



# Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

## TOPOLOGÍA II

Autor:  
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026



# Índice general

<b>1. Espacios Recubridores</b>	<b>5</b>
1.1. Levantamiento de aplicaciones . . . . .	5
1.2. Transformación de recubridores . . . . .	13
1.3. Existencia de espacios recubridores . . . . .	25



# 1. Espacios Recubridores

*Observación.* A lo largo de este tema supondremos que todos los espacios topológicos son conexos y localmente arcoconexos. En particular estos espacios son siempre arcoconexos.

## 1.1. Levantamiento de aplicaciones

*Observación.* Vamos a tener en cuenta que si  $X$  es un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, entonces todo abierto suyo cumple que cada componente arcoconexa es abierta.

*Demuestração.* Si  $O$  es abierto y  $A$  es una componente arcoconexa de  $O$ , entonces dado  $a \in A$ , como  $X$  es localmente arcoconexo tendremos que existe un  $U$  entorno arcoconexo de  $a$  tal que  $U \subseteq O$ . Como  $A$  es el mayor arcoconexo en  $O$  que contiene al punto  $a$  tendremos que  $U \subseteq A$ , luego  $A$  es abierto.  $\square$

Esto lo vamos a usar para el caso en el que tenemos dada una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$  y un punto  $b_0 \in B$ . Entonces tendremos que existe un abierto regularmente recubierto  $O$  que contiene a  $b_0$ . Restringiéndonos a la componente arcoconexa de  $O$  que contiene a  $b_0$  podremos suponer que el entorno regularmente recubierto es abierto y arcoconexo.

**Lema 1.1** (Unicidad del levantamiento). Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $f_1, f_2 : X \rightarrow R$  continuas tales que

$$p \circ f_1 = p \circ f_2$$

Si existe un  $x_0 \in X$  tal que  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ , entonces  $f_1 = f_2$ .

*Demuestração.* Para la demostración solo se necesita que  $X$  sea conexo y no necesariamente localmente arcoconexo.

Partimos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow[f=p \circ f_1=p \circ f_2]{f_1, f_2} & B \end{array}$$

Consideramos el siguiente conjunto

$$Y = \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\}$$

Como  $X$  es conexo y tenemos que  $Y \neq \emptyset$ , ya que por hipótesis  $x_0 \in Y$ , si probamos que  $Y$  es abierto y cerrado tendremos que  $Y = X$ , es decir,  $f_1 = f_2$ .

Veamos que  $Y$  es abierto. Para ello tomamos  $y \in Y$ , es decir, un punto  $y$  tal que  $f_1(y) = f_2(y)$ . Elegimos el punto  $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$ . Sea  $O$  abierto regularmente recubierto y arcoconexo que contiene a  $b$ , entonces

$$p^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

donde los  $A_i$  son abiertos disjuntos de  $R$  y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tomamos el abierto  $A_{i_0}$  donde se encuentra  $f_1(y) = f_2(y)$ . Elegimos  $V = f_1^{-1}(A_{i_0}) \cap f_2^{-1}(A_{i_0})$ . Veamos que  $\forall x \in V$  se tiene que  $f_1(x) = f_2(x)$ . Como  $x \in V$  tendremos que  $f_1(x), f_2(x) \in A_{i_0}$  por lo que

$$p(f_1(x)) = p(f_2(x)) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow V \subseteq Y$$

donde en  $(*)$  hemos usado que  $p|_{A_i}$  es inyectiva. Tenemos finalmente que  $Y$  es abierto.

Veamos ahora que  $Y$  es cerrado. Para ello demostramos que  $X \setminus Y$  es abierto. Tomamos  $y \in X \setminus Y$  y vemos que existe un  $V$  abierto que contiene al punto  $y$  y tal que  $V \subseteq X \setminus Y$ . Sea  $b = p(f_1(y)) = p(f_2(y))$  y de nuevo tomamos  $O$  regularmente recubierto que contiene a  $b$ . Tendremos

$$p^{-1}(O) = \bigcap_{i \in I} A_i$$

donde los  $A_i$  son abiertos disjuntos y tal que

$$p|_{A_i} : A_i \rightarrow O$$

es un homeomorfismo. Tendremos  $f_1(y) \in A_{i_1}$  y  $f_2(y) \in A_{i_2}$  y además se verificará que  $A_{i_1} \neq A_{i_2}$  ya que si se diera la igualdad tendríamos que la aplicación

$$p|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow O$$

no sería inyectiva. Elegimos ahora  $V = f_1^{-1}(A_{i_1}) \cap f_2^{-1}(A_{i_2})$ , donde se tiene que  $y \in V$ . Además se tiene que

$$\begin{aligned} f_1(V) &\subseteq A_{i_1} \\ f_2(V) &\subseteq A_{i_2} \end{aligned}$$

por lo que para cada  $x \in V$  se tendrá que  $f_1(x) \neq f_2(x)$  ya que  $f_1(x) \in A_{i_1}$  y  $f_2(x) \in A_{i_2}$ . Esto nos dice que  $V \subseteq X \setminus Y$ , luego  $Y$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 1.2** (Teorema de monodromía). Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in V$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ . El homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(R, r_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  es inyectivo. En particular,  $\pi_1(R, r_0)$  es isomorfo a  $p_*(\pi_1(R, r_0)) < \pi_1(B, b_0)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p_*$  es inyectiva si y solo si  $\ker(p_*)$  es trivial. Tomamos  $\alpha$  lazo basado en  $r_0$  tal que

$$p_*([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$$

Como además  $[p \circ \alpha] = p^*([\alpha])$  tenemos que existe una homotopía por lazos de  $\varepsilon_{b_0}$  en  $p \circ \alpha$ . Como toda homotopía por arcos se puede levantar tenemos que existe una homotopía por arcos en  $R$  de  $\hat{\varepsilon}_{b_0}$  y  $\widehat{p \circ \alpha}$  (empezando en  $r_0$ ). Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \\ \widehat{p \circ \alpha} = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_{r_0}]$$

□

*Observación.* Recordemos que dados dos subgrupos  $H_1, H_2$  de un grupo  $G$  se dice que  $H_1$  y  $H_2$  son conjugados si existe un  $g \in G$  tal que

$$H_2 = g^{-1} H_1 g$$

**Corolario 1.2.1.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_1, r_2 \in p^{-1}(b_0)$ . Elegimos un arco  $\alpha : [0, 1] \rightarrow R$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= r_1 \\ \alpha(1) &= r_2 \end{aligned}$$

entonces

$$p_*(\pi_1(R, r_2)) = [p \circ \alpha]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \alpha]$$

