Capítulo 3

Sistemas de ecuaciones lineales.

3.1 Introducción.

Veánse las diapositivas resumen presentadas en clase y de acceso desde el calendario que aparece en la página de apuntes de teoría.

3.2 Método de Gauss y sus variantes.

Dado un S.E.L., $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, el método de Gauss es un proceso sistemático que permite transformar la matriz ampliada del sistema, $(\mathbf{A}\,|\mathbf{b})$, en una matriz $(\mathbf{U}|\,\mathbf{b}^*)$ donde $\mathbf{U}$ es una matriz triangular superior (sistemas $n \times n$) o escalonada superior (sistemas $m \times n$).

En nuestro caso, suponemos que el sistema es $n \times n$ con una única solución (es decir $\det(\mathbf{A}) \neq 0$); entonces el proceso sistemático de Gauss consta de dos etapas:

1. Eliminación o reducción de la matriz $(\mathbf{A}\,|\mathbf{b})$ a la forma $(\mathbf{U}|\,\mathbf{b}^*)$ mediante operaciones elementales sobre sus filas:
   (a) Multiplicación por factores no nulos;
   (b) Intercambio de filas;
   (c) Sumar a una fila dada un múltiplo de otra.
2. Resolución del nuevo sistema triangular, $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}^*$, que equivalente al inicial.

En la primera etapa (reducción) el paso $k-$ésimo, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, consigue hacer ceros en la columna $k-$ésima bajo la diagonal sumando a cada fila un múltiplo adecuado de la fila k-ésima (salvo necesidad de intercambiar filas).

Ejemplo 1
Antes de escribir el proceso en su forma abstracta lo ilustramos para el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 4x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

1. **Etapa de reducción del sistema a forma triangular.**

$k = 1$

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{F_2+F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right) = (A^{(2)}|b^{(2)})$$

$k = 2$

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -11 \end{array}\right) = (A^{(3)}|b^{(3)}) \equiv (U|b^*)$$

2. ***Resolución****.*

Escribimos el nuevo sistema triangular superior, $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}^*$*:* $\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_2 + x_3 &= 8 \\ -2x_3 &= -11 \end{aligned}}$ *que se resuelve mediante sustitución regresiva* ($x_3 \to x_2 \to x_1$) *obteniendo la solución:*

$$\left\{ x_1 = \frac{45}{16}, x_2 = \frac{5}{8}, x_3 = \frac{11}{2} \right\}$$

Pasamos a describir el método en forma matricial general.

Supongamos que se han realizado las reducciones en las columnas $1, 2, \ldots, k-1$; entonces, la matriz ampliada del sistema tendrá el aspecto siguiente:

$$\left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{array}\right)$$

de manera que inicialmente: $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}$, $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}$. Así,

1. Para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right) \to \left(\mathbf{A}^{(k+1)}|\mathbf{b}^{(k+1)}\right)$, como sigue:

(a) Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (que se llama **pivote**), entonces:

- Formamos la matriz: $\mathbf{L_k} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -l_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

  donde, para $j = k+1, \ldots, n$ $\quad l_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$ (**multiplicador**)

- Entonces: $\left(\mathbf{A}^{(k+1)}|\mathbf{b}^{(k+1)}\right) = \mathbf{L_k} \cdot \left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right)$[1] donde $\mathbf{A}^{(k+1)}$ tiene ceros bajo la diagonal en las columnas $1, 2, \ldots, k$.

(b) Si $a_{kk}^{(k)} = 0$, entonces:

- Buscamos el primer elemento no nulo $a_{jk}^{(k)}$ $(j > k)$
- Intercambiamos las filas $j-$ésima y $k-$ésima en $\left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right)$ y la notamos igual.
- Procedemos como en el caso a).

2. Completado el proceso de transformación, resolvemos el sistema resultante: $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}^*$ donde $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{b}^* = \mathbf{b}^{(n)}$.

En la fase de reducción del método se han distinguido dos situaciones diferentes (a) pivote no nulo, b) pivote inicial nulo) pero,

- ¿cuándo podemos saber si el método de Gauss es posible sin intercambio de filas?

- si en el caso b) todos los posibles pivotes son nulos ¿qué ocurre?

Pues bien, la respuesta a la primera cuestión se da a continuación.

Teorema 3.1
Sea el sistema $n \times n$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces el método de Gauss puede completarse sin intercambio de filas si, y sólo si,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

[1] El cálculo matricial descrito equivale a realizar las operaciones sobre las filas, $\mathbf{F}_j^{(*)}$, de $\left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right)$ siguientes:

$$\mathbf{F}_j^{(k+1)} = \mathbf{F}_j^{(k)} - l_{jk}\mathbf{F}_k^{(k)} \quad \textit{para} \quad j = k+1, \ldots, n$$

Este resultado puede probarse sin más que contrastar que los pivotes $a_{kk}^{(k)}$, en cada paso, sean no nulos es equivalente a la condición dada en el teorema (determinantes no nulos para las submatrices principales de A).

