



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA I

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2024-2025



# Índice general

<b>1. Espacios Topológicos</b>	<b>5</b>
1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6



# 1. Espacios Topológicos

**Definición 1.1.** Un **espacio topológico** es una par  $(X, \mathcal{T})$ , donde  $X \neq \emptyset$  es un conjunto y  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  es una familia de subconjuntos de  $X$ .

(A1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

(A2) Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

(A3) Si  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ , entonces  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ .

A la familia  $\mathcal{T}$  se le llama **topología** en el conjunto  $X$ . A los elementos de  $\mathcal{T}$  se les llama **abiertos** en el espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ .

*Observación.* De (A1) podemos concretar que si  $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{T}$ . En general, si  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{T}$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  no tiene por qué ser abierto.

**Ejemplo.**

- **Topología trivial:** Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_t)$  es un e.t.<sup>1</sup>.
- **Topología discreta:** Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) \Rightarrow (X, \mathcal{T}_D)$  es un e.t.
- **Topología del punto incluido:** Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in X$ ,  $\mathcal{T}_{x_0} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : x_0 \in U\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{x_0})$  es un e.t.
- **Topología cofinita:** (o topología de los complementos finitos) Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$  es un e.t.

$$X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \text{ (intersección de finitos es finito)}$$

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) \text{ (unión de finitos es finito)}$$

- **Topología conumerable:** (o topología de los complementos numerables) Sea  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es numerable}\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_{CF})$  es un e.t.
- $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \Rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$  es un e.t.
- **Topología de Sierpinski:**  $X = \{a, b\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\} \Rightarrow (X, \mathcal{T})$  es un e.t.
- **Topología de Sorgenfrey:**  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T}_S$ ,  $U \in \mathcal{T}_S \iff \forall x \in U \exists \varepsilon > 0$  tal que  $[x, x + \varepsilon) \subset U$ . (es un caso particular del punto incluido,  $\mathcal{T}_a$ ).

---

<sup>1</sup>A partir de ahora notaremos así a un espacio topológico

*Observación.* En  $X = \{x\}$  solo existe una topología,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\}$  (todas las topologías son la misma).

**Ejercicio 1.** Determinar todas las topologías en un conjunto con 2 elementos.

Consideramos  $X = \{a, b\}$ . Las topologías posibles son:

- ) Trivial:  $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, X\}$
- ) Discreta:  $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$
- ) Punto incluido (a):  $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$
- ) Punto incluido (b):  $\mathcal{T}_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

■

**Ejercicio 2.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  e.t. Demostrar que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc} \iff \{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$ .

$\Rightarrow$ ) Si  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$ , como  $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \quad \forall x \in X$ , se tiene que  $\{x\} \in \mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}$ .

$\Leftarrow$ ) Tenemos  $\{x\} \in \mathcal{T} \quad \forall x \in X$ . Consideramos  $U \in \mathcal{P}(X)$  un subconjunto cualquiera de  $X$ . Podemos expresar  $U = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$ , donde  $\{x_i\} \in X \quad \forall i \in I$ . Por la propiedad **(A2)** tenemos  $U \in \mathcal{T}$ . Como  $U$  era un subconjunto arbitrario de  $X$ , tenemos  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$ .

■

## 1.1. Topología métrica. La topología usual de $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.2.** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$  donde  $X \neq \emptyset$  es un conjunto y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación que verifica:

**(D1)**  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ . Además,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .

**(D2)** (simetría)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .

**(D3)** (desigualdad triangular)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

A la aplicación  $d$  la llamaremos **distancia**.

**Ejercicio 1.1.1.** Demostrar que a partir de las propiedades **(D2)**, **(D3)** y la segunda parte de **(D1)** se puede deducir la primera parte de **(D1)**, y como consecuencia se tiene  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ .

Para cualesquiera  $x, y \in X$ , tenemos:

$$0 \stackrel{(\text{D1})(2)}{=} d(x, x) \stackrel{(\text{D3})}{\leq} d(x, y) + d(y, x) \stackrel{(\text{D2})}{=} d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

De donde podemos deducir

$$d(x, y) \geq 0 \Rightarrow d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$



**Definición 1.3.**  $(X, d)$  e.m.  $x \in X$ ,  $r > 0$ , se definen:

- ) La **bola (abierta)** de centro  $x$  y radio  $r$  como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset X$$

- ) La **bola cerrada** de centro  $x$  y radio  $r$  como

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \subset X$$

- ) La **esfera** de centro  $x$  y radio  $r$  como

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\} \subset X$$

Algunas propiedades que se deducen de la definición anterior son:

- )  $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$
- )  $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$
- ) Si  $s < r$ , entonces  $\overline{B}(x, s) \subset B(x, r)$

**Ejemplo.** (Espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ ) En  $\mathbb{R}^n$  consideramos la **distancia usual**,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Al espacio métrico  $(\mathbb{R}^n, d)$  lo denominaremos **Espacio Euclídeo**.

