Programação Linear - Simplex tabular

Simplex tabular

- Considere o seguinte PPL.

$$\begin{aligned} \min\ z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

- Suponha que existe uma solução básica viável $\overline{x} = (x_B, x_N)$ associada a uma base B.
- O PPL pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min\ & z & & \\ & z - c_B x_B - c_N x_N & = 0 & \quad (1) \\ & Bx_B + Nx_N & = b & \quad (2) \\ & x_B,\ x_N & \geq 0 & \quad (3) \end{aligned}$$

Simplex tabular

- Da equação (2) usando B^{-1} temos que

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \tag{4}$$

- Multiplicando (4) por c_B e adicionando o resultado a equação (1) obtemos

$$z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \tag{5}$$

- Tomando $x_N = 0$ nas equações (4) e (5) temos,

$$x_B = B^{-1}b \text{ e } z = c_B B^{-1}b$$

Simplex tabular

- Das equações (4) e (5) podemos representar a corrente solução básica viável associada a base B na tabela a seguir,

	z	x_B	x_N	RHS
z	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

- O tabular não somente nos dar o valor da função objetivo $c_B B^{-1} b$ e uma solução básica $B^{-1} b$ no RHS, ele também nos dar todas as informações necessárias para proceder com o método simplex.
- A linha 0 nos dar o valor de $c_B B^{-1} N - c_N$(custo reduzido), o qual corresponde a $z_j - c_j$ para $j \in J$.
- A linha 0 deverá nos dizer se estamos ou não em uma solução ótima, ou qual variável não básica deverá crescer em caso contrário.

Simplex tabular

- Se x_k cresce, então o vetor $y_k = B^{-1}a_k$, armazenado nas linhas 1 a m e na coluna de x_k deverá nos ajudar a determinar o quanto x_k pode crescer.
- Se $y_k \leq 0$, então x_k poderá crescer indefinidamente, e a solução será ilimitada.
- Se y_k possui no mínimo um componente estritamente positivo, então o crescimento de x_k é limitado por alguma variável básica corrente, a qual pode cair a zero.
- A variável que sairá da base na próxima iteração será determinada pela fórmula

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \; : \; y_{ik} > 0 \right\}$$

Simplex tabular

- Passos a serem seguido:
  1. Atualize as variáveis básicas e seus valores.
  2. Atualize os $z_j - c_j$ para $j \in J$.
  3. Atualize as colunas y_j para $j \in J$.
- Todas as operações citadas anteriomente podem ser simultaneamente executadas por operações denominadas pivoteamento.
- Se x_k entra na base e x_{B_s} deixa a base em uma dada iteração, então o pivoteamento em y_{sk} pode ser estabelecido como segue:
  1. Divida a linha s por y_{sk}.
  2. Para $i = 1, \ldots, m$ e $i \neq s$, atualize a i-ésima linha pela adição de $-y_{ik}$ vezes a nova s-ésima linha.
  3. Atualize a linha 0 pela adição de $-(z_k - c_k)$ vezes a nova s-ésima linha.

Simplex tabular

- Passo inicial:
  1. Encontre uma solução viável básica inicial associada a uma base B, o forme o tabular

	z	x_B	x_N	RHS
z	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Simplex tabular

- Passo principal
  1. Seja $z_k - c_k = \max \{z_j - c_j \ : \ j \in J\}$. Se $z_k - c_k \leq 0$ então PARE, a corrente solução é ótima.
  2. Caso contrário, examine a coluna y_k. Se $y_k \leq 0$, então PARE, a solução é ilimitada.
  3. Se existe pelo menos um item estritamente positivo em y_k, determine o indice s a sair da base, utilizando a fórmula

$$\frac{\overline{b}_s}{y_{sk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\}$$

  4. Atualize o tabular por pivoteamento em y_{sk}.
  5. Atualize as variáveis básicas e não-básicas onde x_k entrará na base e x_{B_s} deixará a base na próxima iteração.
  6. Repita o passo inicial.

Simplex tabular

Antes do pivoteamento

	z	x_{B1}	$\dots$	x_{Bs}	$\dots$	x_{Bm}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_k	$\dots$	RHS
z	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	$z_j - c_j$	$\dots$	$z_k - c_k$	$\dots$	$c_B\bar{b}$
x_{B1}	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	y_{1j}	$\dots$	y_{1k}	$\dots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$	$\vdots$
x_{Bs}	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$\dots$	y_{sj}	$\dots$	y_{sk}	$\dots$	$\bar{b}_s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$	$\vdots$
x_{Bm}	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	y_{mj}	$\dots$	y_{mk}	$\dots$	$\bar{b}_m$

Simplex tabular

Após o pivoteamento

	z	x_{B1}	$\dots$	x_{Bs}	$\dots$	x_{Bm}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_k	$\dots$	RHS
z	1	0	$\dots$	$\frac{z_k - c_k}{y_{sk}}$	$\dots$	0	$\dots$	$(z_j - c_j) - \frac{y_{sj}}{ysk}(z_k - c_k)$	$\dots$	0	$\dots$	$c_B\bar{b} - (z_k - c_k)\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}}$
x_{B1}	0	1	$\dots$	$\frac{-y_{1k}}{y_{sk}}$	$\dots$	0	$\dots$	$y_{1j} - \frac{y_{sk}}{y_{sk}}(y_{1k})$	$\dots$	0	$\dots$	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k}}{y_{sk}}\bar{b}_s$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$	$\vdots$
x_{Bs}	0	0	$\dots$	$\frac{1}{y_{sk}}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{y_{sj}}{y_{sk}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\dots$	$\vdots$
x_{Bm}	0	0	$\dots$	$\frac{-y_{mk}}{y_{sk}}$	$\dots$	1	$\dots$	$y_{mj} - \frac{y_{sj}}{y_{sk}}y_{mk}$	$\dots$	0	$\dots$	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk}}{y_{1k}}\bar{b}_s$