



Universidad de Granada

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA II

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

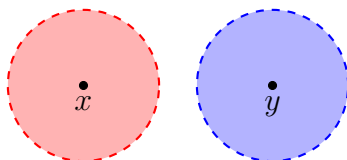
1. Superficies compactas	5
1.1. Superfies topológicas	5
1.2. Presentaciones poligonales de superficies	10
1.2.1. Transformaciones elementales	12
1.3. La clasificación de las superficies compactas	19
1.3.1. Determinación de $ \mathcal{P} $	19

1. Superficies compactas

1.1. Superfies topológicas

En primer lugar recordaremos algunos conceptos de Topología I para poder definir los nuevos conceptos de esta sección.

Definición 1.1. Diremos que un espacio topológico X es T2 (o de **Haussdorff**, o que satisface el **segundo axioma de separación**) si $\forall x, y \in X$ existe un abierto U que contenga a x y un abierto V que contenga a y tal que $U \cap V = \emptyset$.



Definición 1.2. Decimos que un espacio topológico X es 2AN (o que cumple el **segundo axioma de numerabilidad**) si existe una base de la topología numerable.

Una vez recordados estos conceptos pasamos a las nuevas definiciones de esta sección:

Definición 1.3. Decimos que un espacio topológico X es **localmente euclídeo** si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto suyo que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.4. Decimos que S es una **superficie** si S es un espacio topológico tal que $\forall x \in S$ existe un abierto que contiene a x y que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Además, pediremos que S sea T2 (o Hausdorff) y 2AN (segundo axioma de numerabilidad).

Ejemplo.

1. \mathbb{R}^2 y \mathbb{S}^2 son superficies.

Demostración. En el caso de \mathbb{R}^2 es trivial ya que para cualquier punto $x \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar el total, \mathbb{R}^2 que es abierto, contiene a x y es homeomorfo a sí mismo.

En el caso de \mathbb{S}^2 podemos considerar para cada $x \in \mathbb{S}^2$ el conjunto $A = \mathbb{S}^2 \setminus \{-x\}$, es decir, la esfera quitándole la antípoda. Sabemos que A es abierto (ya que su complementario es $\{-x\}$ que es cerrado) y que contiene a x (ya que $0 \notin \mathbb{S}^2$). Además sabemos que A es homeomorfo a \mathbb{R}^2 que es un abierto de \mathbb{R}^2 (el total). \square

2. Cualquier abierto de una superficie es también una superficie. En particular, las bolas abiertas de \mathbb{R}^2 son también superficies.

Demostración. Consideramos A el abierto de la superficie S y un punto cualquiera $x \in A$. Por ser S una superficie existe un abierto U que contiene a x y que es homeomorfo (por h) a un abierto de \mathbb{R}^2 . Consideramos entonces $A \cap U$ que es abierto por ser intersección de dos abiertos y que además contiene a x . Podemos considerar la restricción en el dominio del homeomorfismo h a $A \cap U$ que seguirá siendo un homeomorfismo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Como esto se verifica para todo $x \in A$ tendremos que A es una superficie. \square

3. Sea $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\} = \overline{B}(0, r)$. Entonces X no es una superficie porque para los puntos x con $\|x\| = r$ no existe un entorno abierto que lo contenga y que sea homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 .

Demostración. Tomamos un punto $x \in X$ con $\|x\| = r$. Si existiese U entorno abierto cuyo homeomorfo a un abierto A de \mathbb{R}^2 entonces $\exists V$ entorno abierto de x contenido en U que es de la forma $V = B(x, r_0) \cap X$. Entonces V es homeomorfo a un abierto A' de \mathbb{R}^2 (ya que sería una restricción en el dominio del homeomorfismo entre $h : U \rightarrow A$). De esta forma tendríamos que como $V \setminus \{x\}$ es convexo debe ser simplemente conexo. Sin embargo, su imagen por homeomorfismo h será $A' \setminus \{h(x)\}$ y como $h(x)$ está en el abierto A' existe un radio $r'_0 > 0$ tal que $\overline{B}(h(x), r'_0) \subseteq A'$. Pero el lazo dado por la frontera de dicha bola, $Fr(\overline{B}(h(x), r'_0))$ no es homotópicamente constante en $\mathbb{R}^2 \setminus \{h(x)\}$. Por tanto este lazo no es homotópicamente constante en $A' \setminus \{h(x)\}$ por lo que $A' \setminus \{h(x)\}$ no es simplemente conexo. Esto prueba que $\overline{B}(0, r)$ no es una superficie. \square

4. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ son ejemplos de superficies. Esto se debe a que su recubridor universal es \mathbb{R}^2 luego sus aplicaciones recubridoras nos dan homeomorfismos locales desde abiertos de \mathbb{R}^2 en abiertos regularmente recubiertos de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Observación. Si X es un espacio topológico localmente euclídeo entonces cumple las propiedades locales de \mathbb{R}^n . Por ejemplo, tiene una base de entornos numerable (es 1AN) y es localmente simplemente conexo. En particular, X ha de tener recubridor universal.

Definición 1.5. Sea S una superficie¹ y D un abierto dentro de S . Decimos que D es un **disco regular** en S si existe un abierto D' tal que $D \subsetneq D'$ y un homeomorfismo $h : D' \rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} = B((0, 0), 1)$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < r\} = B((0, 0), r)$ con $0 < r < 1$.