En particular,  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  y  $p_*(\pi_1(R, r_2))$  son conjugados en  $\pi_1(B, b_0)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $p \circ \alpha$  es un lazo basado en  $b_0$  por lo que  $[p \circ \alpha] \in \pi_1(B, b_0)$ . Además,

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_2) &\xrightarrow{\text{isom.}} \pi_1(R, r_1) \\ [\beta] &\longmapsto [\alpha * \beta * \widetilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que

$$\begin{aligned} \pi_1(R, r_1) &= [\alpha] * \pi_1(R, r_2) * [\widetilde{\alpha}] \\ p_*(\pi_1(R, r_1)) &= [p \circ \alpha] * p_*(\pi_1(R, r_2)) * [p \circ \widetilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$[p \circ \widetilde{\alpha}] = [\widehat{p \circ \alpha}] = [p \circ \alpha]^{-1}$$

llegamos a que son conjugados. □

**Corolario 1.2.2.** Sean  $p : R \rightarrow B$  una aplicación recubridora,  $b_0 \in B$  y  $r_1 \in p^{-1}(b_0)$ . Sea  $H$  un subgrupo conjugado de  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  en  $\pi_1(B, b_0)$ . Entonces existe un punto  $r_2 \in R$  tal que

$$H = p_*(\pi_1(R, r_2))$$

*Demostración.* Por hipótesis sabemos que  $p(r_1) = b_0$  y que  $p_*(\pi_1(R, r_1))$  es conjugado con  $H$  en  $\pi_1(B, b_0)$ , es decir,

$$H = g^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * g$$

con  $g \in \pi_1(B, b_0)$ , esto es,  $g = [\gamma]$ . Consideramos  $\hat{\gamma}$  el levantamiento de  $\gamma$  a  $R$  con

$$\hat{\gamma}(0) = r_1$$

y llamamos  $r_2 = \hat{\gamma}(1)$  al final del arco.

$$p(r_2) = (p \circ \hat{\gamma})(1) = \gamma(1) = b_0$$

Usando el corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(R, r_2)) &= [p \circ \hat{\gamma}]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [p \circ \hat{\gamma}] = \\ &= [\gamma]^{-1} * p_*(\pi_1(R, r_1)) * [\gamma] = \\ &= H \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.3.** Consideramos una aplicación recubridora  $p : R \rightarrow B$ , una aplicación continua  $f : X \rightarrow B$ ,  $x_0 \in X$ ,  $b_0 = f(x_0)$  y  $r_0 \in p^{-1}(b_0)$ .

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces son equivalentes:

1. Existe un levantamiento  $\hat{f} : X \rightarrow R$  de  $f$  con  $\hat{f}(x_0) = r_0$ .
2.  $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$

Además, si se cumple cualquiera de estas condiciones, el levantamiento  $\hat{f}$  de  $f$  con  $\hat{f}(x_0) = r_0$  es único.

*Demostración.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) Estamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(R, r_0) \\ & \nearrow \hat{f}_x & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

y podemos ver que

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) = p_*(\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0))) \subseteq p_*(\pi_1(R, r_0))$$

ya que  $\hat{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(R, r_0)$  por lo que tenemos esta implicación simplemente desarrollando la composición.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Empezamos definiendo  $\hat{f}$ :

$$\begin{array}{ccc} R & & \\ \downarrow p & & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Dado  $x \in X$  elegimos  $\alpha_x$  un arco en  $X$  que une  $x_0$  con  $x$ . Entonces  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  es un arco en  $B$  que une  $b_0 = f(x_0)$  con  $f(x)$ . Consideramos ahora  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  el único arco en  $R$  tal que  $\widehat{f \circ \alpha_x}(0) = r_0$  y definimos

$$\hat{f}(x) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

Veamos que  $\hat{f}$  está bien definida, es decir, que no depende del arco  $\alpha_x$  elegido. Tomamos otro arco  $\beta_x$  en  $X$  tal que  $\beta_x(0) = x_0$  y  $\beta_x(1) = x$  y queremos ver que

$$\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \widehat{f \circ \beta_x}(1)$$

Tomamos  $\gamma = \alpha_x * \widetilde{\beta}_x$  que es un lazo en  $X$  con base en  $x_0$ . Tenemos entonces que

$$f \circ \gamma = (f \circ \alpha_x) * (f \circ \widetilde{\beta}_x)$$

es un lazo con base en  $b_0$ . Usamos ahora la hipótesis y tenemos que

$$[f \circ \gamma] = f_*([\gamma]) \in p_*(\pi_1(R, r_0))$$

Es decir, existe un arco  $\delta$  con base en  $r_0$  tal que  $[f \circ \gamma] = [p \circ \delta]$ . Sea  $\widehat{f \circ \gamma}$  el único levantamiento de  $f \circ \gamma$  que comienza en  $r_0$ . Tenemos que  $\widehat{f \circ \gamma}$  es homotópico por arcos con  $p \circ \delta$ . Como  $p_*$  es inyectiva tenemos que  $\widehat{f \circ \gamma}$  es homotópico con  $\delta$ , por lo que ambos acaban en el mismo punto, es decir, tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma}(1) = \delta(1) = r_0$$

Además tenemos que

$$\widehat{f \circ \gamma} = (f \circ \alpha_x) * \widehat{f \circ \beta_x} = \widehat{f \circ \alpha_x} * \omega$$

donde  $\widehat{f \circ \alpha_x}$  es el levantamiento de  $f \circ \alpha_x$  empezando en  $r_0$  y  $\omega$  es el levantamiento de  $\widehat{f \circ \beta_x}$  comenzando en  $\widehat{f \circ \alpha_x}(1)$ . Podemos ver que

$$\left. \begin{array}{l} p \circ \omega = \widehat{f \circ \beta_x} = f \circ \widetilde{\beta}_x \\ \omega(1) = r_0 \\ \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \circ \widetilde{\omega} = f \circ \beta_x \\ \widetilde{\omega}(0) = \omega(1) = r_0 \\ \widetilde{\omega}(1) = \omega(0) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \end{array} \right.$$

Por tanto

$$\widehat{f \circ \beta_x}(1) = \widetilde{\omega}(1) = \widehat{f \circ \alpha_x}(1)$$

lo que demuestra que la definición de  $\hat{f}(x)$  está bien hecha.

