**Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada**

**Propuesta de solución a la convocatoria ordinaria de Variable Compleja I**
**Grado en Matemáticas y Grado en Física y Matemáticas**

**Ejercicio 1.** (**2.5 puntos**) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\overline{f}g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que $g \equiv 0$ en $\Omega$ o $f$ es constante en $\Omega$.

Suponiendo que $g$ no es constante cero en $\Omega$ existe $z_0 \in \Omega$ con $g(z_0) \neq 0$ y, por la continuidad de $g$, podemos encontrar $r > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in D(z_0, r)$. De este modo, la función $\frac{1}{g}$ es holomorfa en $D(z_0, r)$ y, usando la hipótesis, deducimos que $\overline{f} = \overline{f}g\frac{1}{g}$ también es holomorfa en $D(z_0, r)$. Usando las ecuaciones de Cauchy Riemann es sencillo comprobar que entonces $f$ es constante en $D(z_0, r)$. Otra posibilidad es deducir que $\operatorname{Re}(f) = \frac{f+\overline{f}}{2}$ también es holomorfa en $D(z_0, r)$ y, como tiene parte imaginaria constante, es constante en $D(z_0, r)$ y entonces $f$ también. Basta usar el principio de identidad (pues $D(z_0, r)$ tiene puntos de acumulación en $\Omega$) para deducir que $f$ es constante en $\Omega$.

**Ejercicio 2.** Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$.

a) (**1.5 puntos**) Probar que $f$ tiene un numero finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

b) (**1 punto**) Probar que $f\big(\overline{D}(0,1)\big) = \overline{D}(0,1)$.

a) Usando el principio del máximo obtenemos

$$\max\{|f(z)| \colon z \in \overline{D}(0,1)\} = \max\{|f(z)| \colon z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = 1.$$

Como $f$ es continua y $\overline{D}(0,1)$ es compacto, existe $z_0 \in \overline{D}(0,1)$ tal que

$$|f(z_0)| = \min\{|f(z)| \colon z \in \overline{D}(0,1)\}.$$

Veamos que $|z_0| < 1$. En otro caso sucede $|z_0| = 1$ y, usando lo anterior, tenemos que el máximo de $|f|$ en $\overline{D}(0,1)$ y el mínimo de $|f|$ coinciden, llevando a que $|f|$ es constante en $\overline{D}(0,1)$. Esto implica (como consecuencia de Cauchy-Riemann) que $f$ es constante en $D(0,1)$, que es una contradicción. Por tanto, tenemos que $|z_0| < 1$ y el principio del mínimo nos dice que $f(z_0) = 0$ porque $f$ no es constante.

Otra posibilidad era usar directamente el corolario del principio del módulo mínimo que vimos en clase.

Para ver que el número de ceros es finito suponemos que no lo es y encontramos una sucesión $\{z_n\}$ de puntos distintos de $D(0,1)$ con $f(z_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión tendrá una parcial convergente a un punto $w \in \overline{D}(0,1)$ que, por la continuidad de $f$, también cumple $f(w) = 0$. Entonces la hipótesis nos dice que $w \in D(0,1)$ y, por tanto, el conjunto de los ceros de $f$ tiene un punto de acumulación en $D(0,1)$. Luego $f$ es constante cero en $D(0,1)$ por el principio de identidad, llegando a la contradicción que buscábamos.

b) La igualdad $\max\{|f(z)| \colon z \in \overline{D}(0,1)\} = 1$ implica que $f\big(\overline{D}(0,1)\big) \subset \overline{D}(0,1)$. Para demostrar la inclusión contraria basta probar que $D(0,1) \subset f\big(\overline{D}(0,1)\big)$ y usar que $f\big(\overline{D}(0,1)\big)$ es cerrado (porque es compacto).

Supongamos por reducción al absurdo que existe $w_0 \in D(0,1)$ que no pertenece al cerrado $f\big(\overline{D}(0,1)\big)$. Por el apartado a) tenemos que $0 \in \{\lambda \leqslant 1 \colon \lambda w_0 \in f\big(\overline{D}(0,1)\big)\}$ y entonces este conjunto tiene supremo:

$$\lambda_0 := \sup\{\lambda \leqslant 1 \colon \lambda w_0 \in f\big(\overline{D}(0,1)\big)\}.$$

Obsérvese que $\lambda_0 < 1$ porque $w_0 \notin f\big(\overline{D}(0,1)\big)$. Como $\lambda_0 w_0 \in f\big(\overline{D}(0,1)\big)$ y $|\lambda_0 w_0| < 1$, usando de nuevo la hipótesis, debe existir $z_0 \in D(0,1)$ tal que $f(z_0) = \lambda_0 w_0$. Usamos ahora el teorema de la aplicación abierta para encontrar $r > 0$ tal que $D(f(z_0), r) \subset f\big(D(0,1)\big)$. Esto nos lleva claramente a contradicción con la condición de supremo de $\lambda_0$.