Ejemplo.

¹siempre se entiende que es una superficie topológica

1. Consideramos en \mathbb{S}^2 :

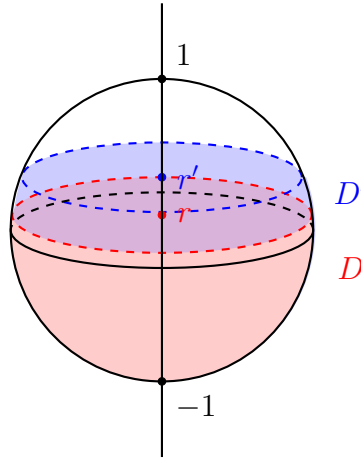
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < r\} \text{ con } -1 < r < 1$$

En efecto es un disco regular.

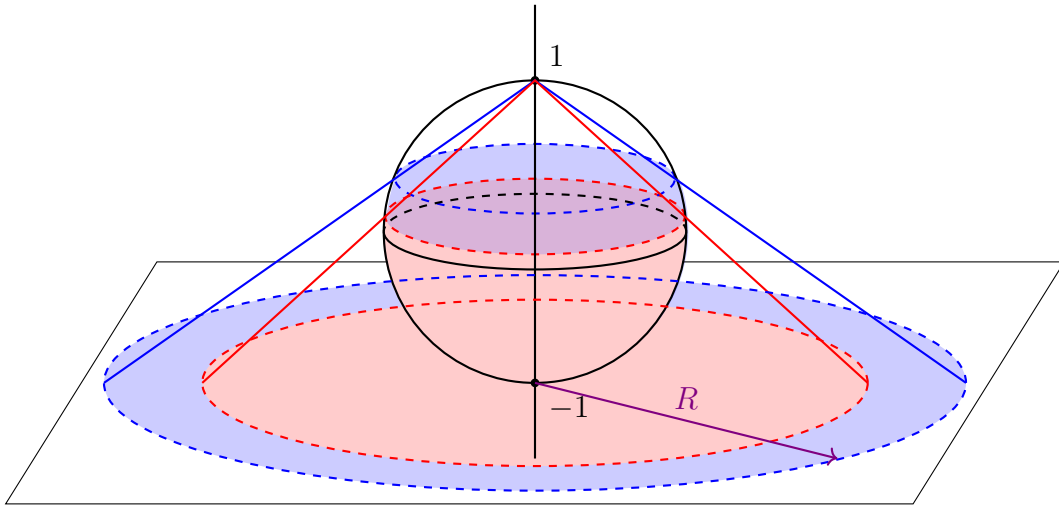
Demostración. Como $-1 < r < 1$ tenemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $r + \varepsilon < 1$. Podemos fijar dicho ε y consideramos el siguiente conjunto

$$D' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < r + \varepsilon = r'\} \text{ con } -1 < r' < 1$$

En efecto tendremos que para cualquier punto $(x, y, z) \in D$ se tiene que $z < r < r'$ luego $(x, y, z) \in D'$. Además podemos considerar un punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ tal que $z = r$ y tendremos que dicho punto está en $D' \setminus D$. Podemos concluir que $D \subsetneq D'$.



Buscamos ahora un homeomorfismo $h : D' \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $h(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$. Pensamos en la proyección estereográfica desde el polo norte, $h : D' \rightarrow \mathbb{R}^2$. Gráficamente lo podemos ver de la siguiente forma:



□

y llegamos a que existe un radio $R > 0$ tal que podemos definir una nueva aplicación

$$\begin{aligned} h' : D' &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{1}{R}h(x, y, z) \end{aligned}$$

que será un homeomorfismo (por serlo h). Además, es fácil ver que $h'(D) = \mathbb{D}_s$ con $0 < s < 1$.

2. Consideramos la esfera sin el polo norte $D = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ en \mathbb{S}^2 . En este caso tendremos que no es un disco regular ya que el único abierto D' que contiene estrictamente a D es el total $D' = \mathbb{S}^2$ que sabemos que no es homeomorfo a ningún subconjunto de \mathbb{R}^2 .
3. $\mathbb{D}_r = B((0, 0), r) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un disco regular en \mathbb{R}^2 para todo $r \in \mathbb{R}^+$. Sin embargo, \mathbb{D}_r no es regular en $S = \mathbb{D}_r$.
4. En \mathbb{R}^2 consideramos el siguiente conjunto

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

Entonces D no puede ser un disco regular.

Demostración. Si existiese un D' que contiene a D y contenido en \mathbb{R}^2 con $h : D' \rightarrow \mathbb{D}$ homeomorfismo tal que $h(D) = \mathbb{D}_r$ podemos tomar su restricción $h|_{D' \setminus D} : D' \setminus D \rightarrow \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r$ que seguirá siendo un homeomorfismo. Tenemos además que $D \subsetneq D' \subseteq \mathbb{R}^2$ luego $D' \setminus D \subseteq \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Entonces tendremos que $(D' \setminus D) \setminus \{(x, 0)\}$ no es convexo pero $h((D' \setminus D) \setminus \{(x, 0)\}) = (\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_r) \setminus \{(h(x, 0))\}$ es conexo por lo que no pueden ser homeomorfos y llegamos a contradicción. \square

Lema 1.1. Sea p_0 un punto de una superficie S . Dado un entorno U de p_0 existe D disco regular que contiene a p_0 y está contenido en U . En particular, los discos regulares forman una base de la topología.