Veamos ahora que  $p \circ \hat{f} = f$ . Para ello, dado  $x \in X$  tenemos que ver que  $(p \circ \hat{f})(x) = f(x)$ . Veamos quién es  $\hat{f}(x)$ :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \widehat{f \circ \alpha_x}(1) \\ p(\hat{f}(x)) &= (p \circ (\widehat{f \circ \alpha_x}))(1) = (f \circ \alpha_x)(1) = f(\alpha_x(1)) = f(x)\end{aligned}$$

También es claro que  $\hat{f}(x_0) = r_0$  ya que para  $x_0$  podemos elegir  $\varepsilon_{x_0}$  verificándose que  $f \circ \varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{b_0}$  luego

$$\widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}} = \hat{\varepsilon}_{b_0} = \varepsilon_{r_0} \Rightarrow \hat{f}(x_0) = \widehat{f \circ \varepsilon_{x_0}}(1) = \varepsilon_{r_0}(1) = r_0$$

Vamos a demostrar ahora que  $\hat{f}$  es continua.

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ f \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Comenzamos tomando un punto  $x \in X$  y vemos que  $\hat{f}$  es continua en  $x$ . Sea  $U$  un entorno de  $\hat{f}(x)$ . Tomamos  $O$  abierto arcoconexo de  $f(x)$  que esté regularmente recubierto, es decir

$$\begin{aligned}p^{-1}(O) &= \bigcup_{i \in I} A_i \text{ con } A_i \text{ disjuntos} \\ p|_{A_i} : A_i &\rightarrow O \text{ homeomorfismo}\end{aligned}$$

Como  $\hat{f}(x) \in p^{-1}(f(x)) \subseteq p^{-1}(O)$  tenemos que existe un único  $i_0 \in I$  tal que  $\hat{f}(x) \in A_{i_0}$ . Podemos suponer que  $A_{i_0} \subseteq U$  (si no fuese así consideraríamos  $U \cap A_{i_0}$ ). Como  $f$  es continua, existe un abierto  $V$  que contiene a  $x$  tal que  $f(V) \subseteq O$ . Podemos suponer que  $V$  es arcoconexo (si no lo fuese podríamos coger la componente arcoconexa de  $V$  que contenga a  $x$ ).

Si probamos que  $\hat{f}(V) \subseteq A_{i_0} \subseteq U$  tendríamos que  $\hat{f}$  es continua en  $x$ . Para verlo consideramos un punto  $y \in V$  y tomamos un arco  $\gamma$  dentro de  $V$  que une  $x$  con  $y$ . Tenemos entonces que  $\alpha_x * \gamma$  es un arco que une  $x_0$  con  $y$ . Para ver quién es su imagen sabemos que

$$\hat{f}(y) = f \circ \widehat{(\alpha_x * \gamma)}(1) = (f \circ \widehat{\alpha_x}) * \widehat{(f \circ \gamma)}(1)$$

donde  $(f \circ \widehat{\alpha_x}) * \widehat{(f \circ \gamma)}$  es la única curva que se proyecta por  $p$  en  $(f \circ \alpha_x) * (f \circ \gamma)$  y comienza en  $r_0$ . Es decir,  $(f \circ \widehat{\alpha_x}) * \widehat{(f \circ \gamma)}$  se puede ver como

$$\widehat{f \circ \alpha_x} * \widehat{\overline{f \circ \gamma}}$$

donde  $\widehat{\widehat{f \circ \gamma}}$  es el levantamiento de  $f \circ \gamma$  pero comenzando en el punto  $\widehat{f \circ \alpha_x}(1) = \hat{f}(x)$ .

$$Im(\gamma) \subseteq V \Rightarrow Im(f \circ \gamma) \subseteq O \Rightarrow \widehat{\widehat{f \circ \gamma}} \subseteq A_{i_0}$$

ya que  $p|_{A_{i_0}}$  es un homeomorfismo por lo que llegamos finalmente a

$$\hat{f}(y) = (\widehat{f \circ \alpha_x}) * (\widehat{f \circ \gamma})(1) = \widehat{\widehat{f \circ \gamma}}(1) \in A_{i_0}$$

□

*Observación.* Una consecuencia inmediata es que si  $X$  es simplemente conexo, toda  $X : X \rightarrow B$  continua se puede levantar.

**Ejemplo.** Consideramos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy, z) \end{aligned}$$

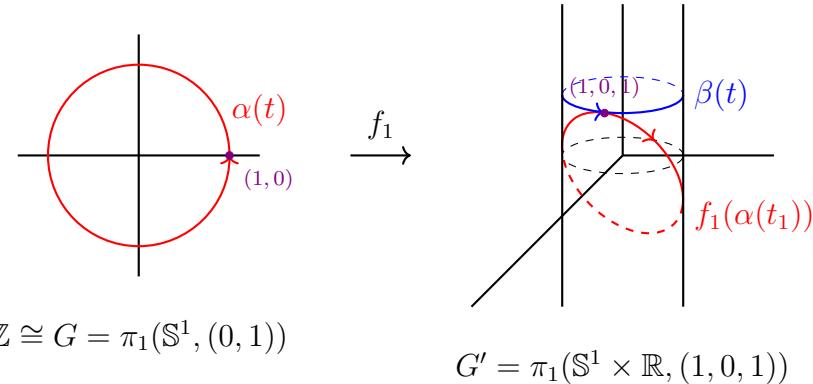
y las aplicaciones  $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (x, y, x) \\ f_2(x, y) &= (-2xy, x^2 - y^2, x^2) \end{aligned}$$

Nos preguntamos si existen levantamientos de  $f_1$  y  $f_2$ , es decir si existen los  $\hat{f}_1, \hat{f}_2$  que hacen comutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} & \\ \hat{f}_1, \hat{f}_2 \swarrow \searrow & \downarrow p & \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f_1, f_2} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{array}$$

Con la siguiente gráfica



podemos ver que  $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  está generado por  $[\alpha]$  donde

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

y  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))$  está generado por  $[\beta]$  done

$$\beta(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1)$$

Además es fácil ver en la misma gráfica que

$$\begin{aligned} f_{1*}([\alpha]) &= [f_1 \circ \alpha] = [\beta] \\ f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)) = \{[\beta]^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

y además

$$\begin{aligned} (p \circ \beta)(t) &= (\cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), 2\cos(2\pi t)\sin(2\pi t), 1) = \\ &= (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t), 1) = (\beta * \beta)(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_*([\beta]) &= [p \circ \beta] = [\beta]^2 \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Sabemos por el teorema visto que existe un  $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  levantamiento de  $f_1$  con  $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$  si y solo si se tiene que

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como tenemos que

$$\begin{aligned} f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\beta]^k : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \\ p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1))) &= \{[\beta]^{2m} : m \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

no se dará la inclusión

$$f_{1*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) \not\subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

y tenemos que no existe  $\hat{f}_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  levantamiento de  $f_1$  con  $\hat{f}_1(1, 0) = (1, 0, 1)$ . Si tomamos otro punto  $r_1$  cualquiera tal que  $p(r_1) = (1, 0, 1)$  ( $r_1$  colo podría ser el  $(-1, 0, 1)$ ) entonces sabemos por un corolario anterior que

$$p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, r_1)) \text{ es conjugado de } p_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 1)))$$

Como el grupo total es abeliano, entonces estos dos grupos son idénticos.

