Otimização(Programação) linear - Lista 01

Question 1. Considere o seguinte problema de programação linear.

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\
& x_3 \leq -3
\end{aligned}
$$

(a) Reformule o problema tal que ele esteja no formato padrão.

(b) Reformule o problema tal que ele esteja no formato canônico.

(c) Converta o problema em um problema de maximização.

Question 2. Considere o seguite problema:

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 - x_2 \\
& -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\
& -3x_1 + 2x_2 \geq -3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Esboçe a região viável no $\mathbb{R}^2$.

(b) Identifique a região em $\mathbb{R}^2$ onde as variável de folga x_3 e x_4 são iguais a zero.

(c) Encontre dois pontos extremos.

(d) Resolva o problema de forma geométrica.

Question 3. Esboçe a região viável do conjunto $\{x : Ax \leq b\}$ onde A e b são dados a seguir. Em cada caso, verifique se a região viável é vazia ou não e se é limitada ou não.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

Question 4. Seja $a_1 = (-1, 2, 0)$, $a_2 = (3, 2, 5)$ e $a_3 = (\frac{5}{2}, 3, 5)$. Verifique se estes vetores são LI? Eles geram o $\mathbb{R}^3$?

Question 5. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$ e $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ com $\lambda_j = 0$. Prove que $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_n$ não formam uma base do $\mathbb{R}^n$.

Question 6. Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = -4 \end{cases}$$

Question 7. A matriz M a seguir possui inversa? Se a resposta for sim, encontre M^{-1}.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 8. Mostre que o conjunto

$$X = \{x \ : \ x = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(-1,2,3), \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0\}$$

é convexo.

Question 9. Considere o seguinte PPL.

$$\min \ -x_1 - 3x_2 + x_3 \tag{1}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \tag{2}$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \tag{4}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \tag{5}$$

A base formada pelas colunas a_1, a_2 e a_3 é uma base ótima para o problema (1)-(5)? Justifique.

Question 10. Considere o seguinte PPL.

$$\min x_1 - 3x_2 \tag{6}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \tag{7}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{8}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{9}$$

(a) Resolva o problema (6)-(9) usando o método simplex. Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4.

(b) Qual a solução ótima?

(c) Qual o valor ótimo?

Question 11. Considere o seguinte PPL.

$$\min \ -x_1 + 2x_2 \tag{10}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \tag{11}$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{12}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{13}$$

(a) Resolva o problema (10)-(13) usando o método simplex. Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4.

(b) Qual a solução otima?

(c) Qual o valor ótimo?