Demostración. Como S es una superficie, entonces para p_0 existe un abierto V que contiene a p_0 y un homeomorfismo

$$\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^2$$

sobre $\varphi(V)$ que ha de ser abierto de \mathbb{R}^2 . Ya que $\varphi(U \cap V)$ es un entorno de $\varphi(p_0)$ en \mathbb{R}^2 tenemos que existe un $R_0 > 0$ tal que

$$B(\varphi(p_0), R_0) \subseteq \varphi(U \cap V)$$

Tomamos

$$\begin{aligned} D &= \varphi^{-1} \left(B \left(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2} \right) \right) \\ D' &= \varphi^{-1}(B(\varphi(p_0), R_0)) \end{aligned}$$

Componiendo φ con una transformación afín podemos llevar las bolas $B(\varphi(p_0), \frac{R_0}{2})$ y $B(\varphi(p_0), R_0)$ a $\mathbb{D}_{1/2}$ y \mathbb{D} respectivamente. \square

Definición 1.6. Sean S_1 y S_2 dos superficies conexas y disjuntas. Tomamos $D_1 \subseteq S_1$ y $D_2 \subseteq S_2$ discos regulares y consideramos un homeomorfismo $h : Fr(D_1) \rightarrow Fr(D_2)$. Sobre el espacio topológico $X = (S_1 \setminus D_1) \cup (S_2 \setminus D_2)$ consideramos la relación de equivalencia R dada por

$$x_1 R x_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \vee \\ \{x_1, x_2\} = \{z, h(z)\} \text{ con } z \in Fr(D_1) \end{cases}$$

Denotamos por $S_1 \# S_2$ al espacio topológico cociente de X bajo la relación de equivalencia R y lo llamaremos **suma conexa** de S_1 con S_2 .

Teorema 1.2. El espacio topológico $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa que, salvo homeomorfismo, no depende de los discos D_1 y D_2 regulares ni del homeomorfismo h entre sus fronteras.

Observación.

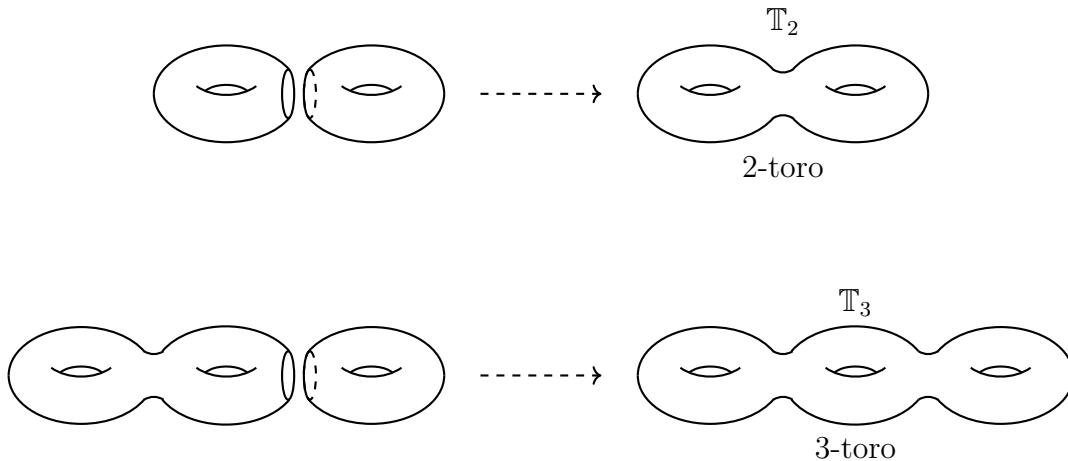
1. $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.
2. Si S_1 es una superficie cualquiera y S_2 es la esfera \mathbb{S}^2 , entonces

$$S_1 \# S_2 = S_1 \# \mathbb{S}^2 \cong S_1$$

3. Si tenemos n toros ($n \geq 2$) podemos definir

$$\mathbb{T}_n \equiv \text{suma conexa de los } n \text{ toros}$$

que recibe el nombre de **n -toro** o **esfera con n asas**.



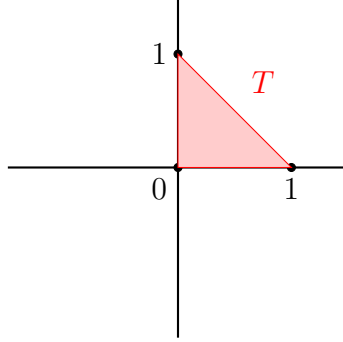
4. La suma conexa de n planos proyectivos la llamaremos² **n plano proyectivo**, \mathbb{RP}_n^2 .

