

# Introdução à Programação Linear

Manoel Campêlo

# Sumário

<b>1</b>	<b>Modelagem</b>	<b>4</b>
1.1	Problema de programação linear . . . . .	4
1.2	Modelagem de problemas de programação linear . . . . .	5
1.3	Modelagem de problemas em grafos . . . . .	14
1.4	Modelagem de problemas com variáveis binárias . . . . .	20
1.5	Modelos com muitas restrições ou variáveis . . . . .	23
1.6	Exercícios . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Solução Gráfica</b>	<b>31</b>
2.1	Exemplo inicial . . . . .	31
2.2	Conjunto viável limitado . . . . .	34
2.3	Conjunto viável ilimitado . . . . .	36
2.4	Descrição do método . . . . .	38
2.5	Exercícios . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Soluções Básicas</b>	<b>42</b>
3.1	Forma padrão . . . . .	42
3.2	Conversão à forma padrão . . . . .	43
3.3	Particionando um sistema linear . . . . .	44
3.4	Solução básica . . . . .	45
3.5	Obtendo soluções básicas . . . . .	47
3.6	Exercícios . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Funcionamento do Método Simplex</b>	<b>52</b>
4.1	Um primeiro exemplo . . . . .	52
4.2	O método Simplex . . . . .	55
4.3	Interpretação geométrica . . . . .	60
4.4	Solução básica viável inicial . . . . .	63
4.5	Corretude do algoritmo Simplex . . . . .	68
4.6	Exercícios . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Teoria do Método Simplex</b>	<b>73</b>
5.1	Combinações lineares . . . . .	73
5.2	Conjunto convexo e cone . . . . .	75
5.3	Direções viáveis . . . . .	76
5.4	Vértices . . . . .	78
5.5	Otimidade . . . . .	80
5.6	Direções extremas . . . . .	81
5.7	Representação por vértices e direções . . . . .	82
5.8	Direções de descida . . . . .	84
5.9	Ilimitação . . . . .	84

5.10	Exercícios . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Degeneração</b>	<b>88</b>
6.1	Ciclagem . . . . .	88
6.2	Método Simplex Lexicográfico . . . . .	91
6.2.1	Comparação lexicográfica . . . . .	91
6.2.2	Razão lexicograficamente mínima . . . . .	92
6.2.3	O algoritmo . . . . .	92
6.3	Corretude do Método Simplex Lexicográfico . . . . .	93
6.4	Aplicação a um exemplo . . . . .	96
6.5	Exercícios . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Simplex Revisado</b>	<b>100</b>
7.1	Revisitando o algoritmo Simplex . . . . .	100
7.2	Usando operações elementares sobre linhas . . . . .	101
7.3	Aplicação a um exemplo . . . . .	102
7.4	Forma produto da inversa . . . . .	107
7.5	Geração de colunas . . . . .	109
7.6	Exercícios . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Dualidade</b>	<b>111</b>
8.1	O problema dual . . . . .	111
8.2	Pares primal-dual . . . . .	114
8.3	Teoremas de dualidade . . . . .	118
8.4	Obtenção de solução ótima dual . . . . .	120
8.5	Interpretação geométrica do dual . . . . .	123
8.6	Interpretação econômica do dual . . . . .	124
8.6.1	Interpretação das variáveis duais . . . . .	125
8.6.2	Intervalos em que a base não muda . . . . .	125
8.6.3	Interpretação do problema dual . . . . .	128
8.7	Exercícios . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Método Dual Simplex</b>	<b>137</b>
9.1	Descrição do método . . . . .	137
9.2	Aplicação a um exemplo . . . . .	140
9.3	Interpretação geométrica . . . . .	141
9.4	Corretude do dual-simplex . . . . .	142
9.5	Solução básica dual viável inicial . . . . .	143
9.6	Exercícios . . . . .	147
<b>10</b>	<b>Pós-otimização e Programação paramétrica</b>	<b>149</b>
10.1	Mudança nos coeficientes da função objetivo . . . . .	149
10.2	Mudança no termo independente das restrições . . . . .	151
10.3	Acréscimo de variáveis . . . . .	153
10.4	Acréscimo de restrições . . . . .	155
10.5	Mudança na matriz de restrições . . . . .	158
10.6	Parametrização dos coeficientes da função objetivo . . . . .	160
10.7	Parametrização do termo independente das restrições . . . . .	165
10.8	Exercícios . . . . .	171

<b>11 Decomposições</b>	<b>177</b>
11.1 Dantzig-Wolfe . . . . .	177
11.2 Lagrange . . . . .	181
11.3 Benders . . . . .	185

# Capítulo 1

## Modelagem

Programação linear é uma disciplina com muitas aplicações práticas. Diversos problemas que aparecem em nosso dia-a-dia podem ser resolvidos com o uso de ferramentas de programação linear. O primeiro passo no processo de resolução consiste em construir uma abstração matemática, que chamamos modelo matemático, representativa do problema. O modelo é constituído de duas partes principais, o objetivo e as restrições, ambas descritas por meio de expressões matemáticas, definidas como função de variáveis que representam a solução do problema. No caso de programação linear, essas expressões são todas lineares. Neste capítulo, apresentamos o problema geral de programação linear e ilustramos o processo de modelagem por meio de exemplos variados. Entre vários exemplos possíveis, a escolha daqueles aqui apresentados serve a pelo menos dois propósitos. Primeiro, eles ilustram uma variedade de estratégias usadas no processo de modelagem. Segundo, dão a ideia da multiplicidade de aplicações que podem ser tratadas com a disciplina.

### 1.1 Problema de programação linear

Um *problema de programação linear* (PPL) consiste na maximização ou minimização de uma função linear em um conjunto definido pela interseção de um número finito de igualdades ou desigualdades lineares. Precisamente, podemos expressar um PPL na forma

$$\max / \min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (1.1)$$

$$\text{sujeito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} b_1 \quad (1.2)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} b_2 \quad (1.3)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} b_m, \quad (1.4)$$

onde  $c_j$ ,  $b_i$  e  $a_{ij}$ , para  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ , são coeficientes, e  $x_j$ , para  $j \in \{1, \dots, n\}$ , são variáveis, usualmente chamadas *variáveis de decisão*. A função em (1.1) é denominada *função objetivo*, e as expressões (1.2)-(1.4) são as *restrições* do problema. O símbolo  $\begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix}$  representa um dos sinais  $\leq$ ,  $=$  ou  $\geq$ , significando que cada restrição pode ser uma igualdade ou uma desigualdade não estrita. O conjunto de pontos que satisfazem as restrições definem o *conjunto ou região viável* do problema, e cada um de seus elementos é uma *solução viável*. Uma solução viável com melhor (máximo/mínimo) valor de objetivo é uma *solução ótima*.

Definindo a seguinte matriz e vetores

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

podemos expressar um PPL na forma

$$\begin{aligned} & \min / \max \quad c^\top x \\ & \text{sujeito a } Ax \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b. \end{aligned}$$

Quando todas as (ou algumas) variáveis do problema só admitem valores inteiros, temos um *problema de programação linear inteira* (PLI) - havendo tanto variáveis inteiras quanto contínuas é mais usual falarmos em programação linear inteira mista (PLIM). Nesse caso, o modelo linear torna-se

$$\min / \max \quad c^\top x \tag{1.5}$$

$$\text{sujeito a } Ax \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b \tag{1.6}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in J' \subseteq \{1, \dots, n\}. \tag{1.7}$$

Descartando-se as restrições de integralidade (1.7), obtemos um PPL que é chamado de *relaxação linear*. Vale destacar que certas propriedades da matriz  $A$  ou da matriz estendida  $(A, b)$  garantem a existência de solução ótima inteira para a relaxação linear. Em outras palavras, satisfeitas essas propriedades, o problema de programação inteira (ou inteira mista) pode ser considerado como de programação linear.

Um caso bastante importante do problema de programação linear inteira ocorre quando as variáveis são binárias, ou seja, admitem apenas valores 0 ou 1. Note que  $x_j \in \{0, 1\}$  equivale a  $0 \leq x_j \leq 1$  e  $x_j \in \mathbb{Z}$ . Logo, um problema linear com variáveis binárias é, de fato, um caso particular de (1.5)-(1.7).

Inúmeros problemas podem ser expressos como um problema de programação linear ou programação linear inteira. Essa expressão matemática do problema é chamada *modelo*. Procurando ilustrar a variedade desses problemas e as técnicas usadas na construção de seus modelos, apresentamos a seguir alguns exemplos clássicos e outros específicos, representativos de aplicações relevantes. A intenção é familiarizar o leitor com a área e com algumas estratégias que podem ser empregadas na construção de diversos modelos de problemas de programação linear e inteira.

## 1.2 Modelagem de problemas de programação linear

**Produção** Problemas de produção envolvem a decisão de que itens fabricar, dentro de um conjunto de possibilidades, a partir de recursos limitados, como matéria-prima, mão-de-obra, energia, infra-estrutura etc, visando à maximização do lucro ou minimização do custo da produção. A seguir apresentamos dois exemplos desse tipo de problema.

*Ex. 1.2.1.* Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, admite-se que o mercado absorverá qualquer produção a um preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R\$ 10,00, R\$ 15,00 e R\$ 20,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido (em horas) em cada seção da fábrica para produção de uma unidade de cada item, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Desejamos planejar a produção semanal da fábrica, usando programação linear.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Qde. Máquina
Corte	8	5	2	3
Dobra	5	10	4	10
Empacotamento	0,8	1	2	2

O primeiro passo para modelar um problema de otimização é definir as variáveis de decisão. No exemplo acima, elas são claramente o número de unidades a serem fabricadas, semanalmente, dos produtos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sejam tais variáveis  $x_A$ ,  $x_B$  e  $x_C$ , respectivamente. A função objetivo expressa o lucro a ser maximizado, sendo portanto

$$f(x_A, x_B, x_C) = 10x_A + 15x_B + 20x_C.$$

Por outro lado, temos uma restrição para cada seção da fábrica, estabelecendo que o limite de horas semanais disponíveis na seção não seja excedido com a produção. Produzindo  $x_A$  unidades de  $A$ , usamos  $8x_A$  horas na seção de corte. Similarmente, produzindo  $x_B$  e  $x_C$  unidades de  $B$  e  $C$ , respectivamente, utilizamos  $5x_B$  e  $2x_C$  horas nessa seção. Assim, considerando que há 3 máquinas para corte, totalizando  $3 \times 40$  horas disponíveis nessa seção, a restrição fica

$$8x_A + 5x_B + 2x_C \leq 120.$$

Similarmente, para as seções de dobra e empacotamento, as restrições referentes às disponibilidades de máquinas são:

$$5x_A + 10x_B + 4x_C \leq 400,$$

$$0,8x_A + x_B + 2x_C \leq 80.$$

Observe ainda que, por definição, as variáveis  $x_A$ ,  $x_B$  e  $x_C$  são não negativas. Resumindo, o modelo de PL para esse problema é:

$$\begin{aligned} \max & 10x_A + 15x_B + 20x_C \\ \text{s.a:} & 8x_A + 5x_B + 2x_C \leq 120 \\ & 5x_A + 10x_B + 4x_C \leq 400 \\ & 0,8x_A + x_B + 2x_C \leq 80 \\ & x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0. \end{aligned}$$

Propositalmente, não definimos no enunciado a unidade em que é medida a produção dos itens  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Por exemplo, caso seja quilograma (Kg), podemos considerar que as variáveis  $x_A$ ,  $x_B$  e  $x_C$  admitem valores reais. Nesse caso, temos, de fato, um problema de programação linear. Entretanto, caso a unidade fosse número de caixas, poderíamos agora considerar que as variáveis só admitiriam valores inteiros. Para isso, teríamos que incluir as restrições de integralidade  $x_A \in \mathbb{Z}$ ,  $x_B \in \mathbb{Z}$  e  $x_C \in \mathbb{Z}$ . Do ponto de vista de modelagem, essa é uma pequena modificação. Porém, veremos oportunamente que a inclusão dessas restrições torna a resolução do modelo bem mais complexa.

Neste texto, o foco são os problemas de programação linear. Todavia, neste capítulo vamos modelar tanto problemas contínuos quanto inteiros, posto que a diferença é simplesmente a inclusão de restrições de integralidade.

*Ex. 1.2.2.* Um fazendeiro tem 200ha de terra onde planeja plantar trigo, arroz e milho. A produção esperada, em Kg por hectare plantado, é de 1800, 2100 e 2900 para trigo, arroz e milho, respectivamente. Para atender ao consumo interno da fazenda, ele deve plantar pelo menos 12ha de trigo, 16ha de arroz e 20ha de milho. Ele tem condição de armazenar no máximo 700t de grãos. Sabendo que o trigo dá um lucro de R\$ 1,20 por Kg, o arroz de 60 centavos por Kg e o milho de 28 centavos por Kg, vamos elaborar um modelo de PL para planejar o plantio do fazendeiro que forneça o lucro máximo.

Diferentemente do primeiro exemplo, neste segundo a escolha das variáveis de decisão já não é tão direta. É possível pensar em pelo menos duas opções: número de hectares plantados com cada cultura ou número de quilogramas colhidos de cada grão. Note que há uma relação entre um conjunto de variáveis e outro, que exploraremos a seguir. No momento, vamos optar por usar as variáveis  $x_T$ ,  $x_A$  e  $x_M$  expressando o número de hectares plantados de trigo, arroz e milho, respectivamente.

Começemos então por identificar as restrições. Agora elas são de tipos variados. Primeiro, há uma restrição quanto ao número total de hectares plantados, qual seja:

$$x_T + x_A + x_M \leq 200.$$

Para atender o consumo interno, as seguintes restrições devem ser impostas:

$$x_T \geq 12, \quad x_A \geq 16, \quad x_M \geq 20.$$

Finalmente, a condição de armazenamento é expressa pela desigualdade

$$1800x_T + 2100x_A + 2900x_M \leq 700.000.$$

Note que o termo do lado esquerdo da expressão acima totaliza o valor em Kg da produção esperada. Essa quantidade deve ser no máximo 700t, ou melhor, 700.000Kg.

O lucro esperado com essa produção pode ser expresso por uma função linear das três variáveis definidas acima. De fato, plantando  $x_T$  hectares de trigo, espera-se obter  $1800x_T$  quilogramas, o que gera um lucro de  $1,2 \times 1800x_T$  reais. Similarmente, o lucro esperado com  $x_A$  e  $x_M$  hectares de arroz e milho é, respectivamente,  $0,60 \times 2100x_A$  e  $0,28 \times 2900x_M$  reais. Logo, a função objetivo a ser maximizada é

$$f(x_T, x_A, x_M) = 2160x_T + 1260x_A + 812x_M.$$

Com isso, o modelo obtido é

$$\begin{aligned} \max & 2160x_T + 1260x_A + 812x_M \\ \text{s.a: } & x_T + x_A + x_M \leq 200 \\ & 1800x_T + 2100x_A + 2900x_M \leq 700.000 \\ & x_T \geq 12, \quad x_A \geq 16, \quad x_M \geq 20. \end{aligned}$$

Note que não é preciso acrescentar as restrições de não negatividade, que advêm do significado das variáveis, pois elas são redundantes nesse exemplo.

Uma pergunta natural no contexto do problema acima é se a produção para atendimento do consumo interno não deveria ser excluída do cálculo do lucro. Nesse caso, a função objetivo tornar-se-ia:

$$f'(x_T, x_A, x_M) = 2160(x_T - 12) + 1260(x_A - 16) + 812(x_M - 20) = f(x_T, x_A, x_M) - 62.320.$$

Note que  $f'$  e  $f$  diferem de uma constante. Como os pontos de máximo (ou mínimo) de duas funções que diferem de uma constante são idênticos, concluímos que trocar uma função pela outra no modelo não muda a solução, apenas seu valor na função objetivo. Em outras palavras, podemos desconsiderar constantes aditivas que apareçam na função objetivo.

Voltando à possibilidade de utilizar outras variáveis de decisão, considere  $y_T$ ,  $y_A$  e  $y_M$  a quantidade (em quilogramas) de trigo, arroz e milho, respectivamente, obtidas com a plantação. Observe que

$$y_T = 1800x_T, \quad y_A = 2100x_A, \quad y_M = 2900x_M.$$



Consequentemente, podemos substituir as variáveis  $x$  pelas variáveis  $y$  no modelo acima, obtendo um novo modelo linear. Isso nos leva a concluir que não existe um único modelo linear que expressa um problema de programação linear.

Neste exemplo, temos que

$$\begin{bmatrix} x_T \\ x_A \\ x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1800} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2100} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2900} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_T \\ y_A \\ y_M \end{bmatrix}.$$

Ou seja, existe uma transformação linear mapeando as variáveis  $x$  nas variáveis  $y$ . Assim, podemos transformar o modelo linear nas variáveis  $x$  em um outro modelo linear nas variáveis  $y$  (escreva-o explicitamente).

Genericamente, suponha o seguinte modelo de PL

$$\begin{aligned} \min / \max \quad & c^\top x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b. \end{aligned}$$

A partir de uma transformação afim da forma  $x = By + d$ , obtemos  $c^\top x = (c^\top B)y + c^\top d$  e  $Ax = (AB)y + Ad$ . Logo, um modelo linear equivalente nas variáveis  $y$  é

$$\begin{aligned} \min / \max \quad & (c^\top B)y \\ \text{sujeito a} \quad & (AB)y \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b - Ad. \end{aligned}$$

**Escala** Em inúmeras situações desejamos determinar uma escala de tarefas, operários ou máquinas ao longo de um horizonte de tempo. Alguns desses problemas podem ser modelados com programação linear, como o apresentado a seguir.

*Ex.* 1.2.3. Devido ao número inconstante de passageiros, uma companhia de ônibus necessita de um número variado de motoristas de acordo com o horário considerado. A tabela a seguir especifica a quantidade mínima de motoristas necessários por turno. Considerando que cada motorista trabalha 8 horas seguidas e que o serviço pode começar apenas no início de cada turno, elabore um modelo linear para definir um plano de trabalho que resulte no número mínimo de motoristas.

turno	horário	mínimo de motoristas
0	1 às 5 horas	15
1	5 às 9 horas	30
2	9 às 13 horas	26
3	13 às 17 horas	32
4	17 às 21 horas	30
5	21 às 1 hora	19

Em seguida, admita que o salário base por turno seja  $S$  e que os motoristas ganham adicionais (percentuais do salário base), conforme os turnos trabalhados. Esses percentuais são, respectivamente, 5%, 2%, 0%, 0%, 3%, 2%. Modifique o modelo, visando à minimização do valor gasto com pagamento de salários.

Para modelar esse problema, também podemos pensar em diferentes variáveis de decisão. Por exemplo, seja  $x_i$ , para  $i \in \{0, \dots, 5\}$ , o número de motoristas que *entram* no turno  $i$ . Observe que os motoristas que entram no turno  $i$  trabalham nesse turno e no turno  $i + 1$  (soma módulo

6). Logo, um modelo linear para o problema é:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=0}^5 x_i \\
& \text{s.a: } x_0 + x_1 \geq 30 \\
& \quad x_1 + x_2 \geq 26 \\
& \quad x_2 + x_3 \geq 32 \\
& \quad x_3 + x_4 \geq 30 \\
& \quad x_4 + x_5 \geq 19 \\
& \quad x_5 + x_0 \geq 15 \\
& \quad x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in \{0, \dots, 5\}.
\end{aligned}$$

Genericamente, se  $T$  é o número de turnos e  $m_i \in \mathbb{Z}$  o número mínimo de motoristas demandados no turno  $i \in \{0, \dots, T-1\}$ , então o modelo fica:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=0}^{T-1} x_i \\
& \text{s.a: } x_i + x_{i+1 \bmod T} \geq m_{i+1 \bmod T}, \quad \forall i \in \{0, \dots, T-1\} \\
& \quad x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in \{0, \dots, T-1\}.
\end{aligned}$$

Observe que, pela definição das variáveis, incluímos as restrições de integralidade  $x_i \in \mathbb{Z}$ , obtendo assim um modelo de programação linear inteira. Todavia, é possível provar que, sendo  $T$  par, a matriz de restrições possui uma propriedade, chamada total unimodularidade (TU)<sup>1</sup>, que garante a existência de solução ótima inteira para a relaxação linear. Em outros termos, sendo  $T$  par, o problema é de programação linear. No caso de  $T$  ímpar, essa propriedade já não é mais garantida.

Para resolver a segunda parte do exercício, observe que um motorista que entra no turno  $i$  ganha um salário de  $2S$  (devido aos dois turnos consecutivos) adicionado a  $p_i S$  e  $p_{i+1 \bmod T} S$ , onde  $p_i$  é o percentual do salário base devido no turno  $i$ . A tabela abaixo resume o salário total por turno.

turno	salário total por motorista
0	2,07S
1	2,02S
2	2,00S
3	2,03S
4	2,05S
5	2,07S

Sendo assim, para obtenção do novo modelo, é suficiente substituir a função objetivo  $\sum_{i=0}^5 x_i$  por

$$2,07Sx_0 + 2,02Sx_1 + 2,00Sx_2 + 2,03Sx_3 + 2,05Sx_4 + 2,07Sx_5.$$

Observe que  $S$  é uma constante positiva que multiplica todos os termos da função objetivo. Como os pontos de mínimo (ou máximo) de uma função são os mesmos que os dessa função multiplicada por um constante positiva, podemos desprezar a constante na expressão da função e considerar apenas

$$2,07x_0 + 2,02x_1 + 2,00x_2 + 2,03x_3 + 2,05x_4 + 2,07x_5.$$

---

<sup>1</sup>Uma matriz é TU se todas as suas submatrizes quadradas têm determinante com valor  $-1, 0, +1$

Em outros termos, não é preciso conhecer o valor do salário base  $S$  para resolver o problema (que poderia ser uma informação de acesso restrito). Evidentemente que o valor ótimo obtido com essa função simplificada deve ser multiplicado por  $S$  para obter o valor ótimo real do problema.

De maneira geral, podemos desconsiderar constantes multiplicativas positivas na função objetivo. Similarmente, podemos desconsiderar constantes multiplicativas negativas, desde que invertamos o sentido de otimização (de maximização para minimização ou vice-versa).

**Portifólio** Em problemas de investimento, deseja-se decidir como aplicar um certo montante em uma carteira de aplicações. Entre os aspectos levados em consideração estão rentabilidade, liquidez e risco. A seguir apresentamos um exemplo que se enquadra nesse cenário.

*Ex. 1.2.4.* Karol tem \$22.000 para investir durante 5 anos. No começo de cada ano, ela pode investir em aplicações de 1 ou 2 anos. O banco paga 8% de juros pela aplicação de 1 ano e 17% de juros pela de 2 anos. Além disso, o banco oferece a partir do início do segundo ano um certificado de 3 anos, rendendo 27%. Por sua vez, no início de cada ano, do segundo ao quinto, Karol precisa de \$300 para pagar uma prestação. Supondo que ela então reinveste todo o dinheiro restante disponível no início de cada ano, programe sua carteira de investimentos para maximizar o montante no final do quinto ano.

Precisamos determinar como Karol vai aplicar seus recursos nas aplicações disponíveis ao longo do tempo. Sendo assim, vai ser conveniente definir uma variável com dois índices: um para indicar o tipo de aplicação e o outro para apontar o ano. Seja então  $x_{ij} \geq 0$  o montante aplicado no início do ano  $i \in \{1, \dots, 5\}$  na aplicação por  $j \in \{1, 2, 3\}$  anos. Observe que no início do ano  $i = 1$ , a disponibilidade de recursos é \$22.000, enquanto as possibilidades de aplicação são por  $j \in \{1, 2\}$  anos, levando à seguinte equação:

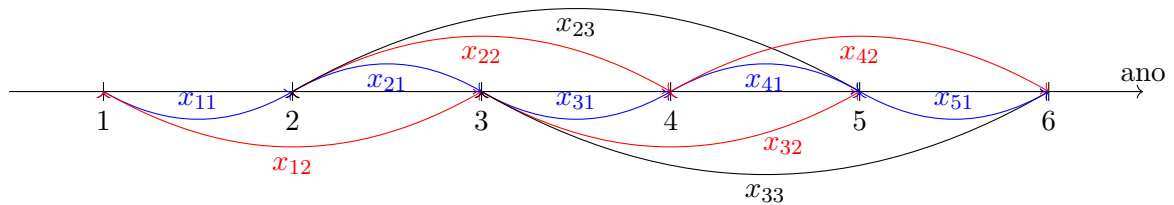
$$x_{11} + x_{12} = 22.000.$$

No início do ano  $i = 2$ , o montante disponível é aquele originário do aplicado no ano 1 por um ano, adicionado ao respectivo rendimento, ou seja,  $1,08x_{11}$ . Nesse segundo ano, ela reaplica, portanto,  $1,08x_{11} - 300$ . Já as possibilidades de aplicação são por  $j \in \{1, 2, 3\}$  anos. Isso resulta na equação

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1,08x_{11} - 300$$

Note que, ao exigirmos não negatividade das variáveis, garantimos  $1,08x_{11} - 300 \geq 0$ , ou seja, que haverá dinheiro disponível para a primeira prestação.

As restrições dos anos seguintes são similares. A figura a seguir ilustra o fluxo de capital ao longo do período, indicando as disponibilidades de recursos e as opções de aplicação em cada início de ano.



