Programação Linear

Primal do simplex

- O algoritmo simplex descreve uma sequência de passos para se encontrar uma solução para um sistema de equações lineares sujeitas que otimize uma função objetivo.
- O algoritmo do simplex dispõe de três situações:
  1. Um método para inversão da matriz básica.
  2. As condições de trocas de colunas dentro da matriz básica, para que exista a garantia de melhoria da solução ao longo do algoritmo.
  3. As regras de parada do algoritmo.

Primal do simplex

- Considere o seguinte PPL, o qual possui uma solução básica viável,

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

- Podemos decompor c em $[c_B\ c_N]$ onde B representa a matriz báisica e N a matriz não básica.
- Suponha que exista uma solução viável básica para o PPL e que essa solução seja representada por um vetor $\overline{x}$, onde $\overline{x} = (B^{-1}b, 0)$.
- Substituindo $\overline{x}$ na função objetivo temos a expressão:

$$\begin{aligned} \overline{z} &= [c_B\ c_N] \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= c_B B^{-1} b \end{aligned}$$

Primal do simplex

- Considere agora um x qualquer, $x = (x_B, x_N)$, e a mesma base B.

$$
\begin{aligned}
b &= Ax \\
&= [B\ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\
&= Bx_B + Nx_N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Bx_B &= b - Nx_N \\
B^{-1}Bx_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\
x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N
\end{aligned}
$$

Primal do simplex

- Temos ainda que

$$
\begin{aligned}
z &= c^T x \\
&= [c_B \ c_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\
&= c_B x_B + c_N x_N \\
&= c_B \left(B^{-1} b - B^{-1} N x_N \right) + c_N x_N \\
&= c_B \left(B^{-1} b - \sum_{j \in J} B^{-1} a_j x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j \\
&= c_B B^{-1} b - \sum_{j \in J} \left(c_B B^{-1} a_j - c_j \right) x_j \\
&= c_B B^{-1} b - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j
\end{aligned}
$$

onde J é o conjunto de indices das variáveis não básicas.

Primal do simplex

- A equação $z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$ apresenta um critério para verificação de otimalidade ou melhoria de uma solução viável básica.
- Se $z_j - c_j > 0$ para algum $j \in J$ existe a possibilidade de que com o crescimento do valor de x_j ocorra uma redução no valor da função objetivo em $(z_j - c_j)x_j$.

Primal do simplex

- Seja k o índice da variável não básica candidata a entra na base, onde $z_k - c_k > 0$, e

$$z = \overline{z} - (z_k - c_k)x_k$$

- Com o crescimento de x_k, o valor de $\overline{z}$ diminui na solução básica proporcionalmente ao valor do custo reduzido associado.
- Temos que ainda que

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k \\ &= \overline{b} - y_k x_k \end{aligned}$$

onde $y_k = B^{-1}a_k$ e $\overline{b} = B^{-1}b$.

Primal do simplex

- Denotando $x_B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m})$, e $\overline{b} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m)$ temos:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \vdots \\ \overline{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

- Se existir algum elemento y_{ik}, tal que $y_{ik} \leq 0$, então o x_{B_i} associado pode crescer indefinidamente com o crescimento de x_k.
- Se existir y_{ik}, tal que $y_{ik} > 0$, então o associado x_{B_i} decresce com o incremento de x_k.
- Para satisfazer as condições de não negatividade de uma solução viável básica, a nova variável x_k poderá crescer até que uma primeira componente de x_{B_i} seja reduzida a zero, o que corresponde ao mínimo entre todos os $\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}}$ tal que $y_{ik} > 0$, ou seja,

$$\frac{\overline{b}_s}{y_{sk}} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\}$$

Primal do simplex

- Observe

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \vdots \\ \overline{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{b}_1 - y_{1k}x_k & \geq 0 \\ \vdots & \\ \overline{b}_m - y_{mk}x_k & \geq 0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y_{1k}x_k & \leq \overline{b}_1 \\ \vdots & \\ y_{mk}x_k & \leq \overline{b}_m \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_k & \leq \frac{\overline{b}_1}{y_{1k}} \\ \vdots & \\ x_k & \leq \frac{\overline{b}_m}{y_{mk}} \end{array} \right.$$

- Logo,

$$x_s = \frac{\overline{b}_s}{y_{sk}} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\}$$

Primal do simplex

- Para garantir a indepedência linear da coluna k com as demais colunas existentes na base é indispensável que $y_{sk} \neq 0$.
- A variável x_k entra na base melhorando o valor da função objetivo, e a variável x_s deixa a base ao ter seu valor esgotado pelo crescimento de x_k.