²no confundir con \mathbb{RP}^n

1.2. Presentaciones poligonales de superficies

Definición 1.7. Consideramos el triángulo

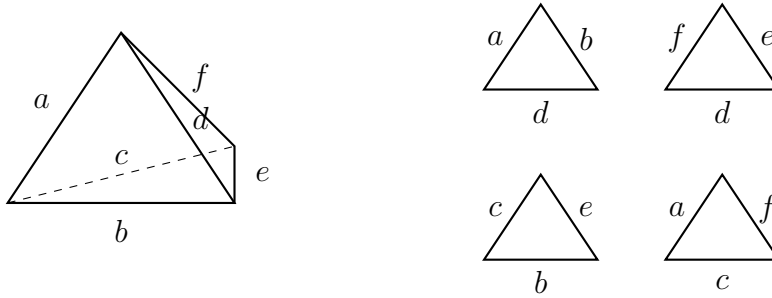
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$



Decimos que un espacio topológico X es un **triángulo** (topológico) si existe un homeomorfismo $h : T \rightarrow X$. En tal caso, llamaremos **vértices** de X a la imagen mediante h de los vértices de T y **aristas** de X a la imagen mediante h de las aristas de T .

Teorema 1.3 (Teorema de Radó). Toda superficie compacta puede ser triangulada, es decir, la superficie puede verse como una unión finita triángulos (topológicos) de forma que dos triángulos distintos o bien son disjuntos o bien solo se intersectan en un vértice o solo en una arista.

Observación. La idea de este teorema será que toda superficie compacta puede ser reconstruida pegando un número finito de triángulos a través de sus aristas.



Definición 1.8. Llamaremos presentación poligonal de una superficie compacta a una expresión de la forma

$$\mathcal{P} = \{a_1, \dots, a_n; w_1, \dots, w_m\} \text{ con } n, m \in \mathbb{N}$$

donde los a_i son símbolos y los w_j son expresiones del tipo

$$w_i = a_{i1}^{\varepsilon_{i1}} \dots a_{ik}^{\varepsilon_{ik}}$$

donde $k \geq 3$ (es decir, hay al menos 3 símbolos en la expresión w_i) y cada $\varepsilon_{il} \in \{1, -1\}$ para cada $l \in \{1, \dots, k\}$. Y además, el número de veces que aparece cada símbolo en el total de los w_i es 2.

Ejemplo.

1. $\mathcal{P} = \{a, b; aba^{-1}b^{-1}\}$.
2. $\mathcal{P} = \{a, b, c; aab, bcc^{-1}\}$.
3. $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; aab, bcd, cdd^{-1}\}$ no es una presentación ya que la d aparece 3 veces.

Definición 1.9. A cada presentación poligonal \mathcal{P} le asociaremos un espacio topológico que denotaremos por $|\mathcal{P}|$ y que llamaremos la **realización geométrica de la presentación poligonal**. Su construcción es la siguiente

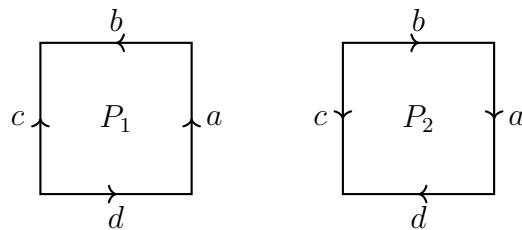
1. Para cada w_i consideramos un polígono P_i (regular) con número de lados igual al número de símbolos de w_i . Los P_i serán disjuntos entre sí.
2. Para cada P_i asociado a un w_i elegimos un lado cualquiera y en sentido contrario de las agujas del reloj, nombramos cada lado de P_i con el nombre del símbolo. Además a cada lado le daremos la orientación contraria a las agujas del reloj si el exponente es 1 y la orientación contraria si el exponente es -1 .
3. En el espacio topológico dado por la unión de todos los polígonos P_i consideramos la relación de equivalencia que identifica los lados con igual nombre mediante el único homeomorfismo (aplicación que lleva un lado en otro sin cambiar el sentido de las flechas).
4. Llamamos $|\mathcal{P}|$ al espacio cociente dado por la unión de los polígonos bajo la relación de equivalencia anterior.

Ejemplo. $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abc^{-1}d, a^{-1}b^{-1}cd^{-1}\}$

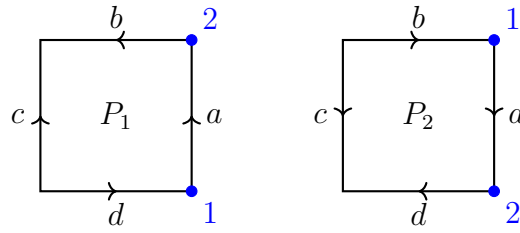
1.



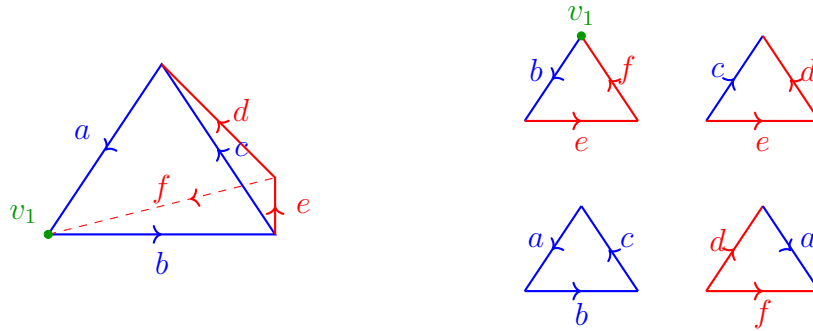
2.



3.



Ejemplo.



Tendríamos entonces $\mathcal{P} = \{a, b, c, d; abc, c^{-1}ed, a^{-1}d^{-1}f, bef\}$.

