Programação Linear

Vetores

- Um vetor de tamanho n é um conjunto de n objetos organizados em forma de coluna.
- Considere $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, temos que

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

- Seja $k \in \mathbb{R}$, temos que

$$ka = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$$

- O produto interno entre os vetores a e b é dado por:

$$a^T \cdot b = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

Vetores

- Um espaço euclidiano de dimensão n e real, $\mathbb{R}^n$, é uma coleção de todos os vetores com tamanho n onde os componentes do vetor são números reais.
- Um vetor $b \in \mathbb{R}^n$ é dito ser uma combinação linear de $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, se $b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, \ldots, k$.
- Um vetor $b \in \mathbb{R}^n$ é dito ser uma combinação afim de $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, se $b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$, onde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, \ldots, k$ e $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.
- Se $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, então b é uma combinação afim de $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Vetores

- Um subespaço linear S_L do $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ tal que se $a_1, a_2 \in S_L$, então toda combinação linear de a_1 e a_2 pertencem a S_L.
- Um subespaço afim S_A do $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ tal que se $a_1, a_2 \in S_A$, então toda combinação afim de a_1 e a_2 pertencem a S_A.
- Uma coleção de vetores, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ são chamados linearmente independente(LI) se $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.

Exemplo

Seja $a_1 = (1, 2)$ *e* $a_2 = (-1, 1)$. *Temos que*

$$\lambda_1(1, 2) + \lambda_2(-1, 1) = (0, 0)$$

implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Vetores

- Uma coleção de vetores $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes(LD) se existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ não todos iguais a zero, tal que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$.

Exemplo

Considere $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (-1, 1, -1)$ *e* $a_3 = (0, 3, 2)$. *Temos que* a_1, a_2 *e* a_3 *são LD, pois* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = (0, 0, 0)$ *para* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *e* $\lambda_3 = -1$.

- Uma coleção de vetores $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ é chamado de gerador do $\mathbb{R}^n$ se dado algum vetor $b \in \mathbb{R}^n$, podemos encontrar escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tal que $b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$

Exemplo

Considere $a_1 = (1, 0), a_2 = (-1, 3)$ *e* $a_3 = (2, 1)$. *Os vetores* a_1, a_2 *e* a_3 *geram o* $\mathbb{R}^2$, *já que qualquer vetor* $b \in \mathbb{R}^2$ *pode ser representado como uma combinação linear destes vetores.*

Vetores

- Uma coleção dos vetores $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$ se as seguintes condições ocorrem:
  1. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ geram o $\mathbb{R}^n$.
  2. se qualquer um destes vetores é deletado, a coleção formada pelos vetores restantes não geram o $\mathbb{R}^n$.
- As condições acima são equivalentes a:
  1. $k = n$.
  2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são LI.

Exemplo

Considere os vetores $a_1 = (1, 1)$ *e* $a_2 = (0, 1)$ *do* $\mathbb{R}^2$*. Esses dois vetores formam uma base em* $\mathbb{R}^2$ *já que* $k = n = 2$ *e* a_1 *e* a_2 *são LI.*

Proposição

Dado uma base $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *do* $\mathbb{R}^n$*, qualquer vetor* $b \in \mathbb{R}^n$ *é representado de forma única em termos destes vetores.*

Vetores

- No método simplex, método utilizado para resolver um problema de programação linear, diferentes bases são geradas ao longo do processo, onde colunas saem da base para dar lugar a outras colunas.
- Devemos ter cuidado na escolha dos vetores que entram e na escolha dos vetores que deixam uma base ao longo das iterações do simplex, caso contrário, os novos vetores podem não ser LI, e não formar uma base.

Proposição

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ *uma base do* $\mathbb{R}^n$ *e* $b \in \mathbb{R}^n$ *e* $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$. *Se* $\lambda_k \neq 0$ *para algum* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *então ao se trocar* a_k *por* b *o conjunto* $a_1, a_2, \ldots, b, \ldots, a_n$ *é uma nova base do* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Os vetores $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (3, 0, 1)$ *e* $a_3 = (2, -2, 1)$ *são LI, e formam uma base do* $\mathbb{R}^3$. *Não podemos substituir* a_3 *por* $(2, -2, 0)$, *pois* a_1, a_2 *e* $(2, -2, 0)$ *são LD e não formam uma base do* $\mathbb{R}^3$.

Matrizes

- Seja A uma matriz com m linhas e n colunas, onde cada elemento de A pertence ao $\mathbb{R}$, dizemos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Se A e B são matrizes, $m \times n$, então $C = A + B$ é definida por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.
- Seja A um matriz $m \times n$, e um escalar k, então $k \cdot A$ é uma matriz $m \times n$ cuja (i, j) entrada é $k \cdot a_{ij}$.
- Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$, então o produto $A \cdot B$ é definido por uma matriz C, $m \times p$, com

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \text{ para } i = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, p.$$

Matrizes

- Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A \cdot B = I$ e $B \cdot A = I$, então B é chamada de inversa de A, onde $B = A^{-1}$ e é única.
- A matriz inversa de A, se existir, é única e é denotada por A^{-1}.
- Se A possui uma inversa, A é denominada não-singular, caso contrário, A é denominada singular.
- Dado uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ela possui uma inversa se e somente se as linhas(colunas) de A são LI.
- A matriz inversa, se ela existir, pode ser obtida através de um número finito de operações elementares.

