Programação Linear

Método simplex

- Considere o sistema $Ax = b$ e $x \geq 0$, onde A é uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
- Suponha que é possível particionar A da forma $A = [B\ N]$ onde B é uma matriz inversível $m \times m$ e N é uma matriz $m \times (n - m)$.
- Uma solução $\overline{x} = (\overline{x}_B, \overline{x}_N)$ para as equações $Ax = b$, onde $\overline{x}_B = B^{-1}b$ e $\overline{x}_N = 0$ é chamada de solução básica do sistema.
- Uma solução $\overline{x} = (\overline{x}_B, \overline{x}_N)$ para as equações $Ax = b$, onde $\overline{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ e $\overline{x}_N = 0$ é chamada de solução viável básica do sistema.
- A matriz B é chamada matriz básica e N é chamada matriz não-básica.

Método simplex

- As componentes x_B de x são chamadas variáveis básicas e as componentes x_N são chamadas variáveis não básicas.
- Se $x_B > 0$, então x é chamada de uma solução básica viável não degenerada, e se no mínimo um item de x_B for igual a zero, então x é chamada uma solução viável básica degenerada.

Método simplex

Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- *Introduzindo as variáveis de folga* x_3 *e* x_4, *o problema é colocado na forma padrão:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- *Assim temos*

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método simplex

Exemplo

- *Encontrar uma solução viável básica corresponde a encontrar uma base B tal que $B^{-1}b \geq 0$ e $x_N = 0$. Possibilidades:*
- **Possibilidade 1**

$$B = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método simplex

Exemplo

- **Possibilidade 2**

$$B = [a_1, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz B formada pelas colunas 1 e 3 não definem uma base, pois são LD entre entre si.

Método simplex

Exemplo

- **Possibilidade 3**

$$B = [a_1, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método simplex

Exemplo

- **Possibilidade 4**

$$B = [a_2, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método simplex

Exemplo

- **Possibilidade 5**

$$B = [a_2, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método simplex

Exemplo

- **Possibilidade 6**

$$B = [a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método Simplex

Exemplo

- *Em 1, 3, 4 e 6 temos soluções viável básica,* $(3,3,0,0), (6,0,0,3), (0,3,3,0)$ *e* $(0,0,6,3)$.
- *O ponto obtido em 5 é uma solução básica, mas não é viável.*
- *As colunas* a_1 *e* a_3 *de 2 não definem uma base, pois são LD entre si.*

Método Simplex

- Em geral, o número de soluções viável básica é menor ou igual a $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.
- O método simplex é um algoritmo que utiliza de Algebra Linear para encontrar de forma interativa uma(ou várias) solução(ões) ótima para um PPL.
- O método simplex parte de uma solução viável básica. A partir dessa solução inicial vai identificando novas soluções viável básica com valores melhor ou igual a solução corrente.
- O método simplex vai, basicamente, experimenta uma sequência de soluções viável básica na busca do valor ótimo para a função objetivo, e isso é um dos aspectos que permitem ao método um bom desempenho e a garantia de sua convergência em um número finito de passos.