Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Inferencia Estadística

Tema 8. Participación extra

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Ejercicio 1. El departamento de Recursos Humanos de una empresa de logística quiere analizar si existe una relación lineal entre la antigüedad de los empleados (en años) y su productividad mensual (medida en miles de unidades procesadas). Para ello, selecciona una muestra aleatoria de 8 empleados y obtiene los siguientes datos:

Antigüedad (años)	2	4	6	8	10	12	14	16
Productividad (miles uds./mes)	14	16	26	38	30	42	54	55

a) Obtener la recta de regresión estimada de la productividad sobre la antigüedad e interpretar sus coeficientes.

b) Descomponer la variabilidad (VT, VE, VNE), obtener la varianza residual (S_R^2) y calcular el coeficiente de determinación (r^2), interpretando el resultado.

c) Predecir la productividad para un empleado con 11 años de antigüedad.

d) Suponiendo las hipótesis de normalidad, contrastar al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ si existe una relación lineal significativa entre ambas variables.

Resolución

a) De los datos aportados podemos construir la siguiente tabla

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
	2	14	4	28	196
	4	16	16	64	256
	6	26	36	156	676
	8	38	64	304	1444
	10	30	100	300	900
	12	42	144	504	1764
	14	54	196	756	2916
	16	55	256	880	3025
Sumas	72	275	816	2992	11177

Pasamos a calcular con estos datos las medidas necesarias para el cálculo de la recta de regresión:

$$\overline{x} = \frac{72}{8} = 9 \text{ años}$$

$$\overline{y} = \frac{275}{8} = 34{,}375 \text{ miles uds./mes}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{816}{8} - 9^2 = 102 - 81 = 21$$

$$\sigma_y^2 = \frac{11177}{8} - 34,375^2 \cong 1397,125 - 1181{,}64 = 215,485$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2992}{8} - (9 \cdot 34,375) = 374 - 309,375 = 64,625$$

Como sabemos que la fórmula de la recta de regresión viene dada por

$$y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

podemos sustituir los valores recién calculados obteniendo finalmente la recta de regresión.

$$y = 34,375 + \frac{64,625}{21}(x - 9) \cong 6,6786 + 3,0774x$$

Podemos interpretar este resultado de la siguiente forma:

- Por cada año adicional de antigüedad, la productividad aumenta en promedio unas $3,0774$ miles de unidades.
- Un empleado recién contratado ($x = 0$) tendría una productividad base estimada de $6,6786$ miles de unidades mensuales.

b) Comenzamos calculando la variabilidad:

$$VT = n\sigma_y^2 = 8 \cdot 215,485 = 1723,88$$
$$VE = \frac{n\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = \frac{8 \cdot 64,625^2}{21} \cong 1591,006$$
$$VNE = VT - VE = 1723,88 - 1591,006 = 132,874$$

Calculamos ahora la varianza residual:

$$S_R^2 = \frac{VNE}{n-2} = \frac{132,874}{6} \cong 22,1457$$

Calculamos el coeficiente de determinación:

$$r^2 = \frac{VE}{VT} = \frac{1591,006}{1723,88} \cong 0,9229$$

A partir de este resultado podemos concluir que el modelo estimado explica el $92,29\,\%$ de la variabilidad de la productividad. El ajuste es por tanto muy bueno por lo que hay una relación lineal bastante considerable.

c) Calculamos ahora la productividad para un empleado con $x_p = 11$ años de antigüedad a partir de la recta de regresión calculada anteriormente:

$$\hat{y}_p = 6,6786 + 3,0774x_p = 6,6786 + 3,0774 \cdot 11 = 40,53 \text{ miles uds./mes}$$

d) Planteamos el contraste para confirmar si existe relación lineal

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \text{ (No hay relación lineal)} \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \text{ (Existe relación lineal)} \end{cases}$$

donde para $n = 7$ y $\alpha = 0,05$

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad F(Y) > F_{1,n-2;\alpha} \\ 0 & \text{si} \quad F(Y) \leqslant F_{1,n-2;\alpha} \end{cases}$$

Consideramos entonces el siguiente estadístico de prueba

$$F_{exp} = \frac{VE}{S_R^2} = \frac{1591,006}{22,1457} \cong 71,8426$$

de la tabla F de Snedecor tenemos que $F_{1,6;0,05} \cong 5{,}99$. Como $F_{exp} > F_{1,6;0,05}$ rechazamos la hipótesis H_0, es decir, los datos aportan evidencia de una relación lineal. Esto concuerda con el valor tan alto que hemos obtenido al calcular r^2. Finalmente podemos afirmar que existe evidencia estadística significativa, al 95 % de confianza, para concluir que la productividad depende linealmente de la antigüedad.