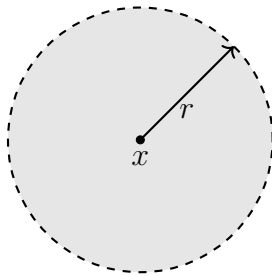
- ) Si  $n = 1$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ ,

$$B(x, r) = (x - r, x + r)$$

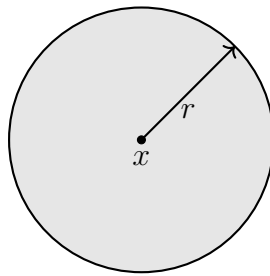
$$\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$$

$$S(x, r) = \{x - r, x + r\}$$

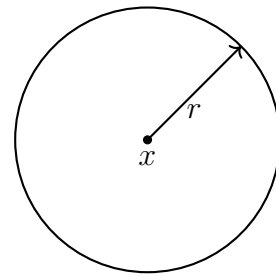
- ) En  $n = 2$  tenemos



$B(x, r) \equiv \text{disco}$

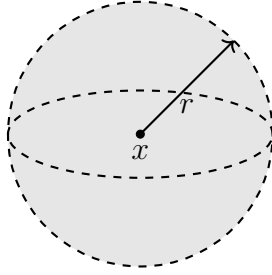
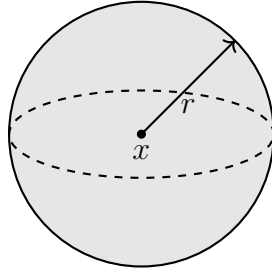
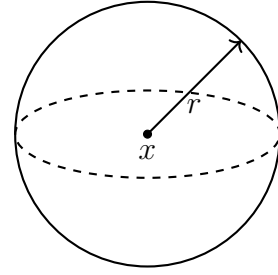


$\overline{B}(x, r) \equiv \text{disco cerrado}$



$S(x, r) \equiv \text{circunferencia}$

- ) En  $n = 3$  tenemos:

 $B(x, r) \equiv \text{bola}$  $\overline{B}(x, r) \equiv \text{bola cerrada}$  $S(x, r) \equiv \text{esfera}$ 

**Ejemplo.**  $X \neq \emptyset$  se define la **distancia discreta** como

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Con la distancia así definida tenemos:

$$B(x, r) = \begin{cases} X & \text{si } r > 1 \\ \{x\} & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

$$\overline{B}(x, r) = \begin{cases} X & \text{si } r \geq 1 \\ \{x\} & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

$$S(x, r) = \begin{cases} X \setminus \{x\} & \text{si } r = 1 \\ \emptyset & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

**Ejemplo.**

- ) Si  $d$  es una distancia en  $X$  y  $\lambda > 0$ , entonces  $\lambda \cdot d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  también es una distancia y  $B_{\lambda d}(x, r) = B_d(x, \frac{r}{\lambda})$
- ) Sean  $d$  y  $\tilde{d}$  distancias en  $X$  y  $d \leq \tilde{d}$ , entonces  $B_d(x, r) \supseteq B_{\tilde{d}}(x, r)$

**Definición 1.4.**  $(X, d)$  e.m. Un subconjunto  $U \subset X$  se dice **abierto métrico** si  $U = \emptyset$  o si  $\forall x \in U, \exists r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ .

**Proposición 1.1.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ es un abierto métrico en } (X, d)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

es una topología en  $X$  que llamamos la **topología métrica** en  $(X, d)$ .

*Demostración.*

(A1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$  trivialmente.



(A2) Sea  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$ . ¿ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ ?

Si  $\bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ .

Supongamos  $\bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$ . Sea  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i \in I : x \in U_i \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \exists r > 0 : B(x, r) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ .

(A3) Sean  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$ . ¿ $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_d$ ?

Si  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  se verifica.

Supongamos  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Entonces puedo considerar  $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : B(x, r_1) \subset U_1$  y  $B(x, r_2) \subset U_2 \Rightarrow B(x, \min\{r_1, r_2\}) \subset U_1 \cap U_2$

■

**Definición 1.5.** Se llama **topología usual de  $\mathbb{R}^n$** ,  $\mathcal{T}_u$ , a la topología métrica en  $\mathbb{R}^n$  con la distancia usual, es decir,  $U \subset \mathbb{R}^n$  es abierto en  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  si  $U = \emptyset$  o si  $\forall x \in U \exists r > 0 : B(x, r) \subset U$ .

