Questão 1

Considere o seguinte problema de programação linear.

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\
& -x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\
& x_3 \le -3
\end{aligned}
$$

(1) Reformule o problema tal que ele esteja no formato padrão.

(2) Reformule o problema tal que ele esteja no formato canônico.

(3) Converta o problema em um problema de maximização.

Questão 2

Considere o seguite problema:

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 - x_2 \\
& -x_1 + 3x_2 \le 0 \\
& -3x_1 + 2x_2 \ge -3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

(1) Esboçe a região viável no $\mathbb{R}^2$.

(2) Identifique a região em $\mathbb{R}^2$ onde as variável de folga x_3 e x_4 são iguais a zero.

(3) Encontre dois pontos extremos.

(4) Resolva o problema de forma geométrica.

Questão 3

Esboçe a região viável do conjunto $\{x \geq 0 \ : \ Ax \leq b\}$ onde A e b são dados a seguir. Em cada caso, verifique se a região viável é vazia ou não e se é limitada ou não.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

Questão 4

Seja $a_1 = (-1, 2, 0)$, $a_2 = (3, 2, 5)$ e $a_3 = (\frac{5}{2}, 3, 5)$. Verifique se estes vetores são LI? Eles geram o $\mathbb{R}^3$?

Questão 5

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = -4 \end{cases}$$

Questão 6

Mostre que o conjunto

$$X = \{x \ : \ x = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(-1,2,3), \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0\}$$

é convexo.

Questão 7

Considere o seguinte PPL.

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 - 3x_2 + x_3 && (1)\\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 && (2)\\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6 && (3)\\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 && (4)\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

A base formada pelas colunas a_1, a_2 e a_3 é uma base ótima para o problema (1)-(5)? Justifique.

Questão 8

Mostre que os hiperplanos $H = \{x \ : \ p^t x = k\}$ e $H^+ = \{x \ : \ p^t x \leq k\}$ são conjuntos convexos.

Questão 9

Mostre que o conjunto de soluções viáveis do PPL a seguir é um conjunto convexo.

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^T x\\
& Ax = b\\
& x \in \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}
$$

Questão 10

Sejam A e B dois subconjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$.

(1) Mostre que $A \cap B$ é um conjunto convexo.

(2) O conjunto $A \cup B$ é um conjunto convexo? Justifique?

Questão 11

Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
\min\ & -x_1 - 2x_2\\
& x_1 + x_2 \leq 6\\
& -x_1 + 2x_2 \leq 6\\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(1) Defina o conjunto viável do PPL.

(2) Identifique todos os pontos extremos do PPL.

Questão 12

Considere o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Defina o conjunto viável para o PPL.

(2) Defina uma solução viável para o PPL.

(3) Defina uma solução ótima para o PPL.

(4) Quais casos de soluções podem ocorrer para o PPL.

Questão 13

Resolva graficamente os seguintes PPL

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 7x_2 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_2 \leq 8 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Questão 14

Considere o seguinte PPL.

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + 3x_2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Em qual caso esse PPL se enquadra quanto ao tipo de solução? Justifique.

Questão 15

Considere os vetores $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (3, 0, 1)$ e $a_3 = (2, -2, 1)$.

(1) Mostre que esses vetores formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

(2) Se substituimos a_3 por $a_4 = (2, -2, 0)$ temos uma nova base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Questão 16

Responda os itens a seguir

(1) Defina uma base do $\mathbb{R}^n$.

(2) Os vetores $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$ e $(2, -1, 1)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Questão 17

Responda os itens a seguir

(1) Dado um conjunto poliedral qualquer. Defina uma desigualdade redundante para este conjunto.

(2) Considere o conjunto poliedral a seguir

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 &\geq 3 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Existe alguma desigualdade redundante para este conjunto poliedral? Justifique.

Questão 18

Considere a matriz a seguir

$$
M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

(1) M possui inversa?

(2) Se M possui inversa, calcule M^{-1}.

Questão 19

Considere o PPL

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Resolva o PPL através do métodos simplex revisado. Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4.

(2) Qual a solução ótima?

(3) Qual o valor ótimo?

Questão 20

Resolva o PPL a seguir usando o método simplex revisado,

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Questão 21

Considere o PPL

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Resolva o PPL utilizando o simplex revisado.

(2) Considere como base inicial as colunas a_3 e a_4 após colocar o problema na forma padrão.

Questão 22

Considere o PPL

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(1) Esboce a região viável do problema.

(2) Encontre dois pontos extremos pertecentes a região viável do problema.

(3) Classifique o problema quanto ao tipo solução.

(4) Qual a solução ótima do problema?

(5) Qual o valor ótimo do problema?

Questão 23

Seja

$$X = \{(x_1, x_2)\ :\ x_1 - x_2 \leq 3,\ -x_1 + 3x_2 \leq 3,\ x_1 \geq -3\}$$

(1) Encontre todos os pontos extremos de X.

(2) Represente $x = (1, 1)$ como uma combinação convexa desses pontos extremos.

Questão 24

Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma base do $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$.

(1) Se $\lambda_k \neq 0$ para algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então ao se trocar a_k por b as colunas $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$.

(2) Se ao se trocar a_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por b temos que as colunas $[a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$, então temos que $\lambda_k \neq 0$.

Questão 25

Considere os vetores $w_1,\ w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ LI. Mostre que os vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ são LD, onde $v_1 = w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 - w_3$ e $v_3 = w_1 - w_2$.