Proposición 1.4. El espacio topológico $|\mathcal{P}|$ asociado a una presentación poligonal \mathcal{P} es una superficie compacta (posiblemente no conexa).

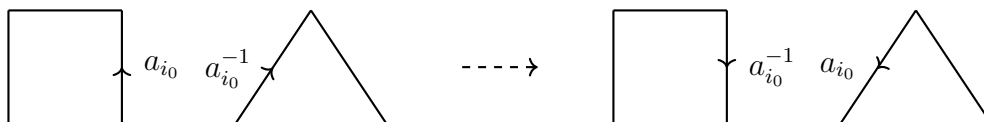
Observación. Toda superficie compacta debe tener una presentación poligonal y recíprocamente, toda presentación poligonal nos da una superficie compacta. Como una misma superficie puede tener muchas (de hecho infinitas) presentaciones poligonales, nuestro objetivo será dada una presentación poligonal \mathcal{P} llegar a otra presentación poligonal \mathcal{P}' reconocible que represente a la misma superficie

1.2.1. Transformaciones elementales

Dada una presentación poligonal \mathcal{P} vamos a ver una serie de transformaciones que, aunque cambian la presentación, no cambia la superficie asociada $|\mathcal{P}|$ (salvo homeomorfismo).

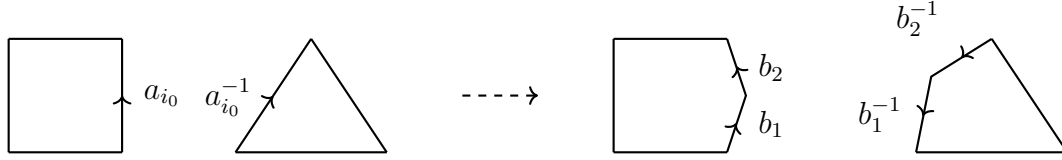
Renombrar

Dado un símbolo a_{i_0} en \mathcal{P} podemos cambiar su nombre por otro distinto b_{i_0} que no esté siendo usado. También podemos cambiar el exponente de un símbolo las dos veces que aparezca este, es decir, cambiaríamos a_i por a_i^{-1} (en ambos lados a la vez).



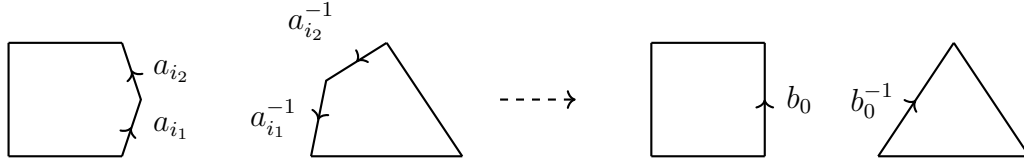
Subdividir

Podemos cambiar un símbolo a_{i_0} en \mathcal{P} por dos símbolos $b_1 b_2$ y $a_{i_0}^{-1}$ por $b_2^{-1} b_1^{-1}$, donde los símbolos b_1 y b_2 no están siendo usados.



Consolidar

Es el proceso contrario a subdividir. Si en las expresiones aparecen $a_{i_1} a_{i_2}$ y/o $a_{i_2}^{-1} a_{i_1}^{-1}$ dos veces (una de cada o dos de la misma), entonces podemos cambiar $a_{i_1} a_{i_2}$ por b_0 y $a_{i_2}^{-1} a_{i_1}^{-1}$ por b_0^{-1} (donde b_0 es un símbolo nuevo). Esto siempre se podrá hacer de forma que ninguna expresión se quede con menos de 3 símbolos.



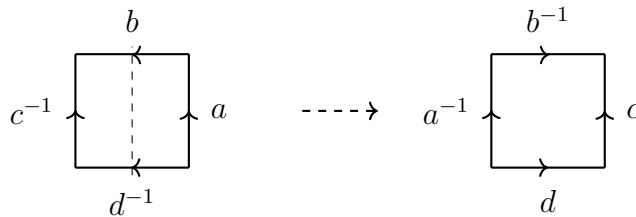
Reflejar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

la podemos cambiar por

$$w'_i = a_{i_l}^{-\varepsilon_l} \dots a_{i_2}^{-\varepsilon_2} a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$$



Rotar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

la podemos cambiar por

$$w'_i = a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l} a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$$



Cortar

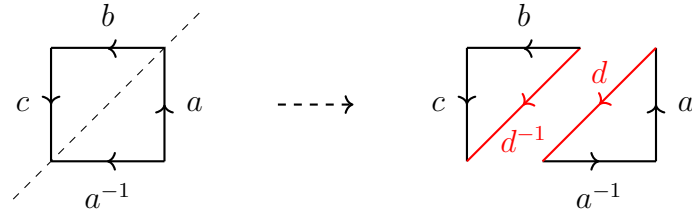
Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

podemos sustituirla por las dos expresiones

$$w'_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} b, \quad w''_i = b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

Esto se podrá hacer siempre que w'_i y w''_i se queden con al menos de 3 símbolos.