Veamos qué ocurre con  $f_2$ . En este caso tenemos que

$$f_2(1, 0) = (1, 0, 1)$$

Además,  $[\alpha]$  genera  $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  y  $[\gamma]$  genera  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (0, 1, 1))$  donde

$$\gamma(t) = \left( \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), 1 \right)$$

Queremos calcular  $f_2 \circ \alpha$ :

$$\begin{aligned} (f_2 \circ \alpha)(t) &= (-2 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t), \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (-\sin(4\pi t), -\cos(4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= (\sin(-4\pi t), \cos(-4\pi t), \cos^2(2\pi t)) = \\ &= \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi t\right), \cos^2(2\pi t) \right) \end{aligned}$$

y podemos concluir que

$$f_{2*}([\alpha]) = [f_2 \circ \alpha] = [\gamma * \gamma] = [\gamma]^2$$

por lo que

$$\begin{aligned} f_{2*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) &= \{[\gamma]^{2n} : n \in \mathbb{Z}\} = \\ &= p_* \left( \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right), \right) \end{aligned}$$

y tenemos finalmente que existe el levantamiento  $\hat{f}_2$  con  $\hat{f}_2(1, 0) = (0, 1, 1)$

## 1.2. Transformación de recubridores

Vamos a tratar en lo que queda de tema de clasificar los espacios recubridores de un espacio topológico  $B$  dado. Comenzamos estableciendo para ello una nomenclatura clásica.

**Notación.** Diremos que  $(R, p)$  es un recubridor de  $B$  si  $p : R \rightarrow B$  es una aplicación recubridora.

**Definición 1.1.** Sean  $(R_1, p_1)$ ,  $(R_2, p_2)$  dos espacios recubridores de un mismo e.t. base  $B$ ,

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

1. Un **homomorfismo de recubridores**  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  es una aplicación continua  $\phi : R_1 \rightarrow R_2$  tal que  $p_2 \circ \phi = p_1$ . Dicha aplicación hace que el siguiente diagrama commute:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\hat{f}=\phi} & R_2 \\ & \searrow f=p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

O equivalentemente  $\phi$  es un levantamiento de la aplicación continua  $p_1$  usando la aplicación recubridora  $p_2$ .

2. Un **isomorfismo de recubridores**  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  es  $(R_2, p_2)$  es un homeomorfismo  $\phi : R_1 \rightarrow R_2$  tal que  $p_2 \circ \phi = p_1$ .
3. Un isomorfismo  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  es sí mismo se le llama **automorfismo de recubridores**. Al conjunto de todos los automorfismos lo notaremos por  $\mathcal{A}(R_1, p_1)$ .

*Observación.*

1. Si  $(R, p)$  es un recubridor de un espacio base  $B$  y  $\phi : \hat{R} \rightarrow R$  es un homeomorfismo, entonces  $(\hat{R}, p \circ \phi)$  es un recubridor de  $B$ . Se puede ver fácilmente con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\phi} & R \\ & \searrow p \circ \phi & \downarrow p \\ & & B \end{array}$$

recordando que la composición de una aplicación recubridora con un homeomorfismo es también una aplicación recubridora (visto en las propiedades de las aplicaciones recubridoras). Además,  $\phi$  de  $(\hat{R}, p \circ \phi)$  en  $(R, p)$  es un isomorfismo de recubridores. De hecho, de la definición se deduce que todo isomorfismo de recubridores es de la forma anterior.

2. Si  $\phi_1$  de  $(R_1, p_1)$  es  $(R_2, p_2)$  es un homomorfismo de recubridores y  $\phi_2$  es otro desde  $(R_2, p_2)$  en  $(R_3, p_3)$ , entonces  $\phi_2 \circ \phi_1$  es un homomorfismo de recubridores de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_3, p_3)$ . Tendríamos la situación del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_1} & R_2 & \xrightarrow{\phi_2} & R_3 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p_3 & \\ & & B & & \end{array}$$

3. Si  $\phi$  es un isomorfismo de recubridores desde  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ , entonces  $\phi^{-1}$  es un isomorfismo de recubridores desde  $(R_2, p_2)$  en  $(R_1, p_1)$ .

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightleftharpoons[\phi]{\phi^{-1}} & R_2 \\ & \searrow p_2 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

4.  $\mathcal{A}(R, p)$  es un grupo con la composición.

**Corolario 1.3.1.** Sean  $\phi_1, \phi_2$  dos homomorfismos de recubridores desde  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ . Entonces se tiene que

$$\phi_1 = \phi_2 \iff \exists r_1 \in R_1 : \phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$$

En particular, si  $\phi$  es un homomorfismo de un recubridor  $(R, p)$  en sí mismo, entonces

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = r$$

*Demostración.* Estamos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi_2} & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Veamos la doble implicación de la primera mitad del corolario

- $\Rightarrow)$  Es trivial que si  $\phi_1 = \phi_2$  entonces  $\forall r \in R_1$  se tiene que  $\phi_1(r) = \phi_2(r)$ .
- $\Leftarrow)$  Supongamos que  $\exists r_1 \in R_1$  tal que  $\phi_1(r_1) = \phi_2(r_1)$ . Entonces, como  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son levantamientos de  $p_1$ , por el teorema de unicidad del levantamiento tenemos que  $\phi_1 = \phi_2$ .

Para probar la segunda parte del corolario aplicaremos lo ya probado tomando  $\phi_1 = \phi$  un homomorfismo de un recubridor  $(R, p)$  en sí mismo y  $\phi_2 = Id_R$ .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{Id_R} & R \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & B & \end{array}$$

Entonces tendríamos que

$$\phi = Id_R \iff \exists r \in R : \phi(r) = Id_R(r) = r$$

□

**Corolario 1.3.2.** Sean  $(R_1, p_1)$ ,  $(R_2, p_2)$  dos recubridores de  $B$ ,  $b_0 \in B$  y  $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ ,  $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ . Entonces:

1. Existe un homomorfismo de recubridores  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  con  $\phi(r_1) = r_2$  si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Existe un isomorfismo de recubridores  $\phi$  de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$  con  $\phi(r_1) = r_2$  si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

*Demostración.* Veamos cada punto por separado.

