Programação Linear

Problema de programação linear

- A programação linear está preocupada com a otimização de uma função linear enquando satisfaz um conjunto de restrições lineares.
- Considere o seguinte problema de programação linear (PPL).

$$
\begin{aligned}
\min \; z = & c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n && (1)\\
& a_{i1} x_1 + \ldots a_{in} x_n \geq b_i \text{ para } i = 1, \ldots, m && (2)\\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 && (3)
\end{aligned}
$$

- A equação (1) é denominada função objetivo.
- Os coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ são os coeficientes de custo.
- As variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis de decisão a serem determinadas.

Problema de programação linear

- A desigualdade $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ para $i = 1, \ldots, m$ denota a i-ésima restrição do problema.
- Os coeficientes a_{ij} para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ são chamados coeficientes tecnológicos.
- Os coeficientes b_i para $i = 1, \ldots, m$ representam os requerimentos mínimo a serem satisfeitos.
- As restrições $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ são denominadas restrições de não-negatividade.

Problema de programação linear

- Um vetor $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfazendo todas as restrições de (2) e (3) é chamado de ponto viável ou solução viável.
- O conjunto de todos os pontos viáveis constituem o conjunto viável do problema.
- Em um PPL queremos encontrar um ou mais pontos entre todos os pontos viáveis que otimize a função objetivo.
- Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
min\ 2x_1 + 5x_2 \\
x_1 + x_2 \geq 3 \\
-x_1 - 2x_2 \geq -8 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Encontre no plano $\mathbb{R}^2$ a região viável associada ao problema.

Problemas de programação linear

- Para representar um PPL várias hipóteses que estão implicitas em uma formulação são necessárias:
  1. Proporcionalidade
  2. Aditividade
  3. Divisibilidade
  4. Deterministico

Problema de programação linear

- Em um PPL queremos otimizar uma função objetivo sujeito a um conjunto de restrições lineares de igualdade e/ou desigualdade.
- Por simples manipulações é possível transformar uma restrição de um tipo em outra equivalente.
- A desigualdade $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \text{ e } x_{n+i} \geq 0$$

- A igualdade $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \text{ e } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

Problema de programação linear

- Se uma variável x_j é irrestrita em sinal, ela pode ser reescrita como

$$x_j = x'_j - x''_j \text{ onde } x'_j \geq 0 \text{ e } x''_j \geq 0$$

- Podemos converter um PPL de maximização em um PPL de minimização pela multiplicação dos coeficientes da função objetivo por -1.
  Após a otimização do novo problema, o valor da função objetivo do problema original é -1 vezes o valor ótimo do novo problema.

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\left(\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \right)$$

Problema de programação linear

- Um PPL é dito na forma padrão se todas as restrições são de igualdade e todas as variáveis são não negativas.
- Um PPL de minimização é dito na forma canônica se todas as variáveis são não-negativas e todas as restrições são do tipo $\geq$.
- Um PPL de maximização é dito na forma canônica se todas as variáveis são não-negativas e todas as restrições são do tipo $\leq$.

Problema de programação linear

- Um PPL pode ser escrito na seguinte forma matricial.

$$\begin{aligned} \min \; & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \;\; i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \;\; j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Seja $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. O PPL pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min \; & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$