Cálculo II
(Grupo 1ºA)
Relación de Ejercicios nº 4

Ejercicio 4.1: Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas en A. Probar que $f + g$ también es uniformemente continua en A. Si adicionalmente las funciones f y g están acotadas en A, demostrar que entonces fg también es uniformemente continua en A.

Ejercicio 4.2: Probar que una función uniformemente continua transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Ejercicio 4.3: Sea $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = 1/x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$. Dado $r > 0$, probar que la restricción de f a $[r, +\infty[$ es lipschitziana, mientras que la restricción de f a $]0, r]$ no es uniformemente continua. ¿Sucede lo mismo con $g(x) = \ln(x)$?

Ejercicio 4.4: Sea I un intervalo no trivial. Probar que si todas las funciones continuas en I son uniformemente continuas en I entonces I es un intervalo cerrado y acotado.

Ejercicio 4.5: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $r > 0$. Probar que si la restricción de f al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq r\}$ es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio 4.6: Sea $a < b$ y $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe $\hat{f}:[a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\hat{f}(x) = f(x), \forall x \in]a, b[$.

(ii) f es uniformemente continua en $]a, b[$.

Ejercicio 4.7: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica. Probar que:

(i) f está acotada y alcanza (en $\mathbb{R}$) su máximo y su mínimo absoluto.

(ii) f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.8: Se dice que dos sucesiones x_n e y_n son *paralelas* si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$, para cada $n > n_0$. Demostrar que $f: A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si, y solo si, transforma sucesiones paralelas de A en sucesiones paralelas de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.9: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado. Demostrar que $f: A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si, y solo si, preserva las sucesiones de Cauchy. ¿Sería cierto el resultado si A no fuese un conjunto acotado?

Ejercicio 4.10: Estudiar la continuidad uniforme de la función $f(x) = e^x$ en $\mathbb{R}_0^+$ y de la función $g(x) = \text{sen}(1/x)$ en $]0,1[$.