Em particular, o montante disponível no início do ano 6, a ser maximizado, é  $1,08x_{51} +$

$1,17x_{42} + 1,27x_{33}$ . Dessa forma, obtemos o seguinte modelo de PL:

$$\begin{aligned}
& \max 1,08x_{51} + 1,17x_{42} + 1,27x_{33} \\
& \text{s.a: } x_{11} + x_{12} = 22.000 \\
& \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1,08x_{11} - 300 \\
& \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1,08x_{21} + 1,17x_{12} - 300 \\
& \quad x_{41} + x_{42} = 1,08x_{31} + 1,17x_{22} - 300 \\
& \quad x_{51} = 1,08x_{41} + 1,17x_{32} + 1,27x_{23} - 300 \\
& \quad x_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 5\}, j \in \{1, 2, 3\}.
\end{aligned}$$

**Transporte e alocação** Uma importante atividade humana aparece no transporte de mercadorias ou pessoas. Há vários cenários possíveis. Alguns dos problemas relacionados são de programação linear, como este a seguir.

*Ex.* 1.2.5. Uma empresa precisa abastecer  $n$  clientes a partir de  $m$  depósitos. A demanda do cliente  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  é  $b_j$ , enquanto a oferta máxima do depósito  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  é  $a_i$ . Deseja-se abastecer a demanda a custo mínimo, considerando um custo unitário  $c_{ij}$  de atender o cliente  $j$  a partir do depósito  $i$ . Elabore um modelo de PL para este fim. Como o modelo poderia ser simplificado caso cada depósito fosse capaz de atender sozinho toda a demanda, ou seja,  $a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ? Esse caso é chamado não capacitado.

A Figura 1.1 apresenta uma ilustração do problema. Para modelá-lo, podemos definir a variável  $x_{ij}$  como a quantidade transportada do depósito  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  para o cliente  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Como isso, o modelo fica:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.8)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.10)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.11)$$

A função objetivo (1.8) minimiza o custo total de transporte dos depósitos para os clientes. A  $i$ -ésima restrição em (1.9) garante que a quantidade total transportada a partir do depósito  $i$  é no máximo sua capacidade  $a_i$ . Por sua vez, a  $j$ -ésima restrição em (1.10) estabelece que a quantidade total transportada para o cliente  $j$  é igual a sua demanda  $b_j$ .

Seja  $\Delta = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$  a diferença entre a oferta total e a demanda total. Observe que, se  $\Delta = 0$ , podemos substituir as desigualdades em (1.9) por igualdades, já que toda a capacidade de oferta de cada armazém será usada. Quando  $\Delta > 0$ , haverá folga em uma ou mais restrições (1.9) em qualquer solução viável. Para obter igualdade em (1.9), podemos considerar a existência de um “cliente artificial”  $n + 1$  com demanda  $b_{n+1} = \Delta$  e custos nulos dos depósitos para esse cliente. Assim, definimos uma variável  $x_{i,n+1}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , expressando a quantidade ficticiamente transportada de  $i$  para esse cliente artificial, ou seja, a oferta excedente do depósito  $i$ . Por fim, quando  $\Delta < 0$ , não haverá solução viável para o modelo acima. Nesse caso, porém, poderíamos pensar em atender parcialmente a demanda dos clientes, a custo mínimo. Para isso, criamos um “depósito artificial”  $m + 1$ , com oferta  $a_{m+1} = -\Delta$  e custos nulos dele para todos os clientes. Então, definimos uma variável  $x_{m+1,j}$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ , representando a quantidade ficticiamente transportada desse depósito extra para o cliente  $j$ , ou melhor, a demanda não atendida de  $j$ .

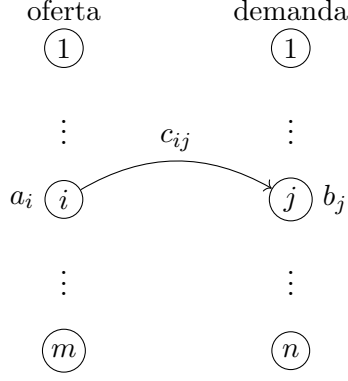


Figura 1.1: Ilustração do problema de transporte.

Sendo assim, em qualquer caso, por meio da criação de um cliente artificial ou depósito artificial, podemos sempre admitir que o total da oferta é igual ao total da demanda, de modo a obter um modelo de transporte no formato

$$\begin{aligned} \min & c^\top x \\ \text{s.a: } & Ax = d \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é o vetor das  $m \times n$  variáveis,  $c \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é o vetor dos custos de transporte,  $d = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  com  $a \in \mathbb{R}^m$  e  $b \in \mathbb{R}^n$  contendo as capacidades dos depósitos e as demandas dos clientes, respectivamente, e  $A \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (mn)}$  é uma matriz binária com exatamente dois elementos não nulos (iguais a 1) por coluna (na coluna relacionada ao depósito  $i$  e ao cliente  $j$ , os elementos unitários estão na linha da restrição de oferta referente a  $i$  e na linha da restrição de demanda associada a  $j$ ).

A estrutura dessa matriz garante que o problema de transporte tem solução inteira, sempre que  $d$  é um vetor inteiro, independentemente do vetor  $c$ . Dessa forma, mesmo que seja exigido o transporte de uma quantidade inteira (por exemplo, número de caixas) entre cada depósito e cliente, o problema pode ser resolvido com programação linear.

Sob a hipótese de que cada depósito é capaz de atender sozinho toda a demanda, ou seja,  $a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , as restrições (1.9) podem ser descartadas. Com isso, o modelo torna-se

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a: } & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $z_{ij} = x_{ij}/b_j$ , obtemos a seguinte expressão alternativa do modelo:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^n b_j \left( \sum_{i=1}^m c_{ij} z_{ij} \right) \\ \text{s.a: } & \sum_{i=1}^m z_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & z_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Observe no modelo acima que a restrição relativa a um certo cliente  $j$  não interfere naquela associada a outro cliente  $j' \neq j$ , ou seja, as restrições não compartilham variáveis. Desse modo, o modelo pode ser decomposto em  $n$  modelos independentes, um para cada  $j$ , dado por

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ & x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Com isso, uma solução pode ser trivialmente encontrada. Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , é suficiente determinar  $i^* \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $c_{i^*j} = \min\{c_{ij} : i \in \{1, \dots, m\}\}$ . Em outros termos, basta determinar o depósito que abastece de forma mais barata cada cliente.

*Ex. 1.2.6 (Problema de alocação).* Em uma loja de departamentos existem  $m$  funcionários para serem distribuídos em  $n = m$  atividades. Respondendo a um questionário, cada funcionário  $i$  atribuiu um grau de satisfação  $c_{ij} \geq 0$  para desempenhar a atividade  $j$ . Cada funcionário só pode ser designado para uma atividade, e cada atividade só pode ser executada por um único funcionário. Formule um modelo para alocar funcionários a atividades, maximizando o grau de satisfação total das designações efetuadas. Haveria mudança de solução se desejássemos maximizar o grau médio (em vez do grau total)? Como ficariam os casos em que  $m > n$  e  $m < n$ ?

Podemos pensar no problema acima como um caso particular do problema de transporte com variáveis inteiras, onde cada funcionário vai ou não ser “transportado” para uma atividade. Nesse sentido, cada depósito tem oferta unitária (um funcionário) e cada cliente (atividade) tem demanda também unitária. Assim, definindo a variável binária  $x_{ij}$ , para  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ , que recebe valor 1, quando o funcionário  $i$  é alocado à atividade  $j$ , ou 0, caso contrário, obtemos o seguinte modelo:

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (1.12)$$

$$\text{s.a:} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (1.15)$$

Lembre que determinar o(s) ponto(s) de máximo de uma função  $f$  equivale a encontrar o(s) ponto(s) de mínimo de  $-f$ . Logo, o problema acima é de fato um caso particular do problema de transporte (1.8)-(1.11) com integralidade nas variáveis. Como vimos, vai existir solução inteira, mesmo trocando as restrições (1.15) por  $x_{ij} \geq 0$ , devido a estrutura da matriz de restrições.

Observe que o grau médio das designações será dado por  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$ , posto que elas serão em número de  $m$ . Sendo  $m$  constante, a nova função objetivo é equivalente a anterior. Adicionalmente, caso haja mais funcionários que atividades ( $m > n$ ) ou mais atividades que funcionários ( $n > m$ ), podemos criar  $m - n$  funcionários fictícios ou  $n - m$  atividades fictícias e então modelar o problema de forma similar.

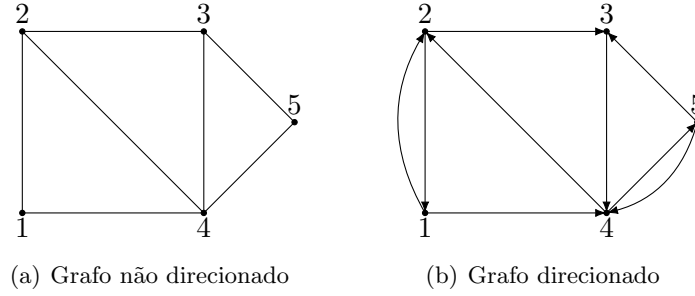


Figura 1.2: Representação gráfica de grafo

### 1.3 Modelagem de problemas em grafos

Um grafo (ou grafo simples) é uma estrutura matemática definida por um par ordenado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito, cujos elementos são chamados vértices, e  $E$  é um conjunto de pares de elementos distintos de  $V$ , denominados arestas. Quando os pares em  $E$  são não ordenados, o grafo é dito não direcionado; quando são ordenados, o grafo é dito direcionado (ou digrafo) e, normalmente, as arestas (direcionadas) são chamadas arcos. No primeiro caso, uma aresta ligando os vértices  $u$  e  $v$  é denotada por  $\{u, v\}$  ou simplesmente  $uv$ , e dizemos que  $u$  e  $v$  são as extremidades da aresta; no segundo, um arco de  $u$  para  $v$  é denotado por  $(u, v)$ , sendo  $u$  a origem (ou cauda) e  $v$  o destino (ou cabeça). Grafos são fundamentais para descrever entidades reais, como uma rede social, uma malha viária, uma rede de comunicações, relações evolutivas de organismos etc.

A representação gráfica de um grafo consiste em associar cada vértice a um ponto no plano e cada aresta a uma linha ligando os vértices que a definem. Uma seta no sentido de  $u$  para  $v$  é usada para representar um arco  $(u, v)$ . Ver Figura 1.2.

Dois vértices que definem uma aresta são ditos adjacentes ou vizinhos. Assim, a vizinhança de um vértice  $v$  é  $N(v) = \{u : vu \in E\}$ . No caso direcionado, distinguimos a vizinhança positiva  $N^+(v) = \{u : (v, u) \in E\}$  e negativa  $N^-(v) = \{u : (u, v) \in E\}$ . Para o grafo da Figura 1.2(a), temos  $N(1) = \{2, 4\}$ , enquanto que  $N^+(1) = \{2, 4\}$  e  $N^-(1) = \{2\}$  no digrafo da Figura 1.2(b). As arestas incidentes a um vértice  $v$  são aquelas que ligam  $v$  a seus vizinhos, formando o conjunto  $\delta(v) = \{vu \in E : u \in V\}$ . Similarmente, no caso direcionado usamos  $\delta^+(v) = \{(v, u) \in E : u \in V\}$  e  $\delta^-(v) = \{(u, v) \in E : u \in V\}$  para representar as arestas que saem de  $v$  e nele chegam, respectivamente. Por extensão, para  $S \subset V$ , definimos  $\delta(S) = \{vu \in E : v \in S, u \in V \setminus S\}$ ,  $\delta^+(S) = \{(v, u) \in E : v \in S, u \in V \setminus S\}$  e  $\delta^-(S) = \{(u, v) \in E : v \in S, u \in V \setminus S\}$ . Finalmente, para  $S \subset V$ , denotamos por  $E[S] = \{uv : u \in S, v \in S\}$  as arestas com ambas as extremidades em  $S$ . Por exemplo, para  $S = \{1, 2\}$ , temos  $\delta^+(S) = \{(1, 4), (2, 3)\}$ ,  $\delta^-(S) = \{(4, 2)\}$  e  $E[S] = \{(1, 2), (2, 1)\}$  no digrafo da Figura 1.2(b).

**Caminhos e ciclos** Um caminho em um grafo  $G$  é uma sequência intercalada de vértices e arestas de  $G$  da forma  $P = \langle v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{p-1}, e_{p-1}, v_p \rangle$ , onde  $v_i \neq v_j$ , para  $i \neq j$ , e  $e_i = v_i v_{i+1}$ . Dizemos que  $P$  é um caminho entre  $v_1$  e  $v_p$ , ou ainda, um  $v_1 v_p$ -caminho. Sendo  $G$  direcionado, pedimos que  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  e dizemos que o caminho é direcionado de  $v_1$  (origem) para  $v_p$  (destino). Um ciclo em  $G$  é uma sequência intercalada de vértices e arestas de  $G$  da forma  $C = \langle v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{p-1}, e_{p-1}, v_p, e_p, v_{p+1} = v_1 \rangle$ , onde  $v_i \neq v_j$ , para  $i \neq j$ , e  $e_i = v_i v_{i+1}$ . Em outros termos, um ciclo é um caminho junto com uma aresta entre suas extremidades (caso essa aresta exista). No caso direcionado, devemos ter  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ , e ciclo é chamado de ciclo direcionado ou circuito.

Um caminho em um grafo pode descrever por exemplo o percurso entre dois locais em um

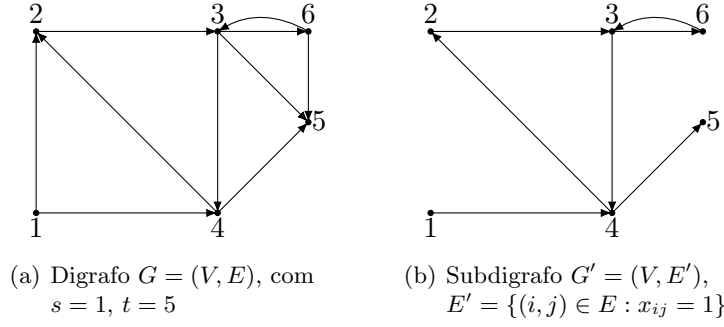


Figura 1.3: Solução para o modelo de caminho mínimo

território, o trajeto de uma informação entre dois computadores ligados por meio de uma rede, o processo evolutivo de um organismo desde um ancestral etc. Alguns problemas que envolvem caminhos em grafos podem ser modelados com programação linear.

*Ex.* 1.3.1 (Problema de caminho mínimo). Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado com peso  $c_{ij} \geq 0$  atribuído a cada arco  $(i, j) \in E$ . O peso de um caminho é a soma dos pesos dos arcos a ele pertencentes. Apresente um modelo para determinar um caminho de peso mínimo entre dois vértices fixos  $s$  (origem) e  $t$  (destino). Sem perda de generalidade, admitimos que  $N^-(s) = N^+(t) = \emptyset$ .

Para modelar esse problema, vamos definir uma variável binária  $x_{ij}$ , para todo arco  $(i, j) \in E$ , que receberá valor 1, se  $(i, j)$  pertence ao caminho, ou valor 0, caso contrário. Dessa forma, o peso do caminho é trivialmente dado por

$$\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}. \quad (1.16)$$

Para assegurar que os arcos escolhidos formem um  $st$ -caminho, precisamos garantir que exatamente um arco deve sair de  $s$  e exatamente um arco deve chegar a  $t$ , ou seja:

$$- \sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = -1 \quad (1.17)$$

$$\sum_{i \in N^-(t)} x_{it} = 1 \quad (1.18)$$

Além disso, a quantidade de arcos chegando em qualquer vértice  $k$ , diferente de  $s$  e  $t$ , é igual a quantidade de arcos saindo desse vértice. Precisamente, temos

$$\sum_{i \in N^-(k)} x_{ik} - \sum_{j \in N^+(k)} x_{kj} = 0 \quad \forall k \in V \setminus \{s, t\}. \quad (1.19)$$

Claramente, todo  $st$ -caminho define um vetor binário  $x$  satisfazendo (1.17)-(1.19), onde  $x_{ij} = 1$  se, e somente se,  $(i, j)$  é arco desse caminho. Por outro lado, queremos argumentar que todo vetor binário  $x$  satisfazendo (1.17)-(1.19) define a união de um  $st$ -caminho direcionado e ciclos direcionados (não necessariamente disjuntos), como ilustra a Figura 1.3. De fato, considere o subgrafo de  $G$  dado por  $G' = (V, E')$ , onde  $E' = \{(i, j) \in E : x_{ij} = 1\}$  é o conjunto de arcos definidos pelo vetor  $x$ .

Primeiro, suponha que  $G'$  não contém ciclo direcionado. Nesse caso, queremos mostrar que  $G'$  é um  $st$ -caminho. Por (1.17), sai um arco de  $s$ , que chega a um vértice  $k \neq s$ . Se  $k = t$ , temos um  $st$ -caminho trivial. Se  $k \neq t$ , por (1.19), sai um arco de  $k$ , chegando a  $k' \neq s$ . Como antes,



$V$	(1, 2)	(1, 4)	(2, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(4, 2)	(4, 5)	(6, 3)	(6, 5)
1	-1	-1								
5					1			1		1
2	1		-1				1			
3			1	-1	-1	-1			1	
4		1		1			-1	-1		
6						1			-1	-1

Figura 1.4: Matriz de incidência do digrafo da Figura 1.2(b)

ou  $k' = t$  e temos um  $st$ -caminho, ou  $k' \neq t$  e sai um arco de  $k'$  para algum vértice diferente de  $s$ . Prosseguindo, como não há ciclo, iremos eventualmente atingir  $t$ , formando um  $st$ -caminho  $P$ . Suponha, por absurdo, que  $G'$  não é esse caminho  $P$ . Então, existe um arco de  $G'$  que não está em  $P$ , digamos  $(i, j)$ . Por (1.18), temos que  $j \neq t$ , pois o único arco de  $G'$  entrando em  $t$  está em  $P$ . Além disso,  $j \neq s$ , posto que  $N^-(s) = \emptyset$ . Então, por (1.19), deve existir um arco em  $G'$  saindo de  $j$ , digamos  $(j, \ell)$ , que não está em  $P$ . Pelos mesmos motivos,  $\ell \neq t$  e  $\ell \neq s$ . Prosseguindo a partir de  $\ell$  e usando (1.19), eventualmente chegamos a algum vértice já visitado nesse percurso: uma contradição, pois  $G'$  não tem circuito. Logo,  $G'$  é um  $st$ -caminho.

Agora, suponha que  $G'$  possui um circuito. Esse circuito não passa por  $s$  nem  $t$ , visto que  $N^-(s) = N^+(t) = \emptyset$ . Removendo de  $G'$  os arcos desse circuito, obtemos um subgrafo  $G''$  cujos arcos remanescentes definem um novo vetor  $x$  ainda satisfazendo (1.17)-(1.19) (por que?). Considere, por exemplo, remover os arcos  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$  e  $(4, 2)$  da Figura 1.3(b). Prosseguindo a partir de  $G''$ , eventualmente obtemos um grafo  $G^*$ , sem circuito, cujos arcos definem um vetor  $x^*$  verificando (1.17)-(1.19). Pelo parágrafo anterior,  $G^*$  é um  $st$ -caminho. Logo,  $G'$  é união de um  $st$ -caminho com circuitos.

Finalmente, observe que o valor da função objetivo em  $x^*$  é menor ou igual ao valor da função objetivo em  $x$ , pois os pesos são não negativos. Em outras palavras, todo vetor  $x$  que satisfaz (1.17)-(1.19) ou define um  $st$ -caminho ou tem associado a ele um outro vetor  $x^*$  que define um  $st$ -caminho e tem valor objetivo inferior ou igual ao de  $x$ . Isto implica que um modelo para problema de caminho mínimo é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & (1.16) \\ \text{s.a:} \quad & (1.17) - (1.19) \\ & x \in \{0, 1\}^{|E|}. \end{aligned}$$

É importante destacar que a matriz de restrições é a matriz de incidência do grafo  $G$ , que possui uma linha para cada vértice e uma coluna para cada arco. Veja na Figura 1.4 essa matriz para  $G$  sendo o digrafo da Figura 1.2(b). A coluna relacionada ao arco  $(i, j)$  tem exatamente dois elementos não nulos: -1, na linha referente ao vértice  $i$  (origem), e +1, na linha referente ao vértice  $j$  (destino). Essa matriz goza da propriedade de total unimodularidade, de modo que as restrições  $x \in \{0, 1\}^{|E|}$  podem ser substituídas por  $x \geq 0$ , mantendo o valor ótimo do problema e uma solução ótima inteira.

**Fluxo** Sejam  $G = (V, E)$  uma grafo direcionado,  $s, t \in V$  e  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função de capacidade sobre os arcos. Um  $st$ -fluxo em  $G$  é uma função  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  respeitando as seguintes condições:

- Capacidade:  $\phi(i, j) \leq c(i, j) \ \forall (i, j) \in E$ ,
- Conservação:  $\sum_{j \in N^+(k)} \phi(k, j) = \sum_{i \in N^-(k)} \phi(i, k) \ \forall k \in V \setminus \{s, t\}$ .

O valor de um fluxo  $\phi$  é dado pela diferença entre o fluxo que sai da origem  $s$  e o fluxo que entra nela, ou seja,  $\sum_{k \in N^+(s)} \phi(s, k) - \sum_{k \in N^-(s)} \phi(k, s)$ . Somando as equações de conservação de fluxo, obtemos que esse valor é igual a diferença entre o fluxo que chega ao destino  $t$  e aquele que sai de  $t$ , isto é,  $\sum_{k \in N^-(t)} \phi(k, t) - \sum_{k \in N^+(t)} \phi(t, k)$ . Usualmente, por simplicidade, admitimos que  $N^-(s) = N^+(t) = \emptyset$ . Nesse caso, o valor do fluxo é dado simplesmente pelo total de fluxo que sai da origem  $s$  ou, igualmente, pelo total de fluxo que chega ao destino  $t$ .

Um fluxo em um grafo pode representar por exemplo o tráfego entre dois pontos de uma malha viária, o escoamento de líquido entre dois pontos por uma rede de dutos etc.

*Ex. 1.3.2 (Problema do fluxo máximo).* Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado com capacidade  $c_{ij}$  atribuída a cada arco  $(i, j) \in E$ . Apresente um modelo para determinar o máximo fluxo (fluxo de maior valor) entre dois vértices fixos  $s$  e  $t$ . Por simplicidade, admitimos que  $N^-(s) = N^+(t) = \emptyset$ .

Primeiro, observe que um caminho é um fluxo particular (de valor 1). A partir disso, podemos adaptar a formulação de caminho mínimo para fluxo máximo. Agora, seja  $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$  o valor do fluxo que passa no arco  $(i, j) \in E$ . Seja ainda  $f \in \mathbb{R}$  a variável que armazena o valor do fluxo. Desse modo, um modelo para o problema é:

$$\max f \quad (1.20)$$

$$\text{s.a: } - \sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = -f \quad (1.21)$$

$$\sum_{i \in N^-(t)} x_{it} = f \quad (1.22)$$

$$\sum_{i \in N^-(k)} x_{ik} - \sum_{j \in N^+(k)} x_{kj} = 0 \quad \forall k \in V \setminus \{s, t\} \quad (1.23)$$

$$x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \quad (1.24)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E. \quad (1.25)$$

Note que a matriz das restrições (1.21)-(1.23) é a mesma de (1.17)-(1.19) com inclusão de uma coluna referente à variável  $f$ . Além disso, junto com as restrições de não negatividade, há também as de limite superior  $x_{ij} \leq c_{ij}$ , para todo  $(i, j) \in E$ . Essa modificação na estrutura da matriz de restrições mantém a total unimodularidade, já mencionada anteriormente, implicando que uma solução ótima de (1.20)-(1.25) é inteira. Isso significa que, mesmo exigindo um fluxo com valores inteiros, o modelo acima ainda é correto (nesse caso, obviamente podemos supor  $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ , para todo  $(i, j) \in E$ .)

**Corte de arestas** Sejam  $G = (V, E)$  uma grafo direcionado,  $s, t \in V$  e  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função de capacidade sobre os arcos. Um  $st$ -corte em  $G$  é um conjunto compreendendo todos os arcos com origem em um conjunto  $S$  contendo  $s$  e destino em  $V \setminus S$ , que deve conter  $t$ . Em outros termos, é um conjunto da forma  $\delta^+(S)$  onde  $s \in S$  e  $t \in V \setminus S$ . A capacidade de um corte é a soma das capacidades de seus arcos. A denominação corte deve-se ao fato de que, ao se retirar de  $G$  os arcos de um corte, não haverá mais  $st$ -caminho.

Note que há uma estreita relação entre o valor de um  $st$ -fluxo e a capacidade de um  $st$ -corte. De fato, um fluxo que escoar a partir de  $s$  passa, todo ele, pelos arcos de um  $st$ -corte antes de atingir  $t$ . Logo, o valor de qualquer  $st$ -fluxo é no máximo a capacidade de qualquer  $st$ -corte. Na verdade, há um importante teorema estabelecendo que o valor de um fluxo máximo é igual a mínima capacidade de um corte.