En ocasiones, el método de Gauss sin intercambio de filas puede presentar graves deficiencias numéricas debido a los errores de redondeo (p.e. cuando los pivotes utilizados para la transformación son pequeños en relación al resto de valores a anular).

Ejemplo 2
Consideramos el sistema lineal:

$$\begin{aligned} 0.01x + y &= 1.1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

cuya solución exacta es: $x = \frac{10}{11} \approx 0.91, \; y = \frac{12}{11} \approx 1.09$
Sin embargo, si aplicamos el método de Gauss con aritmética de dos dígitos, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 1 & 1.1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \stackrel{F_2 - 10^2 F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0.01 & 1 & 1.1 \\ 0 & -99 & -110 \end{array}\right)$$

cuya solución es: $y \approx 1.1$, $x = 0$*; que, evidentemente, no es aceptable. ¿Cómo se puede resolver este problema?*

Para evitar este problema se procede con la técnica de elección óptima del pivote en cada etepa del proceso. De aquí surgen las estrategias de **pivote parcial** o **total**.

El método de Gauss con estrategia de pivote parcial:

1. Para $k = 1, \dots, n-1$
   - Elección del pivote adecuado en la columna $k-$ésima:
     Sea r con $\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max\left\{\left|a_{jk}^{(k)}\right|, j = k, \dots, n\right\}$, entonces:
     - Si $r = k$, procedemos como en el caso normal
     - Si $r > k$, intercambiamos las filas $k-$ésima y $r-$ésima en $\left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right)$ y la notamos igual.
   - Formamos la matriz $\mathbf{L_k}$ como en el método normal;
   - Efectuamos el producto: $\mathbf{L_k} \cdot \left(\mathbf{A}^{(k)}|\mathbf{b}^{(k)}\right)$ obteniendo $\left(\mathbf{A}^{(k+1)}|\mathbf{b}^{(k+1)}\right)$.
2. Resolución del sistema triangular resultante: $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}^*$ donde $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{b}^* = \mathbf{b}^{(n)}$

Ejercicio 1
Resuelva nuevamente el sistema del ejemplo 2 usando la estrategia de pivote parcial y aritmética de dos dígitos. ¿Se obtiene una solución más aceptable?

Por último la estrategia de pivote total, en cada paso, busca el pivote de módulo máximo no sólo en la columna $k-$ésima sino en las restantes $k+1,\ldots,n$. Es decir, el pivote sería $a_{rs}^{(k)}$ con:

$$\left|a_{rs}^{(k)}\right| = \max\left\{\left|a_{ij}^{(k)}\right|,\ i,j=k,\ldots,n\right\}$$

3.3 Métodos de factorización: L.U y Choleski.

A veces sería deseable disponer de una descomposición de la matriz $\mathbf{A}$ en la forma $\mathbf{A}=\mathbf{L}.\mathbf{U}$ donde $\mathbf{L}$ es triangular inferior y $\mathbf{U}$ es triangular superior.

Así, el sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ podría resolverse en dos etapas correspondientes a sendos sistemas triangulares; a saber:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \tag{3.1}$$
$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y} \tag{3.2}$$

Si observamos con detenimiento el proceso seguido en el Método de Gauss (sin intercambio de filas) deducimos que pasamos de una matriz $\mathbf{A}$, regular, a una Triangular superior de la forma:

$$\mathbf{U}=\mathbf{L}_{n-1}.\mathbf{L}_{n-2}\ldots\mathbf{L}_2.\mathbf{L}_1.\mathbf{A}$$

Si esto es así, puesto que $\mathbf{L}_{n-1}.\mathbf{L}_{n-2}\ldots\mathbf{L}_2.\mathbf{L}_1$ es invertible y triangular inferior, podemos expresar $\mathbf{A}$ como:

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}_1^{-1}.\mathbf{L}_2^{-1}\ldots\mathbf{L}_{n-2}^{-1}.\mathbf{L}_{n-1}^{-1}.\mathbf{U}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}$$

donde $\mathbf{L_k}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{nk} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; por lo que, $\quad \mathbf{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$

es una matriz triangular inferior con **unos** en la diagonal y elementos $l_{j,k}$ los multiplicadores que aparecen en el proceso de Gauss sin intercambio de filas.

