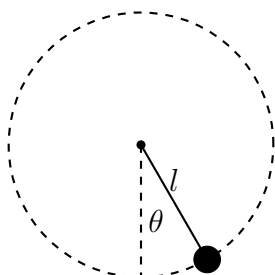
Curso 2024-2025

Índice general

0. Introducción	5
-----------------	---

0. Introducción

La mayoría de ecuaciones diferenciales han sido planteadas por campos como la física. Veamos el caso de un péndulo:



Las condiciones que definen el péndulo son $g > 0$, ya que se encuentra en la Tierra, l que es la longitud del péndulo y θ que es el ángulo con respecto a la vertical.

La ecuación que define el ángulo a lo largo del tiempo es la siguiente:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden (ya que aparece una segunda derivada). En ella tenemos que t es la variable independiente y θ es la incógnita o variable dependiente (que es una función).

Si estudiamos las soluciones de esta ecuación tenemos

$\theta(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ es una solución (trivialmente)

$\theta(t) = \pi$, $t \in \mathbb{R}$ es también solución

$\theta(t) = 2n\pi$, $\theta(t) = n\pi$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ son infinitas soluciones

De esta forma podemos ver que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones.

Definición 0.1. Podemos definir una **ecuación diferencial de primer orden** como la relación funcional dada por

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$$

donde t es la **variable independiente** y $x = x(t)$ es la **variable independiente** o **incógnita**.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial dada por

$$x(t) + x'(t)^2 = 1$$

Podemos definir¹ $\Phi = \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1$, o equivalentemente²

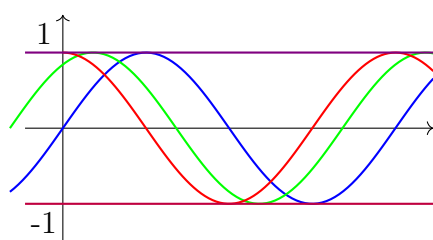
$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, y) \mapsto \Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

¹Notación física

²Notación moderna (matemática)

Estudiemos las soluciones a esta ecuación:



- $x(t) = \sin(t), t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \cos(t), t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = 1, t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = -1, t \in \mathbb{R}$
- $x(t) = \sin(t + c), t \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R}$ (familia uniparamétrica).

Podemos construir otra solución uniendo las ya dadas como por ejemplo

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } t \geq 0 \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable y por tanto solución a la ecuación.

Típicamente estudiaremos ecuaciones diferenciales de primer orden en **forma normal**, es decir, ecuaciones que se pueden escribir como

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Esto es una subfamilia de las ecuaciones previamente descritas.

Ejemplo.

a) $x'(t) = 7x(t)$

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, y) &= y - 7x \\ f(t, x) &= 7x \end{aligned}$$

Algunas de las soluciones son $x(t) = 0$ (trivial), $x(t) = e^{7t}$ y $x(t) = c \cdot e^{7t}$, $c, t \in \mathbb{R}$

b) $x'(t) = 7t$

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, y) &= y - 7t \\ f(t, x) &= 7t \end{aligned}$$

Algunas de las soluciones son de la forma $x(t) = \frac{7t^2}{2} + c$, $c, t \in \mathbb{R}$ (realmente es una integral).

Ejemplo.

a) $x'(t) = \sin(t)$. Sus soluciones son de la forma $x(t) = \cos(t) + c$, $c, t \in \mathbb{R}$

b) $x'(t) = \sin(x(t))$. No es tan simple calcular las soluciones (aunque $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ es solución).

Definición 0.2. Una función diferencial va a venir dada por un

$$\begin{aligned}\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y) &\mapsto \Phi(t, x, y) \text{ (continua)}\end{aligned}$$

donde el conjunto D es un abierto de \mathbb{R}^3 conexo llamado **dominio**.

Una **solución** de una ecuación diferencial, $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$ será una función de la forma

$$\begin{aligned}x : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t)\end{aligned}$$

donde I es un intervalo abierto y x tiene las siguientes propiedades:

- (i) $x(t)$ es derivable en I .
- (ii) $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$
- (iii) $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

Ejemplo.

$$x(t) = \sqrt{2t - 38}, \quad x'(t) = \frac{1}{x(t)}$$

¿Es $t(x)$ una solución de la ecuación dada?

$$\Phi(t, x, y) = y - \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{R} \times]0, \infty[\times \mathbb{R} \quad I =]19, \infty[$$

Tomamos así D porque hay que quitar la discontinuidad que se produce en el plano $\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y además tiene que ser conexo (\mathbb{R}^3 sin un plano no es conexo).

I es el mayor intervalo abierto de \mathbb{R} en el que $x(t)$ es derivable.

Además, se verifica que $(t, x(t), x'(t)) \in D \quad \forall t \in I$ y

$$x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t - 38}} = \frac{1}{x(t)}$$

Por lo que se verifica que es solución

A partir de ahora la notación que utilizaremos para expresar ecuaciones diferenciales será

$$\Phi(t, x, x') = 0 \text{ en lugar de } \Phi(t, x(t), x'(t))$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned}x' &= 3x & (\iff x'(t) &= 3x(t)) \\ x(t) &= c \cdot e^{3t}\end{aligned}$$

En general, tenemos que

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x & \text{tiene por solución} & \quad x(t) = c \cdot e^{\lambda t} \\ x' &= \lambda t & \text{tiene por solución} & \quad x(t) = \frac{\lambda t^2}{2} + c\end{aligned}$$

Proposición 0.1. Dada $x(t)$ solución de $x' = \lambda x$ definida en un intervalo abierto I , existe $c \in \mathbb{R}$ de forma que $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$, $\forall t \in I$.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución. Consideramos la aplicación $e^{-\lambda t} \cdot x(t)$ que es derivable por ser producto de funciones derivables y tenemos

$$\frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} x(t)) = -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + e^{-\lambda t} x'(t) \stackrel{(*)}{=} -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda x(t) = 0$$

donde en $(*)$ he aplicado que $x' = \lambda x$ por ser solución. Al anularse la derivada de una función de clase $C^1(I)$, necesariamente tenemos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-\lambda t} x(t) = c$ $\forall t \in I$.

Con esta expresión, dado que la exponencial no se anula para ningún valor del dominio podemos dividir entre ella y obtenemos

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t}$$

■