*Ex. 1.3.3 (Problema do corte mínimo).* Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado com capacidade  $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$  atribuída a cada arco  $(i, j) \in E$ . Apresente um modelo para determinar um  $st$ -corte mínimo (corte de capacidade mínima). Sem perda de generalidade, admitimos que  $N^-(s) = N^+(t) = \emptyset$ .

Vamos definir uma variável binária  $u_i$  para indicar se  $i \in S$  ( $u_i = 1$ ) ou  $i \in V \setminus S$  ( $u_i = 0$ ), onde  $S$  é o subconjunto de vértices que define o corte de arestas  $\delta^+(S)$ . Além disso, usamos a variável  $v_{ij}$ , para cada arco  $(i, j) \in E$ , determinando se  $(i, j) \in \delta^+(S)$  ( $v_{ij} = 1$ ) ou  $(i, j) \notin \delta^+(S)$  ( $v_{ij} = 0$ ). Temos as seguintes possibilidades para as variáveis  $u_i$ ,  $u_j$  e  $v_{ij}$ :

$u_i$	$u_j$	$v_{ij}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Então, concluímos que  $v_{ij} = \max\{0, u_i - u_j\}$ . Consequentemente, obtemos o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} v_{ij} \\
& \text{s.a: } u_s = 1, u_t = 0 \\
& \quad v_{ij} = \max\{0, u_i - u_j\}, \forall (i, j) \in E \\
& \quad u_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V \\
& \quad v_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in V, \forall j \in V.
\end{aligned}$$

Observe que esse modelo não é linear, devido às restrições  $v_{ij} = \max\{0, u_i - u_j\}$ . Por outro lado, a minimização da função objetivo leva a menor valoração possível de cada variável  $v_{ij}$ , posto que  $c_{ij} \geq 0$ . Assim, podemos trocar  $v_{ij} = \max\{0, u_i - u_j\}$  por  $v_{ij} \geq \max\{0, u_i - u_j\}$ , ou melhor, por  $v_{ij} \geq 0$  e  $v_{ij} \geq u_i - u_j$ . Após essa mudança, chegamos ao modelo linear:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} v_{ij} \\
& \text{s.a: } u_s = 1, u_t = 0 \\
& \quad v_{ij} - u_i + u_j \geq 0, \forall (i, j) \in E \\
& \quad u_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V \\
& \quad v_{ij} \in \{0, 1\} \forall j \in V.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Vale destacar que a matriz das restrições (1.26) é a transposta da matriz das restrições (1.21)-(1.24), sendo portanto também TU. Por conseguinte, podemos descartar as restrições de integralidade nesse modelo de corte mínimo, obtendo um modelo linear.

**Emparelhamento** Um emparelhamento em um grafo não direcionado é um subconjunto de arestas que, duas-a-duas, não possuem extremidade comum.

Um emparelhamento pode representar, por exemplo, um conjunto de alocações funcionário-atividade, como no Exemplo 1.2.6, ou um conjunto de duplas disjuntas em um universo de indivíduos onde foi estabelecida uma relação binária de compatibilidade para a formação pares.

*Ex. 1.3.4.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado com peso  $c_e$  atribuído a cada aresta  $e \in E$ . O peso de um emparelhamento em  $G$  é a soma total dos pesos das arestas desse emparelhamento. Vamos elaborar um modelo para determinar um emparelhamento de peso máximo em  $G$ .

Note que a condição para que um subconjunto de arestas forme um emparelhamento equivale a pedir que nesse subconjunto haja no máximo uma aresta incidente em qualquer vértice do grafo. Sendo assim, definindo uma variável binária  $x_e$  para indicar se a aresta  $e \in E$  é escolhida ( $x_e = 1$ ) ou não ( $x_e = 0$ ), um modelo de programação linear inteira para determinar um emparelhamento

de peso máximo é:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \quad \forall v \in V \\ & x_e \in \{0, 1\}, \forall e \in E. \end{aligned}$$

Vale observar que nesse modelo as restrições de integralidade não podem ser simplesmente dispensadas. Por exemplo, suponha que  $G = (V, E)$  define um triângulo, ou seja,  $V = \{1, 2, 3\}$  e  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ , e todos os pesos são unitários. O modelo então torna-se:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_{12} + x_{13} + x_{23} \\ \text{s.a:} \quad & x_{12} + x_{13} \leq 1 \\ & x_{12} + x_{23} \leq 1 \\ & x_{13} + x_{23} \leq 1 \\ & x_{12}, x_{13}, x_{23} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Note que há no máximo uma aresta do triângulo em qualquer emparelhamento; logo cada aresta é um emparelhamento máximo, de peso 1. Entretanto, na relaxação linear do modelo acima, podemos atribuir valor 0,5 para as três variáveis  $x_{12}$ ,  $x_{13}$  e  $x_{23}$ , satisfazendo todas as restrições e levando a um valor de objetivo igual a 1,5. Portanto, o valor ótimo da relaxação é maior que o valor ótimo do problema, mostrando que, se descartamos as restrições de integralidade, não obteremos uma solução ótima.

Entretanto, é possível provar que as restrições de integralidade podem ser substituídas por um conjunto de restrições lineares que advém exatamente da interpretação do exemplo acima. Entre os três vértices do grafo, podemos escolher no máximo  $\lfloor 3/2 \rfloor$  arestas. Em geral, se tomamos um subconjunto de vértices de cardinalidade  $k$ , no máximo  $\lfloor k/2 \rfloor$  arestas com extremidades nesse conjunto podem participar de um emparelhamento, dado que cada aresta escolhida proíbe seus dois extremos de participarem de outra aresta do emparelhamento. Nesse sentido, as seguintes desigualdades são válidas, ou seja, satisfeitas por todas as soluções viáveis (emparelhamentos):

$$\sum_{e \in E[S]} x_e \leq \left\lfloor \frac{|S|}{2} \right\rfloor, \quad \forall S \subseteq V. \quad (1.27)$$

Por exemplo, no caso de  $G = (V, E)$  ser um triângulo, essa restrição para  $S = V$  é

$$x_{12} + x_{13} + x_{23} \leq 1.$$

Observe que ela “corta” a solução  $x_{12} = x_{13} = x_{23} = 0,5$  da relaxação. Mais ainda, incluindo essa restrição no modelo, uma solução ótima da relaxação passa a consistir em escolher exatamente uma das três variáveis para ter valor 1. Em outras palavras, com a inclusão dessa nova restrição, podemos descartar as restrições de integralidade.

Na verdade, é possível mostrar que, em geral, incluindo no modelo as restrições (1.27) para todo subconjunto  $S$  de cardinalidade ímpar, podemos descartar as restrições de integralidade.

Aqui temos um caso concreto em que conseguimos transformar um problema de programação inteira em um problema de programação linear, acrescentando algumas desigualdades que são redundantes no modelo com variáveis inteiras, mas cortam as soluções fracionárias “indesejáveis” da relaxação linear. Vale mencionar que, em teoria, isso é sempre possível. Em outros termos, todo modelo de PLI possui um modelo de PL equivalente. A questão difícil é determinar as restrições adicionais, que substituiriam as de integralidade.

**Árvore geradora** Uma árvore é um grafo não direcionado onde há exatamente um caminho entre cada par de vértices. Uma arborescência é um grafo direcionado onde existe um vértice especial, chamado raiz, a partir do qual há exatamente um caminho direcionado para cada outro vértice. Uma árvore (arborescência) geradora de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  com os mesmos vértices e que é uma árvore (arborescência). Se  $G$  tem  $n$  vértices, pode-se mostrar que uma árvore (arborescência) geradora é um subgrafo com  $n$  vértices,  $n - 1$  arestas e sem ciclos.

Uma árvore pode descrever uma estrutura de mínima conexão entre vários computadores, um modelo de comunicação par-a-par sem redundância, filogenias entre espécies, um diagrama de possibilidades num espaço de probabilidades etc.

*Ex. 1.3.5.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado com custo  $c_e$  atribuído a cada aresta  $e \in E$ . O custo de uma árvore geradora de  $G$  é a soma total dos custos das arestas da árvore. Vamos elaborar um modelo para determinar uma árvore geradora de  $G$  de custo mínimo.

Seja  $x_e \in E$  uma variável binária para indicar as arestas selecionadas para compor a árvore. Pelo exposto acima, tais arestas devem ser em número de  $|V| - 1$ . Uma restrição que garante essa propriedade é

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1. \quad (1.28)$$

Além disso, devemos assegurar que as arestas escolhidas não formem ciclo. Lembre que, em todo ciclo, o número de arestas é igual ao número de vértices. Além disso, não é difícil notar que um grafo com mais arestas que vértices deve necessariamente ter um ciclo. Então, um grafo não contém ciclo se, e somente se, todo subgrafo tem número de arestas inferior ao de vértices. Isso nos leva às seguintes restrições:

$$\sum_{e \in E[S]} x_e \leq |S| - 1, \quad \forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset. \quad (1.29)$$

A desigualdade correspondente para  $S = \emptyset$  não faz sentido e para  $S = V$  já é garantida pela igualdade (1.28). As desigualdades (1.29) são conhecidas como restrições de eliminação de subciclos (SECs - *Subtour Elimination Constraints*).

Pelo exposto, chegamos a um modelo de programação inteira para o problema de árvore geradora de custo mínimo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.a:} \quad & (1.28) - (1.29) \\ & x_e \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Embora a matriz de restrições desse modelo não seja TU em geral, ainda podemos garantir, usando outros argumentos, que é possível descartar as restrições de integralidade desse modelo.

## 1.4 Modelagem de problemas com variáveis binárias

Nas duas primeiras seções deste capítulo, vimos alguns exemplos de modelos com variáveis binárias onde a integralidade poderia ser descartada, transformando o problema linear inteiro em linear contínuo. Nesta seção, veremos problemas lineares onde a integralidade é de fato importante para a corretude do modelo. Embora esses problemas não sejam, por conseguinte, de programação linear, eles são aqui considerados como forma de exibir outras estratégias de modelagem que conseguem descrever uma variedade maior de aplicações reais.

*Ex. 1.4.1* (Problema de localização). Voltemos ao problema de transporte (Exemplo 1.2.5). Considere agora que os depósitos ainda não estão disponíveis e que a instalação do depósito  $i$

incorre em um custo fixo  $f_i$ . A capacidade de oferta de um depósito só estará disponível caso ele seja instalado. Elabore um modelo para determinar o plano de abastecimento que minimize o custo total (de instalação dos depósitos e de transporte destes para os clientes).

Adicionalmente às variáveis  $x_{ij}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ , que determinam a quantidade transportada de  $i$  para  $j$ , vamos precisar também de uma variável binária  $y_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , para indicar se o depósito  $i$  será ou não instalado. Caso seja instalado, incorre-se em um custo  $f_i$  e pode-se usar sua capacidade  $a_i$ ; caso contrário, não há custo, mas a capacidade a ser usada desse armazém também é nula. Assim, o custo e a capacidade disponível do armazém  $i$  são  $f_i y_i$  e  $a_i y_i$ , respectivamente. Dessa maneira, podemos adaptar o modelo (1.8)-(1.11) e chegar a:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \quad (1.30)$$

$$\text{s.a: } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1.31)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.32)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (1.33)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.34)$$

No caso em que cada armazém é capaz de atender a toda a demanda, ou seja,  $a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , não podemos simplesmente descartar (1.31), a exemplo do que fizemos no problema de transporte. Por outro lado, como antes, ainda poderíamos fazer a mudança de variável  $z_{ij} = x_{ij}/b_j \in [0, 1]$ . Com isso, é possível substituir (1.31) por  $z_{ij} \leq y_i$ , de modo a obter o modelo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n b_j \left( \sum_{i=1}^m c_{ij} z_{ij} \right) + \sum_{i=1}^m f_i y_i \\ \text{s.a: } \quad & z_{ij} \leq y_i, \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum_{i=1}^m z_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & z_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Agora, devido ao termo  $\sum_{i=1}^m f_i y_i$  da função objetivo, o modelo não pode mais ser decomposto em  $n$  modelos independentes. Na verdade, mesmo esse caso não capacitado, ainda é de difícil resolução.

*Ex. 1.4.2 (Problema da mochila).* Um estudante saindo em excursão deseja escolher quais dentre  $n$  itens levar em sua mochila, que tem capacidade para até  $K$  quilogramas. Para cada item  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ele estima um valor  $v_i$  e determina seu peso  $p_i$ . Elabore um modelo para decidir quais itens levar, de modo a respeitar a capacidade da mochila e maximizar o valor dos itens escolhidos.

Essa é uma descrição usual do conhecido problema da mochila, cujo sentido geral é decidir como distribuir um recurso limitado (nesse exemplo a capacidade da mochila) entre alguns possíveis candidatos. Para modelá-lo, vamos definir uma variável binária  $x_i$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

indicando se o item  $i$  é escolhido ou não. Assim, o modelo pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq K \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Embora simples, esse modelo não tem resolução fácil (do ponto de vista de complexidade computacional), não sendo conhecido algoritmo que o resolva com número de operações polinomial em  $n$ . Por outro lado, é possível encontrar, em tempo polinomial em  $n$ , soluções cujo valor está garantidamente a certa distância do ótimo, ou ainda encontrar uma solução ótima em tempo polinomial em  $nK$ .

Considere agora o seguinte problema. Um orçamento de  $R$  reais pode ser distribuído entre até  $n$  projetos. Para ser desenvolvido, o  $i$ -ésimo projeto demanda  $d_i$  reais e, nesse caso, pode dar um retorno de  $r_i$  reais. Esse cenário pode ser modelado como um problema de mochila?

*Ex. 1.4.3* (Problema de cobertura de conjuntos). Através de um estudo preliminar, o corpo de bombeiros de uma cidade identificou um conjunto  $N$  de possíveis localizações de postos de atendimento. Além disso, dividindo a cidade em um conjunto  $M$  de zonas, determinou o subconjunto  $M_j$  de zonas que podem ser atendidas pelo posto  $j \in N$ , considerando seu raio de abrangência. Sabendo que o custo de instalação de um posto  $j$  é  $c_j$ , elabore um modelo que determine uma alocação de postos capaz de atender a toda a cidade a custo mínimo.

Para modelar esse problema, vamos definir uma variável binária  $x_j$ ,  $j \in N$ , para indicar se o posto  $j$  será instalado ou não. Sendo assim, uma zona  $i \in M$  é coberta se pelo menos um ponto que a atende é instalado, ou seja, se pelo menos uma variável  $x_j$  é igual a 1, para  $j \in \{j \in N : i \in M_j\}$ . Essa condição é traduzida pelas desigualdades:

$$\sum_{j \in N: i \in M_j} x_j \geq 1, \quad \forall i \in M. \quad (1.35)$$

Assim, o problema é modelado como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & (1.35) \\ & x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in N. \end{aligned}$$

Objetivando reescrever as restrições (1.35), vamos definir a matriz de coeficientes binários  $A$ , de dimensão  $|M| \times |N|$ , tal que  $a_{ij} = 1$ , se  $i \in M_j$ , e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário. Assim, as restrições (1.35) se reescrevem como:

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1, \quad \forall i \in M, \quad (1.36)$$

ou ainda  $Ax \geq \mathbf{1}$ , onde  $x$  é o vetor de componentes  $(x_j)_{j \in N}$  e  $\mathbf{1}$  é o vetor  $|M|$ -dimensional com todas as componentes iguais 1.

Genericamente, todo problema cujas restrições podem ser escritas da forma

$$Ax \geq \mathbf{1}, \quad x \in \{0, 1\}^n,$$

onde  $A$  é uma matriz binária de dimensão  $m \times n$ , é chamado problema de cobertura de conjuntos. Isso porque podemos associá-lo à seguinte descrição. Considere um conjunto universo  $\mathcal{U}$  e uma

família de subconjuntos desse universo  $\{C_j : j \in N\}$ , onde  $N = \{1, \dots, n\}$ . Uma cobertura de  $\mathcal{U}$  é uma subfamília  $\{C_j : j \in N'\}$ , com  $N' \subseteq N$ , tal que  $\bigcup_{j \in N'} C_j = \mathcal{U}$ . Então, definindo a matriz  $A$  tal que  $a_{ij} = 1$ , se  $i \in C_j$ , e  $a_{ij} = 0$ , caso contrário, temos que uma cobertura pode ser descrita por um vetor binário  $x$  tal que  $Ax \geq \mathbf{1}$ . Problemas de otimização associados à cobertura de conjuntos normalmente objetivam minimizar o peso da cobertura, dado pela soma dos pesos atribuídos aos subconjuntos escolhidos.

Nesse mesmo contexto, dizemos que um empacotamento de conjuntos é uma subfamília  $\{C_j : j \in N'\}$ , com  $N' \subseteq N$ , tal que  $C_i \cap C_j = \emptyset$ , para todos  $i, j \in N'$ ,  $i \neq j$ . Assim, um empacotamento é qualquer vetor  $x$  tal que

$$Ax \leq \mathbf{1}, \quad x \in \{0, 1\}^n.$$

Já um particionamento é uma subfamília que é simultaneamente uma cobertura e um empacotamento, ou seja, um vetor  $x$  satisfazendo:

$$Ax = \mathbf{1}, \quad x \in \{0, 1\}^n.$$

Você conseguiria encontrar aplicações para os problemas de empacotamento e particionamento de conjuntos?

## 1.5 Modelos com muitas restrições ou variáveis

Em alguns modelos de programação linear ou programação linear inteira, o número de variáveis ou de restrições pode ser de ordem tal que os tornam excessivamente grandes para serem diretamente resolvidos mesmo com o uso de computadores. Esses problemas demandam estratégias mais elaboradas de solução, como a decomposição dos modelos, assunto a ser tratado no Capítulo 11. Nesta seção, veremos dois exemplos desse tipo de modelo.

**Arborescência geradora** Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado com custo  $c_e \in \mathbb{R}$  associado a cada aresta. Considere o grafo direcionado simétrico  $\tilde{G}$  obtido de  $G$  substituindo cada aresta  $e = \{i, j\} \in E$  por dois arcos  $(i, j)$  e  $(j, i)$ , ambos com custo  $c_{ij} = c_{ji} = c_e$ . Ver Figuras 1.5(a)-1.5(b). Seja  $r \in V$ . Toda árvore geradora de  $G$  define uma arborescência de  $\tilde{G}$  enraizada em  $r$  e vice-versa, ambas de mesmo custo. Ver Figuras 1.5(c)-1.5(d). De fato, para obter uma árvore geradora de  $G$  a partir de uma arborescência geradora de  $\tilde{G}$ , basta descartar a orientação dos arcos. No sentido inverso, para obter uma arborescência a partir de uma árvore  $T$  geradora de  $G$  pode-se executar o seguinte algoritmo. Para cada aresta  $\{r, j\}$  de  $T$  que incide na raiz, oriente-a de  $r$  para  $j$ , ou seja, tome o arco  $(r, j)$  de  $\tilde{G}$ . Para cada vértice  $j$  assim atingido, oriente as arestas  $\{j, k\}$  de  $T$ , ainda não orientadas, de  $j$  para  $k$ . Proceda de forma similar com os novos vértices atingidos nessa segunda etapa. Como há sempre um caminho em  $T$  de  $r$  para cada vértice e não há ciclo, todos os vértices serão alcançados pelo algoritmo e uma arborescência enraizada em  $r$  será gerada. A partir dessa observação, podemos obter uma árvore geradora de  $G$  a partir de um modelo para uma arborescência geradora de  $\tilde{G}$ .

Relembre que uma arborescência geradora de  $\tilde{G}$  com raiz  $r$  é um subgrafo onde há exatamente um caminho orientado de  $r$  para cada outro vértice. Equivalentemente, é um grafo com  $|V| - 1$  arcos tal que, para cada vértice  $v \neq r$ , todo  $rv$ -corte é não vazio (isso garante que há um caminho de  $r$  para  $v$ ).

*Ex. 1.5.1.* Determinar um modelo baseado em arborescência para determinar um árvore geradora de custo mínimo em um grafo  $G = (V, E)$  com custo  $c_e \in \mathbb{R}$  atribuído a cada aresta  $e \in E$ .

Para obter o modelo, vamos considerar o grafo simétrico  $\tilde{G}$  e um vértice fixo  $r \in V$ . Para cada  $e = \{i, j\} \in E$ , definimos as variáveis binárias  $y_{ij}$  e  $y_{ji}$  referentes aos dois arcos correspondentes



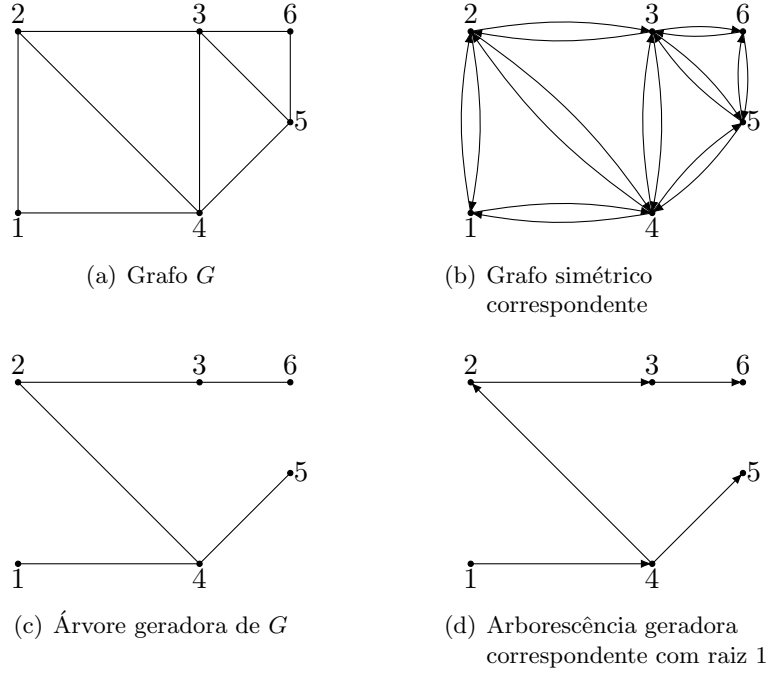


Figura 1.5: Correspondência entre árvore geradora de um grafo e arborescência geradora do digrafo simétrico

em  $\vec{G}$ , indicando a escolha ou não do respectivo arco (note que  $y_{ij} + y_{ji} \leq 1$ ). Pelo exposto, um modelo para o problema é:

$$\min \sum_{e=\{i,j\} \in E} c_e (y_{ij} + y_{ji}) \quad (1.37)$$

$$\text{s.a: } \sum_{e=\{i,j\} \in E} (y_{ij} + y_{ji}) = |V| - 1 \quad (1.38)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} y_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V : r \in S \quad (1.39)$$

$$y_{ij}, y_{ji} \in \{0, 1\} \quad \forall e = \{i, j\} \in E. \quad (1.40)$$

Assim como no modelo com SECs, aqui as restrições de integralidade podem ser descartadas e uma solução ótima ainda será inteira. Também como no modelo anterior, há um número exponencial (no tamanho de  $V$ ) de restrições. Aqui estamos nos referindo a (1.39). Uma estratégia para tratar esse tipo de modelo consiste em resolvê-lo inicialmente apenas com um subconjunto de restrições, encontrar uma solução, digamos  $\bar{y}$ , e verificar se ela é viável, resolvendo um segundo problema de otimização. Caso haja uma restrição violada por  $\bar{y}$ , ela é acrescentada ao modelo, e o processo, repetido. Caso contrário, a solução encontrada já é ótima.

Para detectar a existência de uma restrição (1.39) violada por  $\bar{y}$  ou verificar que todas estão satisfeitas nesse ponto, é suficiente determinar

$$\min \left\{ \sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} \bar{y}_{ij} : S \subset V, r \in S \right\}.$$

Caso o valor desse mínimo seja maior ou igual a 1, todas as restrições (1.39) estão satisfeitas por  $\bar{y}$ . Do contrário, se o mínimo é estritamente menor que 1 e ocorre em  $S^*$ , a restrição (1.39) relativa a  $S^*$  está violada por  $\bar{y}$ . Esse é chamado o problema de separação dessas restrições.

Podemos determinar esse mínimo pela resolução de um conjunto de problemas de corte mínimo (ver Ex. 1.3.3). De fato, uma solução ótima  $S^*$  do problema acima é um  $rv$ -corte, para algum  $v \in V \setminus \{r\}$ . Mais precisamente, observe que  $S^*$  é um corte de capacidade mínima entre todos os  $rv$ -cortes,  $v \neq r$ , no grafo  $\tilde{G}$ , considerando como capacidade do arco  $(i, j)$  exatamente o valor  $\tilde{y}_{ij}$ . Assim, resolver o problema de separação equivale a resolver  $|V| - 1$  problemas de corte mínimo. De forma precisa, se  $C_v$  é a capacidade de um  $rv$ -corte mínimo, para cada  $v \in V \setminus \{r\}$ , e  $\Delta = \min\{C_v : v \in V \setminus \{r\}\}$ , então todas as restrições (1.39) estão satisfeitas, se  $\Delta \geq 1$ , ou uma delas está violada, caso contrário.