Ejemplo 3
Volviendo al ejemplo 1, operando matricialmente, se tiene:

1. **Reducción de la matriz de coeficientes a forma triangular:**

$k = 1$: *Se ha usado la matriz:* $\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *cuya inversa es:* $\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{(\mathbf{2})}$$

$k = 2$: *Se ha usado la matriz:* $\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *con inversa:* $\mathbf{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_2\mathbf{L_1}\mathbf{A} = \mathbf{L}_2\mathbf{A}^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{U}$$

Por lo tanto, la matriz $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

de aquí, es fácil comprobar que la matriz de coeficientes del sistema puede escribirse como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{LU}$$

2. **Resolución.**

- *Sistema triangular inferior:* $\mathbf{L}.\mathbf{y} = \mathbf{b}$*; es decir,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} y_1 = 2 \\ -y_1 + y_2 = 6 \\ y_2 + y_3 = -3 \end{array} \right.$$

  cuya solución es: $y_1 = 2$, $y_2 = 8$, $y_3 = -11$

  ¿Observa alguna relación entre esta solución y los valores finales (del proceso de Gauss) de los términos independientes?

- *Sistema triangular superior:* $\mathbf{U}.\mathbf{x} = \mathbf{y}$*; es decir,*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_3 = -11 \end{array} \right.$$

  como se puede apreciar este sistema es el mismo que resolvimos en el ejemplo 1 por lo que se consegue la solución del sistema original.

Por último, dese cuenta que aquí no hemos ido transformando la matriz ampliada del sistema sino sólo la de coeficientes.

Desde éstas consideraciones se puede probar el resultado siguiente:

Teorema 3.2
Sea $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de orden* n*, regular (invertible), entonces, son equivalentes:*

1. $\det(\mathbf{A}_k) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n$

2. *existe una descomposición* $\mathbf{A} = \mathbf{L}.\mathbf{U}$*. Además, si* $\mathbf{L}$ *tiene unos en la diagonal, la descomposición es única.*

Corolario 3.1
Si $\mathbf{A} = \mathbf{L}.\mathbf{U}$ *con unos en la diagonal de* $\mathbf{L}$*. Entonces, det*$(\mathbf{A}_k) \neq 0$ *si, y sólo si,* $u_{ii} \neq 0 \;\; i = 1, 2, \dots, n$.

¿Toda matriz cuadrada admite una descomposición de la forma $\mathbf{L}.\mathbf{U}$?

Teorema 3.3
Dada una matriz invertible, $\mathbf{A}$*, existe una matriz de permutación* $\mathbf{P}_\sigma$ *tal que la matriz* $\mathbf{P}_\sigma.\mathbf{A}$ *se puede descomponer en la forma* $\mathbf{L}.\mathbf{U}$ *.*

Cálculo de la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

El cálculo de las l_{ij} de $\mathbf{L}$ y los u_{hk} de $\mathbf{U}$ puede hacerse usando el método de Gauss o de forma directa sin más que usar las igualdades:

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{h} l_{ip}.u_{pj} \quad con \;\; h = min\{i, j\} \; e \; i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo 4
Cálculo de la descomposición $\boldsymbol{LU}$ *para la matriz:* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ *usando la igualdad directa*

A=LU

En primer lugar, tendremos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

igualando elemento a elemento tendremos el sistema de ecuaciones:

1. **Ordenado por columnas:**

$$\begin{array}{c|c|c} \textit{columna } 1 & \textit{columna } 2 & \textit{columna } 3 \\ u_{11}=3 & u_{12}=-1 & u_{13}=0 \\ l_{21}u_{11}=-6 & l_{21}u_{12}+u_{22}=4 & l_{21}u_{13}+u_{23}=1 \\ l_{31}u_{11}=9 & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=-1 & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=6 \end{array}$$

Podemos resolver en la columna 1 luego en la 2 y por último en la 3 obteniendo los valores (ordenados):

$$u_{11}=3,\ l_{21}=-2,\ l_{31}=3,\ u_{12}=-1,\ u_{22}=2,\ l_{32}=1,\ u_{13}=0,\ u_{23}=1,\ u_{33}=5$$

2. **Ordenado por filas:**

$$\begin{array}{ccc} u_{11}=3 & u_{12}=-1 & u_{13}=0 \\ \hline l_{21}u_{11}=-6 & l_{21}u_{12}+u_{22}=4 & l_{21}u_{13}+u_{23}=1 \\ \hline l_{31}u_{11}=9 & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=-1 & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=6 \end{array}$$

De forma similar, ahora podemos resolver en la primera fila de igualdades, luego en la segunda, y finalmente en la tercera, obteniendo el mismo resultado.