1. Estamos en la siguiente situación (donde se ha puesto la equivalencia con la notación que usamos para el teorema de existencia del levantamiento)

$$\begin{array}{ccc} X = R_1 & \xrightarrow{\phi \stackrel{?}{=} f} & R_2 = R \\ & \searrow f=p_1 & \swarrow p_2=p \\ & B & \end{array}$$

Entonces por el teorema de existencia del levantamiento tenemos que existe  $\phi$  levantamiento de  $p_1$  con  $\phi(r_1) = r_2$  si y solo si

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

2. Veamos la doble inclusión. En primer lugar denotamos por  $\phi$  al isomorfismo y a su inversa la llamaremos  $\varphi$ . Esta aplicación verifica que

$$\varphi \circ \phi = Id_{R_1} \quad \phi \circ \varphi = Id_{R_2}$$

y además es también un isomorfismo (por lo que en particular es un homomorfismo). Estaríamos en la situación del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 & \xrightarrow{\varphi} & R_1 \\ & \searrow p_1 & \downarrow p_2 & \swarrow p^1 & \\ & & B & & \end{array}$$

donde  $\phi$  y  $\varphi$  son homomorfismos. Por hipótesis tenemos que  $\exists r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$ ,  $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$  tales que  $\phi(r_1) = r_2$ . Si componemos esta igualdad por la izquierda con  $\varphi$  tenemos

$$(\varphi \circ \phi)(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow Id_R(r_1) = \phi(r_2) \Rightarrow r_1 = \varphi(r_2)$$

Por tanto aplicando el primer punto del corolario a  $\phi$  (es un homomorfismo con  $\phi(r_1) = r_2$ ) tenemos que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

y aplicando lo mismo de nuevo a  $\varphi$  (es un homomorfismo con  $\varphi(r_2) = r_1$ ) tenemos que

$$p_{2*}(\pi_2(R_2, r_2)) \subseteq p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1))$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

□

**Teorema 1.4.** Sean  $(R_1, p_1)$ ,  $(R_2, p_2)$  dos recubridores de un e.t.  $B$ . Entonces existe un isomorfismo entre ambos recubridores si y solo si dado  $b_0 \in B$ ,  $r_1 \in R_1$  y  $r_2 \in R_2$  con  $p_1(r_1) = b_0 = p_2(r_2)$  tales que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

*Demostración.* Estamos en la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} R_1 & & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

Veamos la doble implicación

$\Rightarrow)$  Supongamos primero que existe  $\phi$  isomorfismo de recubridores de  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ . Tomamos  $b_0 \in B$  y elegimos  $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$  cualquiera (que existe porque  $p_1$  es sobreyectiva). Elegimos  $r_2 = \phi(r_1)$  y entonces como  $p_2 \circ \phi = p_1$  tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) &= (p_2 \circ \phi)_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \\ &= p_{2*}(\phi_*(\pi_1(R_1, r_1))) = p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2)) \end{aligned}$$

ya que como  $\phi$  es un homomorfismo tenemos que  $\phi_*(\pi_1(R_1, r_1)) = \pi_1(R_2, \phi(r_1))$ .

$\Leftarrow)$  Está probada aplicando el corolario anterior.

□

*Observación.* Algunas consecuencias que podemos extraer de lo anterior son las siguientes:

Sean  $B$  un e.t. y  $b_0 \in B$ . Si consideramos  $H$  un subgrupo de  $\pi_1(B, b_0)$  entonces

1. Existe como mucho un recubridor  $(R, p)$  (salvo isomorfismo) cumpliendo que  $\exists r \in R$  tal que  $p_*(\pi_1(R, r)) = H$ .

$$\begin{array}{ccc} R & & \pi_1(R, r) \\ p \downarrow & & p_* \downarrow \\ B & & H \leqslant \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

2. Además si  $H$  y  $H'$  son subgrupos conjugados en  $\pi_1(B, b_0)$ , como mucho existe un recubridor correspondiente a ambos, es decir, si  $(R, p)$  es un recubridor con  $r_0 \in R$  tal que  $p_*(\pi_1(R, r_0)) = H$ , entonces también existe un  $r'_0 \in R$  tal que  $p_*(\pi_1(R, r'_0)) = H'$ .

$$\begin{array}{ccc} R & \pi_1(R, r) & \pi_1(R, r') \\ p \downarrow & p_* \downarrow & p_* \downarrow \\ B & H \leqslant \pi_1(B, b_0) & H' \leqslant \pi_1(B, b_0) \end{array}$$

### Ejemplo.

1. Consideramos  $B = \mathbb{R}$  y buscamos los recubridores de  $\mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{[\varepsilon_0]\}$$

Por lo que solo hay un subgrupo  $H = \{[\varepsilon_0]\}$ , luego  $\mathbb{R}$  solo tiene un recubridor

$$(\mathbb{R}, p = Id_{\mathbb{R}})$$

2. En general, si  $B$  es simplemente conexo, entonces su único recubridor es él mismo (salvo isomorfismo de recubridores).

3. Consideramos ahora  $\mathbb{RP}^n$  el espacio proyectivo con  $n \geq 2$ . Tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2, \text{ con } x_0 \in \mathbb{RP}^n \text{ cualquiera}$$

Por tanto tendríamos que los únicos posibles subgrupos de  $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0)$  son

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[\varepsilon_{x_0}]\} \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{S}^n, p) \text{ con } p(x) = [x] \\ H_2 &\cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Recubridor asociado } (\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} R & r_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) & \\ \downarrow p & \downarrow & \downarrow & \downarrow Id & \downarrow Id & \downarrow Id_* & \\ \mathbb{RP}^n & x_0 & \{0\} & \mathbb{RP}^n & x_0 & \pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) & \end{array}$$

por lo que los únicos recubridores de  $\mathbb{RP}^2$  son  $(\mathbb{S}^n, p)$  con  $p(x) = [x]$  y  $(\mathbb{RP}^n, Id_{\mathbb{RP}^n})$ .

