Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Variable Compleja I

Resumen

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025

1. Tema 3

Teorema 1.1. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$. Como $A \subset \mathbb{R}^2$, podemos considerar las funciones $u, v : A \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $(x, y) \in A$ por*

$$u(x, y) = Re\ f(x + iy) \qquad y \qquad v(x, y) = Im\ f(x + iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *La función f es derivable en el punto z_0.*
2. *Las funciones u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0) verificando que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ***ecuaciones de Cauchy-Riemann****.*

Caso de que se cumplan 1. y 2., se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2. Tema 4

Teorema 2.1 (**Test de Weierstrass**). *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *una serie de funciones complejas definidas en un conjunto* $A \subset \mathbb{C}$, *y sea* $B \subset A$. *Supongamos que, para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *existe una constante* $M_n \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \qquad \forall z \in B$$

Si la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ *es convergente, entonces la serie de funciones* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge absoluta y uniformemente en* B.

Lema 2.2 (**Lema de Abel**). Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, supongamos que la sucesión $\{|\alpha_n|\rho^n\}$ está mayorada. Entonces la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n(z-a)^n$ converge absolutamente en el disco abierto $D(a,\rho)$ y uniformemente en cada compacto K que esté contenido en dicho disco.

Proposición 2.3 (**Fórmula de Cauchy-Hadamard**). Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$

1. Si la suceción $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\}$ no está mayorada, entonces $R = 0$.
2. Si $\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\} \to 0$, entonces $R = \infty$.
3. En otro caso se tiene: $R = \dfrac{1}{\limsup\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\}}$

Corolario 2.3.1. Supongamos que $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$.

1. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to \infty$, entonces $R = 0$.
2. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to 0$, entonces $R = \infty$.
3. Si $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^+$, entonces $R = 1/\lambda$.

3. Tema 6

Teorema 3.1 (Caracterización de la existencia de primitiva). *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.*
2. *Para todo camino cerrado γ en Ω se tiene que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

4. Tema 7

Teorema 4.1 (**Teorema local de Cauchy**). *Si Ω es un dominio estrellado, entonces toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite una primitiva en Ω, es decir, existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Equivalentemente se tiene*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado γ en Ω.

Proposición 4.2 (**Fórmula de Cauchy**). Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw \qquad \forall z \in D(a, r)$$

5. Tema 8

Teorema 5.1 (**Desarrollo en serie de Taylor**). *Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω y, en particular, f es indefinidamente derivable en Ω. Además:*

1. *Si $\Omega = \mathbb{C}$, para todo $a \in \mathbb{C}$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia infinito y se verifica que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. *Si $\Omega \neq \mathbb{C}$ y para cada $a \in \Omega$ tomamos $R_a = d(a, \mathbb{C}\setminus\Omega)$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y se verifica que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

Proposición 5.2 (**Teorema de Cauchy para las derivadas**). Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dado $a \in \Omega$, sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Se tiene entonces:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \qquad \forall z \in D(a,r),\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 5.3 (**Teorema de extensión de Riemann**). *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.*
2. *f tiene límite en el punto z_0.*
3. *Existen $\delta, M > 0$ tales que $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \Omega$ que verifique $0 < |z - z_0| < \delta$.*
4. *$\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.*

6. Tema 9

Proposición 6.1 (**Desigualdades de Cauchy**). Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, sea $M(f,a,r) = \max\{|f(z)| : z \in C(a,r)^*\}$. Se tiene entonces:

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema 6.2 (**Teorema de Liouville**). *Toda función entera y acotada es constante. De hecho, la imagen de cualquier función entera no constante es un conjunto denso en $\mathbb{C}$, es decir, para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|f(z)| \leqslant M$ $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que $\overline{Im(f)} = \mathbb{C}$.*

Teorema 6.3 (**Teorema fundamental de Álgebra**). *El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, si P es un polinomio con coeficientes complejos, no constante, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.*