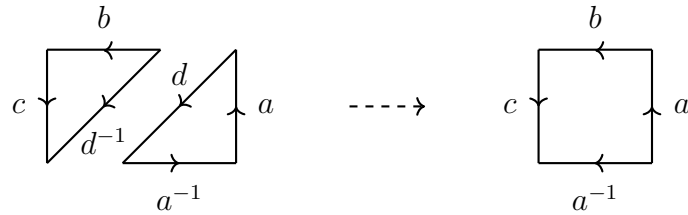
Pegar

Es la operación opuesta a cortar. Dadas dos expresiones de la forma

$$w'_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_0}, \quad w''_i = a_{i_0}^{-1} a_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{j_l}^{\varepsilon_l}$$

las podemos sustituir por una única

$$w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{j_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{j_l}^{\varepsilon_l}$$



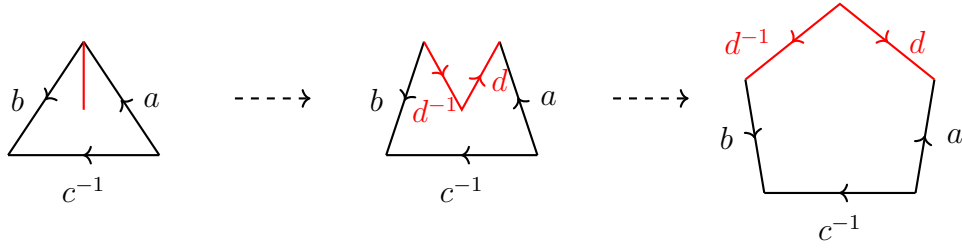
Desdoblar

Dada una expresión

$$w_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$

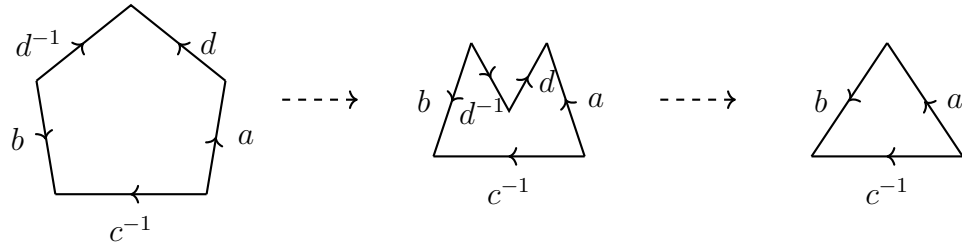
le podemos añadir un símbolo nuevo b cambiando la expresión anterior por

$$w'_i = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} b b^{-1} a_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$$



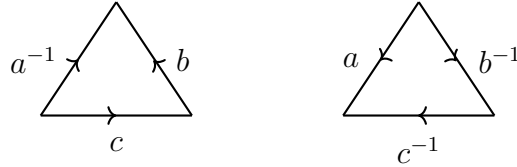
Doblar

Es el proceso contrario a desdoblar. Si una expresión w tiene de forma consecutiva un símbolo y el mismo con exponente cambiado podemos quitar dicho símbolo de la expresión. Esto se podrá hacer siempre que al quitarle estos símbolos queden al menos 3.

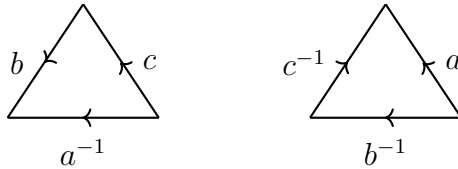


Ejemplo.

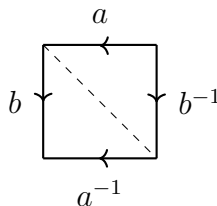
- Consideramos la presentación $\mathcal{P} = \{a, b, c ; a^{-1}cb, ac^{-1}b^{-1}\}$. Veamos qué superficie $|\mathcal{P}|$ tiene asociada. De la presentación podemos obtener los triángulos $w_1 = a^{-1}cb$ y $w_2 = ac^{-1}b^{-1}$.



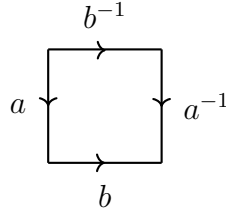
Podemos ahora rotar w_1 y w_2 obteniendo $w'_1 = ba^{-1}c$ y $w'_2 = c^{-1}b^{-1}a$.



Estamos ahora en condiciones de pegar ambos triángulos a través de c obteniendo $w_0 = ba^{-1}b^{-1}a$.



Con una última rotación obtenemos $w'_0 = aba^{-1}b^{-1}$ que es fácil ver que se corresponde a un toro.

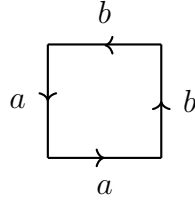


Podemos resumir todo el proceso como

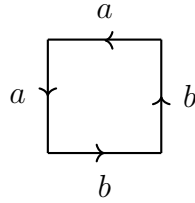
$$a^{-1}cb, ac^{-1}b^{-1} \sim ba^{-1}c, c^{-1}b^{-1}a \sim ba^{-1}b^{-1}a \sim aba^{-1}b^{-1}$$

Obtenemos entonces $|\mathcal{P}| \equiv \mathbb{T}$.

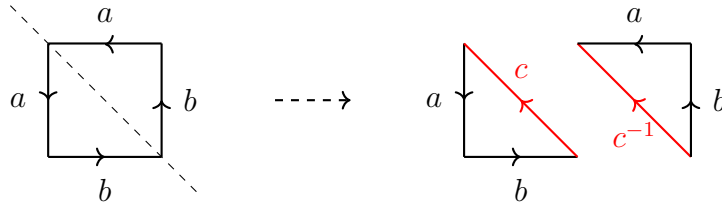
2. $\mathcal{P} = \{a, b; aabb\}$. Partimos por tanto de $w_0 = aabb$.