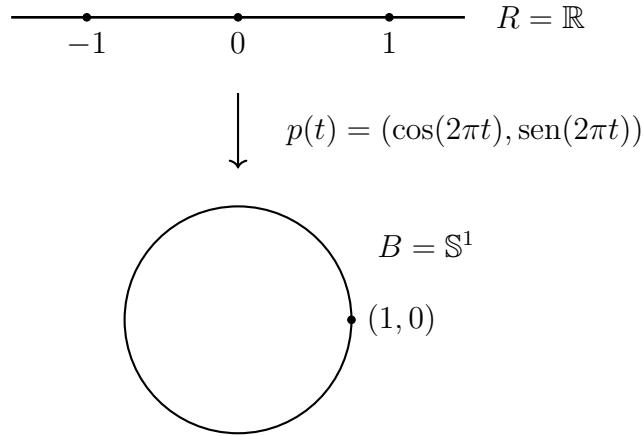
4. Consideramos  $B = \mathbb{S}^1$ . Recordemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = \{[\alpha]^n : \alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Los únicos subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

Recordamos el recubrimiento de  $\mathbb{S}^1$  que estudiamos en el tema anterior:



Para este recubridor  $(\mathbb{R}, p)$  donde  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ , su subgrupo asociado en  $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es  $H_0$ .

También podemos considerar el recubridor  $(\mathbb{S}^1, p_1 = Id_{\mathbb{S}^1})$  cuyo subgrupo asociado es  $H_1 = \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ .

Ahora nos planteamos de nuevo que  $\mathbb{S}^1$  es recubridor de sí mismo pero que hay más formas de recubrirse, es decir, podemos encontrar funciones recubridoras

$p_k$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$  de forma que todas recubran a la circunferencia pero “enrollandola más”, es decir, llevando cada vuelta de  $R = \mathbb{S}^1$  en  $k$  vueltas de  $B = \mathbb{S}^1$ . Definimos así la aplicación  $p_k$  para  $k \geq 2$  (el caso  $k = 1$  es la identidad que ya se ha estudiado) dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

Además tendríamos que

$$\begin{aligned} p_{k*} : \quad \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ [\alpha] &\longmapsto [\alpha]^k \end{aligned}$$

Llegando a que

$$p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))) = H_k = \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, los únicos recubridores de  $\mathbb{S}^1$  son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, p) \text{ con } p(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ (\mathbb{S}^1, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta)) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta)) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5. Vamos a estudiar ahora los recubridores del cilindro de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\alpha]^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

por lo que tenemos de nuevo que los únicos subgrupos de  $\mathbb{Z}$  son

$$\begin{aligned} H_k &\cong k\mathbb{Z} \text{ donde } H_k = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \\ H_0 &\cong \{0\} \end{aligned}$$

y además sabemos que  $(\mathbb{R}^2, p_0)$  es recubridor del cilindro con

$$\begin{aligned} p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{aligned}$$

asociado a  $H_0 = \{[\varepsilon_{(1,0,0)}]\}$ .

Buscamos ahora los recubridores cuyo subgrupo asociado es  $H_k$ . Con la misma idea que en el ejemplo anterior definimos la función  $p_k$  para  $k \in \mathbb{Z}^+$  dada por

$$\begin{aligned} p_k : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_{k*}([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ p_{k*}(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) &= \{[\alpha]^{kn} : n \in \mathbb{Z}\} = H_k \end{aligned}$$

Por tanto los únicos recubridores del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  son

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, p_0) \text{ con } p_0(x, y) &= (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k) \text{ con } p_k(\cos(\theta), \sin(\theta), y) &= (\cos(k\theta), \sin(k\theta), y) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

6. Veamos el caso del toro,  $B = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Sabemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

con generadores  $[\alpha]$  y  $[\beta]$ .

Consideramos el recubridor  $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$  con

$$\begin{aligned} p_0 \times p_0 : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

Como  $\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0)) = [\varepsilon_{(0,0)}]$  tenemos que

$$(p_0 \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, (0, 0))) = \{[\varepsilon_{(1,0,1,0)}]\}$$

por lo que  $(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0)$  es el recubridor asociado al subgrupo trivial de  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1, 0, 1, 0))$ .

Consideramos ahora el cilindro como recubridor y definimos la aplicación recubridora

$$\begin{aligned} p_k \times p_0 : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), y) &\longmapsto (\cos(k\theta), \sin(k\theta), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{aligned}$$

que para cada  $k \in \mathbb{Z}^+$  “enrolla” el cilindro  $k$  veces. En este caso tendríamos que

$$(p_k \times p_0)(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0)$$

y además tenemos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0)) = \{[\gamma]^n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ donde } \gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$$

Tenemos además que  $(p_k \times p_0)(\gamma(t)) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t), 1, 0)$  de donde se deduce que

$$(p_k \times p_0)_*([\gamma]) = [(p_k \times p_0)(\gamma)] = [\alpha]^k$$

Una vez hemos calculado la imagen del generador podemos concluir que

$$(p_k \times p_0)_*(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (1, 0, 0))) = \{[\alpha]^{nk} : n \in \mathbb{Z}\} \cong k\mathbb{Z} \times \{0\} \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Análogamente si consideramos

$$\begin{aligned} p_0 \times p_k : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, \cos(\theta), \sin(\theta)) &\longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(k\theta), \sin(k\theta)) \end{aligned}$$

tendríamos el siguiente recubridor

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Consideramos ahora el toro como recubridor de sí mismo y definimos

$$\begin{aligned} p_k \times p_l : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi)) &\longmapsto (\cos(k\theta), \operatorname{sen}(k\theta), \cos(l\varphi), \operatorname{sen}(l\varphi)) \end{aligned}$$

Si estudiamos la imagen de los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p_k \times p_l)_*([\alpha]) &= [\alpha]^k \\ (p_k \times p_l)_*([\beta]) &= [\beta]^k \end{aligned}$$

y llegamos a que  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l)$  es recubridor y está asociado al subgrupo  $k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z}$ . El grupo imagen sería

$$\{[\alpha]^{kn_1} * [\beta]^{ln_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

En este punto nos damos cuenta de que aún no hemos estudiado todos los subgrupos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Si consideramos 2 puntos de  $\mathbb{Z}$  podemos generar un subgrupo a partir de ellos, por ejemplo, para  $(1, 3), (2, 4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  podemos construir  $\{a(1, 3) + b(2, 4) : a, b \in \mathbb{Z}\}$  y es un subgrupo de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Esto también ocurre con un solo generador. Es decir, tenemos que los subgrupos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que nos queda por considerar son de la forma

$$\begin{aligned} \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \{n_1(a, b) + n_2(c, d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pensamos ahora entonces en la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} p' : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) &\longmapsto (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta + y), \operatorname{sen}(\theta + y)) \end{aligned}$$

y nos planteamos quién sería  $p'_*([\gamma])$ . Aplicamos  $p'$  en un generador y tenemos

$$p'(\gamma(t)) = p(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 0) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$$