**Corte unidimensional segundo padrões** Um *padrão de corte* de uma peça de dimensão  $L$  em itens de dimensões  $\ell_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , é uma forma possível de cortar a peça para obter um subconjunto desses itens, podendo ser representado por um vetor  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , onde  $a_i \geq 0$  é o número de itens  $i$  obtidos. Em outros termos, um padrão de corte é um vetor  $a$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \ell_i a_i \leq L, \quad a_i \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (1.41)$$

Mais ainda, o padrão de corte é dito *dominante* se

$$s := L - \sum_{i=1}^n \ell_i a_i < \min\{\ell_i : i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.42)$$

Vamos usar esses conceitos para modelar o seguinte problema.

*Ex. 1.5.2.* Em uma fábrica é preciso cortar uma fita de aço de 120mm de largura em tiras de 23, 28 e 45mm de largura, das quais se necessitam pelo menos 2500, 4500 e 8000m de comprimento, respectivamente. Como se deve cortar a fita para atender a demanda mínima, utilizando a menor quantidade do material? Mais precisamente, desejamos minimizar a sobra da fita, significando a área não efetivamente utilizada para obtenção das tiras. Primeiro admita que a demanda de cada tira pode ser atendida reunindo pedaços de qualquer comprimento dessa tira. Depois, suponha que pedaços dessas tiras com comprimento inferior a 10m não serão aceitos.

Antes de tudo, vamos enumerar os padrões de corte para uma peça de dimensão  $L = 120$  e 3 itens de dimensões  $\ell_1 = 23$ ,  $\ell_2 = 28$  e  $\ell_3 = 45$ . Para o cenário em questão, é suficiente considerar os padrões dominantes, tendo em vista o entendimento do que é sobra. A tabela abaixo apresenta esses padrões, que podem ser obtidos verificando todos os possíveis vetores  $(a_1, a_2, a_3)$  que satisfazem (1.41)-(1.42). Evidentemente, basta testar as combinações com  $0 \leq a_1 \leq \lfloor 120/23 \rfloor = 5$ ,  $0 \leq a_2 \leq \lfloor 120/28 \rfloor = 4$  e  $0 \leq a_3 \leq \lfloor 120/45 \rfloor = 2$ .

padrão	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$s$
1	5	0	0	5
2	4	1	0	0
3	3	0	1	6
4	2	2	0	18
5	2	1	1	1
6	1	3	0	13
7	1	0	2	7
8	0	4	0	8
9	0	2	1	19
10	0	1	2	2

De posse dos padrões de corte, definimos uma variável  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 10\}$ , para expressar quantos metros da fita serão cortados segundo o padrão  $i$ . Em particular, se cortamos  $x_1$  metros segundo o padrão 1, a tabela nos informa que serão obtidos  $5x_1$  metros da tira de 23mm para

atender a demanda dessa tira e haverá sobra de  $0,005x_1$  metros quadrados da fita. Similarmente, com  $x_2$  metros segundo o padrão 2, geramos  $4x_2$  metros da tira de 23mm e  $x_2$  metros da tira de 28mm, sem perda da fita, e assim por diante. Dessa forma, multiplicando a função objetivo por 1000 por simplicidade, um modelo para o problema é:

$$\begin{aligned} \min & 5x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 18x_4 + 1x_5 + 13x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 19x_9 + 2x_{10} \\ \text{s.a: } & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} \geq 2500 \\ & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 3x_6 + 0x_7 + 4x_8 + 2x_9 + 1x_{10} \geq 4500 \\ & 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 2x_7 + 0x_8 + 1x_9 + 2x_{10} \geq 8000 \\ & x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, 10\}. \end{aligned}$$

Note que o coeficiente de  $x_i$  na função objetivo é a sobra do padrão  $i$ , enquanto a coluna associada à variável  $x_i$  na matriz de restrições é exatamente o padrão  $i$ . Sendo assim, a matriz de restrições tem muitas colunas, e elas possuem uma lei de formação.

Uma estratégia para resolver esse tipo de modelo consiste em começar com um subconjunto dessas colunas (variáveis), solucionar o modelo restrito e procurar, usando um outro problema de otimização, qual das colunas ainda não introduzidas no modelo mais melhoraria a solução corrente. Nesse exemplo, o problema que gera as colunas tem como restrições exatamente (1.41) e uma função objetivo que ficará conhecida futuramente na Seção 7.5. Caso haja uma coluna que melhora a solução, ela é acrescida, e o processo, repetido. Caso contrário, a solução é ótima, considerando nulas as variáveis das colunas que não estão no modelo. Tal método é conhecido como *geração de colunas*.

Para modelar a variação proposta no exemplo, que não permite pedaços inferiores a 10m, note que o domínio de cada variável  $x_i$  é o conjunto  $\{0\} \cup [10, +\infty]$ . Para expressar essa descontinuidade, vamos introduzir uma variável binária  $y_i$  para indicar se  $x_i = 0$  ou  $x_i \in [10, +\infty]$ . Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} y_i = 0 & \Rightarrow 0 \leq x_i \leq 0 \\ y_i = 1 & \Rightarrow 10 \leq x_i \leq M_i \end{aligned}$$

onde  $M_i$  é um número suficientemente grande que não limite os possíveis valores de  $x_i$  numa solução viável (ou pelo menos numa solução ótima). Por exemplo, podemos tomar  $M_i = 8000$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 10\}$ , pois certamente não vai ser preciso usar mais que 8000 metros da fita para atender a toda a demanda.

Para modelar as expressões lógicas acima, podemos usar as seguintes desigualdades lineares:

$$10y_i \leq x_i \leq M_i y_i, \forall i \in \{1, \dots, 10\}.$$

Acrescentando-as ao modelo, chegamos ao resultado desejado.

## 1.6 Exercícios

1.1. Um agricultor está interessado no cultivo de milho e algodão em sua propriedade. Ele deseja saber qual a combinação dessas duas linhas de produção que lhe pode proporcionar a maior renda possível. Ele possui uma área de 100 ha para o plantio e sabe que pode dispor, durante o período de produção, de 3.600 homens/dia e 240 dias de trabalho de um trator médio. Com base em sua experiência, ele estima que, naquela terra e com sua técnica de produção, o milho produz 2.000 Kg/ha e o algodão 1.800 Kg/ha. A cultura do milho exige 30 homens/dia por hectare e 4 dias de serviço de trator por hectare, enquanto o algodão exige 60 homens/dia por hectare e 2 dias de trator por hectare. As expectativas de preço venda são de R\$ 1.700,00 por tonelada de milho e de R\$ 2.040,00 por tonelada de algodão. Elabore um modelo de PL para maximizar o valor esperado com a venda dos produtos, respeitando as condições impostas.

1.2. Na tabela abaixo, apresentamos as composições nutricionais de cinco tipos de ração bem como seus custos por quilograma. Fornecemos também as necessidades semanais mínimas de proteínas e carboidratos de um certo animal. Que mistura dessas rações leva a uma dieta semanal de custo mínimo que atenda os requisitos alimentares? Elabore um modelo de PL para responder a essa questão.

Ração	Proteínas (Unidades/Kg)	Carboidratos (Unidades/Kg)	Custo (R\$/Kg)
A	25	55	3,00
B	25	20	2,00
C	45	10	4,00
D	35	35	3,00
E	25	20	3,00
Mínimo (Unidades)	200	250	

1.3. Considere um problema de metalurgia, em que se deseja produzir 2.000 Kg de uma liga de alumínio, a custo mínimo, pela mistura de diversas matérias-primas (minérios). Esta liga deve atender a requisitos de engenharia que especificam os máximos e mínimos de diversos elementos químicos que a compõem. Os custos das matérias-primas são:

Mat prima	Mat1	Mat2	Mat3	Mat4	Mat5	Al-puro	Si-puro
Custo	0,03	0,08	0,17	0,12	0,15	0,21	0,38

A composição dos minérios e a participação mínima/máxima de cada um dos elementos químicos nos 2.000 Kg da liga são mostradas a seguir:

Elemento	Mat1	Mat2	Mat3	Mat4	Mat5	Al-puro	Si-puro	Mínimo	Máximo
Fe	0,15	0,04	0,02	0,04	0,02	0,01	0,03	0	60
Cu	0,03	0,05	0,08	0,02	0,06	0,01	0	0	100
Mn	0,02	0,04	0,01	0,02	0,02	0	0	0	40
Mg	0,02	0,03	0	0	0,01	0	0	0	30
Al	0,70	0,75	0,80	0,75	0,80	0,97	0	1500	$\infty$
Si	0,02	0,06	0,08	0,12	0,02	0,01	0,97	250	300

Na tabela anterior temos, por exemplo, que Mat1 contém 15% de Ferro, 3% de Cobre, etc. Temos, ainda, que a liga a ser obtida (2.000 Kg) deve conter, no máximo, 60Kg de Ferro, 100 Kg de Cobre e que a quantidade de Silício deve estar entre 250 Kg e 300 Kg. Quanto à disponibilidade de matéria-prima, os dados estão indicados a seguir na linha “Disponibilidade Máxima”. A linha “Disponibilidade Mínima” refere-se à quantidade que se deseja forçar a entrar neste processo (por algum motivo, tal como liberação de espaço).

Mat prima	Mat1	Mat2	Mat3	Mat4	Mat5	Al-puro	Si-puro
Disp. Mín.	0	0	400	100	0	0	0
Disp. Máx.	200	750	800	700	1500	$\infty$	$\infty$

Elabore um modelo de PL para o problema.

1.4. Uma empresa produz televisão em três fábricas: São Paulo, João Pessoa e Manaus. Os pontos principais de revenda, com as respectivas encomendas mensais são:

Rio de Janeiro	6.000 unidades
Salvador	5.000 unidades
Aracaju	2.000 unidades
Maceió	1.000 unidades
Recife	3.000 unidades

A produção máxima mensal em cada fábrica é:

São Paulo	10.000 unidades
João Pessoa	5.000 unidades
Manaus	6.000 unidades

Os custos de transporte das fábricas até as vendas são dados pelo quadro abaixo (em R\$ por 1.000 unidades de TV):

Para De	Rio de Janeiro	Salvador	Aracaju	Maceió	Recife
São Paulo	1.000	2.000	3.000	3.500	4.000
João Pessoa	4.000	2.000	1.500	1.200	1.000
Manaus	6.000	4.000	3.500	3.000	2.000

Determinar o plano de produção e distribuição das fábricas para as vendas, a fim de minimizar o custo total de transporte.

1.5. Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (MO1 e MO2) que têm as seguintes disponibilidades:

Máquinas	Disponibilidades (maq-hora/mês)	Mãos-de-Obra	Disponibilidades (homem-hora/mês)
M1	80	MO1	60
M2	20	MO2	40

O setor técnico da empresa fornece os seguintes coeficientes, que especificam o total de horas de máquina e horas de mão-de-obra necessárias para a produção de uma unidade de cada produto.

Máquinas	Produtos				Mãos-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
M1	5	4	8	9	MO1	2	4	2	8
M2	2	6	-	8	MO2	7	3	-	7

O setor comercial da empresa fornece as seguintes informações:

Produtos	Potencial de vendas (unid/mês)	Lucro unitário (R\$/unid)
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Elabore um modelo de PL para planejar a produção mensal da empresa que maximize o lucro.

1.6. Uma firma estabelece um contrato com um cliente para fornecer 500 unidades do produto A e 700 unidades do produto B ao final de 2 meses. Os custos de produção (R\$/unid) variam de acordo com o mês, conforme a tabela abaixo:

Produto	Meses	
	1	2
A	52	23
B	100	60

A entrega ao cliente será realizada de uma única vez ao final do segundo mês. Os itens fabricados no primeiro mês serão estocados até a entrega. Os custos unitários de armazenamento são respectivamente R\$ 0,10 e R\$ 0,20 para os produtos A e B. Além disso, a matéria-prima deixada de um mês para o outro custa R\$ 0,01 por Kg para ser estocada. Considere que a matéria-prima que sobre ao final do segundo mês já está computada no custo de fabricação e que a mão-de-obra excedente pode ser aproveitada em outras atividades. O consumo de matéria-prima e mão-de-obra por unidade de produto fabricado bem como as disponibilidades da firma são mostrados na tabela abaixo:

	Produtos		Disp/mês	
	A	B	1	2
Mão-de-Obra (h)	0,5	0,8	350	500
Matéria-Prima (Kg)	10	7	6000	4000

Apresente um modelo de PL que planeje o processo produtivo da empresa para cumprir o contrato a custo total mínimo.

1.7. O administrador de um hospital deseja determinar o escalonamento dos enfermeiros. Para isso, ele organiza um sistema de plantão dividindo o dia em 8 períodos de 3 horas. A tabela a

seguir mostra o número mínimo de enfermeiros que devem estar presentes em cada horário.

Horário	24 – 3	3 – 6	6 – 9	9 – 12	12 – 15	15 – 18	18 – 21	21 – 24
Enferm.	30	20	40	50	60	50	40	40

Cada enfermeiro cumpre um plantão normal de 6 horas, que pode começar apenas no início de um destes períodos. Alguns enfermeiros podem ser solicitados para estender o plantão por mais 3 horas seguidas. A hora extra custa 50% mais caro. Em cada plantão, não mais que 40% dos enfermeiros podem estar cumprindo hora extra. Como o administrador deve escalar os enfermeiros, minimizando o custo? Elabore um modelo para dar essa resposta.

1.8. O diretor de uma escola deseja inscrever quatro alunos numa olimpíada de matemática que engloba os seguintes assuntos: álgebra, análise, lógica e geometria. Somente um aluno pode ser inscrito em cada assunto e nenhum aluno pode ser inscrito em mais de um assunto porque as provas dos concursos ocorrerão simultaneamente. Para isso, ele seleciona seus quatro melhores alunos, designados por A, B, C e D, e lhes aplica os mesmos exames cobrindo as quatro áreas do concurso. O quadro abaixo indica o número de pontos obtidos por cada aluno em cada uma das áreas. Elabore um modelo de PL que ajude o diretor a tomar sua decisão, visando ao melhor rendimento esperado para a escola?

	ÁLGEBRA	ANÁLISE	LÓGICA	GEOMETRIA
A	7	10	6	3
B	8	7	8	1
C	4	9	3	5
D	5	4	6	9

1.9. Um estudante, na véspera de seus exames finais, dispõe de 100 horas de estudo para dedicar às disciplinas A, B e C. Cada um destes exames é formado por 100 questões, e ele (aluno) espera acertar, alternativamente, uma questão em A, duas em B ou três em C, por cada hora de estudo. Suas notas nas provas anteriores foram 6, 7 e 10 respectivamente, e sua aprovação depende de atingir uma média mínima de 5 pontos em cada disciplina. O aluno deseja distribuir seu tempo de forma a ser aprovado com a maior soma total de notas. Apresente um modelo para fazer essa distribuição.

1.10. Uma fábrica tem dois tipos de inspetores, I e II, responsáveis pelo controle de qualidade. Há necessidade que pelo menos 1.800 peças sejam inspecionadas em 8 horas por dia. Os inspetores tipo I podem inspecionar peças numa taxa de 25 por hora, com uma confiabilidade de 98%; os tipos II inspecionam 15 peças por hora, com confiabilidade de 95%. Os salários são de R\$ 4,00/hora para o tipo I e de R\$ 3,00/hora para o tipo II. Cada erro de qualquer dos inspetores custa à fábrica R\$ 2,00. Há disponíveis 8 inspetores tipo I e 10 do tipo II. Apresente um modelo de PLI para determinar o número de inspetores selecionados que minimizam o custo total de inspeção.

1.11. Um fazendeiro pode criar ovinos, suínos e bovinos em sua propriedade. Se todo espaço disponível fosse destinado a ovinos, 40 cabeças poderiam ser criadas. Sabe-se também que 4 carneiros ocupam o mesmo espaço útil que 6 porcos ou 3 vacas. Além disso, existe uma lei que obriga a criação mínima de um porco para cada outro animal da fazenda. Se os retornos esperados por cada ovino e suíno representam respectivamente 50% e 40% do resultado esperado com um bovino, como o fazendeiro pode planejar sua criação de forma ótima. Elabore um modelo de PLI.

1.12. Uma refinaria extrai quatro tipos de gasolina bruta, que podem ser processados, gerando três tipos de combustíveis. As tabelas abaixo apresentam detalhes do processo.

Gasolina Bruta (Tipo)	Taxa de Octano	Disponibilidade (Barris / Dia)	Preço Extração (R\$ / Barril)
1	68	4000	31,02
2	86	5050	33,15
3	91	7100	36,35
4	99	4300	38,75

Combustível (Tipo)	Taxa de Octano Mínima	Preço de Venda (R\$ / Barril)	Demandas (Barris / dia)
1	95	45,15	Máximo 10000
2	90	42,95	Sem restrição
3	85	40,99	Mínimo 15000

A gasolina extraída pela companhia e não usada para fazer os combustíveis pode ser vendida “in natura” por R\$38,95 / barril, se a taxa de octano for superior a 90, e por R\$36,85/ barril, caso contrário. Como a empresa pode maximizar o seu lucro diário? Elabore um modelo. (Obs: a taxa de octano de um combustível é a média ponderada das taxas de octano das gasolinas que o compõem, onde os pesos são a proporção de cada gasolina na mistura.)

1.13. Deseja-se cortar uma barra de tamanho  $L$  em vários pedaços de  $n$  possíveis tipos. Cada pedaço  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem comprimento  $\ell_i$ , valor  $v_i$  e demandas mínima e máxima  $a_i$  e  $b_i$ . Elabore um modelo para determinar um plano de corte da barra que maximize o valor dos pedaços obtidos.

1.14. Em uma obra, para a construção da estrutura, precisa-se de  $n$  pedaços de ferro, sendo que o pedaço  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem comprimento  $\ell_i$ . No estoque há disponíveis  $N$  barras, tendo a barra  $j \in \{1, \dots, N\}$  comprimento  $L_j$ . Se uma barra é cortada, a parte que não é usada para produzir pedaços é considerada sobra. Elabore um modelo para determinar um plano de corte que minimize as sobras. Considere agora que se paga, por cada barra cortada  $j$ , um valor  $c_j$ . Mostre que uma solução que minimiza o custo das barras cortadas também minimiza as sobras, e vice-versa, se existe  $\alpha > 0$  tal que  $c_j = \alpha L_j$ , para todo  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

1.15. Uma coloração de um grafo é uma atribuição de (pelo menos) uma cor a cada vértice de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Apresente um modelo para determinar a coloração de um grafo  $G = (V, E)$  que use o mínimo de cores. Você enxerga alguma aplicação para esse problema?

1.16. Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado com custo  $c_e$  atribuído a cada aresta  $e \in E$ . Um ciclo hamiltoniano em  $G$  é um ciclo que visita todos os vértices. Apresente um modelo para determinar o ciclo hamiltoniano de custo mínimo em  $G$ . Você poderia dar uma aplicação para esse problema?

## Capítulo 2

# Solução Gráfica

O método gráfico de solução de problemas de programação linear é apropriado para resolver os casos em que há duas ou no máximo três variáveis. Mesmo com essa limitação, ideias usadas em sua descrição são base para a compreensão e demonstração de corretude do método algébrico a ser apresentado futuramente. Além disso, resolvendo problemas de forma gráfica, podemos ilustrar as possíveis situações que ocorrem com um problema de programação linear geral. Com as motivações mencionadas acima, neste capítulo descrevemos o método gráfico de solução.

### 2.1 Exemplo inicial

Considere o seguinte PPL com duas variáveis:

$$\max 3x_1 - x_2 = Z(x) \quad (2.1)$$

$$\text{s.a: } x_1 - 2x_2 \leq 2 \quad (2.2)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9 \quad (2.3)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (2.4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (2.5)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (2.6)$$

Primeiro, vamos identificar o conjunto viável, definido pelas restrições (2.2)-(2.6). Para isso, traçamos no plano cartesiano o semiplano definido por cada desigualdade e, em seguida, determinamos a interseção deles.

Associada à restrição (2.2), temos a reta suporte  $x_1 - 2x_2 = 2$ . Para traçarmos essa reta, podemos escolher quaisquer dois pontos sobre ela. Por exemplo, podemos tomar os pontos sobre os eixos. Assim, fazendo  $x_1 = 0$ , obtemos  $x_2 = -1$ . Similarmente, fazendo  $x_2 = 0$ , obtemos  $x_1 = 2$ . Portanto, com os pontos  $(x_1, x_2) = (0, -1)$  e  $(x_1, x_2) = (2, 0)$ , traçamos a reta da Figura 2.1(a). A região definida por (2.2) é um dos semiplanos limitados por essa reta. Podemos identificar esse semiplano tomando qualquer ponto que não está sobre a reta e verificando se ele satisfaz ou não a restrição. Por exemplo, tomando  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , verificamos que a restrição (2.2) é satisfeita nesse ponto e, portanto, o semiplano que ela define inclui a origem, como indicado na Figura 2.1(a).

Podemos proceder com as demais restrições do mesmo modo. Para (2.3), a reta suporte é  $2x_1 + x_2 = 9$ , que contém os pontos  $(x_1, x_2) = (4, 5, 0)$  e  $(x_1, x_2) = (3, 3)$ . Usando esses dois pontos, traçamos a reta, como pode ser visto na Figura 2.1(b). Além disso, a origem satisfaz a desigualdade (2.3), que define, pois, o semiplano contendo esse ponto, conforme indicado na mesma figura. A reta suporte à restrição (2.4), ou seja,  $x_2 = 3$ , passa pelo pontos  $(x_1, x_2) = (0, 3)$  e  $(x_1, x_2) = (3, 3)$ . Além disso, essa restrição é satisfeita na origem. Logo, o semiplano por ela definido é aquele indicado na Figura 2.1(c). Finalmente, os semiplanos definidos por (2.5) e (2.6) compreendem os pontos à direita do eixo  $x_2$  e acima do eixo  $x_1$ , respectivamente.



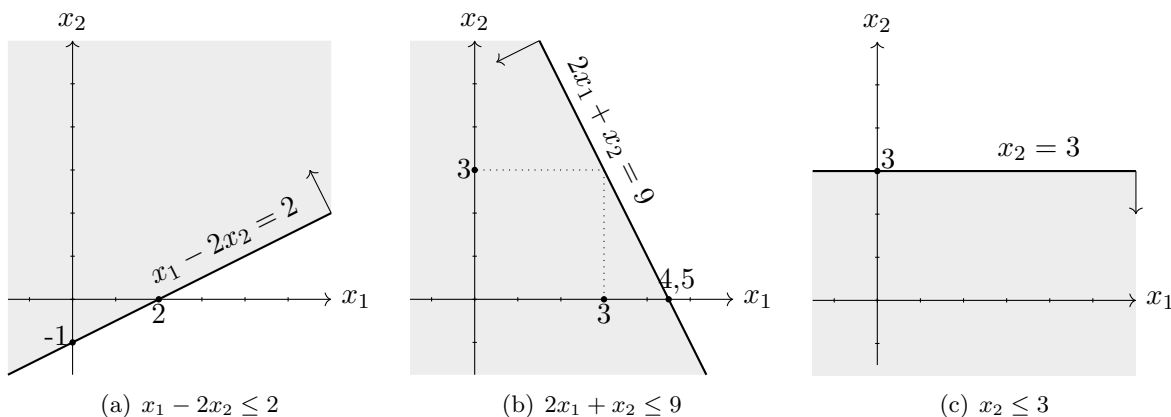


Figura 2.1: Semiplanos definidos por restrições do problema.

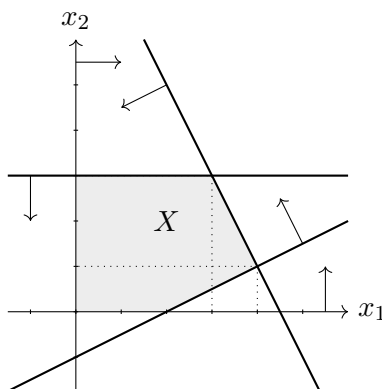


Figura 2.2: Conjunto viável do problema.

Fazendo a interseção desses cinco semiplanos, obtemos a região sombreada da Figura 2.2, que é, portanto, o conjunto viável do problema. Assim como na Figura 2.1, a seta acoplada a cada reta indica o sentido de viabilidade da restrição correspondente.

Percebemos que esse conjunto possui um número infinito de pontos, que são todos candidatos à solução ótima. Denotemos esse conjunto por  $X$ , ou seja,  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (2.2) - (2.6)\}$ . Observe que podemos reescrever o PPL da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\max k \\
 &\text{s.a: } 3x_1 - x_2 = k \\
 &\quad (x_1, x_2) \in X.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para cada valor fixo de  $k$ , (2.7) define uma reta. Por exemplo, tomando  $k = 3$ , temos a reta  $3x_1 - x_2 = 3$ , que passa pelos pontos  $(x_1, x_2) = (1, 0)$  e  $(x_1, x_2) = (2, 3)$ , conforme mostrado na Figura 2.3(a). Variando  $k$ , para todos os valores reais, obtemos uma família de retas paralelas, chamadas curvas de nível da função  $Z(x) = 3x_1 - x_2$ , ilustradas na Figura 2.3(b). Algumas dessas curvas de nível interceptam o conjunto  $X$  e, portanto, possuem pontos viáveis; outras não contêm qualquer ponto viável (por exemplo, quando  $k = 12$ ).