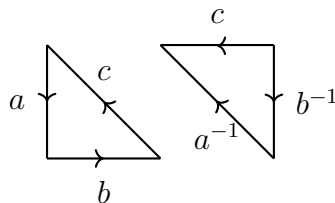
Le aplicamos una rotación para obtener $w'_0 = abba$.



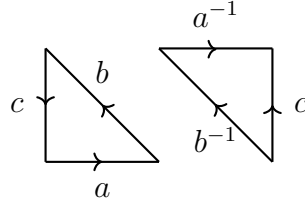
Podemos ahora cortar obteniendo $w_1 = abc$ y $w_2 = c^{-1}ba$.



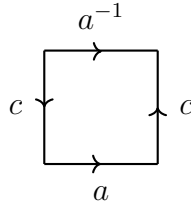
Aplicamos ahora una simetría a w_2 obteniendo $w'_2 = a^{-1}b^{-1}c$



Rotamos ambos polígonos para obtener $w'_1 = cab$ y $w''_2 = b^{-1}ca^{-1}$



Finalmente podemos pegar ambos triángulos por b obteniendo $w''_0 = caca^{-1}$

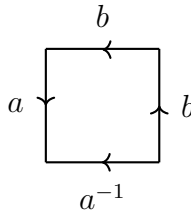


Podemos resumir todo el proceso como

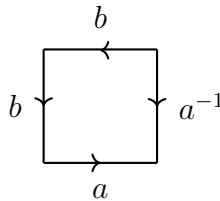
$$aabb \sim abba \sim abc, \quad c^{-1}ba \sim abc, \quad a^{-1}b^{-1}c \sim cab, \quad b^{-1}ca^{-1} \sim caca^{-1}$$

La expresión final es $caca^{-1}$ que intuitivamente corresponde a la botella de Klein. Para ver esto tenemos que pensar en identificar inicialmente el lado a con a^{-1} lo que crearía un cilindro. Si ahora identificáramos los extremos de forma directa tendríamos un toro (que es el ejemplo anterior) pero tenemos que se unen de manera inversa. Esto haría que .^atravesarse a sí mismo al unirse con el otro extremo llegaríamos a la botella de Klein.

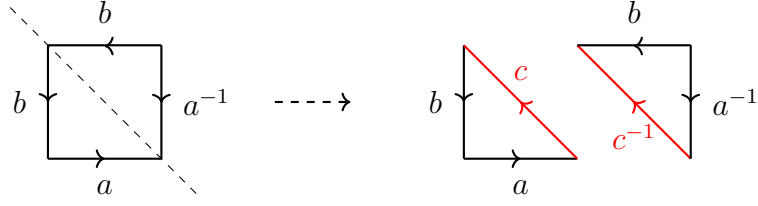
3. $\mathcal{P} = \{a, b ; aa^{-1}bb\}$. Partimos de $w_0 = aa^{-1}bb$.



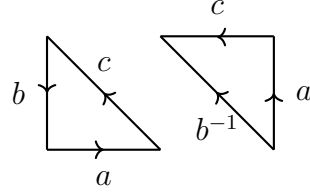
Podemos ahora aplicar una rotación obteniendo $w'_0 = baa^{-1}b$.



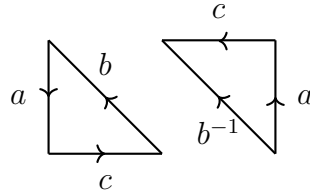
Cortamos obteniendo $w_1 = bac$ y $w_2 = c^{-1}a^{-1}b$.



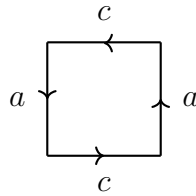
Aplicamos una simetría a w_2 obteniendo $w'_2 = b^{-1}ac$



Rotamos ahora w_1 triángulos obteniendo $w'_1 = acb$



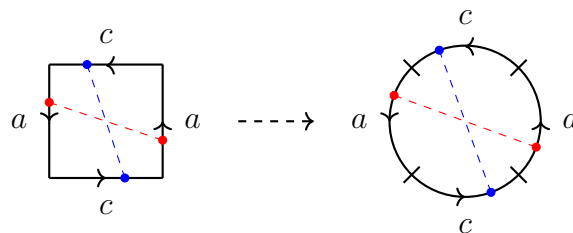
Unimos finalmente a través de b obteniendo $w''_0 = acac$.



Podemos resumir el proceso como

$$aa^{-1}bb \sim baa^{-1}b \sim bac, \quad c^{-1}a^{-1}b \sim bac, \quad b^{-1}ac \sim acb, \quad b^{-1}ac \sim acac$$

Tenemos que $|\mathcal{P}|$ es el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 . Para verlo podemos ver la última figura como una circunferencia donde se identifica cada punto del borde con su antípoda.