Intuitivamente podemos llegar a ver que  $p'_*([\gamma]) = [\alpha] * [\beta]$ . Esto se ha hecho considerando de fondo el generador  $(1, 1)$ . Buscamos generalizar esta nueva aplicación recubridora para cualquier generador  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Se puede construir una aplicación  $p'_{(a,b)}$  para cada  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p'_{(a,b)} : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), y) &\longmapsto (\cos(a\theta), \operatorname{sen}(a\theta), \cos(b\theta + y), \operatorname{sen}(b\theta + y)) \end{aligned}$$

Aplicando  $p'_{(a,b)}$  en el generador tenemos

$$p'_{(a,b)}(\gamma(t)) = p'(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 0) = (\cos(2a\pi t), \operatorname{sen}(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \operatorname{sen}(2b\pi t))$$

y con mucha intuición se puede llegar a que

$$(p'_{(a,b)})_*([\gamma]) = [\alpha]^a * [\beta]^b$$

Por tanto tenemos que  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)})$  es recubridor del toro con subgrupo asociado  $\{n(a,b) : n \in \mathbb{Z}\}$  para cada generador que tomemos  $(a,b) \in \mathbb{Z}$ .

De hecho, si tomamos un par de generadores  $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  podemos definir la aplicación  $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dada por

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)) &= \\ &= (\cos(a\theta + c\varphi), \sin(a\theta + c\varphi), \cos(b\theta + d\varphi), \sin(b\theta + d\varphi)) \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando  $p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}$  en los generadores tenemos

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\alpha(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 1, 0) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(0), \sin(0)) = \\ &= (\cos(2a\pi t), \sin(2a\pi t), \cos(2b\pi t), \sin(2b\pi t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\beta(t)) &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(1, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})(\cos(0), \sin(0), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \\ &= (\cos(2c\pi t), \sin(2c\pi t), \cos(2d\pi t), \sin(2d\pi t)) \end{aligned}$$

Por lo que de nuevo usando mucho la intuición (habría que demostrarlo formalmente) llegamos a que

$$\begin{aligned} (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\alpha]) &= [\alpha]^a * [\beta]^b \\ (p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})_*([\beta]) &= [\alpha]^c * [\beta]^d \end{aligned}$$

y tenemos que  $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)})$  es recubridor del toro asociado al subgrupo  $\{n_1(a,b) + n_2(c,d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  para cada par de generadores  $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Resumiendo, tenemos que todos los recubridores del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  son

$$\begin{aligned} &(\mathbb{R}^2, p_0 \times p_0) \text{ asociado a } \{0\} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p_k \times p_0) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, p_0 \times p_k) \text{ asociado a } \{0\} \times k\mathbb{Z} \text{ para cada } k \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p_k \times p_l) \text{ asociado a } k\mathbb{Z} \times l\mathbb{Z} \text{ para cada } k, l \in \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)}) \text{ asociado a } \{n(a,b) : n \in \mathbb{Z}\} \text{ para cada } (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ &(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p'_{(a,b)} \times p'_{(c,d)}) \text{ asociado a } \{n_1(a,b) + n_2(c,d) : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &\quad \text{para cada } (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no tiene más subgrupos estos serán todos los recubridores del toro.

Hasta ahora lo que hemos visto es que para estudiar el número de recubridores de un espacio  $B$  podemos elegir un punto  $b_0 \in B$  y pasar a estudiar  $\pi_1(B, b_0)$  y estudiando sus subgrupos  $H > \pi_1(B, b_0)$  podíamos afirmar que como mucho había un

recubridor por cada uno de ellos (o sus conjugados). Por tanto cuanto más “grande” sea el grupo fundamental, más recubridores podremos encontrar a priori.

**Proposición 1.5.** Sea  $\phi$  un homomorfismo de recubridores desde  $(R_1, p_1)$  en  $(R_2, p_2)$ . Entonces  $\phi : R_1 \rightarrow R_2$  es una aplicación recubridora.

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

*Demuestra*ción. Sabemos que  $\phi$  es continua porque es homomorfismo. Veamos que  $\phi$  es sobreyectiva (no es elemental). Consideramos un elemento cualquiera  $r_2 \in R_2$  y queremos ver si existe un  $r_1 \in R_1$  tal que  $\phi(r_1) = r_2$ .

Tomamos  $r_0 \in R_1$  cualquiera y elegimos un arco  $\alpha$  en  $R_2$  que une  $\phi(r_0)$  con  $r_2$ , es decir

$$\alpha \in \Omega(R_2; \phi(r_0), r_2)$$

Si proyectamos tendremos que  $p_2 \circ \alpha$  es un arco en el espacio topológico base  $B$  que une  $p_2(\phi(r_0))$  con  $p_2(r_2)$ , es decir

$$(p_2 \circ \alpha) \in \Omega(B; p_2(\phi(r_0)), p_2(r_2))$$

Sabiendo que el diagrama de la proposición es commutativo tenemos que  $p_2(\phi(r_0)) = p_1(r_0)$ . Como  $p_1$  es aplicación recubridora, entonces tenemos que existe un único levantamiento  $\widehat{p_2 \circ \alpha}$  que comienza en  $r_0$ . Entonces tenemos que  $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$  es un arco en  $R_2$  que comienza en  $\phi(r_0)$ . Es decir,  $\alpha$  y  $\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$  son dos arcos que empiezan en  $\phi(r_0)$  y además

$$p_2 \circ (\phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}) = p_1 \circ (\widehat{p_2 \circ \alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} p_2 \circ \alpha$$

Por unicidad del levantamiento de  $p_2$  tenemos que  $\alpha = \phi \circ \widehat{p_2 \circ \alpha}$  por lo que tenemos que

$$r_2 = \alpha(1) = \phi(\widehat{p_2 \circ \alpha}(1))$$

Nos queda demostrar que todo punto de  $R_2$  está regularmente recubierto.