Pela forma como o problema foi reescrito, podemos concluir que resolvê-lo consiste em determinar o maior valor de  $k$  para o qual a reta (2.7) intercepta o conjunto  $X$ . Tomando como referência a primeira reta traçada,  $3x_1 - x_2 = 3$ , podemos identificar o semiplano  $3x_1 - x_2 > 3$ , que engloba os pontos com valor de objetivo  $k > 3$ , melhores portanto que aqueles sobre essa

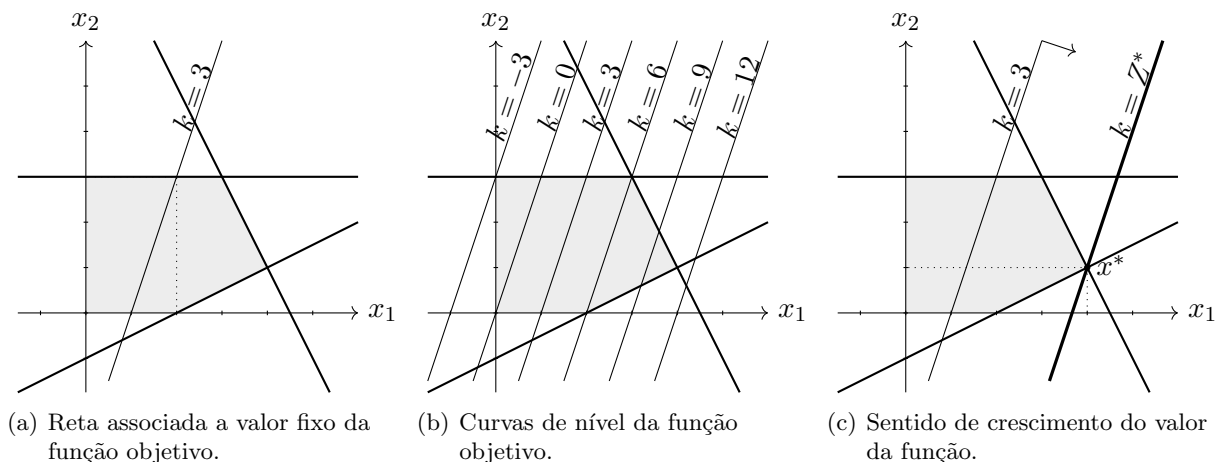


Figura 2.3: Curvas de nível da função objetivo do problema.

reta. Analogamente ao feito com as restrições, para identificarmos o semiplano desejado, tomamos um ponto fora da reta, por exemplo  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Como esse ponto não satisfaz  $3x_1 - x_2 > 3$ , concluímos que o semiplano com valores de objetivo maiores compreende a região indicada pela seta acoplada à reta  $k = 3$  na Figura 2.3(c). Na verdade, essa seta indica o sentido de crescimento de  $k$ , ou seja, da função objetivo. Logo, a reta definida pelo maior valor de  $k$  que ainda intercepta  $X$  é aquela destacada em negrito, relativa a  $k = Z^*$ , sendo  $Z^*$ , portanto, o valor ótimo.

Com isso, concluímos que o ponto ótimo está na interseção das retas suporte às restrições  $x_1 - 2x_2 \leq 2$  e  $2x_1 + x_2 = 9$ . Em outros termos, ele é a solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

ou seja,  $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (4, 1)$ . Substituindo o valor de  $(x_1^*, x_2^*)$  na função  $Z(x)$ , obtemos o valor ótimo do problema, isto é,

$$Z^* = Z(x_1^*, x_2^*) = 3x_1^* - x_2^* = 11.$$

Outra forma de determinar o sentido de otimização da função objetivo é através do vetor  $c$ , que define a função objetivo  $Z(x) = c^\top x$ . No exemplo acima, temos  $c^\top = (3, -1)$ . A Figura 2.4(a) mostra que  $c$  é ortogonal às curvas de nível nesse exemplo.

Na verdade, essa propriedade é válida em geral. Ver Figura 2.4(b). De fato, considere dois pontos  $x^1$  e  $x^2$  sobre a mesma curva de nível, ou seja, tal que  $c^\top x^1 = c^\top x^2$ . Então  $c^\top (x^1 - x^2) = 0$ , ou melhor,  $c$  é ortogonal a  $x^1 - x^2$ . Note que o vetor  $x^1 - x^2$  tem a direção das curvas de nível. Assim, temos que  $c$  é sempre ortogonal às curvas de nível.

Agora, queremos mostrar que  $c \neq 0$  é uma direção de crescimento da função  $Z(x) = c^\top x$  em qualquer ponto  $x$ . Isto quer dizer que, caminhando um passo  $\alpha > 0$  ao longo do vetor  $c$  a partir de  $x$ , o valor da função aumenta. De fato  $Z(x + \alpha c) = c^\top (x + \alpha c) = c^\top x + \alpha c^\top c > c^\top x$ , onde a desigualdade decorre do fato de que  $\alpha > 0$  e  $c^\top c > 0$ . Similarmente, mostramos que  $-c$  é uma direção de decrescimento da função.

Pelo exposto, ao desenharmos o vetor  $c$ , sabemos: (i) a inclinação das curvas de nível, pois elas são perpendiculares a  $c$  e (ii) o sentido de crescimento (mesmo do vetor  $c$ ) e de decrescimento (oposto ao do vetor  $c$ ) da função. Logo, com o vetor  $c$  temos as duas informações necessárias para identificar a melhor solução viável.

Para exemplificar esse uso do vetor  $c$  no método gráfico, considere novamente o PPL (2.1)-(2.6), porém trocando o sentido de otimização de maximização para minimização. Temos o mesmo conjunto viável da Figura 2.2, já que as restrições não foram alteradas. Também o

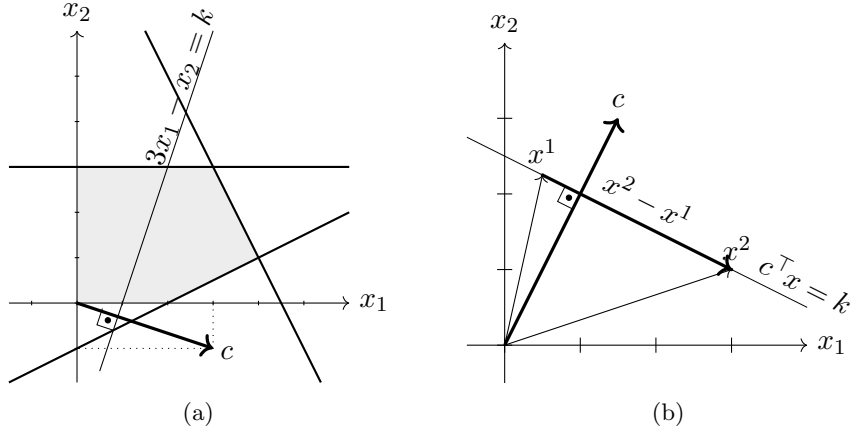


Figura 2.4: Vetor  $c$  - curvas de nível e sentido de otimização.

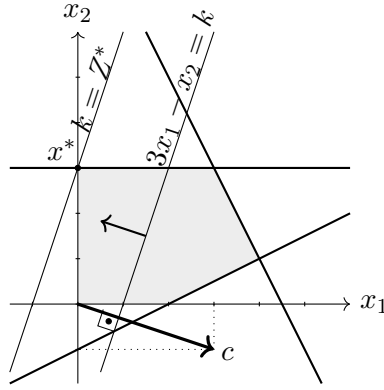


Figura 2.5: Invertendo o sentido de otimização.

vetor  $c$  não mudou, e podemos traçar uma curva de nível arbitrária, perpendicular a ele. No entanto, agora o sentido de otimização (decréscimo da função) é do vetor  $-c$ . Desse modo, ao deslocarmos as curvas de nível nesse sentido, enquanto há interseção com o conjunto viável, chegamos ao ponto ótimo indicado na Figura 2.5, ou seja  $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 3)$ . Logo, o valor ótimo é  $Z^* = 3x_1^* - x_2^* = -3$ .

## 2.2 Conjunto viável limitado

Um conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é dito limitado se todos os seus pontos têm norma inferior ou igual a uma constante, ou seja, existe  $L > 0$  tal que  $\|x\| \leq L$ , para todo  $x \in C$ . O conjunto viável apresentado na Figura 2.2 é um exemplo de conjunto limitado.

Usando o método gráfico, podemos perceber que, no caso de o conjunto viável ser limitado e não vazio, ao deslocarmos a curva de nível da função objetivo no sentido de otimização, vamos eventualmente parar em uma solução ótima, na fronteira do conjunto viável. De fato, com essa hipótese sobre o conjunto viável, tal conclusão é sempre verdadeira, e teremos argumentos formais para demonstrá-la mais adiante. Por enquanto, vale destacar que, embora sempre exista solução ótima nesse caso, ela não será necessariamente única.

Por exemplo, considere o seguinte PPL, obtido de (2.1)-(2.6) apenas pela alteração da função

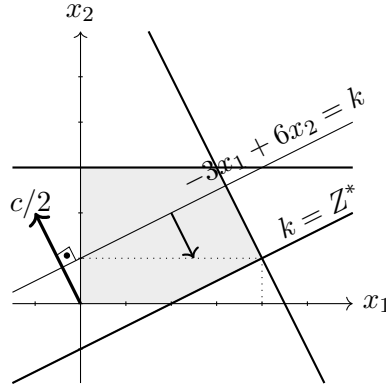


Figura 2.6: Múltiplas soluções.

objetivo:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -3x_1 + 6x_2 = Z(x) \\
 \text{s.a:} \quad & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 9 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Posto que as restrições são as mesmas, o conjunto viável não se altera. Todavia, temos agora o vetor  $c^\top = (-3, 6)$ . A direção e sentido desse vetor estão indicados na Figura 2.6 (pelo múltiplo  $\frac{1}{2}c$ ), que apresenta também o conjunto viável e uma curva de nível (perpendicular a  $c$ ).

Deslocando a curva de nível no sentido de  $-c$  (minimização), enquanto há interseção com o conjunto viável, observamos que a reta associada a  $k = Z^*$  coincide com a reta  $x_1 - 2x_2 = 2$ , suporte à primeira restrição. Sendo assim, todo o segmento sobre essa reta compreendido entre os pontos  $(x_1^*, x_2^*) = (2, 0)$  e  $(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*) = (1, 4)$  é composto por soluções ótimas. Nesse caso, há infinitas soluções ótimas. Na verdade, mostraremos oportunamente que, se há mais de uma solução ótima, então haverá infinitas soluções ótimas.

Vale mencionar ainda um caso trivial onde o conjunto viável é vazio. Considere novamente o exemplo (2.1)-(2.6), agora com os sentidos da primeira e terceira restrições trocados, de modo a obter:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3x_1 - x_2 = Z(x) \\
 \text{s.a:} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 9 \\
 & x_2 \geq 3 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

As retas suporte às restrições são as mesmas, porém os semiplanos que a primeira e terceira restrições definem são diferentes, ou seja, são aqueles que não incluem a origem. Desse modo, a Figura 2.7 indica, com setas acopladas às retas suporte, os semiplanos correspondentes a cada restrição. Observe que não há interseção entre os cinco semiplanos e, por conseguinte, o conjunto viável é vazio. Nesse caso, o problema é dito *inviável*.

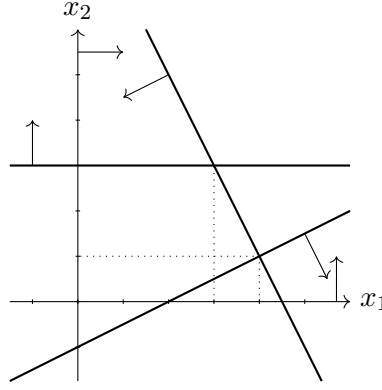


Figura 2.7: Problema inviável.

## 2.3 Conjunto viável ilimitado

Um conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é ilimitado se não existe uma constante que limite a norma de seus pontos, isto é, para todo  $L \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in C$  tal que  $\|x\| > L$ . É possível ter PPLs com conjunto viável ilimitado. Por exemplo, considere o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 = Z(x) \\ \text{s.a:} \quad & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Note que ele é obtido de (2.1)-(2.6) com a mudança de sentido das duas primeiras restrições. Sendo assim, temos as mesmas retas suporte, porém os semiplanos definidos pelas duas primeiras restrições mudam, de modo que obtemos o conjunto viável mostrado na Figura 2.8(a). Nesse exemplo, as curvas de nível são retas verticais. Deslocando-as no sentido de otimização, do vetor  $c$ , observamos que podemos aumentar o valor da função objetivo indefinidamente dentro do conjunto viável. Nesse caso, não existe ótimo e dizemos que o problema é *ilimitado*.

Suponha agora que o sentido de otimização seja mudado para minimização. Então, devemos deslocar as curvas de nível no sentido do vetor  $-c$ . Com isso, observamos que o único ótimo é atingido na interseção das retas associadas às duas primeiras restrições, ou seja, é solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

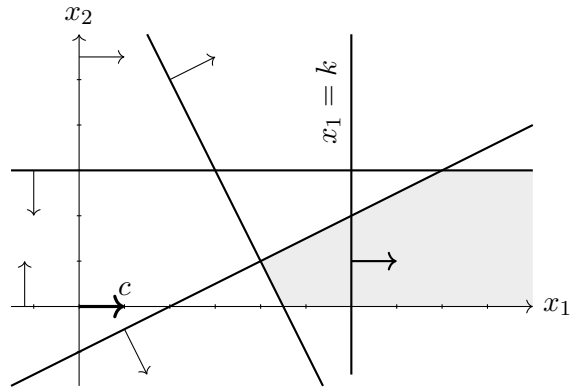
dada por  $(x_1^*, x_2^*) = (4, 1)$ . Substituindo a solução ótima  $(x_1^*, x_2^*)$  na função  $Z(x)$ , obtemos o valor ótimo

$$Z^* = Z(x_1^*, x_2^*) = x_1^* = 4.$$

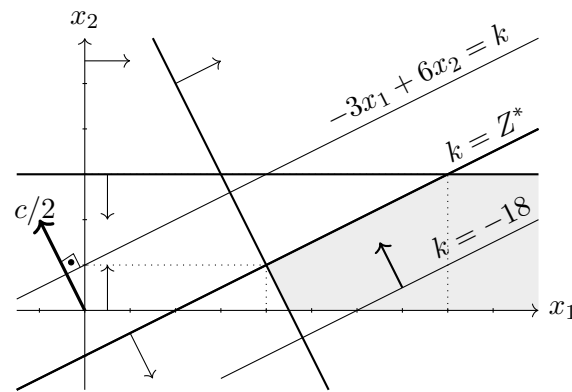
Também é possível ter múltiplas soluções ótimas quando o conjunto viável é ilimitado. Por exemplo, considere o problema do início desta seção agora com o objetivo de maximizar a função

$$Z(x) = -3x_1 + 6x_2.$$

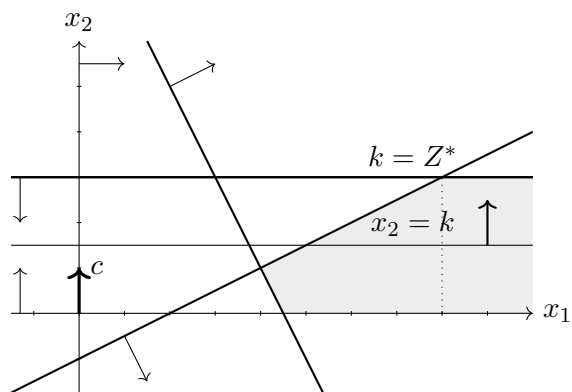
O vetor  $c$  e as curvas de nível estão representados na Figura 2.8(b). Agora, a curva de nível que ainda intercepta o conjunto viável e maximiza o valor da função coincide com a reta  $x_1 -$



(a) Problema ilimitado



(b) Múltiplas soluções ótimas - conjunto ótimo limitado



(c) Múltiplas soluções ótimas - conjunto ótimo ilimitado

Figura 2.8: Conjunto viável ilimitado.

$2x_2 = 2$ , suporte à primeira restrição. O conjunto ótimo é portanto o segmento sobre essa reta compreendido entre o ponto  $(x_1^*, x_2^*) = (4, 1)$ , interseção entre  $x_1 - 2x_2 = 2$  e  $2x_1 + x_2 = 9$ , e o ponto  $(x_1^*, x_2^*) = (8, 3)$ , interseção de  $x_1 - 2x_2 = 2$  e  $x_2 = 3$ . Vale notar que, invertendo o sentido de otimização para minimização, o problema seria novamente ilimitado.

Finalmente, considere o mesmo problema, porém com a função objetivo trocada para

$$Z(x) = x_2.$$

Nesse caso, as curvas de nível são retas horizontais e o sentido de otimização (maximização) é dado diretamente pelo vetor  $c$ , como indicado na Figura 2.8(c). Deslocando as curvas de nível nesse sentido, o ótimo é obtido quando atingimos a reta  $x_2 = 3$ . Note que temos múltiplas soluções ótimas, que definem a semirreta iniciando no ponto  $(x_1^*, x_2^*) = (8, 3)$ , interseção de  $x_1 - 2x_2 = 2$  e  $x_2 = 3$ . Nesse caso, além do conjunto viável, também o conjunto ótimo é ilimitado.

## 2.4 Descrição do método

As ideias apresentadas acima podem ser generalizadas para um PPL qualquer com duas variáveis:

$$\max / \min \quad c_1x_1 + c_2x_2 = Z(x) \quad (2.8)$$

$$\text{sujeito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_1 \quad (2.9)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_2 \quad (2.10)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_m, \quad (2.11)$$

onde  $c_j$ ,  $b_i$  e  $a_{ij}$ , para  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, 2\}$ , são coeficientes, e  $x_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , são variáveis. O método gráfico de solução consiste então nos seguintes passos:

1. Determine o conjunto viável do problema, definido pelas restrições (2.9)–(2.11): no plano cartesiano, identifique o semiplano definido por cada restrição assim como a interseção deles; se a interseção é vazia, o problema é inviável; caso contrário, proceda com os próximos passos;
2. Desenhe uma curva de nível da função objetivo (2.8) e identifique o sentido de crescimento (no caso de maximização) ou decrescimento (no caso de minimização), como segue:
  - escolha um valor inicial  $k_0$  e trace a reta  $c_1x_1 + c_2x_2 = k_0$  (preferencialmente esse valor deve ser tal que a reta passe por um ponto interno ao conjunto viável); encontre o sentido de otimização, determinando o semiplano  $c_1x_1 + c_2x_2 > k_0$  (se maximização) ou  $c_1x_1 + c_2x_2 < k_0$  (se minimização);
  - alternativamente, desenhe o vetor  $c$  e uma reta perpendicular a ele, passando por um ponto interno ao conjunto viável; o sentido de otimização é o de  $c$  (se maximização) ou  $-c$  (se minimização);
3. Desloque as curvas de nível no sentido de otimização (maximização ou minimização) enquanto interceptar o conjunto viável; caso esse deslocamento possa ser feito infinitamente, sem deixar o conjunto viável, o problema é ilimitado; caso contrário, o problema tem solução ótima (única ou infinitas), então proceda com o próximo passo;

4. Determine o conjunto ótimo: ele é a interseção da curva de nível associada ao melhor valor da função objetivo com a fronteira do conjunto viável; uma solução ótima pode ser encontrada resolvendo um sistema linear definido pelas retas suporte às restrições que definem essa fronteira.

A tabela abaixo resume os casos que verificamos possíveis para um PPL. Na verdade, esses são todos os casos que podem ocorrer, como ficará provado no decorrer dos próximos capítulos.

Conjunto viável	Conjunto ótimo	Situação
Vazio	Vazio	Problema Inviável
Não vazio e limitado	Não vazio e limitado	Solução Única
		Múltiplas Soluções
Não vazio e ilimitado	Vazio	Problema Ilimitado
	Não vazio e limitado	Solução Única
		Múltiplas Soluções
	Não vazio e ilimitado	Múltiplas Soluções

Embora a aplicabilidade do método gráfico esteja limitada a problemas em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , algumas das conclusões com ele obtidas são extensíveis para problemas em  $\mathbb{R}^n$  e serão base para o método Simplex, que apresentaremos no Capítulo 4. Entre elas, destacamos:

- Se existir solução ótima, ela ocorrerá na fronteira do conjunto viável; desse modo podemos concentrar a busca pelo ótimo nessa região;
- Mais ainda, pelo menos um ótimo vai ocorrer em um tipo de ponto especial da fronteira, que chamamos vértice, dado pela solução de um sistema linear quadrado, cujas equações definem as retas suporte às restrições satisfeitas na igualdade por esse ponto;
- Como há um número finito de sistemas lineares quadrados que podem ser derivados das restrições, a busca pelo ótimo pode se restringir a um número finito de pontos, embora o conjunto viável tenha, normalmente, um número infinito de soluções;
- Dessa maneira, podemos pensar em resolver uma sequência de sistemas lineares, que definam vértices cada vez melhores do ponto de vista da função objetivo, até eventualmente chegar a um ótimo; essa é a estratégia geral do método simplex.

## 2.5 Exercícios

2.1. Resolva pelo método gráfico. Determine o conjunto ótimo e, caso seja não vazio, também o valor ótimo. Classifique o problema como tendo solução única ou múltiplas, ilimitado ou inviável.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \max & 3x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a:} & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{b) } \min & -6x_1 + x_2 \\
 \text{s.a:} & 4x_1 + x_2 \leq 21 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\
 & -x_1 + x_2 = 1 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c) } \min & 2x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a:} & x_1 \leq 3 \\
 & x_1 - x_2 \geq 2 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 9 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{d) } \max & x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a:} & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{array}$$



2.2. Uma empresa produz dois tipos diferentes (A e B) de fio de algodão. A fabricação de 100 Kg do fio A requer 2h na seção de tinturaria e 1h na seção de fiação. A mesma quantidade de fio B requer 1,5h na seção de tinturaria e 2h na seção de fiação. As seções de tinturaria e fiação têm disponíveis diariamente 15h e 12h, respectivamente. Por imposição do mercado, a produção diária de fio A não deve ser inferior a 300Kg. Os lucros com a venda de 100Kg de fio são R\$5 para o tipo A e R\$10 para o tipo B. Elabore um modelo de PL para planejar a produção diária que maximize o lucro. Resolva o modelo usando o método gráfico.

2.3. Considere a seguinte estrutura que define diferentes PPLs, dependendo da escolha feita para o operador relacional em cada restrição e para o sentido de otimização da função objetivo. As res-

$$\text{min / max } -x_1 + 2x_2 = Z(x)$$

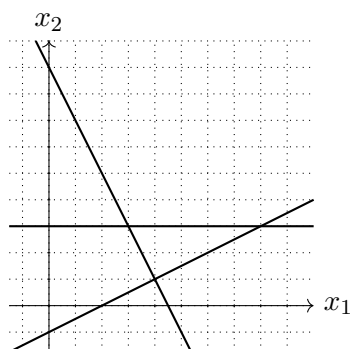
$$\text{sujeito a: } x_1 - 2x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} 2$$

$$2x_1 + x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} 9$$

$$x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

tas suporte associadas às restrições estão desenhadas no gráfico abaixo:

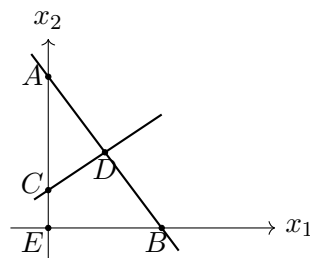


Para cada uma das combinações sugeridas na tabela abaixo, identifique o conjunto viável e o conjunto ótimo.

Restrições			Conjunto Viável	Conjunto ótimo	
1ª	2ª	3ª		max	min
$\leq$	$\leq$	$\geq$			
$\leq$	$\geq$	$\geq$			
$\leq$	$\geq$	$\leq$			
$\geq$	$\geq$	$\leq$			

2.4. No gráfico a seguir as linhas cheias descrevem a posição exata das restrições do seguinte PPL:

$$\begin{aligned} &\text{otimizar } x_1 + \alpha x_2 \\ &\text{sujeito a: } x_1 + \alpha x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \beta \\ &\quad x_1 + \rho x_2 \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \delta \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Determine na tabela abaixo o conjunto solução de cada um dos problemas obtidos pelas diversas combinações de objetivo (otimizar  $\in \{\text{maximizar, minimizar}\}$ ) e sentido da segunda restrição ( $\begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \in \{\leq, \geq, =\}$ ). Considere que  $\alpha < 0 < \rho$  e  $\beta < 0 < \delta$ . Use os pontos destacados no gráfico como referência para descrição dos conjuntos.