Matrizes

- Uma operação linha elementar em uma matriz A é uma das seguintes operações:
  1. linha i e linha j são trocadas.
  2. linha i é mulitplicada por um escala k, onde $k \neq 0$.
  3. linha i é substituida pela linha i adicionada a linha j vezes k.
- Operações elementares sobre as linhas(colunas) de A são equivalentes a multiplicar A por uma matriz especifica.
- Se a sequência de operações linhas reduzem A a uma matriz identidade, então a mesma sequência de operações deverão reduzir (A, I) a (I, A^{-1}).

Matrizes

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a inversa de A usando operações elementares.

Matrizes

- Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cujo a entrada (i,j) é a_{ij}. O determinante de A, denotado por $det\ A$, é um número definido como:

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ para algum } j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

cujo A_{ij} é o cofator de a_{ij} que é definido como $(-1)^{i+1}$ vezes o determinante da submatriz A sem a linha da linha i e a coluna j.

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule o determinante de A.

Matrizes

- Dado uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o cofator A_{ij} do elemento a_i de A é definido por
$$(-1)^{i+j} det(A_{ij}) = \Delta_{ij}$$
onde A_{ij} é a submatriz de A obtida pela eliminação da linha i e da coluna j. Estes cofatores formam uma nova matriz, denominada matriz dos cofatores de A.
$$\overline{A} = [\Delta_{ij}]$$
- A transposta da matriz de cofatores é denominada matriz adjunta de A, ou seja, $adj(A) = \overline{A}^T$.

Matrizes

- Suponha que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tenha uma inversa, temos então

$$\begin{aligned} det(A \times A^{-1}) &= det(I_n) \\ det(A) \times det(A^{-1}) &= 1 \\ det(A^{-1}) &= \frac{1}{det(A)} \end{aligned}$$

Proposição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui inversa, se e somente se $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

Proposição

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ temos que $A \times adj(A) = det(A) \times I_n$.

Matrizes

- A inversa de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se existe, pode ser calculada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A))$$

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^{-1} usando a fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A))$$

Conjunto convexo

- Um conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ é chamado de convexo se dados dois pontos $x_1, x_2 \in X$, então $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ para $\lambda \in [0, 1]$.
- Um ponto da forma $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ onde $\lambda \in [0, 1]$ é denominado combinação convexa de x_1 e x_2.
- Se $\lambda \in (0, 1)$, então a combinação convexa é denominada estrita.
- Um ponto $x \in X$ onde X é um conjunto convexo é denominado ponto extremo de X, se x não puder ser representado como uma combinação convexa estrita de dois pontos distintos de X.

Conjunto convexo

Exemplo

Exemplos de conjuntos convexos.

1. $\{x \ : \ Ax = b\}$, *onde* A *é uma matriz* $m \times n$ *e* b *é um* m*-vetor.*
2. $\{x \ : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$, *onde* A *é uma matriz* $m \times n$ *e* b *é um* m*-vetor.*
3. $\{x \ : \ x = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(-1,2,3), \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0\}$

Função convexa

- Uma função f é dita ser convexa se a seguinte desigualdade ocorre para dois pontos x_1 e x_2 dados

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)x_2$$

para $\lambda \in [0, 1]$.

- Dados x_1 e x_2, uma função f é denominada concava se e somente se $-f$ é convexa, ou seja,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)x_2$$

para $\lambda \in [0, 1]$.

Hiperplano e subespaços

- Um hiperplano $H \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T x\}$, onde p(normal ao hiperplano) é um vetor não nulo.
- Se fixamos um ponto $x_0 \in H$, então $p^T x_0 = k$, e para algum $x \in H$, temos $p^T x = k$. Subtraindo $p^T x_0 = k$ e $p^T x = k$ temos $p^T(x - x_0) = 0$.
- Um hiperplano $H \in \mathbb{R}^n$ pode ser representado pelo conjunto de pontos que satisfazem $p^T(x - x_0) = 0$, onde x_0 é algum ponto fixo em H.
- Um hiperplano $H \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

Hiperplano e subespaços

- Um hiperplano $H \in \mathbb{R}^n$ divide o $\mathbb{R}^n$ em duas regiões, chamadas subespaços.
- Um subespaço é um conjunto de pontos forma $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T x \leq k\}$, ou $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T x \geq k\}$, onde p é um vetor não nulo do $\mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$.
- Temos que $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T x \leq k\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T x \geq k\} = \mathbb{R}^n$.
- Considere um hiperplano $H \in \mathbb{R}^n$, fixando um ponto x_0 em H definimos dois subespaços que podem ser representados como

$$S^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T(x - x_0) \geq 0\} \text{ e } S^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ p^T(x - x_0) \leq 0\}.$$

Conjunto poliedral

- Um poliedro pode ser definido como a intersecção de um número finito de subespaços.
- Um poliedro limitado e fechado é denominado um politopo.
- Já que um subespaço pode ser representado por uma desigualdade do tipo $a^i x \leq b_i$ então um poliedro pode ser representado pelo sistema
$$a^i x \leq b_i \text{ para } i = 1, \ldots, m.$$
- Um poliedro pode ser representado por $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a i-ésima linha de S é a^i e $b \in \mathbb{R}^m$.

Conjunto poliedral

Exemplo

Considere o sistema

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1 &\leq 2 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Represente esse sistema no $\mathbb{R}^2$.