Programação Linear

Modelagem em PL

- A modelagem de um PPL envolve algumas etapas:
    - O estudo dos dados, a identificação do problema a ser resolvido, com as restrições, os limites e a função objetivo.
    - A construção de uma abstração do problema através de um modelo matemático.
    - A busca de uma solução através de uma técnica que explore alguma estrutura.
    - O teste do modelo, sua análise e sua reestruturação.
    - A implementação computacional do modelo.

Modelagem em PL: problema da dieta

- Suponha que uma certa dieta alimentar esteja restrita a leite, carne, peixe e salada.
- Deseja-se determinar uma dieta diária para uma redução calórica, de modo que os requisitos nutricionais(vitaminas A, C e D) sejam satisfeitos a um custo mínimo.
- A tabela a seguir traz os dados do problema.

vitamina	leite	carne	peixe	salada	requisitos
A	2mg	2mg	10mg	20mg	11mg
C	50mg	20mg	10mg	30mg	70mg
D	80mg	70mg	10mg	80mg	250mg
custo	R$ 2	R$ 4	R$ 1,5	R$ 1	

Modelagem em PL: problema da dieta

Formulação do problema.

1. Definição das variáveis de decisão:
   x_j, quantidade do alimento j a ser utilizado na dieta, onde 1 corresponde a leite, 2 a carne, 3 ao peixe e 4 a salada respectivamente.
2. Definição da função objetivo:
   $\min \; 2x_1 + 4x_2 + 1,5x_3 + x_4$
3. Definição das restrições:
   1. demanda da vitamina A: $2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 20x_4 \geq 11$
   2. demanda da vitamina C: $50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4 \geq 70$
   3. demanda da vitamina D: $80x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 80x_4 \geq 250$
   4. não negatividade: $x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 4$

Modelagem em PL: problema de produção

- Um determinado produtor deseja decidir quantas unidades deve produzir de dois diferentes produtos (A e B) de forma que se obtenha um lucro máximo.
- O lucro por uma unidade do produto A corresponde a R$ 2 e o lucro por uma unidade do produto B corresponde a R$ 5.
- Cada unidade do produto A requer 3 horas de máquina e 9 unidades de máteria-prima, enquanto o produto B requer 4 horas de máquina e 7 unidades de matéria-prima.
- O tempo máximo disponível de horas de máquina são 200 horas e a quantidade máxima disponível de máteria-prima são 300 unidades.

Modelagem PL: problema de produção

Formulação do problema.

1. Definição das variáveis de decisão:
   $x_j, \; j = 1, 2.$
2. Definição da função objetivo:
   $\max \; 2x_1 + 5x_2$
3. Definição das restrições:
   1. disponibilidade de tempo: $3x_1 + 4x_2 \leq 200$
   2. disponibilidade de máteria-prima: $9x_1 + 7x_2 \leq 300$
   3. não negatividade: $x_j \geq 0, \; j = 1, 2.$

Modelagem em PL: problema de transporte

- Uma companhia transforma grãos de café em m fábricas. Em seguida esse café é enviado semanalmente para n armazéns para a venda a varejo, distribuição ou exportação.
- Suponha que o custo unitário de frete da fábrica i para o armazém j seja c_{ij}.
- Suponha ainda que a capacidade de produção na fábrica i seja a_i e que a demada no armazém j seja d_j.
- O problema temo como objetivo encontrar um padrão produção-entrega x_{ij} da fábrica i para o armazém j, onde $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ com custo total mínimo.

Modelagem em PL: problema de transporte

Formulação do problema.

1. Definição das variáveis de decisão:
   x_{ij}, quantidade transportada da fábrica i para o armazém j, onde $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.
2. Definição das restrições:
   - capacidade de produção da fábrica i: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \;\; i = 1, \ldots, m$.
   - demanda do armazém j: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \;\; j = 1, \ldots, n$.
   - não negatividade: $x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n$.
3. Definição da função objetivo:
   min $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Modelagem em PL: problema de dimensionamento de lotes

1. Uma empresa precisa encontrar um planejamento de produção de um determinado item para atender a demandas ao longo do horizonte de n períodos.
2. Em cada período t a demanda d_t pode ser atendida por produção no período t ou itens em estoque, produzidos em períodos anterior.
3. Suponha que no início do processo de produção, o estoque inicial seja zero, assim como no último período.
4. Dados para o problema: f_t, custo fixo de produção no período t; p_t, custo de produção unitário no período t; h_t, custo de estoque unitário no período t; d_t, demanda no período t.
5. Variáveis do problema: x_t, quantidade produzida no período t; s_t, quantidade em estoque no final do período t; $y_t = 1$, se ocorre produção no período t, 0, caso contrário.

Modelagem em PL: problema de dimensionamento de lotes

Formulação do problema

$$
\begin{aligned}
\min \ & \sum_{t=1}^{n} (p_t x_t + h_t s_t + f_t s_t) \\
& s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \ \text{ para } \ t = 1, 2, \ldots, n \\
& x_t \leq \left(\sum_{j=t}^{n} d_j \right) y_t \ \text{ para } \ t = 1, 2, \ldots, n \\
& s_0 = s_n = 0 \\
& x_t, s_t \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ para } \ t = 1, 2, \ldots, n \\
& y_t \in \{0, 1\} \ \text{ para } \ t = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$