Álgebra II. Final

Nombre:____

Ejercicio 1.- (a) **Dado el grupo abeliano** $A = \left\langle x, y, z;\ \begin{matrix} 6x - 4y + 4z = 0 \\ 8x + 4y + 6z = 0 \\ 6x + 4y + 4z = 0 \end{matrix} \right\rangle$. **Calcula sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, el orden de** A **y el rango de su parte libre. (1)**

(b) **Escribe las descomposiciones cíclicas y cíclicas primárias de todos los grupos abelianos de orden 108. (1)**

(c) **Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano** $Aut(C_{16})$. **(1)**

1a: matriz de relaciones

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{Normal}}{\overset{\text{forma}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

rango de la parte libre $= 3 - 3 = 0$

A es torsión $A \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_8$ $\quad \underline{\underline{DC = DCP}}$

$\underline{|A| = 36}$

Nota si poneis DC de $A \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ teneis un 0 en esta parte

1b: $108 = 2^2 \cdot 3^3$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \\ 3 & & \end{matrix}$$

DCP	DC
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$C_3 \oplus C_6 \oplus C_6$
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_9$	$C_6 \oplus C_{18}$
$C_2 \oplus C_2 \oplus C_{27}$	$C_2 \oplus C_{54}$
$C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3$	$C_3 \oplus C_3 \oplus C_{12}$
$C_4 \oplus C_3 \oplus C_9$	$C_3 \oplus C_{36}$
$C_4 \oplus C_{27}$	C_{108}

1c $\quad \mathrm{Aut}(C_{16}) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16}) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

$|\mathrm{Aut}(C_{16})| = \varphi(16) = 8$

grupos abelianos de orden 8

$C_2 \oplus C_2 \oplus C_2 \longrightarrow$ todos sus elementos $\neq 1$ de orden 2.

$C_2 \oplus C_4 \longrightarrow$ no tiene elements de orden 8 y si tiene elements de orden 4.

$C_8 \longrightarrow$ tiene un elemento de orden 8

$\mathrm{Aut}(C_{16}) \quad C_{16} = \langle a ; a^{16} = 1 \rangle$.

$\varphi_1 : a \mapsto a$

$\varphi_2 : a \mapsto a^3$

$\varphi_3 : a \mapsto a^5$

$\varphi_4 : a \mapsto a^7$

$\varphi_5 : a \mapsto a^9$

$\varphi_6 : a \mapsto a^{11}$

$\varphi_7 : a \to a^{13}$

$\varphi_8 : a \mapsto a^{15}$

ordenes $|\varphi_1| = 1$, $|\varphi_2| = |\varphi_3| = |\varphi_6| = |\varphi_7| = 4$

$|\varphi_5| = |\varphi_8| = 2$

luego $\boxed{\mathrm{Aut}(C_8) \cong C_2 \oplus C_4.}$

Ejercicio 2.- **(a)** Sea $\sigma = (234)(123) \in S_5$ calcula σ^{123}. **(0,5)**

(b) Calcula el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5. **(1,5)**

2a: $\sigma = (13)(24) \quad |\sigma| = 2 \Rightarrow \sigma^{123} = \sigma$

2b: $n_3 = 1, 4, 10, 40 \qquad P_3 = $ 3-SS.

$|P_3| = 3$

Elemtos de orden 3 de S_5 sólo los ciclos de lg 3

Hay $\dfrac{V_{5,3}}{3} = \underline{\underline{20}}$

P_3 tiene el 1 y 2 elemtos de orden 3.

Para tener 1'5 en este apartado tenéis que decir:

1.- los 3-SS. tienen orden primo $\Rightarrow$ la int. de dos $\neq$es trivial.

2.- todo elemto de orden 3 de S_5 está contenido en un 3-SS. (se os olvida esto).

3.- El cardinal de la unión de los 3-SS. tiene que ser $20+1$

Conclusión $\underline{\underline{n_3 = 10}}$

Ejercicio 3.- (a) Prueba que hay sólo un grupo de orden 885 que además es abeliano. (2)

(b) Prueba que todo grupo de orden 351 es un producto semidirecto. (1,5)

(c) Calcula todos los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$. ¿Cuantos hay salvo isomorfismo? (1,5)

3a $|G| = 885 = 3.5.59$ $\quad n_3 = 1, 295$

$n_5 = 1 \quad n_{59} = 1.$

$\left.\begin{array}{l} P_5 \trianglelefteq G \\ P_{59} \trianglelefteq G \end{array}\right\} \Rightarrow P_5 . P_{59} \trianglelefteq G.$ Además.

$P_5 \cap P_{59} = 1 \Rightarrow P_5 . P_{59} \cong C_5 \oplus C_{59} \cong C_{295}.$ directo.