En resumen, se ha obtenido la descomposición:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo hemos podido comprobar que realizando los cálculos en forma más o menos ordenada pueden obtenerse fácilmente los valores de L y de U. También pueden encontrarse otras formas de ordenar los cálculos que permitan ir obteniendo las incógnitas sin dificultad. Así, un método sistemático es el de **Doolittle-Banachiewicz** (**L** tiene unos en su diagonal)[2] que consiste en:

Algoritmo de Doolittle: fase de descomposición.

ENTRADA: $\mathbf{A}, \mathbf{L} = \mathbf{I_n}, \mathbf{U} = (\mathbf{0})$

PROCESO: para $k = 1 \ldots, n$

$$u_{k,k} = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rk}$$

para $j = k+1, \ldots, n$

$$u_{k,j} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj};\ l_{j.k} = \frac{a_{j,k} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{jr}u_{rk}}{u_{kk}}$$

SALIDA: **L**, **U**

[2] cuando la descomposición **LU** se toman **unos** en la diagonal de **U** se llama descomposicón de **Crout** siendo válidos resultados similares al caso habitual

Así, el algoritmo calcula en cada paso la fila $k-$ésima de $\mathbf{U}$ y la $k-$ésima columna de $\mathbf{L}$. El método se completa con la resolución de los sistemas triangulares (3.1)-(3.2).

Descomposiciones para matrices especiales.

1. **Matrices E.D.D.**

   Se dice que $\mathbf{A}$ es una matriz estrictamente diagonal dominante (**E.D.D.**) si cumple la propiedad:

$$|a_{ii}| > |a_{11}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}| \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

   esto se puede resumir diciendo que cada elemento de la diagonal, en valor absoluto, domina estrictamente a la suma de valores absolutos del resto de elementos de su fila.

   Para este tipo de matrices se cumple:

   Teorema 3.4
   Si $\mathbf{A}$ es E.D.D. entonces:

   (a) la matriz es invertible

   (b) las submatrices $\mathbf{A_k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ *son matrices E.D.D.*

   (c) admite descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. La descomposición será única si tomamos unos en la diagonal de $\mathbf{L}$.

2. **Matrices tridiagonales.**

   Teorema 3.5
   Para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & c_n & a_n \end{pmatrix}$ *con $\delta_k = \det(\mathbf{A}_k) \neq 0 \ \forall k$, entonces:*

   (a) se cumple la recurrencia: $\boxed{\delta_k = a_k\delta_{k-1} - b_k c_k \delta_{k-2} \ \ k = 2, \ldots}$ *donde $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = a_1$*

   (b) se tiene: $\mathbf{A} = \mathbf{L}.\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2\frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & c_n\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$

   Ejercicio 2
   Teniendo en cuenta el teorema anterior, escriba un algoritmo lo más eficiente posible para obtener la descomposición de una matriz tridiagonal. Póngalo a prueba en el ordenador.

Teorema 3.6
Si **A** *es una matriz tridiagonal verificando:*

$$|a_1| > |b_2| > 0; |a_n| > |c_n| > 0;$$
$$|a_k| \geq |b_{k+1}| + |c_k|, \text{ con } b_{k+1}c_k \neq 0, \quad k = 2, \ldots, n-1$$

Entonces, **A** *admite una descomposición* **L.U**

3. **Matrices simétricas. Descomposición de Choleski.**

Definición 3.1
Sea **A** *una matriz simétrica real, se dice que es definida positiva si, y sólo si,* $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{\mathbf{0}}\}$

Teorema 3.7
Si **A** *es simétrica definida positiva, entonces:*

(a) *Es invertible con inversa definida positiva;*

(b) $\mathbf{A}_k$ *es definida positiva y* $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ $k = 1, \ldots, n$

Además, la propiedad $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ $\forall k$ caracteriza las matrices simétricas reales definidas positivas.

Teorema 3.8
Si **A** *es simétrica real, son equivalentes:*

(a) **A** *es definida positiva;*

(b) $\mathbf{A} = \mathbf{L}.\mathbf{L}^t$ *con* **L** *=triangular inferior de elementos* $l_{ii} > 0$ *(o, simplemente, no nulos).*

Algoritmo de Choleski

ENTRADA: $\mathbf{A}, \mathbf{L} = (\mathbf{0})$

PROCESO: para $k = 1\ldots, n$; $\quad l_{k,k} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} (l_{kr})^2}$

para $\quad j = k+1, \ldots, n$

$$l_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{jr}l_{kr}}{l_{kk}}$$

SALIDA: $\mathbf{L}, \ \mathbf{L}^t$

¿Qué sucede si el algoritmo no puede completarse de manera satisfactoria?