Primal do simplex: Algoritmo(Minimização)

- **Inicialização:**
  - Encontre uma base B e determine uma solução viável básica($\overline{x}$) associada a essa base, onde $\overline{x}_B = B^{-1}b$, $\overline{x}_N = 0$ e $\overline{z} = c_B B^{-1} b$.
  - Seja I o conjunto de índices da base B, e J o conjunto de índices fora da não base N.
- **Passo 1:**
  - Calcule

$$Y = B^{-1}N = (y_j) = (y_{ij}),\ \ i \in I \text{ e } j \in J$$

$$z_j - c_j = (c_B B^{-1} a_j) - c_j \text{ para } j \in J$$

  - Se $z_j - c_j \leq 0$ para $j \in J$, PARE, a solução viável básica é ótima.
  - Caso contrário encontre

$$L = \{j \in J\ :\ z_j - c_j > 0\}$$

Primal do simplex: Algoritmo(Minimização)

- **Passo 2:**
  - Se $y_j \leq 0$ para todos os $j \in L$, PARE, pois não existe solução ótima finita.
  - Caso contrário, determine k de modo que

$$z_k - c_k = \max_{j \in L} \{z_j - c_j\}$$

  - Na coluna k encontre um s tal que

$$\frac{\overline{b}_s}{y_{sk}} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\}$$

Primal do simplex: Algoritmo(Minimização)

- **Passo 3:**
  - Atualizer as matrizes B e N e os novos conjuntos I e J
    $B = (B \setminus \{a_s\}) \cup \{a_k\}$
    $N = (N \setminus \{a_k\}) \cup \{a_s\}$
    $I = (I \setminus \{s\}) \cup \{k\}$
    $J = (J \setminus \{k\}) \cup \{s\}$
  - Calcular a nova solução

$$x_B = B^{-1}b \text{ e } \overline{z} = \overline{z} - (z_k - c_k)\frac{\overline{x}_{Bs}}{y_{sk}}$$

  - Retornar ao **Passo 1**.

Primal do simplex

Exemplo

Resolva o PPL a seguir usando o algoritmo primal do simplex.

$$
\begin{aligned}
\min \; & -x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Primal do simplex

Exemplo

Resolva o PPL a seguir usando o algoritmo primal do simplex.

$$\begin{aligned} \max\ 3x_1 + 5x_2 & \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primeira fase do simplex

- Considere o seguinte PPL

$$(P) \;:\; z = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \text{ para } i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

- Suponha que não conhecemos uma solução viável para (P).

Primeira fase do simplex

- Acrescentando variáveis artificiais g_i para $i = 1, \dots, m$ em cada restrição (2), supondo que $b_i \geq 0$, temos.

$$(PPL) \ : \ z^{PPL} = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + g_i = b_j \text{ para } i = 1, \dots, m \tag{5}$$

$$x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, n \tag{6}$$

$$g_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, m \tag{7}$$

Primeira fase do simplex

- Temos então outro PPL

$$
\begin{aligned}
(PA) \ : \ z^{PA} = \min \ & \sum_{i=1}^{m} g_i && (8)\\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + g_i = b_j \text{ para } i = 1, \ldots, m && (9)\\
& x_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n && (10)\\
& g_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m && (11)
\end{aligned}
$$

- As variáveis $x_j = 0$ para $j = 1, \ldots, n$ e $g_i = b_i \geq 0$ estão associadas a uma solução básica de (5) satisfazendo (6) e (7).
- Esta solução básica será tomada como uma solução inicial de (PA) no método simplex.

Primeira fase do simplex

- Se $z^{PA} > 0$ o problema (P) é vazio.
- Se $z^{PA} = 0$ a solução ótima de (PA) terá $g_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$ e $x_j = \overline{x}_j$ para $j = 1, \ldots, n$, satisfazendo a equação (2).
- Se a base final da solução ótima do (PA) não contiver nenhuma coluna associadas as variáveis g_i para $i = 1, \ldots, m$ esta será uma base primal viável para (P).
- Caso a solução ótima do (PA) tenha pelo menos uma coluna associda a g_i podemos iniciar o simplex para resolver (P) com essa base, não permitindo que essas variáveis tenha valores diferentes de zero.