Questão 1

Considere o seguinte problema de programação linear.

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\
& x_3 \leq -3
\end{aligned}
$$

(1) Reformule o problema tal que ele esteja no formato padrão.

(2) Reformule o problema tal que ele esteja no formato canônico.

(3) Converta o problema em um problema de maximização.

Questão 2

Considere o seguite problema:

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 - x_2 \\
& -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\
& -3x_1 + 2x_2 \geq -3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(1) Esboçe a região viável no $\mathbb{R}^2$.

(2) Identifique a região em $\mathbb{R}^2$ onde as variável de folga x_3 e x_4 são iguais a zero.

(3) Encontre dois pontos extremos.

(4) Resolva o problema de forma geométrica.

Questão 3

Esboçe a região viável do conjunto $\{x \geq 0 \;:\; Ax \leq b\}$ onde A e b são dados a seguir. Em cada caso, verifique se a região viável é vazia ou não e se é limitada ou não.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

Questão 4

Seja $a_1 = (-1, 2, 0)$, $a_2 = (3, 2, 5)$ e $a_3 = (\frac{5}{2}, 3, 5)$. Verifique se estes vetores são LI? Eles geram o $\mathbb{R}^3$?

Questão 5

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = -4 \end{cases}$$

Questão 7

Mostre que o conjunto

$$X = \{x \;:\; x = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(-1,2,3),\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1,\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0\}$$

é convexo.

Questão 8

Considere o seguinte PPL.

$$\min \; -x_1 - 3x_2 + x_3 \tag{1}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \tag{2}$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \tag{4}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \tag{5}$$

A base formada pelas colunas a_1, a_2 e a_3 é uma base ótima para o problema (1)-(5)? Justifique.

Questão 9

Considere o seguinte PPL.

$$\min \; x_1 - 3x_2 \tag{6}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \tag{7}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{8}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{9}$$

(1) Resolva o problema (6)-(9) usando o método simplex. Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4, associadas as variáveis de folgas x_3(restrição 7) e x_4(restrição 8).

(2) Qual a solução ótima?

(3) Qual o valor ótimo?

Questão 10

Considere o seguinte PPL.

$$\min \; -x_1 + 2x_2 \tag{10}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \tag{11}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{12}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{13}$$

(1) Resolva o problema (10)-(13) usando o método simplex. Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4, associadas as variáveis de folgas x_3(restrição 7) e x_4(restrição 8).

(2) Qual a solução otima?

(3) Qual o valor ótimo?

Questão 11

Mostre que os hiperplanos $H = \{x \;:\; p^t x = k\}$ e $H^+ = \{x \;:\; p^t x \leq k\}$ são conjuntos convexos.

Questão 12

Mostre que o conjunto de soluções viáveis do PPL a seguir é um conjunto convexo.

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

Questão 13

Sejam A e B dois subconjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$.

(1) Mostre que $A \cap B$ é um conjunto convexo.

(2) O conjunto $A \cup B$ é um conjunto convexo? Justifique?

Questão 14

Considere o PPL

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Defina o conjunto viável do PPL.

(2) Identifique todos os pontos extremos do PPL.

Questão 16

Considere o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Defina o conjunto viável para o PPL.

(2) Defina uma solução viável para o PPL.

(3) Defina uma solução ótima para o PPL.

(4) Quais casos de soluções podem ocorrer para o PPL.

Questão 18

Resolva graficamente os seguintes PPL

(1)

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 7x_2 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 8 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 \geq 8 \\ & x_2 \geq 4 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Questão 19

Considere o PPL

$$\begin{aligned}
\max\ & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(1) Resolva o PPL utilizando o simplex revisado.

(2) Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4 após colocar o problema na forma padrão.

Questão 20

Considere o seguinte PPL.

$$\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 + 3x_2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Em qual caso esse PPL se enquadra quanto ao tipo de solução? Justifique.

Questão 21

Considere os vetores $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (3, 0, 1)$ e $a_3 = (2, -2, 1)$.

(1) Mostre que esses vetores formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

(2) Se substituimos a_3 por $a_4 = (2, -2, 0)$ temos uma nova base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Questão 22

Resolva o PPL a seguir usando o método simplex revisado,

$$\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Questão 23

Resolva o PPL a seguir usando o método simplex revisado,

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Questão 24

Responda os itens a seguir

(1) Defina uma base do $\mathbb{R}^n$.

(2) Os vetores $(1,1,0)$, $(2,0,1)$ e $(2,-1,1)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Questão 25

Responda os itens a seguir

(1) Dado um conjunto poliedral qualquer. Defina uma desigualdade redundante para este conjunto.

(2) Considere o conjunto poliedral a seguir

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Existe alguma desigualdade redundante para este conjunto poliedral? Justifique.

Questão 26

Considere a matriz a seguir

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) M possui inversa?

(2) Se M possui inversa, calcule M^{-1}.

Questão 27

Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 - 2x_2 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(1) Resolva o PPL através do métodos simplex revisado. Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4 da forma padrão.

(2) Qual a solução ótima?

(3) Qual o valor ótimo?

Questão 28

Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 + 3x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& 4x_1 + 6x_2 \leq 12 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(1) Esboce a região viável do problema.

(2) Encontre dois pontos extremos pertecentes a região viável do problema.

(3) Classifique o problema quanto ao tipo solução.

(4) Qual a solução ótima do problema?

(5) Qual o valor ótimo do problema?

Questão 29

Seja

$$X = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1 - x_2 \leq 3, \ -x_1 + 3x_2 \leq 3, \ x_1 \geq -3\}$$

(1) Encontre todos os pontos extremos de X.

(2) Represente $x = (1, 1)$ como uma combinação convexa desses pontos extremos.

Questão 30

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma base do $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$.

(1) Se $\lambda_k \neq 0$ para algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então ao se trocar a_k por b as colunas $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$.

(2) Se ao se trocar a_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por b temos que as colunas $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$, então temos que $\lambda_k \neq 0$.