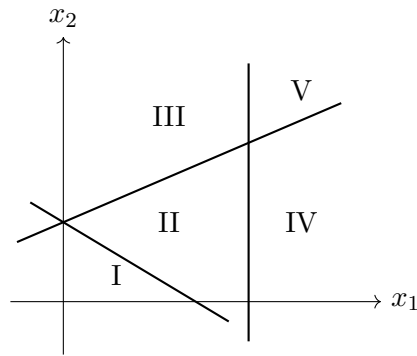
	$\leq$	$\geq$	$=$
Maximizar			
Minimizar			

2.5. Considere o seguinte PPL:

$$(P) \min c^T x \text{ s.a: } Ax \leq b, x \geq 0.$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $c \in \mathbb{R}^2$  e  $b \in \mathbb{R}^3$ . As três restrições estão representadas no gráfico abaixo. De acordo com os elementos da matriz  $A$  e do vetor  $b$ , é possível ter cinco conjuntos viáveis diferentes, identificados por I, II, III, IV e V no gráfico. Chamemos de Problema X aquele onde o conjunto viável é X. Um ponto de  $X$  é dito extremo se ele é um extremo de todo segmento, contido em X, ao que pertence. Identifique os problemas com as seguintes propriedades:

Propriedade	I	II	III	IV	V
Tem solução ótima para qualquer $c$					
É ilimitado quando $c^T = (-3, 0)$ e quando $c^T = (0, -1)$					
Tem solução ótima não extrema quando $c^T = (-1, 0)$					
Tem uma única solução viável extrema					
Dependendo de $c$ , pode ser ilimitado, ter solução ótima única ou ter múltiplas soluções básicas ótimas					
Dependendo de $c$ , seu conjunto ótimo pode ser vazio, unitário, não unitário e limitado, ou ilimitado					



## Capítulo 3

# Soluções Básicas

Neste capítulo, definimos a forma padrão de um problema de programação linear (PPL), que será fortemente usada ao longo deste texto e, em particular, para a apresentação do método simplex. Mostramos como um PPL qualquer pode ser convertido à forma padrão e como ela pode ser usada para encontrar um tipo especial de solução viável, a ser chamada solução básica.

### 3.1 Forma padrão

A *forma padrão* de um problema de programação linear (PPL) é:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.a:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

com  $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_m \geq 0$ . Destacamos as três características principais dessa forma: (i) função objetivo de minimização, (ii) restrições de igualdade com lado direito não negativo e (iii) variáveis não negativas. Observamos que alguns autores consideram a forma padrão com função objetivo de maximização.

Em notação matricial, a forma padrão se escreve como:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b, \quad (b \geq 0) \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A forma padrão será bastante útil para a apresentação dos métodos de solução, assim como para o estudo de propriedades teóricas de um PPL.

## 3.2 Conversão à forma padrão

Todo PPL pode ser convertido à forma padrão. Isso significa que sempre há um PPL equivalente escrito nessa forma. Vejamos, caso a caso, como essa conversão pode ser feita, considerando possíveis violações da forma padrão.

1. **Função objetivo de maximização.** É suficiente multiplicar a função por  $-1$ , pois

$$\max Q(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \Leftrightarrow \min Q'(x) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n.$$

2. **Restrição de desigualdade.** Deve-se somar ou subtrair uma *variável de folga* não negativa, conforme a desigualdade:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geq b_k \Leftrightarrow \begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - s_k = b_k \\ s_k \geq 0 \end{cases}$$

3. **Lado direito negativo.** Basta multiplicar a restrição por  $-1$ :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i (< 0) \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i (> 0)$$

4. **Variável não positiva ou livre de sinal.** É preciso uma mudança de variável e a substituição correspondente no modelo:

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow x'_j = -x_j \geq 0$$

$$x_j \text{ livre} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j, x'_j \geq 0, x''_j \geq 0$$

Ex. 3.2.1. Vamos converter o seguinte PPL à sua forma padrão.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

Convertendo a função objetivo (para minimização):

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -1 \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

Convertendo as restrições em igualdades (com termo independente não negativo):

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ & -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_6 = 1 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre}, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Convertendo as variáveis em não negativas:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - 3x'_2 - 4x'_3 + 4x''_3 \\
\text{s.a:} \quad & 3x_1 - x'_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 2 \\
& -x_1 + 2x'_2 + 3x'_3 - 3x''_3 - x_5 = 4 \\
& -5x_1 - 3x'_2 - 2x'_3 + 2x''_3 + x_6 = 1 \\
& x_1 + 3x'_2 + x'_3 - x''_3 = 5 \\
& x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0, x''_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

### 3.3 Particionando um sistema linear

Um dos elementos fundamentais que aparecem na forma padrão é o sistema linear  $Ax = b$ . Podemos reescrever esse sistema de diferentes formas. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = b. \quad (3.1)$$

Com esse particionamento, percebemos que uma solução de  $Ax = b$  é uma combinação linear das colunas de  $A$  que gera  $b$ . Logo:

$$Ax = b \text{ tem solução} \Leftrightarrow b \in \text{span}(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow \text{posto}(A) = \text{posto}(A, b).$$

Observamos também em (3.1) que cada coluna de  $A$  corresponde a uma componente de  $x$ . Assim, podemos reescrever  $Ax = b$  de muitas formas, agrupando e ordenando as colunas de  $A$  e as correspondentes componentes de  $x$ . Para isso, considere a seguinte notação:

- $I = \{1, 2, \dots, m\}$ : conjunto de índices das linhas de  $A$  e componentes de  $b$ ;
- $J = \{1, 2, \dots, n\}$ : conjunto de índices das colunas de  $A$  e componentes de  $c$  e  $x$ ;
- Dado  $K \subseteq J$  um conjunto ordenado, seja  $A_K$  a submatriz de  $A$  definida pelas colunas indexadas por  $K$ ; similarmente, denotamos por  $c_K$  e  $x_K$  os vetores formados pelas componentes de  $c$  e  $x$ , respectivamente, indexadas por  $K$ .

Dada uma partição qualquer  $K, K'$  de  $J$ , ou seja,  $K \cup K' = J$  e  $K \cap K' = \emptyset$ , podemos reescrever  $Ax = b$  como

$$A_K x_K + A_{K'} x_{K'} = b.$$

Por exemplo, usando  $K = \{3, 1\}$  e  $K' = \{2, 4, \dots, n\}$ , reorganizamos (3.1), equivalentemente, como

$$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m3} & a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b.$$

*Ex. 3.3.1.* Considere o sistema  $Ax = b$  dado por

$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 4 \\
2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_6 &= 2 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_7 &= 5
\end{aligned}$$

Temos que  $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Considere  $K = \{2, 6, 3\}$  e  $K' = \{4, 5, 1, 7\}$ . Então, o sistema  $Ax = b$  pode ser reescrito em termos dessa partição de  $J$  como  $A_K x_K + A_{K'} x_{K'} = b$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

Tomando agora a partição  $K = \{2, 1, 3\}$  e  $K' = \{4, 5, 6, 7\}$ , obtida da anterior trocando os índices 6 e 1 de parte, temos que  $A_{K'}$  é uma identidade e, portanto,  $Ax = b$  se apresenta como

$$A_K x_K + x_{K'} = b.$$

Nesse caso, torna-se fácil determinar uma solução do sistema, fazendo  $x_K = 0$  e obtendo  $x_{K'} = b$ .

A estratégia usada no Exemplo 3.3.1 será generalizada para determinação de soluções especiais de  $Ax = b$ .

### 3.4 Solução básica

Associada ao sistema  $Ax = b, x \geq 0$ , que define o conjunto viável de um PPL, vamos admitir a seguinte hipótese de posto completo.

**PC:** A matriz  $A$  tem posto-linha completo, ou seja,  $\text{posto}(A) = m$ .

É importante observar que essa hipótese não é restritiva, no seguinte sentido:

- i) Se  $\text{posto}(A, b) \neq \text{posto}(A)$ , então o sistema  $Ax = b$  não tem solução e, por conseguinte, o PPL é inviável;
- ii) Se  $\text{posto}(A, b) = \text{posto}(A) < m$ , então o sistema tem linhas linearmente dependentes, significando que o PPL tem restrições redundantes, que poderiam ser removidas, sem prejuízo.

Em outros termos, quando o PPL é viável e não tem equações redundantes (em sua forma padrão), a hipótese (PC) é satisfeita. Os casos de inviabilidade e existência de equações redundantes serão identificados e tratados posteriormente.

Sob a hipótese (PC), é sempre possível garantir a existência de uma submatriz quadrada de  $A$ , de ordem  $m$ , invertível, ou melhor, de um subconjunto  $B \subseteq J$ ,  $|B| = m$ , tal que  $A_B$  é invertível. Definindo  $N = J \setminus B$  e reescrevendo  $Ax = b$  como  $A_B x_B + A_N x_N = b$ , podemos obter a seguinte solução do sistema:

$$x_N = 0, x_B = A_B^{-1}b.$$

Esse tipo de solução desempenha um papel fundamental em nosso contexto, merecendo uma denominação especial.

**Definição 3.4.1.** Com respeito ao sistema  $Ax = b, x \geq 0$ , onde  $\text{posto}(A) = m$ , definimos:

1. Uma *base* é uma submatriz  $A_B$  invertível (note que  $|B| = m$ );
2. Uma *base viável* é uma base  $A_B$  tal que  $A_B^{-1}b \geq 0$ ; uma *base inviável* é tal que não satisfaz essa condição;
3. Uma *solução básica* é um vetor  $x$  para o qual existe partição  $(B, N)$  de  $J$  tal que  $A_B$  é base,  $x_N = 0$  e  $x_B = A_B^{-1}b$  (ou, equivalentemente,  $Ax = b$ ,  $A_B$  é base e  $x_N = 0$ ); neste caso,  $x$  é a solução básica definida pela base  $A_B$ ;
4. Uma *solução básica viável* é uma solução básica  $x$  tal que  $x \geq 0$ ;
5. Uma *solução básica degenerada* é uma solução básica  $x$  onde alguma componente de  $x_B$  é nula (caso contrário é dita não degenerada).

Uma base  $A_B$  é também chamada *matriz básica*, enquanto  $A_N$  é chamada *matriz não básica*. Similarmente,  $x_B$  e  $x_N$  são chamadas *variáveis básicas* e *variáveis não básicas*, respectivamente, assim como  $c_B$  e  $c_N$  são os *custos básicos* e *custos não básicos*, respectivamente.

Ex. 3.4.1. Vamos enumerar todas as soluções básicas do seguinte PPL:

$$\begin{array}{ll}\min & x_1 - x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Na forma padrão, o PPL fica

$$\begin{array}{ll}\min & x_1 - x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{array}$$

Nesse exemplo, temos que  $\text{posto}(A) = 2$ , satisfazendo a hipótese (PC). Consideremos as  $\binom{4}{2} = 6$  possíveis bases:

1.  $B_1 = \{1, 2\}$  e  $N_1 = \{3, 4\}$

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Temos } x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Então  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3, 0, 0)$  é solução básica viável.

2.  $B_2 = \{1, 3\}$  e  $N_2 = \{2, 4\}$

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ não é base, pois } A_{B_2} \text{ é singular.}$$

3.  $B_3 = \{1, 4\}$  e  $N_3 = \{2, 3\}$

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Temos } x_{N_3} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Então  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6, 0, 0, 3)$  é solução básica viável.

4.  $B_4 = \{2, 3\}$  e  $N_4 = \{1, 4\}$

$$A_{B_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_4}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Temos } x_{N_4} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_4} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Então  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 3, 0)$  é solução básica viável.

5.  $B_5 = \{2, 4\}$  e  $N_5 = \{1, 3\}$

$$A_{B_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ é base, pois } A_{B_5}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Temos } x_{N_5} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } x_{B_5} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Então  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6, 0, -3)$  é solução básica inviável.

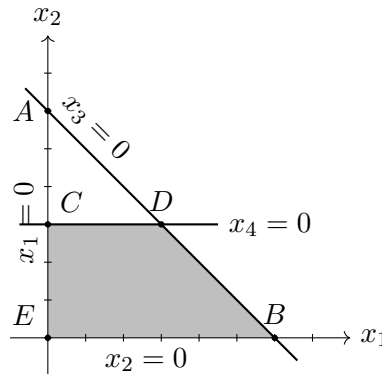
6.  $B_6 = \{3, 4\}$  e  $N_6 = \{1, 2\}$

$A_{B_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  é base, pois  $A_{B_6}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Temos  $x_{N_6} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$  e  $x_{B_6} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Então  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 3)$  é solução básica viável.

A seguir, vamos identificar as soluções básicas do Exemplo 3.4.1 no conjunto viável do PPL, descrito pela região hachurada da figura abaixo. Essa região corresponde à projeção sobre  $(x_1, x_2)$  dos pontos viáveis  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  referentes à forma padrão do PPL.



Observe que os pontos  $(x_1, x_2)$  sobre a reta  $x_1 + x_2 = 6$ , suporte à primeira restrição, correspondem aos pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  com  $x_3 = 0$ . Similarmente, aqueles sobre a reta  $x_2 = 3$ , suporte à segunda restrição, correspondem a  $x_4 = 0$ . Sendo assim, cada uma das quatro retas suporte às restrições do problema, que limitam a região viável, está associada a uma variável nula, conforme identificado na figura.

As quatro soluções básicas viáveis identificadas no exemplo (itens 1, 3, 4 e 6) correspondem exatamente aos vértices do conjunto viável (pontos D, B, C e E, respectivamente). O ponto D, por exemplo, é obtido pela interseção das retas associadas às variáveis  $x_3 = 0$  e  $x_4 = 0$ , exatamente as variáveis não básicas (escolhidas para terem valor nulo). Situação similar ocorre com os pontos B, C e E. Sendo assim, percebemos que as variáveis não básicas, cuja valoração em zero determina unicamente os valores das variáveis básicas, correspondem exatamente às restrições que devemos ativar (tomar como igualdade) para definir um vértice do conjunto viável. Essas restrições, tomadas na igualdade, definem um sistema quadrado  $A_B x_B = b$  com solução única. Em resumo, podemos determinar um vértice anulando um número suficiente de variáveis no sistema  $Ax = b$  para transformá-lo num sistema unicamente determinado.

Vale observar ainda a solução básica, porém inviável, determinada no item 5. Ela é obtida da mesma forma (interseção das retas  $x_1 = 0$  e  $x_3 = 0$ ), porém se associa a um ponto fora da região viável (ponto A). Em outros termos, a estratégia descrita no parágrafo anterior nem sempre gera um vértice, o que ocorre quando alguma variável assume valor negativo. Finalmente, note que as variáveis não básicas escolhidas no item 2 se associam às retas paralelas  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 0$ , não determinando, pois, um ponto.

### 3.5 Obtendo soluções básicas

Para obtermos uma solução básica, precisamos identificar uma base  $A_B$ , calcular sua inversa  $A_B^{-1}$  e multiplicá-la por  $b$ . Esse processo pode ser realizado efetuando-se operações elementares sobre linhas na matriz estendida  $(A, b)$ .

Há três operações elementares sobre linhas:



$L_i \leftrightarrow L_j$ : permutar as linhas  $i$  e  $j$

$L_i \leftarrow kL_i$ : multiplicar a linha  $i$  por  $k \neq 0$

$L_i \leftarrow L_i + kL_j$ : substituir a linha  $i$  por ela somada a  $k$  vezes a linha  $j \neq i$

Em particular, denotamos por  $E_{ij}$ ,  $E_i(k)$  e  $E_{ij}(k)$  as matrizes obtidas, respectivamente, com as operações  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow kL_i$  e  $L_i \leftarrow L_i + kL_j$  sobre a matriz identidade. Essas matrizes são chamadas elementares.

De forma geral, uma operação sobre linha em uma matriz  $M$  resulta numa matriz  $M'$  que é o produto da matriz elementar correspondente à operação pela matriz  $M$ , ou seja,

$$\begin{aligned} M \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} M' &\Leftrightarrow M' = E_{ij}M \\ M \xrightarrow{L_i \leftarrow kL_i} M' &\Leftrightarrow M' = E_i(k)M \\ M \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + kL_j} M' &\Leftrightarrow M' = E_{ij}(k)M \end{aligned}$$

Deixamos como exercício a prova da afirmação acima.

Considere, então, que conseguimos efetuar  $p$  operações elementares sobre uma matriz quadrada  $M$ , obtendo a identidade como resultado. Se essas operações correspondem às matrizes  $E_1, E_2, \dots, E_p$  (aqui o subíndice identifica apenas a sequência das operações e não as linhas envolvidas), temos que

$$I = E_p(E_{p-1} \dots (E_2(E_1M))) = (E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1)M.$$

Logo, concluímos que a matriz  $M$  é invertível e

$$M^{-1} = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1.$$

Mais ainda, realizar essas operações elementares sobre  $M$  equivale a pré-multiplicá-la por sua inversa.

Considere agora a matriz estendida  $(A, b)$  associada à forma padrão de um PPL e uma partição sua  $(A_B, A_N, b)$ , onde  $A_B$  é quadrada. Se conseguimos efetuar operações elementares sobre linhas de modo a converter  $A_B$  numa identidade, concluímos que  $A_B$  é uma base e, além disso, o resultado dessas operações sobre  $(A, b)$  é

$$A_B^{-1}(A_B, A_N, b) = (I, A_B^{-1}A_N, A_B^{-1}b).$$

A matriz no lado direito da expressão acima é chamada *forma canônica* de  $(A, b)$  relativa à base  $A_B$ . Note que a última coluna é exatamente o valor das variáveis básicas  $x_B$ . Dessa forma, podemos identificar bases e determinar as soluções básicas correspondentes, realizando operações elementares sobre linhas na matriz  $(A, b)$ , até converter alguma submatriz (a base) numa identidade.

*Ex. 3.5.1.* Considere o sistema  $Ax = b$  do Exemplo 3.3.1 e a partição  $B = \{4, 5, 1, 7\}$  e  $N = \{2, 6, 3\}$ . Temos que a matriz  $(A_B, A_N, b)$  é

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} x_4 & x_5 & x_1 & x_7 & x_2 & x_6 & x_3 & b \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -6 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right].$$

Podemos converter a matriz  $A_B$  numa identidade, realizando as seguintes operações elementares  $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$ ,  $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3$  e  $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ , o que nos leva a

$$\begin{array}{cccc|cccc} x_4 & x_5 & x_1 & x_7 & x_2 & x_6 & x_3 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -1 & 3 & 3 \end{array}.$$

Logo,  $A_B$  é base e define solução básica viável degenerada com

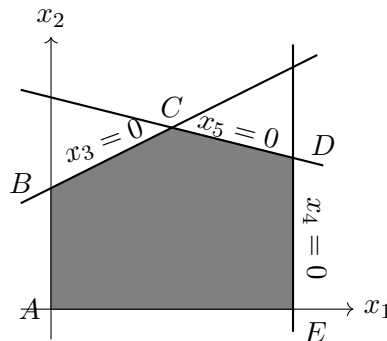
$$x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

## 3.6 Exercícios

3.1. Determine a forma padrão dos seguintes problemas:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 7x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + 7x_2 - x_3 = 9 \\ & x_1 + 14x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ & x_1 + 7x_2 - x_3 \geq 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a:} & x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 - x_2 - x_3 \geq -4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre} \end{array}$$

3.2. Seja  $(P)$  o PPL representado no gráfico abaixo, onde o conjunto viável corresponde à região sombreada.



Admita que  $(P)$  é escrito na forma padrão como  $\min -x_1$  s.a:  $\sum_{j=1}^5 A_j x_j = b, x \geq 0$ , onde  $b, A_j \in \mathbb{R}^3$ ,  $j = 1..5$ , sendo  $x_1$  e  $x_2$  as variáveis originais e  $x_3, x_4$  e  $x_5$  as variáveis de folga, conforme indicado na figura. Correlacione as submatrizes enumeradas à esquerda com as opções indicadas à direita.

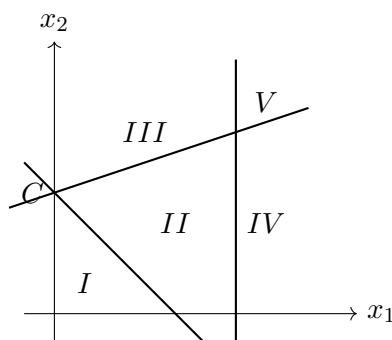
- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| ( ) $B_1 = [A_1 \ A_2 \ A_4]$ | (1) Não é base                              |
| ( ) $B_2 = [A_2 \ A_3 \ A_5]$ | (2) Base inviável                           |
| ( ) $B_3 = [A_1 \ A_3 \ A_5]$ | (3) Base viável definindo solução ótima     |
| ( ) $B_4 = [A_1 \ A_2 \ A_5]$ | (4) Base viável definindo solução não ótima |
| ( ) $B_5 = [A_1 \ A_2 \ A_3]$ |   |

3.3. Considere o seguinte PPL

$$(P) \max c^\top x \text{ s.a: } Ax \leq b, x \geq 0,$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $c \in \mathbb{R}^2$  e  $b \in \mathbb{R}^3$ . As três restrições estão representadas no gráfico abaixo. De acordo com os elementos da matriz  $A$  e do vetor  $b$ , é possível ter cinco conjuntos viáveis diferentes, identificados por I, II, III, IV e V no gráfico. Chamemos de Problema  $X$  aquele definido pela forma padrão de  $(P)$  quando o conjunto viável é  $X$ . Responda às questões a seguir:

1. Quantas bases viáveis têm os problemas I, II e V?
2. Quantas bases são simultaneamente viáveis para II e IV?
3. Quantas bases são simultaneamente inviáveis para III e IV?
4. Quantas submatrizes  $3 \times 3$  de  $[A \ I]$  não definem bases?
5. Quantas bases definem o ponto  $C$ ?
6. Em que problemas o conjunto ótimo poderia ser apenas unitário ou ilimitado?
7. Que problemas não têm solução quando  $c > 0$ ?
8. Que problemas têm solução ótima para qualquer  $c$ ?
9. Que problemas não têm solução ótima para qualquer  $c$ ? E para algum  $c$ ?
10. Para o problema II, a base onde  $x_1$  e  $x_2$  são não básicas é viável ou inviável? Quantas variáveis básicas têm valor negativo?



3.4. Considere o sistema abaixo e seja  $B = \{1, 2, 3\}$ .

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &- x_4 = b_2 \\ x_2 &+ x_5 = b_3 \\ x_i &\geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 5\} \end{aligned}$$

Para que valores de  $b_2$  e  $b_3$ , a base definida por  $B$  é:

1. inviável
2. viável e degenerada
3. viável e não degenerada

3.5. Considere novamente o Exercício 3.4. Mostre que:

1. Para  $b_2 = 3$  e  $b_3 = 1$ , a solução  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 1, 0)$  é básica viável; que bases definem essa solução?
2. Para  $b_2 = 4$  e  $b_3 = 1$ , a solução  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 0, 0)$  é básica viável; que bases definem essa solução?
3. Para  $b_2 = \alpha b_3$  e  $b_3 > 0$ , as bases  $A_{\{1,2,3\}}$ ,  $A_{\{1,2,4\}}$  e  $A_{\{1,2,5\}}$  são simultaneamente viáveis se, e somente se,  $\alpha = 4$ ; que pontos essas bases definem nesse caso?
4. A solução  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (b_2, 0, b_2, 0, b_3)$  é definida por única base se, e somente se,  $b_2 \neq 0$  e  $b_3 \neq 0$ ; nesse caso, quando essa base é viável?

3.6. Considere o sistema  $Ax = b, x \geq 0$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -13 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Faça o que se pede:

1. Aplicando operações elementares sobre linhas na matriz  $(A, b)$ , determine as soluções básicas definidas por  $A_{\{5,4\}}$ ,  $A_{\{5,2\}}$  e  $A_{\{1,2\}}$ .
  2. Determine as inversas de  $A_{\{5,4\}}$ ,  $A_{\{5,2\}}$  e  $A_{\{1,2\}}$  pela multiplicação das matrizes elementares correspondentes às operações realizadas no item anterior ou ainda pela aplicação dessas mesmas operações sobre a identidade.
  3. Determine a forma canônica de  $(A, b)$  relativa à base  $A_{\{5,2\}}$ , começando com as operações elementares que geraram a forma canônica relativa à  $A_{\{5,4\}}$ , aplicadas no item 1. Similarmente, determine a forma canônica relativa à  $A_{\{1,2\}}$  a partir da forma canônica relativa à  $A_{\{5,2\}}$ .
  4. Admita a matriz  $A$  modificada com a inclusão de uma nova coluna  $A_6 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Determine a forma canônica do novo sistema  $(A, b)$  relativa à base  $A_{\{1,2\}}$ , usando a inversa dessa matriz calculada no item 2. Opere apenas com a nova coluna de  $A$ .
  5. A partir do resultado do item anterior, determine a forma canônica relativa à base  $A_{\{6,2\}}$ .
- 3.7. Mostre que, sob a hipótese (PC), é sempre possível garantir a existência de uma base de ordem  $m$ .
- 3.8. Sejam  $\bar{x}$  uma solução do sistema  $Ax = b, x \geq 0$  e  $P = \{j \in J : \bar{x}_j > 0\}$  o conjunto de índices das componentes positivas. Admita a hipótese (PC). Mostre que  $\bar{x}$  é solução básica se, e somente se,  $A_P$  tem colunas linearmente independentes.

## Capítulo 4

# Funcionamento do Método Simplex

Neste capítulo, apresentamos o método para resolução de um problema de programação linear proposto por George Dantzig, conhecido como método simplex. Brevemente falando, ele consiste em determinar uma sequência de soluções básicas viáveis, cada vez melhores, segundo a função objetivo, até chegar a uma solução ótima ou à conclusão de que o problema é ilimitado. O passo fundamental do algoritmo, a ser descrito na Seção 4.2, consiste em passar de uma solução básica para outra melhor. As ideias por trás do funcionamento do método são primeiramente ilustradas com um exemplo na Seção 4.1. Nas demais seções, apresentamos uma interpretação geométrica do processo, mostramos como determinar uma base viável para começar o algoritmo e provamos a corretude do método.

