Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Topología II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

Tema 0. Conexión por arcos

0.1. Conexión

Notación. Notaremos por e.t al espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ o diremos X es un e.t.

Definición 0.1. Se dice que un e.t X es no conexo si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Proposición 0.1. Dado un e.t. X equivalen las siguientes afirmaciones:

(i) X es conexo.

(ii) Los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el total.

(iii) Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son el vacío y el total.

Teorema 0.2. El ser conexo se conserva por aplicaciones continuas. En particular, ser conexo es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos).

Teorema 0.3. La unión de una colección de subconjuntos conexos que tienen un punto común de un e.t. X es también conexa.

Teorema 0.4. Si A es un subconjunto del e.t. X y A es conexo, entonces dado B con $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces se tiene que B también es conexo. En particular, la adherencia de un conexo siempre es un conjunto conexo.

Teorema 0.5. Dados dos espacios topológicos X, Y se cumple que $X \times Y$ es conexo (con la topología producto) si y solo si X e Y son conexos.

Teorema 0.6. Los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ con la topología usual son exactamente los intervalos (incluyendo los puntos).

Definición 0.2. Dados un e.t. X y un punto x_0 se define la componente conexa de x_0 es X como el mayor conexo de X que contiene a x_0

Teorema 0.7. Las componentes conexas de un e.t. X forman una partición de X es conjuntos conexos maximales y cerrados.