Sea  $r_2 \in R_2$  fijado. Sabemos que  $p_2(r_2) \in B$  y podemos elegir  $U$  abierto arcoconexo en  $B$  que contiene a  $p_2(r_2)$  y que está regularmente recubierto por  $p_1$  y por  $p_2$ . Por la definición de regularmente recubierto tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{1|A_i} : A_i \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} B_j, \quad B_j \text{ abiertos disjuntos} \\ p_{2|B_j} : B_j \rightarrow U \text{ homeomorfismo} \end{array} \right.$$

Observamos que

$$\phi^{-1} \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \phi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = (p_2 \circ \phi)^{-1}(U) = p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Alijamos un  $A_{i_0}$  y veamos que  $\phi(A_{i_0})$  está completamente contenida en algún  $B_{j_0}$ . Para ello, sabemos que  $\phi(A_{i_0})$  es conexo y además

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$$

Tenemos entonces que

$$\phi(A_{i_0}) = \phi(A_{i_0}) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} (\phi(A_{i_0}) \cap B_j)$$

Como puedo escribir  $\phi(A_{i_0})$  como unión de abiertos y  $\phi(A_{i_0})$  es conexo tenemos que  $\exists j_0 \in J$  tal que

$$\phi(A_{i_0}) \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \in J \setminus \{j_0\}$$

y podemos escribir

$$\phi(A_{i_0}) \subseteq B_{j_0}$$

Así, si tomamos  $B_{j_0}$  como el abierto que contiene a  $r_2$ , entonces

$$\phi^{-1}(B_{j_0}) = \bigcup_{i \in I'} A_i$$

con  $I' \subseteq I$ . Además,

$$\begin{array}{ccc} \phi|_{A_i} : & A_i & \xrightarrow{\hspace{2cm}} B_{j_0} \\ & \searrow \text{homeom.} \equiv p_{1|A_i} & \swarrow \text{homeom.} \equiv p_{2|B_{j_0}} \\ & U & \end{array}$$

por ser composición de dos homeomorfismos □

**Corolario 1.5.1.** Sean  $(R_1, p_1), (R_2, p_2)$  dos recubridores de un espacio topológico  $B$ ,  $b_0 \in B$ ,  $r_1 \in p_1^{-1}(b_0)$  u  $r_2 \in p_2^{-1}(b_0)$ . Si se verifica que

$$p_{1*}(\pi_1(R_1, r_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(R_2, r_2))$$

entonces existe una aplicación recubridora de  $R_1$  en  $R_2$  que lleva el punto  $r_1$  en el punto  $r_2$ .

**Definición 1.2.** Decimos que  $(R, p)$  es un **recubridor universal** de un espacio topológico  $B$  si  $(R, p)$  es un recubridor con  $R$  simplemente conexo.

*Observación.* Dos recubridores universales tienen que ser necesariamente isomorfos. Es decir, son salvo un homeomorfismo, el mismo. Esto se debe a que por ser  $R$  simplemente conexo ambos tiene grupo fundamental trivial por lo que si hubiera dos tendrían que estar asociados al mismo subgrupo  $H$  y sabemos que como mucho hay uno salvo isomorfismo. Por eso se suele decir **el** recubridor universal y no **un** recubridor universal.

*Observación.* El adjetivo “universal” se debe a que si  $(R_2, p_2)$  también recubre al espacio topológico base  $B$ , entonces el recubridor universal también recubre a  $R_2$ .

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} & R_2 \\ & \searrow p & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

**Ejemplo.**

1.  $\mathbb{S}^1$  es el recubridor universal de  $\mathbb{R}$ .
2.  $\mathbb{RP}^n$  es el recubridor universal de  $\mathbb{S}^n$  para  $n \geq 2$
3.  $\mathbb{R}^2$  es el recubridor universal del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ .
4.  $\mathbb{R}^2$  también es el recubridor universal del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

### 1.3. Existencia de espacios recubridores

**Definición 1.3.** Sea  $B$  un espacio topológico entonces

1. Decimos que  $B$  es **localmente simplemente conexo** si todo punto  $b \in B$  admite una base de entornos formada por simplemente conexos. O equivalentemente, si para cada abierto  $O$  en  $B$  y punto  $b \in O$  existe un entorno  $U$  de  $b$  simplemente conexo con  $U \subseteq O$ .
2. Decimos que  $B$  es **semilocalmente simplemente conexo** si todo punto  $b \in B$  tiene un entorno  $U$  tal que

$$(i_u)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$$

es trivial, donde  $i_u : U \rightarrow B$  es la inclusión.

*Observación.*

1. Si  $B$  es localmente simplemente conexo, entonces también es semilocalmente simplemente conexo.
2. Si  $B$  es simplemente conexo entonces es semilocalmente simplemente conexo
3. Si  $U$  es un entorno de  $b \in B$  tal que  $(i_U)_* : \pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$  es trivial, entonces también es cierto que si  $V$  es entorno de  $b$  con  $V \subseteq U$  se tiene que  $(i_V)_* : \pi_1(V, v) \rightarrow \pi_1(B, b)$  es trivial.

**Ejemplo.**

1. Si  $B$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $B$  es localmente simplemente conexo.
2.  $\mathbb{S}^1$  es locamente simplemente conexo ya que para cada punto  $x \in \mathbb{S}^1$  existe una base de entornos formada por simplemente conexos.
3. Consideramos  $S_n$  la circunferencia de  $\mathbb{R}^2$  centrada en  $(\frac{1}{n}, 0)$  y de radio  $\frac{1}{n}$ . Consideramos el siguiente espacio

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

El espacio topológico  $B$  no es semilocalmente simplemente conexo.

4. Tomamos el conjunto de  $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} z = \lambda, \lambda \geq 0 \\ (x, y) = \lambda(a, b), \text{ con } (a, b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \end{array} \right\}$$

Donde  $S_n$  es una de las circunferencias del ejemplo anterior. Esto si se analiza gráficamente es fácil ver que son un montón de conos unidos con el origen y tangentes a la recta  $R = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$  y que intersecan con el plano de altura 1 formando circunferencias tangentes al  $(0, 0, 1)$  de la forma  $S_n$ .

Tenemos que  $B$  es simplemente conexo por ser contráctil pero no es localmente simplemente conexo.

**Teorema 1.6.** Sea  $B$  un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo y fijamos un punto  $b_0 \in B$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para cada clase de conjugación de un subgrupo  $H \leq \pi_1(B, b_0)$  existe un único recubridor  $(R, p)$  (salvo isomorfismo), y un punto  $r_0 \in R$  tal que  $p(r_0) = b_0$  y  $H = p_*(\pi_1(R, r_0))$ .
2.  $B$  tiene un recubridor universal.
3.  $B$  es semilocalmente simplemente conexo.