$\left.\begin{array}{l} |P_5| = 5 \Rightarrow P_5 \cong C_5 \\ |P_{59}| = 59 \Rightarrow P_{59} \cong C_{59} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} P_3 \leq G. \\ P_5 . P_{59} \trianglelefteq G \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} P_3 \cap (P_5 . P_{59}) = 1. \\ |P_3 . (P_5 . P_{59})| = |G| \end{array}\right\} \Rightarrow$

$G = (P_5 . P_{59}) \rtimes P_3$

Veamos cuantos productos semidirectos hay

$\mathrm{Aut}(P_5 \cdot P_{59}) \cong \mathrm{Aut}(C_{295}) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{295})$.

$\Rightarrow |\mathrm{Aut}(P_5 \cdot P_{59})| = \varphi(5.59) = 4.58 = 232$

Acciones de $P_3 \cong C_3$ en $P_5 \cdot P_{59} \cong C_{295}$

$\equiv$ morfismos $C_3 \xrightarrow{\theta} \mathrm{Aut}(C_{259})$.

Si $C_3 = \langle a ; a^3 = 1 \rangle$ la imagen

$\theta(a)$ tiene que ser un elemento de

$\mathrm{Aut}(C_{259})$ y $\theta(a)^3 = 1 \Rightarrow$

$\theta(a)$ tiene orden $\begin{cases} 1 \to \text{identidad} \\ 3 \to 3 \nmid \underset{\overset{\parallel}{232}}{\varphi(259)} \end{cases}$

Luego en $\mathrm{Aut}(C_{259})$ no

hay elementos de orden 3 la única

acción es la trivial $\underline{\underline{G \cong C_{259} \times C_3 \cong C_{885}}}$

abeliano.

Contando elementos.

si $n_3 = 295$ como $|P_3| = 3$. dos 3-88.

tienen int. trivial tendríamos $295 \times 2 =$

$= \underline{590}$ elementos de orden 2

Además tendríamos los elementos de

$P_5 \cdot P_{59}$ que son 295 elementos.

si sumamos $590 + 295 = 885$.

En principio no hay contradicción

No todos los elementos de G

tienen orden 3, 5 ó 59 !!!

....

39 $351 = 3^3 \cdot 13$

$n_3 = 1, 13$
$n_{13} = 1, 27$ } tengo que ver que $n_3 = 13 \wedge n_{13} = 26$

no es posible

Ojo: $P_3^1 \cap P_3^2$ no tiene porqué ser trivial luego no puedo suponer $n_3 = 13$ y decir que hay 13×27 elementos de ordenes 1, 3, 9, 27 !!!!!

Pero si supongo $n_{13} = 27$ y $P_{13}^1 \dots P_{13}^{27}$ luego si tengo $P_{13}^i \cap P_3^j = 1$ $i \neq j$
$\ell \cdot (13-1)$. si tengo
luego si puedo contar los elementos

de orden 13 que sería

$27 \times 12 = 324$.

Quedarían $351 - 324 = 27$

elementos de otro orden que

tendrían que estar en el único

3-sg.

Luego $n_{13} = 27 \Rightarrow n_3 = 1$.

Así $P_3 \trianglelefteq G$ ó $P_{13} \trianglelefteq G$.

$P_3 \cap P_{13} = 1$ y $P_3 \cdot P_{13} = G$

Tenemos $G = P_3 \rtimes P_{13}$

ó

$G = P_{13} \rtimes P_3$

$C_{13} \rtimes C_{27}$ $\qquad C_{13} = \langle a \,;\, a^{13} = 1 \rangle.$

$C_{27} \longrightarrow \mathrm{Aut}(C_{13}) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13}) = \{1, \dots, 12\}.$

tenemos que buscar automorfismos φ de C_{13} que cumplan $\underline{\varphi^{27} = 1.}$

luego el orden de φ tiene que ser un divisor de $27 \to 1, 3, 9, 27$

$\underline{|\mathrm{Aut}\, C_{13}| = \varphi(13) = 12.}$ los únicos que dividen a 12 son $\underline{1, 3}$

Automorfismos de C_{13} de orden

$1 \longrightarrow$ la identidad $\to$ prod. directo

$3 \to \begin{cases} \varphi_3 : a \mapsto a^3 \\ \varphi_9 : a \mapsto a^9 \end{cases}$ solo hay estos dos.

tres productos semidirectos.

(1) $C_{13} \times C_{27}$ acción trivial.

es abeliano.

(2) $C_{13} \rtimes_1 C_{27} = \langle a, b : a^{13} = b^{27} = 1, bab^{-1} = a^3 \rangle$.

(3) $C_{13} \rtimes_2 C_{27} = \langle c, d : c^{13} = d^{27} = 1, dcd^{-1} = c^9 \rangle$.

$$C_{13} \rtimes_2 C_{27} \xrightarrow{\cong} C_{13} \rtimes_1 C_{27}$$

$$\left.\begin{array}{l} c \longmapsto a \\ d \longmapsto b^2 \end{array}\right\}$$ a y b^2 cumplen las relaciones de c, d

$$\left.\begin{array}{l} a^{13} = 1, (b^2)^{27} = 1 \\ b^2 a b^{-2} = b a^3 b^{-1} = a^9 \end{array}\right\}$$ luego es morfismo

sobre porque a y b^2 generan $C_{13} \rtimes_1 C_{27}$ i y.....