**Ejercicio 3.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y consideramos la función $f_n : \mathbb{C} \setminus \{a_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$.

a) (**1.5 puntos**) Si $A = \overline{\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $\Omega$.

b) (**1 punto**) Deducir que la función dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en $\Omega$ y estudiar sus singularidades aisladas.

c) (**Extra: 1 punto**) Probar que para cada $\delta > 0$ el conjunto $f\big(D(0,\delta) \setminus A\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

a) Fijado un compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus A$, tenemos que es disjunto con el compacto $A$ luego $d(K, A) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in K$ podemos escribir entonces

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n^n} \frac{1}{|z - a_n|} \leqslant \frac{1}{n^n d(K,A)}.$$

Como la serie $\sum \frac{1}{n^n d(K,A)}$ es convergente (basta aplicar el criterio de la raíz), el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum f_n$ converge absoluta y uniformemente en $K$. La convergencia absoluta en todo punto de $\mathbb{C} \setminus A$ se deduce inmediatamente de lo anterior.

b) La holomorfía de $f$ en $\mathbb{C} \setminus A$ es consecuencia del Teorema de convergencia de Weierstrass, pues la serie $\sum f_n$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus A$ y $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$.

Las posibles singularidades aisladas de $f$ están en los puntos $a_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \neq k} f_n$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathbb{C} \setminus (A \setminus a_k)$ y $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus (A \setminus a_k))$ si $n \neq k$ luego

$$\sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} f_n$$

es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(A\setminus a_k)$ por el teorema de convergencia de Weierstrass. Entonces podemos escribir

$$\lim_{z\to a_k}(z-a_k)f(z)=\lim_{z\to a_k}(z-a_k)f_k(z)+(z-a_k)\sum_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(z)=\frac{1}{k^k}$$

y esto nos dice que $f$ tiene un polo de orden uno en $a_k$.

c) Suponemos por reducción al absurdo que existe $\delta>0$ de modo que $f\big(D(0,\delta)\setminus A\big)$ no es denso en $\mathbb{C}$. Entonces existen $w\in\mathbb{C}$ y $r>0$ tales que $D(w,r)\cap f\big(D(0,\delta)\setminus A\big)=\emptyset$, es decir, para cada $z\in D(0,\delta)\setminus A$ se cumple que $|f(z)-w|\geqslant r$. Definimos la función $g:D(0,\delta)\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $g(z)=\frac{1}{f(z)-w}$ si $z\in D(0,\delta)\setminus A$ y por $g(a_n)=\lim_{z\to a_n}g(z)=0$ para cada $n\in\mathbb{N}$ (el límite anterior vale cero porque $f$ diverge en cada $a_n$ por tener un polo). Como $g$ es holomorfa en $D(0,\delta)\setminus A$ y es continua en cada $a_n$, el teorema de extensión de Riemann nos dice que $g$ es holomorfa en $D(0,\delta)\setminus\{0\}$. Además se tiene que $|g(z)|\leqslant\frac{1}{r}$ para cada $z\in D(0,\delta)\setminus\{0\}$, es decir, $g$ está acotada en un entorno reducido de 0. Aplicando de nuevo el teorema de extensión de Riemann, obtenemos que $g$ es derivable en cero y, como $g(a_n)=0$ para cada $n\in\mathbb{N}$, deducimos que $g(0)=0$. Entonces el conjunto de los ceros de $g$ tiene un punto de acumulación en $D(0,1)$ y el principio de identidad nos dice que $g\equiv 0$ en $D(0,1)$ pero esto es imposible por la definición de $g$.

**Ejercicio 4.** (**2.5 puntos**) Sea $f$ holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{1,-1\}$. Supongamos que 1 y $-1$ son polos de $f$ y que

$$\operatorname{Res}(f,1)=-\operatorname{Res}(f,-1).$$

Probar que $f$ admite primitiva en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

Por el teorema de caracterización de existencia de primitiva basta probar que $\int_\gamma f(z)dz=0$ para cada $\gamma$ camino cerrado en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Fijamos pues $\gamma$ un camino cerrado en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]\subset\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$, que es trivialmente nulhomólogo con respecto a $\mathbb{C}$. Como $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-1,1\})$ y $\{-1,1\}$ carece de puntos de acumulación, el teorema de los residuos nos dice que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz&=2\pi i\Big(\operatorname{Ind}_\gamma(-1)\operatorname{Res}(f(z),-1)+\operatorname{Ind}_\gamma(1)\operatorname{Res}(f(z),1)\Big)\\&=2\pi i\operatorname{Res}(f(z),1)\Big(\operatorname{Ind}_\gamma(1)-\operatorname{Ind}_\gamma(-1)\Big)\end{aligned}$$

donde hemos usado la hipótesis $\operatorname{Res}(f,1)=-\operatorname{Res}(f,-1)$ en la segunda igualdad. Para terminar basta probar que $\operatorname{Ind}_\gamma(1)=\operatorname{Ind}_\gamma(-1)$ pero esto es consecuencia de que $[-1,1]$ es un conjunto conexo que contiene a $-1$ y a 1. En efecto, como $[-1,1]$ es conexo, existe $V$ componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ de modo que $[-1,1]\subset V$. Al ser $\operatorname{Ind}_\gamma$ constante en la componente conexa $V$ obtenemos que $\operatorname{Ind}_\gamma(1)=\operatorname{Ind}_\gamma(-1)$ y, por tanto, $\int_\gamma f(z)dz=0$. La arbitrariedad de $\gamma$ y el teorema de caracterización de existencia de primitiva nos dan el resultado buscado.

Obsérvese que el resultado sigue siendo cierto si sustituimos $[-1,1]$ por cualquier conjunto conexo que contenga a $-1$ y a 1.