Lista 02

Question 1. Considere o problema a seguir.

$$\max 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \tag{1}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \tag{2}$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 7 \tag{3}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

(a) Encontre o dual do problema (1)-(4).

(b) Solucione o problema dual graficamente.

(c) A partir da solução do dual obtenha a solução do primal (Folgas Complementares).

Question 2. Considere o PPL a seguir.

$$\max c^T x \tag{5}$$
$$Ax = b \tag{6}$$
$$x \geq 0. \tag{7}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Tomando $A = [B\ \ N]$, tal que $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e B^{-1} exista, caracterize B como uma base primal viável e dual viável para o problema (5)-(7).

(b) Se B é uma base primal viável e dual viável o que podemos afirmar sobre B?

Question 3. Considere o PPL a seguir.

$$\max\ -2x_1 - 3x_2 \tag{8}$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \tag{9}$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 5 \tag{10}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \tag{11}$$

(a) As colunas a_1 e a_3 definem uma base ótima para o problema (8)-(11)?

(b) Caso a base definida pelas colunas a_1 e a_3 não seja ótima para problema (8)-(11), usando o método do simplex ou o método dual do simplex encontre uma base ótima para o respectivo problema.

Question 4. Considere o PPL a seguir.

$$\max c^T x \tag{12}$$
$$Ax \leq b \tag{13}$$
$$x \geq 0 \tag{14}$$

e o seu dual.

$$\min u^T b \tag{15}$$
$$u^T A \geq c^T \tag{16}$$
$$u \geq 0. \tag{17}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$.

(a) Seja $\overline{x}$ uma solução viável para o problema (12)-(14) e $\overline{u}$ uma solução viável para o problema (15)-(17). Mostre que $c^T\overline{x} \leq \overline{u}^T b$.

(b) Mostre numericamente a relação do item (a) para o problema da Questão 1 e o seu dual.

Question 5. Considere o PPL a seguir.

$$\max x_1 - x_2 + 2x_3 \tag{18}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \tag{19}$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \tag{20}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \tag{21}$$

(a) Resolva o problema (18)-(21) usando o método primal do simplex.

(b) Encontre o problema dual associado ao problema (18)-(21) e resolva o mesmo.

(c) Supondo que o lado direito da restrição (19) do problema (18)-(21) seja acrescido de uma unidade. A base ótima do problema (18)-(21) é ótima para o novo problema?

(d) Supondo que o vetor de custos do problema (18)-(21) seja alterado para $(2, 1, 1)$. A base ótima do problema (18)-(21) é ótima para o novo problema?

(e) Se uma variável for incluída ao problema (18)-(21) com custo igual a -1 e com os coeficientes na restrições igual a $(2, 1)$. O que acontecerá com a solução encontrada no item (a)?

Question 6. Considere o PPL a seguir.

$$\min 3x_1 + 2x_2 \tag{22}$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \tag{23}$$
$$5x_1 + 6x_2 - x_4 = 30 \tag{24}$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 = 8 \tag{25}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5. \tag{26}$$

(a) Verifique se as colunas associada às variáveis x_2, x_3 e x_5 formam uma base ótima para o problema (22)-(26).

(b) Acrescente ao problema (22)-(26) a restrição $3x_1 + x_2 \geq 6$. Qual será a solução ótima do novo problema? Utilizar o método dual do simplex para reotimizar.

(c) Verifique em que intervalo deve estar os custos associados à variável x_1 e a variável x_2, para que a base ótima do problema (22)-(26) não seja alterada.

Question 7. Considere o PPL a seguir

$$\min 2x_1 + x_2 + 4x_3 \tag{27}$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \tag{28}$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \tag{29}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{30}$$

Resolva o PPL usando o Teorema das Folgas Complementares.

Question 8. Considere o PPL

$$(P)\ :\ \max c^T x \tag{31}$$
$$Ax \leq b \tag{32}$$
$$x \geq 0 \tag{33}$$

e o seu dual

$$(D)\ :\ \min u^T b \tag{34}$$
$$u^T A \geq c^T \tag{35}$$
$$u \geq 0 \tag{36}$$

(a) Mostre que se $\overline{x}$ satisfaz as restrições de (P) e $\overline{u}$ satisfaz as restrições de (D), então $c^T\overline{x} \leq \overline{u}^b$.

(b) Seja x^* uma solução ótima de (P) e u^* uma solução ótima de (D). Estabeleça as relações de folgas complementares associadas a esses dois pontos.

Question 9. Considere o PPL

$$\min\ -4x_1 + -5x_2 \tag{37}$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \tag{38}$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_4 = 7 \tag{39}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{40}$$

(a) Mostre que $B = [a_2\ a_1]$ é uma base ótima para o problema.

(b) Suponha que o lado direito da restrição (39) seja alterado para 16. A matriz $B = [a_2\ a_1]$ é uma base ótima para o problema modificado?

(c) Suponha que o custo associado a variável x_2 seja modificado para -2. A matriz $B = [a_2\ a_1]$ é uma base ótima para o problema modificado

Question 10. Considere o PPL

$$\max x_1 + x_2 \tag{41}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{42}$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10 \tag{43}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{44}$$

(a) Obtenha o dual do problema (41)-(42).

(b) Resolva graficamente o problema (41)-(42) e o seu dual.

(c) Verfique se as condições de complementaridade são satisfeitas pela solução ótima do problema (41)-(42) e a solução ótima do dual obtido no item (a).