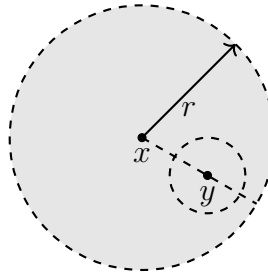
**Proposición 1.2.**  $(X, d)$  e.m. Se cumplen:

- (i) Las bolas abiertas en  $(X, d)$  son abiertos.
- (ii) Todo abierto no vacío en  $(X, d)$  se puede escribir como unión de bolas abiertas y como unión de bolas cerradas.

*Demostración.*

(i) Sea  $x \in X$ ,  $r > 0$ , ¿ $B(x, r) \in \mathcal{T}_d$ ?

Sea  $y \in B(x, r) \Rightarrow d(x, y) < r \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$ .  
Para ver esta última implicación tenemos que si tomamos un  $z \in B(y, \varepsilon) \Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon < r \Rightarrow z \in B(x, r)$ .



(ii) Sea  $U \in \mathcal{T}_d \Rightarrow \forall x \in U \exists r_x > 0$  tal que  $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x) = \bigcup_{x \in U} \overline{B}\left(x, \frac{r_x}{2}\right)$ .

■

**Corolario 1.2.1.** En  $(X, d)$  tenemos

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : U \text{ es unión de bolas abiertas}\}$$

**Ejemplo.**

- )  $(X, d)$  e.m. En general, no todo abierto es una bola. Por ejemplo la unión de bolas no concéntricas.
- ) No todo conjunto en  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  es abierto. Por ejemplo  $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$  no es abierto.
- ) En  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  los únicos intervalos abiertos (topológicamente) son los intervalos abiertos, es decir, los del tipo  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $(a, b)$  con  $a < b$ ,  $(-\infty, a)$  y  $(b, +\infty)$ .
- ) En  $(X, d)$ , en general la intersección infinita de abiertos no es abierto. Por ejemplo,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$  que no es abierto.
- )  $X \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$  (la topología asociada a la distancia discreta es la distancia discreta).

**Definición 1.6.** Sean  $X \neq \emptyset$  y  $d_1, d_2$  distancias en  $X$ . Decimos que  $d_1$  y  $d_2$  son **equivalentes** si existen  $a, b > 0$  tal que

$$a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

**Proposición 1.3.** Si  $d_1, d_2$  son distancias en  $X \neq \emptyset$  y existe  $a > 0$  tal que  $a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \quad \forall x, y \in X$ , entonces  $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ . En particular, si  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes, entonces  $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ .

*Demostración.* Sea  $U \in \mathcal{T}_{d_1}$ ,  $U \neq \emptyset$ , ¿ $U \in \mathcal{T}_{d_2}$ ?

Sea  $x \in U \in \mathcal{T}_{d_1} \Rightarrow \exists r > 0 : B_{d_1}(x, r) \subset U$ . Como  $a \cdot d_1 \leq d_2 \Rightarrow B_{d_2}(x, a \cdot r) \subset B_{d_1}(x, r)$ . Para verlo sea  $y \in B_{d_2}(x, a \cdot r) \Rightarrow d_2(x, y) < a \cdot r \Rightarrow a \cdot d_1(x, y) < r \Rightarrow y \in B_{d_1}(x, r)$ . Por tanto  $B_{d_1}(x, r) \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2} \Rightarrow \mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ . ■

**Definición 1.7.** Un e.t.  $(X, \mathcal{T})$  se dice **metrizable** si existe una distancia  $d$  en  $X$  tal que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ .

**Ejemplo.**

- )  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  es metrizable.
- )  $(X, \mathcal{T}_{disc})$  es metrizable.

**Ejercicio 1.1.2.** Si  $(X, \mathcal{T})$  es un e.t. metrizable, entonces cumple la condición de Hausdorff:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} : U \cap V = \emptyset$$

**Ejemplo.**

- )  $(X, \mathcal{T}_t)$  no es metrizable si  $\#X > 2$  (cardinal del conjunto) ya que no verifica la condición de Hausdorff.
- )  $(X, \mathcal{T}_{x_0})$  no es metrizable por la misma razón (ya que la intersección de cualesquiera dos abiertos va a contener a  $x_0$ ).

- )  $(X, \mathcal{T}_{CF})$  no es metrizable si  $X$  es infinito (aplicar las leyes de morgan para la intersección).
- )  $(X, \mathcal{T}_{CN})$  no es metrizable si  $X$  no es numerable.
- )  $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\})$ .
- ) La topología de Sierpinski tampoco es metrizable (ya que el único abierto que contiene a  $b$  es el total).
- ) La topología de Sorgenfrey  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$  cumple la propiedad de Hausdorff.