### 4.1 Um primeiro exemplo

Considere o PPL

$$\begin{array}{llll} \max & 20x_1 & + & 15x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 & + & 2x_2 \leq 40 \\ & 2,5x_1 & + & 3x_2 \leq 75 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 60 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Sua forma padrão é:

$$\begin{array}{llllll} \min & -20x_1 & - & 15x_2 & & = & Z \\ \text{s.a:} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 40 \\ & 2,5x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & = 75 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_5 & = 60 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Para facilitar a visualização, vamos transferir os dados do problema para a tabela abaixo, que evidencia os coeficientes sobre os quais serão efetuadas as operações matemáticas.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
	1	2	1	0	0	40
	2,5	3	0	1	0	75
	3	2	0	0	1	60
	-20	-15	0	0	0	$Z$

A linha superior do quadro identifica a variável associada a cada coluna. Considerando a forma padrão como  $\min c^T x$  s.a  $Ax = b, x \geq 0$ , na parte central temos a matriz  $A$  e, à sua direita, o vetor  $b$ . Na linha inferior, temos o vetor  $c^T$ . Lembre que cada linha na parte central

representa uma restrição (de igualdade), enquanto a última linha expressa a função objetivo, que denotamos por  $Z$ .

Observando o quadro, percebemos que  $B = \{3, 4, 5\}$  define uma base  $A_B = I$  e que ela é viável, pois  $b \geq 0$ . Essa base gera a solução básica

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 75 \\ 60 \end{bmatrix},$$

que tem valor  $Z = 0$ .

Essa é uma solução ótima? Podemos rephrasing tal pergunta, recordando que ela foi gerada atribuindo, arbitrariamente, valor 0 a  $x_1$  e  $x_2$ . Dessa maneira, a pergunta se transforma em: zero é o melhor valor para essas duas variáveis? Se for, temos uma solução ótima, pois  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$  têm seus valores determinados, de forma única, a partir da escolha dos valores de  $x_1$  e  $x_2$ .

Observando a função objetivo, notamos que o coeficiente de  $x_1$ ,  $-20$ , é negativo. Então, um aumento no valor de  $x_1$  contribui para uma redução no valor da função, de  $-20$  para cada unidade atribuída a  $x_1$ . Entretanto, uma modificação no valor de  $x_1$  leva a uma mudança no valor das demais variáveis, de modo a continuar satisfazendo o sistema  $Ax = b$ . Por outro lado, mantendo o valor de  $x_2 = 0$ , a alteração no valor da função depende unicamente da nova valoração de  $x_1$ , pois os coeficientes das demais variáveis são zero na função objetivo. Concluimos, assim, que aumentar o valor de  $x_1$  e manter  $x_2 = 0$  gera a uma redução no valor de objetivo. Quanto maior o valor de  $x_1$ , maior será essa redução.

A questão agora torna-se descobrir qual o maior valor que podemos atribuir a  $x_1$ , enquanto mantemos  $x_2 = 0$ . Essa situação corresponde a considerar o sistema reduzido:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 40 \\ 2,5x_1 + x_4 &= 75 \\ 3x_1 + x_5 &= 60 \\ x_1, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 40 & x_1 &\leq 40/1 = 40 \\ 2,5x_1 &\leq 75 & \Leftrightarrow & x_1 \leq 75/2,5 = 30 \\ 3x_1 &\leq 60 & x_1 &\leq 60/3 = 20 \\ x_1 &\geq 0 & x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Então, para satisfazer (4.1) e, conseqüentemente, o sistema original, podemos escolher qualquer valor entre 0 e  $\min\{40, 30, 20\} = 20$  para  $x_1$ . Além disso, escolher o maior valor, ou seja,  $x_1 = 20$  equivale, pela terceira igualdade em (4.1), a fazer  $x_5 = 0$ . Dessa forma, podemos gerar uma solução melhor fixando  $x_1 = 20$  e  $x_2 = 0$  ou, equivalentemente,  $x_2 = 0$  e  $x_5 = 0$ . Essa nova solução decresce a função objetivo em  $-20x_1 = -20 \times 20 = -400$ .

A primeira pergunta então se repete! Essa nova solução de valor  $Z = -400$  é ótima? Ou equivalentemente, atribuir zero a  $x_2$  e  $x_5$  é a melhor opção? E se não for, qual novo valor poderíamos atribuir? Colocadas dessa forma, tais questões são semelhantes àquelas da situação inicial. Naquele momento foi fácil respondê-las por dois motivos:

1. Os coeficientes das demais variáveis (além das fixadas em zero) na função objetivo eram nulos - com isso bastava verificar os coeficientes das variáveis (não básicas) anuladas: se algum fosse negativo, a solução não seria ótima;
2. A matriz associada às demais variáveis era uma identidade - com isso era fácil calcular o novo valor a ser atribuído a uma das variáveis anuladas, caso isso levasse a uma melhor opção, olhando o sistema reduzido.

A ideia então é modificar o sistema  $Ax = b$  e a função  $Z = c^T x$  de modo a anular os coeficientes das variáveis  $x_1$ ,  $x_3$  e  $x_4$  e transformar a submatriz associada a elas numa identidade. É claro que essa transformação deve resultar em um problema equivalente, apenas reescrito de uma maneira mais conveniente para o momento.

Faremos então, no quadro anterior, as operações elementares sobre linhas indicadas abaixo:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
1	2	1	0	0	40	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3$
2,5	3	0	1	0	75	$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2,5}{3}L_3$
3	2	0	0	1	60	$L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$
-20	-15	0	0	0	$Z$	$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{20}{3}L_3$

Com isso, obtemos

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	20
0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{5}{6}$	25
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	20
0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{20}{3}$	$Z + 400$

Note que as operações realizadas não modificam o PPL. Multiplicar uma restrição (de igualdade) por uma constante ou somar a uma restrição outra restrição de igualdade não modificam as soluções viáveis. De forma semelhante, a operação realizada sobre a função objetivo  $Z$  leva à expressão de  $Z + 400$ , ou seja, a função original somada a uma constante, o que gera uma função equivalente a ser minimizada.

Observe também que as operações elementares realizadas converteram a matriz  $A_{\{3,4,1\}}$  numa identidade. Portanto, essa matriz é uma base, e as operações correspondem a pré-multiplicar o sistema pela sua inversa. Pelo exposto na Seção 3.5, o novo quadro fornece uma nova solução básica viável, dada por

$$x_N = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Pela última linha, temos que  $Z + 400 = -\frac{5}{3}x_2 + \frac{20}{3}x_5$ . Logo,  $Z + 400 = 0$  nessa solução básica, ou seja,  $Z = -400$ .

A nova expressão, equivalente, do PPL apresenta as características 1) e 2) desejadas. Então podemos observar que anular  $x_2$  e  $x_5$  não é a melhor opção. De fato, manter  $x_5 = 0$  e aumentar  $x_2$  fazem a função decrescer, a uma taxa de  $-5/3$  por unidade de  $x_2$ . Isso porque as demais variáveis, que terão seus valores alterados, possuem coeficiente nulo na função objetivo. Por outro lado, para determinar o maior valor que pode ser atribuído a  $x_2$ , basta considerar o sistema reduzido definido por  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ . Como as colunas de  $x_1$ ,  $x_3$  e  $x_4$  definem uma identidade, obtemos diretamente do quadro que:

$$x_2 \leq \min \left\{ \frac{20}{4/3}, \frac{25}{4/3}, \frac{20}{2/3} \right\} = 15.$$

Além disso, no sistema reduzido, atribuir o maior valor a  $x_2$ , ou seja,  $x_2 = 15$  equivale a fazer  $x_3 = 0$ . Em outras palavras, a nova solução é obtida fixando  $x_3 = x_5 = 0$ .

Repetindo o processo, faremos então operações elementares no quadro anterior para anular os custos de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_4$  e transformar a submatriz associada a essas variáveis numa identidade. Essas operações estão indicadas abaixo:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	20	$L_1 \leftarrow \frac{3}{4}L_1$
0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{5}{6}$	25	$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	20	$L_4 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$
0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{20}{3}$	$Z + 400$	$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{5}{4}L_1$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	15
0	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	5
1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	10
0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{25}{4}$	$Z + 425$

Como anteriormente, temos uma nova solução básica, associada a esse último quadro, onde

$$x_N = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Além disso,  $Z + 425 = 0$ , mostrando que o valor da solução é  $Z = -425$ .

Nesse último quadro, notamos que os coeficientes das variáveis não básicas  $x_3$  e  $x_5$  são não negativos. Então, aumentar o valor de qualquer dessas variáveis só eleva o valor da função objetivo, de modo que o melhor é, de fato, atribuir zero a elas. Portanto, a última solução básica viável encontrada é ótima para o PPL.

## 4.2 O método Simplex

Considere o PPL na forma padrão

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x = Z \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que a hipótese (PC) seja satisfeita. Admita também que conheçamos uma base viável inicial<sup>1</sup>, ou seja, uma submatriz  $A_B$  tal que  $A_B^{-1}b \geq 0$ . Seja  $N = J \setminus B$ . Seja ainda  $B(k)$  e  $N(k)$  o  $k$ -ésimo elemento dos conjuntos ordenados  $B$  e  $N$ , respectivamente.

Usando a partição  $(B, N)$ , temos que

$$Ax = b \iff A_B x_B + A_N x_N = b \quad (4.2)$$

$$\xLeftrightarrow{A_B^{-1} \times} x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b. \quad (4.3)$$

A expressão (4.3), conhecida como *forma canônica relativa à base  $A_B$* , é obtida pré-multiplicando o sistema  $Ax = b$  por  $A_B^{-1}$ . Como sabemos, isso equivale a realizar operações elementares que reduzam  $A_B$  a uma identidade.

A partir de (4.3), podemos encontrar soluções para o sistema  $Ax = b$ , atribuindo valor às variáveis não básicas  $x_N$  e obtendo o valor correspondente das variáveis básicas

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N. \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>Adiante, mostraremos como obter uma tal base



Em particular, podemos obter a solução básica viável dada por

$$x_N = 0, \quad x_B = A_B^{-1}b. \quad (4.5)$$

Adicionalmente, podemos usar a partição  $(B, N)$  para reescrever a função objetivo como

$$Z = c_B^\top x_B + c_N^\top x_N. \quad (4.6)$$

Substituindo o valor de  $x_B$  dado pela expressão (4.4), temos

$$Z = c_B^\top (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^\top x_N = c_B^\top A_B^{-1}b + (c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N)x_N,$$

ou ainda

$$Z - c_B^\top A_B^{-1}b = (c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N)x_N. \quad (4.7)$$

Observe que a expressão acima pode também ser obtida subtraindo de (4.6) a equação (4.3) pré-multiplicada por  $c_B^\top$  (ou equivalentemente, (4.2) pré-multiplicada por  $c_B^\top A_B^{-1}$ ). Essa operação corresponde a um conjunto de operações elementares em que a linha da função objetivo é sequencialmente subtraída da  $i$ -ésima linha de (4.3) pré-multiplicada por  $c_{B(i)}$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Tais operações elementares têm o intuito de anular os custos  $c_B$ .

Usando (4.3) e (4.7), podemos equivalentemente expressar o PPL, em sua forma canônica em relação à base  $A_B$ , como

$$\begin{aligned} \min \quad & 0x_B + (c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N)x_N = Z - c_B^\top A_B^{-1}b \\ \text{s.a:} \quad & Ix_B + A_B^{-1}A_N x_N = A_B^{-1}b, \\ & x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para simplificar a nova expressão do PPL, introduzimos a seguinte notação:

- $\bar{A} = A_B^{-1}A$ ; portanto,  $\bar{A}_B = A_B^{-1}A_B = I$  e  $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N$ ;
- $\bar{b} = A_B^{-1}b$ ;
- $\bar{c}^\top = c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A = c^\top - c_B^\top \bar{A}$ ; portanto,  $\bar{c}_B^\top = c_B^\top - c_B^\top \bar{A}_B = 0$  e  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top \bar{A}_N = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N$ .

O vetor  $\bar{c}$  é chamado vetor de *custos reduzidos*. Note que a  $k$ -ésima coluna de  $\bar{A}$  é  $\bar{A}_k = A_B^{-1}A_k$ , enquanto a  $k$ -ésima componente de  $\bar{c}$  é  $\bar{c}_k = c_k^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_k$ .

Com essa notação, reescrevemos (4.8) como

$$\begin{aligned} \min \quad & 0x_B + \bar{c}_N^\top x_N = Z - c_B^\top \bar{b} \\ \text{s.a:} \quad & Ix_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b}, \\ & x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^\top x = Z - c_B^\top \bar{b} \\ \text{s.a:} \quad & \bar{A}x = \bar{b}, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Reforçamos que o modelo acima é completamente equivalente ao original, pois foi obtido por manipulações algébricas que não alteram o conjunto de soluções do sistema original  $Ax = b$  e que resultam numa função objetivo diferindo da original  $Z$  em uma constante. Sendo assim, uma solução é ótima para o PPL original se, e somente se, é ótima para (4.9).

Para verificar se a solução (4.5) é ótima ou pode ser melhorada, recorreremos então ao modelo (4.9), cuja expressão é mais conveniente a esse propósito. Consideramos os seguintes casos:

**Caso 1:**  $\bar{c}_N \geq 0$  ( $\bar{c}_j \geq 0 \forall j \in N$ ). Nesse caso, a melhor opção é fazer  $x_N = 0$  (e obter  $x_B = \bar{b} \geq 0$ ). De fato, atribuir qualquer valor positivo a alguma componente de  $x_N$  não vai reduzir o valor da função objetivo, pois  $\bar{c}_N \geq 0$  e  $\bar{c}_B = 0$ . Em outros termos, qualquer que seja a mudança em  $x_B$ , decorrente de uma possível nova atribuição a  $x_N$ , não contribui para redução no valor de  $Z$ , cuja variação fica dependente apenas de  $x_N$  e será, portanto, positiva ou nula.

**Caso 2:**  $\exists k \in N$  tal que  $\bar{c}_k < 0$  Considere o subproblema obtido de (4.9) com  $x_j = 0$ , para todo  $j \in N \setminus \{k\}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \min \quad & 0x_B + \bar{c}_k x_k = Z - c_B^\top \bar{b} \\ \text{s.a:} \quad & Ix_B + \bar{A}_k x_k = \bar{b}, \\ & x_B \geq 0, \quad x_k \geq 0. \end{aligned}$$

Ele pode ser simplificado, mantendo apenas a variável  $x_k$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}_k x_k = Z - c_B^\top \bar{b} \\ \text{s.a:} \quad & \bar{A}_k x_k \leq \bar{b}, \\ & x_k \geq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Note que uma solução viável  $x_k = \varepsilon$  para esse problema junto com  $x_{N \setminus \{k\}} = 0$  e  $x_B = \bar{b} - \bar{A}_k x_k = \bar{b} - \bar{A}_k \varepsilon$  gera uma solução viável para o PPL original com valor  $Z = c_B^\top \bar{b} + \bar{c}_k \varepsilon$ . Há dois subcasos:

**Caso 2.1:**  $\bar{A}_k \leq 0$ . Como  $\bar{b} \geq 0$ , podemos fazer  $x_k = \varepsilon$ , para qualquer  $\varepsilon \geq 0$ , e gerar uma solução viável com valor  $Z = c_B^\top \bar{b} + \bar{c}_k \varepsilon \leq c_B^\top \bar{b}$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  temos que  $Z \rightarrow -\infty$ , pois  $\bar{c}_k < 0$ . Logo, o PPL é ilimitado.

**Caso 2.2:**  $\bar{A}_k \not\leq 0$  ( $\exists i \in I$  tal que  $\bar{a}_{ik} > 0$ ). Seja

$$\varepsilon = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\} \geq 0$$

Queremos mostrar que  $x_k = \varepsilon$  define uma solução viável para (4.10). De fato, tome  $i \in I$ . Há duas possibilidades:

- $\bar{a}_{ik} \leq 0$ :  $\bar{a}_{ik} \varepsilon \leq 0 \leq \bar{b}_i$ .
- $\bar{a}_{ik} > 0$ : Como  $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \geq \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \varepsilon$ , temos que  $\bar{a}_{ik} \varepsilon \leq \bar{b}_i$ .

Em todo caso,  $\bar{a}_{ik} \varepsilon \leq \bar{b}_i$ , mostrando que  $\bar{A}_k \varepsilon \leq \bar{b}$ , conforme desejado.

Além disso, de  $x_B = \bar{b} - \bar{A}_k x_k$ , temos que  $x_{B(r)} = \bar{b}_r - \bar{a}_{rk} x_k = \bar{b}_r - \bar{a}_{rk} \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = 0$ . Na verdade, fazer  $x_k = \varepsilon$  é o mesmo que fazer  $x_{B(r)} = 0$ . Então, uma nova solução é obtida fazendo  $x_{N \setminus \{k\}} = 0$  e  $x_k = \varepsilon$  ou, equivalentemente,  $x_{N \setminus \{k\}} = 0$  e  $x_{B(r)} = 0$ . Essa nova solução tem valor  $Z = c^\top \bar{b} + \bar{c}_k \varepsilon \leq c^\top \bar{b}$ , ou seja, menor ou igual ao valor da solução (4.5).

Finalmente, queremos mostrar que essa nova solução viável também é básica. Em outros termos, queremos mostrar que  $\hat{B} = (B \setminus \{B(r)\}) \cup \{k\}$  define uma base. A base anterior e a nova base são:

$$\begin{aligned} A_B &= [A_{B(1)} \cdots A_{B(r-1)} A_{B(r)} A_{B(r+1)} \cdots A_{B(m)}] \\ A_{\hat{B}} &= [A_{B(1)} \cdots A_{B(r-1)} A_k A_{B(r+1)} \cdots A_{B(m)}] \end{aligned}$$

Então, pré-multiplicando a nova base pela inversa da anterior:

$$\begin{aligned}
A_B^{-1} A_{\hat{B}} &= [A_B^{-1} A_{B(1)} \quad \cdots \quad A_B^{-1} A_{B(r-1)} \quad A_B^{-1} A_k \quad A_B^{-1} A_{B(r+1)} \quad \cdots \quad A_B^{-1} A_{B(m)}] \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{r-1} & \bar{A}_k & e_{r+1} & \cdots & e_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{r-1,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{rk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & \bar{a}_{r+1,k} & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{mk} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor unitário (coluna da matriz identidade). Podemos então obter a inversa da matriz resultante do produto  $A_B^{-1} A_{\hat{B}}$  (por exemplo fazendo operações elementares), que é dada por

$$\begin{aligned}
M_{r,k} &= E_{1r}(-\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}}) \cdots E_{r-1,r}(-\frac{\bar{a}_{r-1,k}}{\bar{a}_{rk}}) E_r(\frac{1}{\bar{a}_{rk}}) E_{r+1,r}(-\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{r+1,k}}) \cdots E_{mr}(-\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{\bar{a}_{r-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & -\frac{\bar{a}_{r+1,k}}{\bar{a}_{rk}} & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Em outros termos,

$$M_{r,k} A_B^{-1} A_{\hat{B}} = [e_1 \cdots e_{r-1} e_r e_{r+1} \cdots e_m].$$

Logo,  $M_{r,k} A_B^{-1}$  é a inversa de  $A_{\hat{B}}$ , que é uma base.

Ao passar da base  $A_B$  para a base  $A_{\hat{B}}$ , com  $\hat{B} = B \setminus \{B(r)\} \cup \{k\}$ , dizemos que a coluna  $A_{B(r)}$  saiu da base e a coluna  $A_k$  entrou na base. Como abuso de linguagem, costumamos ainda dizer que a variável  $x_{B(r)}$  saiu da base e a variável  $x_k$  entrou na base (em referência às colunas de  $A$  a elas correspondentes).

O desenvolvimento acima permite agora descrever o algoritmo simplex. Ver Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** ALGORITMO SIMPLEX

---

**Entrada:**  $A, b, c$

**Saída:** Solução ótima ou Problema ilimitado

**0 início**

- 1 | Determine  $(B, N)$  tal que  $A_B$  é base viável<sup>a</sup>
- 2 | Calcule  $\bar{b} = A_B^{-1} b$ ,  $\bar{c}_N = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N$  e  $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$
- 3 | **se**  $\bar{c}_N \geq 0$  **então Pare:**  $x_N = 0$ ,  $x_B = \bar{b}$  é solução ótima;
- 4 | Seja  $k \in N$  tal que  $\bar{c}_k < 0$
- 5 | **se**  $\bar{A}_k \leq 0$  **então Pare:** Problema ilimitado;
- 6 | Seja  $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$
- 7 | Faça  $B \leftarrow (B \setminus \{B(r)\}) \cup \{k\}$ ,  $N \leftarrow (N \setminus \{k\}) \cup \{B(r)\}$  e volte a 2

**8 fim**

---

<sup>a</sup>Primeira fase do simplex a ser vista na Subseção 4.4.

A parte do Algoritmo 1 mais dispendiosa computacionalmente encontra-se no passo 2. Os cálculos realizados nesse passo podem ser feitos de diversas formas. Uma delas, como vimos na Seção 4.1, consiste em fazer operações elementares sobre linhas para transformar a matriz  $A_B$  numa identidade e para anular os custos  $c_B$ . Tais operações podem ser feitas a partir do problema inicial ou a partir do problema canônico relativo à base anterior. No primeiro caso, essas operações podem ser descritas como

Problema original				Forma canônica relativa a $A_B$			
$x_B$	$x_N$			$x_B$	$x_N$		
$A_B$	$A_N$	$b$	$L \leftarrow A_B^{-1}L$	$I$	$A_B^{-1}A_N$	$A_B^{-1}b$	
$c_B^\top$	$c_N^\top$	$Z$	$L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L$	$0$	$c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N$	$Z - c_B^\top A_B^{-1}b$	

A operação  $L \leftarrow A_B^{-1}L$  representa o conjunto de operações elementares (pré-multiplicação por  $A_B^{-1}$ ) realizadas sobre o sistema  $Ax = b$ . Já  $L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L$  corresponde ao conjunto de operações realizadas para anular os coeficientes das variáveis básicas (ou equivalentemente, substituir o valor das variáveis básicas dado pelo sistema canônico).

Alternativamente, podemos partir da forma canônica relativa à base anterior. Nesse segundo caso, resta fazer as operações elementares que definem a matriz  $M_{r,k}$ , para transformar a nova base na identidade, e uma operação elementar para anular o coeficiente de  $x_k$  na função objetivo. Todas essas operações tomam como base a linha  $r$ , chamada linha pivô. Precisamente, para transformar o elemento pivô  $\bar{a}_{rk}$  em 1 e os demais elementos da coluna  $r$ , chamada coluna pivô, em 0, são feitas as seguintes operações elementares:

- $L_r \leftarrow L'_r = \frac{1}{\bar{a}_{rk}}L_r$
- $L_i \leftarrow L_i - \bar{a}_{ik}\frac{1}{\bar{a}_{rk}}L_r = L_i - \bar{a}_{ik}L'_r$ , para  $i = 1, \dots, m, i \neq r$
- $L_{m+1} \leftarrow L_{m+1} - \bar{c}_k\frac{1}{\bar{a}_{rk}}L_r = L_{m+1} - \bar{c}_kL'_r$

Quadro relativo à base  $A_B$  anterior

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$		
$x_{B(1)}$	1 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} \cdots \bar{a}_{1k} \cdots \bar{a}_{1N(n-m)}$	$\bar{b}_1$	$L_1 \leftarrow L_1 - \bar{a}_{1k}L'_r$
$\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$	
$x_{B(r)}$	0 $\cdots$ 1 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{rN(1)} \cdots \bar{a}_{rk} \cdots \bar{a}_{rN(n-m)}$	$\bar{b}_r$	$L_r \leftarrow L'_r = \frac{1}{\bar{a}_{rk}}L_r$
$\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$	
$x_{B(m)}$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} \cdots \bar{a}_{mk} \cdots \bar{a}_{mN(n-m)}$	$\bar{b}_m$	$L_m \leftarrow L_m - \bar{a}_{mk}L'_r$
	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} \cdots \bar{c}_k \cdots \bar{c}_{N(n-m)}$	$Z - c^\top \bar{b}$	$L_{m+1} \leftarrow L_{m+1} - \bar{c}_kL'_r$

Quadro relativo à nova base  $A_{\hat{B}}$

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$		
$x_{B(1)}$	1 $\cdots$ $-\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} - \frac{\bar{a}_{1k}\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0 $\cdots$ $\bar{a}_{1N(n-m)} - \frac{\bar{a}_{1k}\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$\bar{b}_1 - \frac{\bar{a}_{1k}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	
$\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$	
$x_k$	0 $\cdots$ $\frac{1}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0	$\frac{\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 1 $\cdots$ $\frac{\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	
$\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	$\ddots$ $\ddots$	$\vdots$	
$x_{B(m)}$	0 $\cdots$ $-\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} - \frac{\bar{a}_{mk}\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0 $\cdots$ $\bar{a}_{mN(n-m)} - \frac{\bar{a}_{mk}\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$\bar{b}_m - \frac{\bar{a}_{mk}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	
	0 $\cdots$ $-\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0 $\cdots$ $\bar{c}_{N(n-m)} - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$Z - c^\top \bar{b} - \frac{\bar{c}_k\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	

Note que as operações elementares realizadas para obter a nova forma canônica, relativa à base  $A_{\hat{B}}$ , onde  $\hat{B} = (B \setminus B(r)) \cup \{k\}$ , ou seja,

- $L_r \leftarrow L'_r = \frac{1}{\bar{a}_{rk}} L_r$
- $L_i \leftarrow L_i - \bar{a}_{ik} L'_r = L_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} L_r \quad \forall i \neq r$

correspondem àquelas feitas sobre a matriz identidade para obter a matriz

$$M_{r,k} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{\bar{a}_{r-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & -\frac{\bar{a}_{r+1,k}}{\bar{a}_{rk}} & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

tal que  $M_{r,k} A_B^{-1} = A_{\hat{B}}^{-1}$ . Em outros termos, essas operações correspondem a pré-multiplicar a forma canônica associada a  $A_B$  por  $M_{r,k}$ , de modo que as operações elementares realizadas para obter a forma canônica relativa a  $A_B$  junto com as operações elementares adicionais equivalem a pré-multiplicar o sistema por  $A_{\hat{B}}^{-1}$ .