Proposición 6.4 (**Principio de identidad para funciones holomorfas**). Sea Ω un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si A es un subconjunto de Ω tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, y $A' \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces f y g son idénticas: $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

7. Tema 10

Teorema 7.1 (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, en particular:*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ de las k-ésimas derivadas, converge a la derivada k-ésima $f^{(k)}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, en particular:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \forall z \in \Omega,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Este resultado también se puede usar para series

Teorema 7.2 (Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro). *Sea γ u ncamino, Ω un abierto del plano y $\Phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que, para cada $w \in \gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $\Phi_w(z) = \Phi(w, z)$ para todo $z \in \Omega$, es holomorfa en Ω. Entonces, definiendo*

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w, z)dw \qquad \forall z \in \Omega$$

se obtiene una función holomorfa: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \Omega$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en $\mathbb{C}$, es continua y se verifica que

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \Phi_w^{(k)} dw = \int_\gamma \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(w, z) \qquad \forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$$

8. Tema 11

Proposición 8.1 (**Propiedad de la media**). Sea Γ un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})dt$$

Teorema 8.2 (**Principio del módulo máximo**). *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a, \delta)$. Entonces f es constante.*

Teorema 8.3 (**Principio del módulo mínimo**). *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$ es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a, \delta)$. Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante.*

Teorema 8.4 (**Teorema de la función inversa global**). *Sea U un dominio y $f \in \mathcal{H}(U)$ una función inyectiva. Entonces $V = f(U)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$$

9. Tema 12

Teorema 9.1 (Forma general del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy). *Sea Ω un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω, nul-homólogo con respecto a Ω. Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene:*

1. $Ind_\Gamma(z)f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$

2. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$

10. Tema 13

Teorema 10.1 (Desarrolo en serie de Laurent). *Sea $\Gamma = A(a; r, R)$ un anillo abierto arbitrario y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces exite una única serie de Laurent no trivial $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, cuyo anillo de convergencia contiene a Ω, que verifica:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

De hecho, para cualquier $\rho \in \mathbb{R}^+$ que verifique $r < \rho < R$, se tiene;

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Proposición 10.2 (Caracterización de los puntos regulares). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. a es un punto regular de f.
2. $c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$.
4. f tiene límite en a: $\lim\limits_{z\to a} f(z) = w \in \mathbb{C}$.
5. Existen $M, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$.
6. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

Proposición 10.3 (Caracterización de los polos teniendo en cuenta su orden). Dado $k \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. a es un polo de orden k de f.
2. $c_{-k} \neq 0$ y $c_{-n} = 0$ para $n > k$.
3. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \alpha \in \mathbb{C}^*$.
4. Existe una función $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\psi(a) \neq 0$ tal que:

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

Proposición 10.4 (Caracterización de los polos). La función f tiene un polo en a si y solo si diverge en a.

Teorema 10.5 (Teorema de Casorati). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función f tiene una singularidad esencial en el punto a*

2. *Para cada* $\delta \in \mathbb{R}^+$ *con* $D(a,\delta) \subset \Omega$, *el conjunto* $f(D(a,\delta) \setminus \{a\})$ *es denso en* $\mathbb{C}$.

3. *Para cada* $w \in \mathbb{C}$ *existe una sucesión* $\{z_n\}$ *de puntos de* $\Omega \setminus \{a\}$ *tal que* $\{z_n\} \to a$ *y* $\{f(z_n)\} \to w$. *También existe una sucesión* $\{u_n\}$ *de puntos de* $\Omega \setminus \{a\}$ *tal que* $\{u_n\} \to a$ *y* $\{f(u_n)\} \to \infty$.

Corolario 10.5.1. Si g es una función entera no polinómica, entonces $\exists \{z_n\} \to \infty$ donde $z_n \in \mathbb{C} \setminus D(z,\delta)$, $\delta > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $g(z_n) \to z \in \mathbb{C}$ o $g(z_n) \to \infty$.