1.3. La clasificación de las superficies compactas

Proposición 1.5. Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas dadas respectivamente como $|\mathcal{P}_1|$ y $|\mathcal{P}_2|$ para las presentaciones

$$\mathcal{P}_1 = \{a_1, \dots, a_n; w_1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \{b_1, \dots, b_k; w_2\}$$

donde cada presentación tiene una única expresión³. Entonces $S_1 \# S_2$ tiene como presentación

$$\mathcal{P} = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k; w_1 w_2\}$$

Corolario 1.5.1. Una presentación de

1. la esfera es $aa^{-1}bb^{-1}$.
2. el plano proyectivo es $aa^{-1}bb$.
3. el n -toro o esfera de n asas \mathbb{T}_n es $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.
4. el n -plano proyectivo \mathbb{RP}_n^2 es $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$

Demostración. Los casos 1., 2. y 3. son claros (en el caso 3. se puede ver fácilmente usando la proposición anterior). Estudiemos el caso que nos queda. Sabemos que

$$\mathbb{RP}_n^2 = \mathbb{RP}^2 \#^{(n)} \mathbb{RP}^2$$

Usamos que \mathbb{RP}^2 tiene por presentación $bcbc$. Por la proposición anterior tenemos que una presentación de \mathbb{RP}_n^2 es

$$b_1 c_1 b_1 c_1 b_2 c_2 b_2 c_2 \dots b_n c_n b_n c_n$$

Podemos consolidar y llamar $a_i = b_i c_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y tendríamos

$$b_1 c_1 b_1 c_1 b_2 c_2 b_2 c_2 \dots b_n c_n b_n c_n \sim a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

□

Observación. Del ejemplo anterior y del corolario se deduce que

$$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}_2^2 \equiv \text{Botella de Klein}$$

1.3.1. Determinación de $|\mathcal{P}|$

Nuestro objetivo ahora es llegar a que si tenemos una superficie compacta y conexa S , entonces tenemos que

$$S \stackrel{\text{homeo.}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{S}^2 & : aa^{-1}bb^{-1} \\ \mathbb{T}_n & : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \\ \mathbb{RP}_n^2 & : a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n \end{cases}$$

Vamos a partir de una presentación poligonal \mathcal{P} y vamos a ver un algoritmo que nos dirá que la superficie compacta $|\mathcal{P}|$ en caso de ser conexa será homeomorfa a alguna de las anteriores.

³esto implica que ambas son conexas

Algoritmo de determinación de $|\mathcal{P}|$

1. El primer paso del algoritmo es diferenciar las componentes conexas de la siguiente forma. Tomamos la primera expresión w_1 y a esta le pegamos cualquier otra expresión w_i que tenga un símbolo común. Entonces me queda una nueva expresión w'_1 a la que le volvemos a aplicar el paso 1 hasta obtener una expresión donde todos sus símbolos tienen a su pareja en esa expresión. Esta expresión dará (en el cociente) una componente conexa de $|\mathcal{P}|$. Solamente nos fijaremos entonces en estudiar presentaciones poligonales con una única expresión (ya que queremos que sea conexa).
2. Ahora de nuestra única expresión le eliminamos los símbolos que aparezcan adyacentes con ellos mismos y con distinto exponente (doblabamos siempre que podamos). Esto lo podremos hacer siempre que al eliminar aa^{-1} nos queden al menos 4 símbolos⁴. Si no pudiéramos quitar aa^{-1} de w es porque tenemos o $w = aa^{-1}bb$ o bien $w = aa^{-1}bb^{-1}$. En el primer caso tendremos $|\mathcal{P}| \cong \mathbb{RP}^2$ y en el segundo tendremos $|\mathcal{P}| \cong \mathbb{S}^2$.
3. Si nuestra expresión es de la forma $w = y_1ay_2a$ donde el símbolo a aparece dos veces con el mismo exponente (y los y_1, y_2 son conjuntos de expresiones cualesquiera contenidas en w), entonces podré cambiar w por $w' = y_1y_2^{-1}aa$ donde si $y_2 = b_1^{\varepsilon_1} \dots b_k^{\varepsilon_k}$ entonces $y_2^{-1} = b_k^{-\varepsilon_k} \dots b_1^{-\varepsilon_1}$.

Demostración. Veamos brevemente una demostración de por qué se puede hacer este cambio. Si tenemos nuestra expresión $w = y_1ay_2a$ podemos realizar un corte obteniendo $w_1 = y_1ac$ y $w_2 = c^{-1}y_2a$. Buscamos ahora pegar a través de a para lo que reflejamos w_2 obteniendo $w'_2 = a^{-1}y_2^{-1}c$ y rotamos w_1 obteniendo $w'_1 = cy_1a$. Estamos ya en condiciones de poder pegar w'_1 y w'_2 a través de a de donde obtenemos una nueva expresión $w'_0 = cy_1y_2^{-1}$. Podemos renombrar $c = a$ y obtenemos $w''_0 = ay_1y_2^{-1}a$. Con una última rotación llegamos a $w'''_0 = y_1y_2^{-1}aa$ que es lo que queríamos obtener. \square

En una cantidad finita de pasos la expresión inicial pasa a ser de la forma

$$w = ya_1a_1a_2a_2 \dots a_ka_k$$

donde en y solo aparecen parejas de símbolos con distinto exponente (cada pareja). Además, usando el paso 2., es decir, eliminando las expresiones adyacentes en y , podemos suponer además que cada símbolo en y con su pareja no son adyacentes.

⁴ya que en este caso tienen que estar emparejados