Programação Linear - Pos otimização

Pós otimização

- Considere o problema de programação linear

$$\max\ c^T x \tag{1}$$
$$Ax = b \tag{2}$$
$$x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{3}$$

  onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^n$.

- Suponha que alguma mudança na estrutura do problema (1)-(3) seja feita, onde é gerado um novo problema para o qual a base ótima do problema (1)-(3) pode não ser primal viável ou dual viável para o novo problema.

Pós otimização

- O processo de pós-otimização consiste em obter uma solução ótima para um novo problema considerando a base ótima do problema original.
- O processo de pós-otimização torna-se eficiente quando a base B, uma solução ótima do problema original, pode ser utilizada como base inicial no método primal do simplex ou no método dual do simplex para resolver o novo problema.

Pós otimização

- Suponha que o vetor b, que define o lado direito das restrições do problema (1)-(3), seja alterado para $b+\delta$, ou seja,

$$\max\ c^T x \tag{4}$$
$$Ax = b+\delta \tag{5}$$
$$x \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

- Uma base B associada a uma solução ótima para o problema (1)-(3) não deixa de ser uma base dual viável para o problema (4)-(6).
- No entanto podemos ter que

$$B^{-1}(b+\delta) \not\geq 0$$

ou seja, a base B não é uma base primal viável do problema (4)-(6).
- Neste caso podemos aplicar o método dual do simplex, tomando B como base inicial, para obtemos uma base ótima para o problema (4)-(6).

Pós otimização

Exemplo (1)

Considere o problema

$$\max \ -4x_1 - 5x_2 \tag{7}$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 5 \tag{8}$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 7 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$

Suponha que o lado direito da restrição (8) seja alterado de 5 para 15. A base ótima do problema original, $B = [a_2 \ \ a_1]$, é uma base ótima para o problema modificado?

Pós otimização

- Considere novamente o problema (1)-(3). Suponha que o vetor de custo, c, seja alterado para $c + \alpha$ e que a base ótima do problema (1)-(3) deixe de ser uma base dual viável para o novo problema

$$\max\ (c+\alpha)^T x \tag{11}$$
$$Ax = b \tag{12}$$
$$x \in \mathbb{R}^n \tag{13}$$

ou seja,

$$(c_B + \alpha_B)B^{-1}N - (c_N + \alpha_N) \ngeq 0$$

- Neste caso, podemos utilizar o método primal do simplex para obtermos uma solução ótima para o problema (11)-(13), tomando como base inicial a base ótima do problema (1)-(3).

Pós otimização

Exemplo (2)

Considere o problema

$$\begin{aligned} \max \ & -4x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que o custo associado a variável x_2 *seja alterado de* -5 *para* -1. *A base ótima do problema original,* $B = [a_2 \ \ a_1]$, *é uma base ótima para o problema modificado?*

Pós otimização

- Considere o problema (1)-(3). Suponha que seja acrescentado a este problema uma restrição do tipo

$$s^T x \geq b_{m+1}$$

onde $s \in \mathbb{R}^n$ e $b_{m+1} \in \mathbb{R}^m$. Assim temos o problema

$$\max c^T x \tag{14}$$
$$Ax = b \tag{15}$$
$$s^T x \geq b_{m+1} \tag{16}$$
$$x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{17}$$

- É possível reoptimizar o (14)-(17) utilizando-se a base ótima do problema (1)-(3).

Pós otimização

- Introduzindo uma variável de folga x_{n+1} temos

$$\max\ c^T x + 0 \cdot x_{n+1} \tag{18}$$
$$Ax - 0 \cdot x_{n+1} = b \tag{19}$$
$$s^T x - x_{n+1} = b_{m+1} \tag{20}$$
$$x \in \mathbb{R}^n_+,\ \ x_{n+1} \in \mathbb{R}_+ \tag{21}$$

- Em termos de matriz temos

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ s & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

Pós otimização

- Considere $s = (s_B, s_N)$, onde s_B está associado a uma base B do problema (1)-(3).
- Tome a matriz

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ s_B & -1 \end{bmatrix}$$

- Como B^{-1} existe, temos que $\overline{B}^{-1}$ também existe, pois

$$\det(\overline{B}) = \det(B) \cdot (-1)$$

Pós otimização

Proposição (1)

A matriz $\overline{B}$ está associada a uma solução dual viável do problema (18)-(21) onde $\overline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ s_B B^{-1} & -1 \end{bmatrix}$.

Pós otimização

Exemplo (3)

Considere o problema de programação linear

$$
\begin{aligned}
\min \ & -x_1 - x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolva o problema usando o algoritmo do simplex.
Acrescente a restrição $x_2 \geq \frac{1}{3}$ *ao problema.*
Resolva o novo problema considerando a base ótima do problema original.