11. Tema 14

Teorema 11.1 (**Teorema de los residuos**). *Sea Ω un abierto del plano, A un subconjunto de Ω tal que $A' \cap \Omega = \emptyset$, y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$. Sea Γ un ciclo en $\Gamma \setminus A$, nul-homólogo con respecto a Ω. Entonces, el conjunto $\{a \in A : Ind_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito y se verifica que*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} Ind_\Gamma(a) Res(f(z), a)$$

Proposición 11.2 (**Cálculo de residuos**). Sea $f \in \mathcal{H}(D(a,R) \setminus \{a\})$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$. Si f tiene un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ en el punto a, se tiene:

$$Res(f(z), a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-a)^k f(z))$$

Teorema 11.3 (**Teorema de l'Hôpital para funciones holomorfas**). *Sean $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^+$ y $f, g \in \mathcal{H}(D(a,R))$. Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$ y que g no es idénticamente nula. Entonces existe un $\delta \in]0, R[$, tal que $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$. Además, se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:*

1. $\displaystyle\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C}$.

2. $\displaystyle\frac{f(z)}{g(z)} \to \infty$ $(z \to a)$ *y* $\displaystyle\frac{f'(z)}{g'(z)} \to \infty$ $(z \to a)$.

12. Ejercicios tutoria

Ejercicio 12.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2-5x+6}dx \qquad f(z)=\frac{ze^{i\pi z}}{z^2-5z+6} \qquad f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{2,3\})$$

Fijamos $R>3$ y $\varepsilon>0$ tal que $2+\varepsilon<3-\varepsilon$ y $3+\varepsilon<R$.
Por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)dz = 0 =$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{2-\varepsilon} f(x)dx + \int_{2‘\varepsilon}^{3-\varepsilon} f(x)dx + \int_{3+\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int_{\sigma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\xi\varepsilon} f(z)dz$$

Tomando límite con $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} f(z)dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\xi\varepsilon} f(z)dz$$

Proposición 12.1. Sea $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$ abierto , a un polo de orden 1 de f, $\gamma_\varepsilon:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$, $(\alpha<\beta)$. Tenemos que $\gamma_\varepsilon(t)=a+\varepsilon e^{it}$ es la circunferencia de centro a y radio ε. Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma\varepsilon} f(z)dz = i(\beta-\alpha)Res(f(z),a)$$

Demostración. f tiene un polo en a. Entonces $\exists\psi\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $\psi(a)\neq 0$ y $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-a)}$ $\forall z\in\Omega\setminus\{a\}$.

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\psi(z)}{(z-a)}dz = \int_\alpha^\beta \frac{\psi(a+\varepsilon e^{it})}{\cancel{a}+\varepsilon e^{it}-\cancel{a}} i\varepsilon e^{it}dz = \int_\alpha^\beta \frac{\psi(a+\varepsilon e^{it})}{\cancel{\varepsilon e^{it}}} i\cancel{\varepsilon e^{it}}dz$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_\alpha^\beta \psi(a+\varepsilon e^{it})dt &= \lim_{z\to a} i(\beta-\alpha)\psi(z) = \lim_{z\to a} i(\beta-\alpha)f(z)(z-a) = \\ &= i(\beta-\alpha)Res(f(z),a)\end{aligned}$$

□

f no es entera polinómica. Entonces existe sucesión $\{w_n\}$ de $\mathbb{C}\setminus D(0,n)$ tal que $\{w_n\}\to\infty$ y $\{f(w_n)\}\to 0$. Por el TFA existe una sucesión $\{g(v_n)\}$ tal que $g(v_n)=w_n$. Entonces $\{f(g(v_n))\}\to v^3=\infty$.

13. Cosas que debería de saber hacer

1. probar que una sucesión es uniformemente continua (test de weierstrass).
2. probar que una integral dependiente de un parámetro es holomorfa en un cierto dominio (t. convergencia de weierstrass).
3. probar que una función es un polinomio (ppio de identidad) (t. d casorati, corolario).
4. integrar (t. de los residuos).
5. ejercicio teórico (genérico), probablemente (ppio mod max o ppio mod min).