Programação Linear - Dualidade

Dualidade em programação linear

- Considere o seguinte PPL,denominado problema primal

$$(P) \ : \ \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ \ i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

- Para cada restrição de (2), $i = 1, \ldots, m$, associe uma variável $u_i \geq 0$ e obtenha o problema dual.

$$(D) \ : \ \min d = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \geq c_j, \ \ j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

$$u_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, m \tag{6}$$

Dualidade em programação linear

Os problema (P) e (D) podem ser colocados sob a forma matricial,

$$(P) \ : \ \max z = c^T x \tag{7}$$
$$Ax \leq b \tag{8}$$
$$x \geq 0 \tag{9}$$

e

$$(D) \ : \ \min d = u^T b \tag{10}$$
$$u^T A \geq c^T \tag{11}$$
$$u \geq 0 \tag{12}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Dualidade em programação linear

Exemplo (1)

Considere o seguinte problema primal

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 7x_2 \\ & 3x_1 + 5x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e o seu dual

$$\begin{aligned} \min\ & 6u_1 + 8u_2 \\ & 3u_1 + u_2 \geq 4 \\ & 5u_1 + 2u_2 \geq 7 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade em programação linear

- Um problema primal na forma padrão

$$(P)\ :\ \max z = c^T x \tag{13}$$
$$Ax = b \tag{14}$$
$$x \geq 0 \tag{15}$$

tem como seu dual o problema

$$(D)\ :\ \min d = u^T b \tag{16}$$
$$u^T A \geq c^T \tag{17}$$
$$u \in \mathbb{R}^m \tag{18}$$

Dualidade em programação linear

Exemplo (2)

Considere o seguinte problema primal,

$$
\begin{aligned}
(P) \quad : \quad \max\ & 6x_1 + 8x_2 \\
& 3x_1 + x_2 = 4 \\
& 5x_1 + 2x_2 = 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

e o seu problema dual associado,

$$
\begin{aligned}
(D) \quad : \min\ & 4u_1 + 7u_2 \\
& 3u_1 + 5u_2 \geq 6 \\
& u_1 + 2u_2 \geq 8 \\
& u_1, u_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Dualidade em programação linear

- Considere o dual do problema (7)-(9).

$$
\begin{aligned}
\min\ & u^T b && (19)\\
& u^T A \geq c^T && (20)\\
& u \geq 0 && (21)
\end{aligned}
$$

- Transformando (19)-(21) em um problema de maximização,

$$
\begin{aligned}
\max\ & -u^T b && (22)\\
& -u^T A \leq -c^T && (23)\\
& u \geq 0 && (24)
\end{aligned}
$$

- O dual do problema (22)-(24) é dado por

$$
\begin{aligned}
\min\ & (-c^T)x && (25)\\
& (-A)x \geq -b && (26)\\
& x \geq 0 && (27)
\end{aligned}
$$

- Transformando (25)-(27) em um problema de maximização temos o problema (7)-(13).

Dualidade em programação linear

Teorema (1)

Considere o problema primal (7)-(9) e o seu problema dual associado (10)-(12). Se x *satisfaz as restrições (8)-(9) e se* u *satisfaz as restrições (11)-(12), então temos que* $c^T x \leq u^T b$.

Proposição (1)

Seja $\overline{x}$ *uma solução viável para o problema (7)-(9),* $\overline{u}$ *uma solução viável para o problema (10)-(12), e* $c^T \overline{x} = \overline{u}^T b$*, então* $\overline{x}$ *será uma solução ótima para (P) e* $\overline{u}$ *será uma solução ótima para (D).*

Dualidade em programação linear

Exemplo (3)

Considere o PPL

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Encontre o seu problema dual associado.
Resolva graficamente o primal e o dual.

Dualidade em programação linear

Proposição (2)

Considere o problema primal (P), (7)-(9), e o seu problema dual (D), (10)-(12). Suponha que (P) é ilimitado, então (D) será vazio.

Dualidade em programação linear

Exemplo (4)

Dado o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \ & -3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

temos como seu dual o problema

$$\begin{aligned} \min \ & -3u_1 + 0u_2 \\ & u_1 + u_2 \geq -3 \\ & -u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

O primal é ilimitado e o dual possui região viável vazia.

Dualidade em programação linear

Teorema (2)

Se x^* for uma solução ótima para (13)-(15) e u^* for uma solução ótima para (16)-(18), então $c^T x^* = (u^*)^T b$.

Dualidade em programação linear

Exemplo (5)

Considere o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 4x_2 \\
x_1 - x_2 &\leq -1 \\
-x_1 + x_2 &\leq 0 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Encontre o seu dual e resolva graficamente os dois problema.

Dualidade em programação linear

De acordo com as proposições (1) e (2), o teorema (2), e o exemplo do slide anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema (3)

Dado um par de problemas(um primal e o seu dual) uma e somente uma das seguintes três afirmações é verdadeira.

- *os dois problema são vazios.*
- *um problema é vazio e o outro é ilimitado.*
- *ambos os problemas admitem soluções ótimas, e os respectivos valores ótimos são iguais.*

Dualidade em programação linear

Teorema (4)

Seja x^* uma solução ótima de (7)-(9) e μ^* uma solução ótima de (10)-(12), então

$$((u^*)^T A - c^T)x^* = 0 \text{ e } (u^*)^T(b - Ax^*) = 0$$

Dualidade em programação linear

Do teorema (4) podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \right) = 0,$$

Como

$$x_j^* \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \geq 0, \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

temos que

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j \right) = 0, \text{ para } j = 1, \ldots, n \tag{28}$$

Dualidade em programação linear

Do teorema (4) podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0,$$

Como

$$u_i^* \geq 0 \text{ e } b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \geq 0, \text{ para } i = 1, \ldots, m$$

temos que

$$u_i^* \left(b_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0, \text{ para } i = 1, \ldots, m. \tag{29}$$

Dualidade em programação linear

- As relações (28) e (29) são denominadas condições de complementaridade.
- O teorema (4) deduzido a partir de

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \min\ & u^T b \\ & u^T A \geq c^T \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

nos fornece apenas $\left((u^*)^T A - c^T\right) x^* = 0$, pois $b - Ax^* = 0$ no primeiro problema.

Dualidade em programação linear

Exemplo (6)

Resolva o PPL a seguir usando o teorema (4).

$$\begin{aligned} \min\ & 2u_1 + u_2 + 4u_3 \\ & -2u_1 + u_2 + u_3 \geq 1 \\ & -u_1 + 2u_2 - u_3 \leq 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$