Algumas observações merecem ser acrescentadas com relação ao Algoritmo 1. No passo 4, podemos escolher qualquer variável não básica com custo reduzido negativo para se tornar básica, de modo a garantir a corretude do processo. Entretanto, essa decisão influencia o número de iterações do algoritmo. Há várias heurísticas para a escolha de uma variável específica. A mais conhecida delas é, possivelmente, a regra de Dantzig, onde  $\bar{c}_k = \min\{\bar{c}_j : j \in N\}$ . Já no passo 6, se há mais de um índice  $r$  retornando a razão mínima, podemos perceber que a próxima solução básica será degenerada (todas as variáveis associadas a esses índices terão valor nulo). Como veremos no Capítulo 6, uma escolha arbitrária de qualquer uma dessas variáveis para sair da base pode fazer com que o algoritmo não convirja. Essa situação será melhor estudada no Capítulo 6.

### 4.3 Interpretação geométrica

Vamos resolver o seguinte PPL pelo método simplex:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a:} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Sua forma padrão é:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 = Z \\ \text{s.a:} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando o problema no quadro simplex, temos:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-2	1	1	0	0	2
$x_4$	1	-2	0	1	0	2
$x_5$	-1	1	0	0	1	3
	-1	-2	0	0	0	$Z$

Observe que, na primeira coluna, aparece agora a variável básica associada a cada restrição, aquela que tem coeficiente não nulo nessa restrição. Isso facilitará a identificação da mudança de base.

A solução básica associada a esse quadro é  $x_1 = x_2 = 0$  (as variáveis não básicas) e  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 2$  e  $x_5 = 3$  (as variáveis básicas), com valor  $Z = 0$ .

Temos que essa solução não é ótima, pois os coeficientes de  $x_1$  e  $x_2$  são negativos, indicando que um aumento no valor dessas variáveis leva a uma redução no valor da função objetivo. Como  $x_2$  tem o coeficiente mais negativo, vamos escolhê-la para se tornar básica, seguindo a regra de Dantzig. Como isso, a variável a ‘sair’ da base é determinada a partir da razão mínima

$$\min \left\{ \frac{2}{-1}, \frac{3}{1} \right\} = 2.$$

Logo,  $x_3$  é a variável a sair da base.

Para a redução à nova forma canônica, relativa a base  $B = \{2, 3, 4\}$ , realizamos as operações indicadas a abaixo, a partir do quadro canônica relativo à base anterior:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-2	1	1	0	0	2 $L_1 \leftarrow L_1$
$x_4$	1	-2	0	1	0	2 $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
$x_5$	-1	1	0	0	1	3 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
	-1	-2	0	0	0	$Z$ $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$

Obtemos assim o novo quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	-2	1	1	0	0	2
$x_4$	-3	0	2	1	0	6
$x_5$	1	0	-1	0	1	1
	-5	0	2	0	0	$Z+4$

A solução básica associada a ele é  $x_1 = x_3 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_4 = 6$  e  $x_5 = 1$ , com valor  $Z = -4$ .

Verificamos que essa solução não é ótima, pois o custo reduzido de  $x_1$  é negativo, indicando essa variável para ‘entrar’ na base. Agora, a variável a sair da base é  $x_5$ . Para obter a nova forma canônica, a partir da anterior, realizamos as seguintes operações.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	-2	1	1	0	0	2 $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$
$x_4$	-3	0	2	1	0	6 $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$
$x_5$	1	0	-1	0	1	1 $L_3 \leftarrow L_3$
	-5	0	2	0	0	$Z+4$ $L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3$

O novo quadro obtido é então:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	0	1	-1	0	2	4
$x_4$	0	0	-1	1	3	9
$x_1$	1	0	-1	0	1	1
	0	0	-3	0	5	$Z+9$

A solução básica a ele associada é  $x_3 = x_5 = 0$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_4 = 9$  e  $x_1 = 1$ , com valor  $Z = -9$ .

Constatamos que essa solução também não é ótima, posto que o custo reduzido de  $x_3$  é negativo. Adicionalmente, temos que a coluna da matriz  $\bar{A}$  associada a  $x_3$  só tem elementos não positivos, mostrando que o PPL é ilimitado.

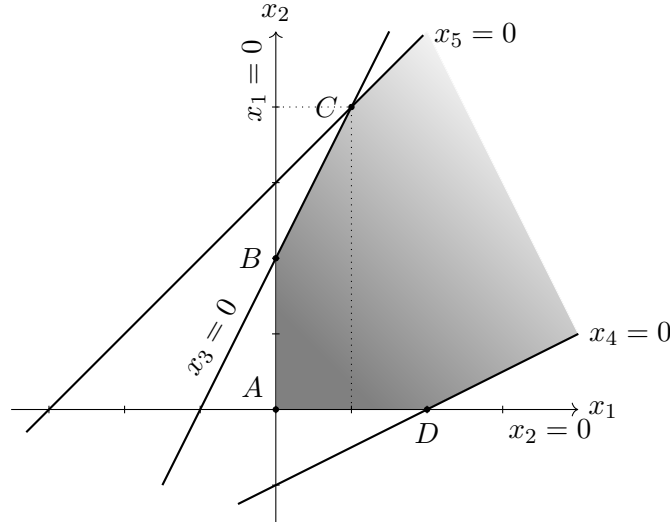
Vamos agora acompanhar no gráfico a seguir o percurso realizado pelo algoritmo até sua parada, interpretando cada passo. No primeiro quadro, as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  foram escolhidas como não básicas, definindo o ponto  $A$  no gráfico, onde  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Esse foi o ponto de partida do algoritmo. Nesse momento, foi verificado que manter  $x_1 = 0$  e aumentar o valor de  $x_2$  reduziria a função objetivo. Note que, a partir do ponto  $A$ , manter  $x_1 = 0$  significa se deslocar sobre o eixo vertical e que aumentar  $x_2$  significa ir em direção ao ponto  $B$ . Em outros termos, escolher a variável a entrar na base corresponde a determinar uma direção e um sentido para caminhar a partir do vértice corrente.

Por outro lado, o crescimento de  $x_2$  não pode ser arbitrário, pois é limitado pelas restrições  $x_3 \geq 0$ , que leva a  $x_2 \leq \frac{2}{1}$ , e  $x_5 \geq 0$ , que resulta em  $x_2 \leq \frac{3}{1}$ , como evidencia o cálculo da razão mínima. Note que, no gráfico,  $x_3 = 0$  e  $x_5 = 0$  são as barreiras encontradas ao se caminhar na direção determinada pela escolha da variável que entra na base e que cada uma das razões consideradas é o quanto se caminha até atingir a barreira correspondente. A razão mínima, portanto, fornece o maior passo que pode ser dado nessa direção sem sair do conjunto viável, determinado pela primeira barreira encontrada. Perceba ainda que a barreira  $x_4 = 0$  seria encontrada ao se caminhar sobre o eixo vertical, mas no sentido oposto (de decrescimento de  $x_2$ ). Essa situação é identificada pelo número negativo  $-2$  na posição  $(2, 2)$  do primeiro quadro.

Assim, a primeira barreira encontrada, que mais limita o crescimento da variável que entra na base, associa-se à nova variável não básica, neste caso  $x_3$ . Determina-se assim o quadro e vértice correspondente, que está na interseção das retas associadas às novas variáveis não básicas  $x_1 = x_3 = 0$ , dada pelo ponto  $B$ .

Nesse ponto, podemos realizar análise similar. A escolha da variável  $x_1$  a entrar na base aponta uma direção, a partir do ponto  $B$ , ao longo da qual a função decresce. Essa direção é definida pela reta  $x_3 = 0$  e vai no sentido do ponto  $C$ . Note que, agora, ao caminhar nessa direção e sentido, encontra-se apenas uma barreira, definida por  $x_5 = 0$ . Isso é exatamente o que se observa no cálculo da razão mínima, onde havia apenas um elemento positivo na coluna de  $x_1$ , no segundo quadro. Por outro lado, os dois elementos negativos indicam que as barreiras  $x_2 = 0$  e  $x_4 = 0$  são encontradas ao se caminhar nessa mesma direção mas no sentido oposto (de decrescimento de  $x_1$ ). Novamente, o valor da razão mínima determina o maior passo que se pode dar na direção identificada pela variável que entra na base, atingindo assim o ponto  $C$ .

Com isso, um novo quadro é gerado, o terceiro, que se refere ao vértice  $C$ . Nesse momento, verifica-se que a direção correspondente à entrada de  $x_3$  na base possibilita um decrescimento para a função, mas que não encontra qualquer barreira ao se caminhar sobre ela (no sentido do decrescimento). Desse modo, conclui-se que o problema é ilimitado.



*Exercício 4.3.1.* Resolver pelo método simplex o PPL

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

No quadro ótimo, você deve encontrar custo reduzido nulo para uma variável não básica. O que isso significa?

## 4.4 Solução básica viável inicial

O primeiro passo do algoritmo simplex consiste em encontrar uma solução básica viável inicial, a partir da qual ocorrerá o processo de enumeração de novas soluções básicas viáveis, cada vez melhores. Caso a matriz  $A$  do sistema  $Ax = b$ , com  $b \geq 0$ , contenha a identidade de ordem  $m$  como submatriz, esta pode ser trivialmente escolhida como base viável inicial. Isso acontece, por exemplo, quando as restrições do PPL são todas desigualdades, com lado direito não negativo, e é adicionada uma variável de folga a cada restrição, gerando assim uma matriz identidade.

Quando essa situação não ocorre, pode não ser trivial encontrar uma base viável inicial. Sob a hipótese (PC), seria possível determinar uma base (e a solução básica correspondente), como visto na Seção 3.4, realizando operações elementares sobre o sistema. Mesmo assim, não se tem garantia de que ela seria viável.

Uma estratégia para determinar uma base viável inicial, ou mesmo verificar que não há uma tal base, consiste em criar artificialmente uma matriz identidade como submatriz da matriz do sistema linear, às custas da introdução de variáveis adicionais. O objetivo então torna-se encontrar uma solução básica do sistema expandido onde essas variáveis adicionais sejam nulas. Para essa tarefa, vamos considerar o PPL  $(P)$  na forma padrão e o seguinte PPL artificial  $(P^a)$  a ele associado:

$$\begin{array}{ll} (P) \min & c^\top x = Z \\ \text{s.a:} & Ax = b, \quad (b \geq 0) \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (P^a) \min & e^\top x^a = Z^a \\ \text{s.a:} & Ax + Ix^a = b, \\ & x \geq 0, \quad x^a \geq 0, \end{array}$$

onde  $e^T = (1, 1, \dots, 1)$  e  $x^a$  é o vetor das variáveis adicionais, a serem chamadas *variáveis artificiais*.



Para o problema  $(P^a)$ , temos uma base inicial trivial, definida pelas variáveis artificiais. Adicionalmente, a função objetivo procura minimizar a soma dessas variáveis, idealmente anulando-as. Observe que esse problema é viável ( $x = 0$  e  $x^a = b$  é solução viável) e não pode ser ilimitado ( $Z^a \geq 0$  em toda solução viável). Logo,  $(P^a)$  sempre tem solução ótima, que pode ser encontrada pelo Algoritmo 1.

Dada então uma solução ótima  $(\bar{x}, \bar{x}^a)$  de  $(P^a)$ , há dois casos possíveis:

**Caso 1:**  $Z^a(\bar{x}, \bar{x}^a) > 0$ . Nesse caso, podemos concluir que  $(P)$  é inviável. De fato, caso  $(P)$  fosse viável, existiria solução viável de  $(P^a)$  com valor 0.

**Caso 2:**  $Z^a(\bar{x}, \bar{x}^a) = 0$ . Nesse caso, temos que  $\bar{x}^a = 0$  e, conseqüentemente,  $\bar{x}$  é viável para  $(P)$ . Além disso, a solução  $(\bar{x}, \bar{x}^a)$ , quando obtida pelo Algoritmo 1, é básica para  $(P^a)$ , porém não se pode garantir que  $\bar{x}$  será básica para  $(P)$ . Consideremos os seguintes subcasos:

**Caso 2.1: Todas as variáveis artificiais são não básicas.** Se isso ocorre, a base de  $(P^a)$  que define  $(\bar{x}, \bar{x}^a)$  também é uma base de  $(P)$  que define  $\bar{x}$ . Nesse caso, temos determinado uma base inicial viável para o problema-alvo  $(P)$ , completando o primeiro passo do Algoritmo 1. As variáveis artificiais (e suas colunas do quadro) podem então ser descartadas.

**Caso 2.2: Alguma das variáveis artificiais é básica.** Embora com valor nulo, admita que existe uma variável  $x_i^a$  básica. Temos, portanto, uma solução degenerada. Para tratarmos esse caso, visualizemos o quadro simplex relativo a  $(\bar{x}, \bar{x}^a)$ , onde destacamos a linha associada à variável básica  $x_i^a$ .

Quadro relativo à solução básica $(\bar{x}, \bar{x}^a)$											
	$x_1$	$\cdots$	$x_j$	$\cdots$	$x_n$	$x_1^a$	$\cdots$	$x_i^a$	$\cdots$	$x_m^a$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$		0		$\vdots$	$\vdots$
$x_i^a$	$\bar{a}_{i1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{ij}$	$\cdots$	$\bar{a}_{in}$	$\cdots$		1	$\cdots$		$\bar{b}_i = 0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$		0		$\vdots$	$\vdots$
	$\cdots$		$\cdots$			$\cdots$		0	$\cdots$		$Z^a - e^T \bar{x}^a$

Caso tenhamos  $(\bar{a}_{i1}, \dots, \bar{a}_{in}) = 0$ , observamos que as operações elementares sobre linhas realizadas tornaram nula a  $i$ -ésima linha do sistema  $Ax = b$ . Isso significa que a  $i$ -ésima equação do sistema é combinação linear das demais, sendo portanto redundante. Nesse caso, essa linha do quadro pode ser removida, juntamente com a coluna, que se torna nula, da variável  $x_i^a$ . Note que a hipótese  $(PC)$  não estava sendo cumprida, mas a remoção de todas as linhas nas mesmas condições faz com que ela passe a ser satisfeita.

Finalmente, suponha que  $(\bar{a}_{i1}, \dots, \bar{a}_{in})$  tenha uma componente não nula, digamos  $\bar{a}_{ij} \neq 0$ . Obrigatoriamente,  $x_j$  deve ser variável não básica, pois a única variável básica que aparece nessa linha é  $x_i^a$ . Nesse caso, podemos efetuar uma mudança de base, com a inclusão de  $x_j$  e retirada de  $x_i^a$ , quer o pivô  $\bar{a}_{ij}$  seja positivo ou negativo. Essa mudança de base não muda o valor das variáveis, apenas a representação da solução em termos de outra base.

Repetindo as duas operações descritas nos dois parágrafos acima, eventualmente chegamos ao caso 2.1, quando temos a solução do problema  $(P^a)$  representada por uma base de  $(P)$ , completando assim o passo 1 do Algoritmo 1.

O processo descrito acima é conhecido como primeira fase do método simplex. Como vimos, ela é responsável por verificar se o problema é inviável ou não e, no segundo caso, determinar uma base inicial viável, eliminando, se existirem, equações redundantes do sistema linear.

Vale notar que, no desenvolvimento acima, foi acrescentada uma variável artificial em cada restrição. Na verdade, só é preciso acrescentar variáveis artificiais suficientes para gerar uma

matriz identidade. Dessa maneira, se a matriz  $A$  já contém a  $i$ -ésima coluna da identidade, não é necessário acrescentar variável artificial na  $i$ -ésima equação.

Acompanhemos a execução da primeira fase do simplex com o exemplo a seguir.

Ex. 4.4.1. Considere o PPL

$$\begin{array}{llll} \min & -6x_1 & + & x_2 \\ \text{s.a:} & 4x_1 & + & x_2 \leq 21 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 \geq 2 \\ & -x_1 & + & x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Reescrevendo na forma padrão, temos:

$$\begin{array}{llllll} (P) \min & -6x_1 & + & x_2 & & = & Z \\ \text{s.a:} & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 21 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_4 & = 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & = 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0. \end{array}$$

Para obter uma matriz identidade, precisamos acrescentar variável artificial na segunda e terceira restrições, gerando o seguinte problema artificial:

$$\begin{array}{llllll} (P^a) \min & & & & x_1^a & + & x_2^a & = & Z^a \\ \text{s.a:} & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = & 21 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & & - & x_4 & + & x_1^a & = & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & & + & x_2^a & = & 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0, & x_1^a \geq 0, & x_2^a \geq 0. \end{array}$$

Podemos agora aplicar o algoritmo simplex ao problema  $(P^a)$ , como segue. Transpondo o problema para o quadro simplex, obtemos:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	4	1	1	0	0	0	21
$x_1^a$	2	3	0	-1	1	0	2
$x_2^a$	-1	1	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	1	1	$Z^a$ $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_3$

Primeiro, observe que a função  $Z^a$  não está na forma canônica, de modo que não podemos saber se o quadro atual é ótimo ou não simplesmente analisando os sinais dos coeficientes da função objetivo. Precisamos então anular os coeficientes das variáveis básicas  $x_1^a$  e  $x_2^a$ , fazendo as operações elementares  $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$  e, em seguida,  $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ , ou conjuntamente  $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_3$ , obtendo o quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	4	1	1	0	0	0	21
$x_1^a$	2	3	0	-1	1	0	2
$x_2^a$	-1	1	0	0	0	1	1
	-1	-4	0	1	0	0	$Z^a - 3$

Verificamos que a solução corresponde ao quadro não é ótima, podendo ser melhorada com a entrada de  $x_2$  e saída, pelo critério da razão mínima, de  $x_1^a$ . As operações de pivoteamento estão indicadas abaixo.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	4	1	1	0	0	0	21 $L_1 \leftarrow L_1 - L'_2$
$x_1^a$	2	3	0	-1	1	0	2 $L_2 \leftarrow L'_2 = \frac{1}{3}L_2$
$x_2^a$	-1	1	0	0	0	1	1 $L_3 \leftarrow L_3 - L'_2$
	-1	-4	0	1	0	0	$Z^a - 3$ $L_4 \leftarrow L_4 + 4L'_2$

O quadro relativo à nova base é:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	$\frac{10}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{61}{3}$
$x_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$x_2^a$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$Z^a - \frac{1}{3}$

Podemos fazer mais uma mudança de base, com a entrada de  $x_4$  e saída de  $x_2^a$ , para melhorar a função objetivo artificial. As seguintes operações devem ser feitas:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	$\frac{10}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{61}{3}$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$x_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$
$x_2^a$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$ $L_3 \leftarrow 3L_3$
	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$Z^a - \frac{1}{3}$ $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

Após as operações de pivoteamento, um novo quadro é gerado:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	5	0	1	0	0	-1	20
$x_2$	-1	1	0	0	0	1	1
$x_4$	-5	0	0	1	-1	3	1
	0	0	0	0	1	1	$Z^a$

Constatamos que o quadro acima é ótimo para o problema artificial ( $P^a$ ), gerando uma solução com valor  $Z^a = 0$ . Além disso, nenhuma variável artificial é básica. Logo, temos uma solução básica viável para o problema ( $P$ ). Podemos então eliminar as variáveis artificiais e substituir a função artificial pela função original de ( $P$ ), obtendo o quadro reduzido abaixo.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	5	0	1	0	20
$x_2$	-1	1	0	0	1
$x_4$	-5	0	0	1	1
	-6	1	0	0	$Z$ $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

Como no início da primeira fase, a função objetivo não está na forma canônica. Precisamos anular o coeficiente da variável  $x_2$ , realizando a operação indicada e então obtendo o quadro

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_3$	5	0	1	0	20
$x_2$	-1	1	0	0	1
$x_4$	-5	0	0	1	1
	-5	0	0	0	$Z - 1$

Como o quadro não é ótimo, realizamos uma mudança de base, trocando  $x_1$  por  $x_3$  e efetuando as seguintes operações:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	5	0	1	0	20 $L_1 \leftarrow L'_1 = \frac{1}{5}L_1$
$x_2$	-1	1	0	0	1 $L_2 \leftarrow L_2 + L'_1$
$x_4$	-5	0	0	1	1 $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$
	-5	0	0	0	$Z - 1$ $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

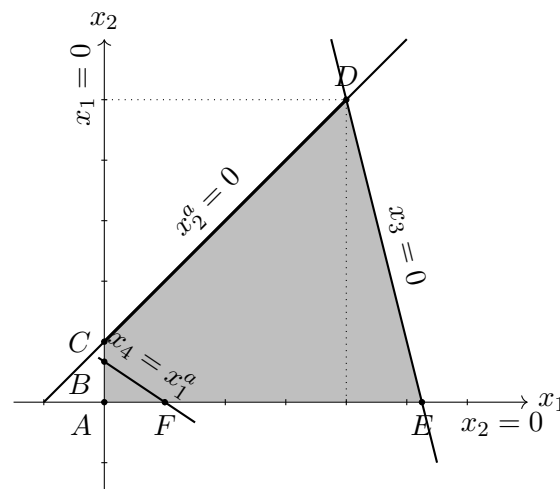
O novo quadro é:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	4
$x_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	5
$x_4$	0	0	1	1	21
	0	0	1	0	$Z + 19$

Visto que todos os custos reduzidos são não negativos, chegamos a solução ótima, a saber  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 5, 0, 21)$ , com valor  $Z = -19$ .

No gráfico a seguir, ilustramos o percurso percorrido pelo algoritmo. Primeiro, relacionamos o conjunto viável de  $(P^a)$  com o conjunto viável do PPL original, descrito em  $(x_1, x_2)$ . A restrição  $4x_1 + x_2 \leq 21$  do PPL original torna-se  $4x_1 + x_2 + x_3 = 21$ . Logo, os pontos sobre a reta  $4x_1 + x_2 = 21$  correspondem aos pontos  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^a, x_2^a)$  com  $x_3 = 0$ , conforme indicado no gráfico. Já a restrição  $-x_1 + x_2 = 1$  torna-se  $-x_1 + x_2 + x_2^a = 1$ , com  $x_2^a \geq 0$ , ou equivalentemente  $-x_1 + x_2 \leq 1$ . Em outros termos, a região viável de  $(P^a)$  expande aquela do PPL original, e os pontos sobre a reta  $-x_1 + x_2 = 1$  correspondem àqueles com  $x_2^a = 0$ . Finalmente, a restrição  $2x_1 + 3x_2 \geq 12$  torna-se  $2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a = 12$  com  $x_4 \geq 0$ ,  $x_1^a \geq 0$ . Note que a diferença  $x_1^a - x_4$  pode ter qualquer sinal e, portanto, tanto podemos ter  $2x_1 + 3x_2 \geq 12$ , como no PPL original, quanto  $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ . Novamente, a região viável  $(P^a)$  expande a do PPL original, e os pontos sobre a reta  $2x_1 + 3x_2 = 12$  associam-se àqueles com  $x_4 = x_1^a$ . Observe que a expansão na região viável promovida pela inclusão das variáveis artificiais é no sentido de tornar a origem um ponto viável de  $(P^a)$ . Uma variável artificial é incluída em cada restrição que não era satisfeita pela origem. Nesse exemplo, note que a região viável do PPL original é o segmento  $CD$ , enquanto aquela de  $(P^a)$  corresponde ao polígono destacada em cinza.

A primeira fase do algoritmo se inicia na origem, ponto  $A$ . Então, a variável  $x_2$  é escolhida para entrar na base, indicando a direção de decrescimento da função artificial a ser seguida. A variável que sai da base,  $x_1^a$ , associa-se à primeira barreira encontrada ao se caminhar nessa direção (eixo  $x_2$ ). A nova solução básica gerada com essa mudança de base é o ponto  $B$ , ainda inviável. Entretanto, a partir dele pode-se identificar uma nova direção de decrescimento da inviabilidade, medida pela função artificial. Ela é definida pela escolha de  $x_4$  para entrar na base. A variável a sair da base é então  $x_2^a$ , levando-nos ao ponto  $C$ . Nesse momento, o conjunto viável do PPL original é atingido, e a primeira fase termina. A partir daí, passa-se a considerar a função objetivo original como guia. Verifica-se que o ponto  $C$  não é ótimo. A inclusão de  $x_1$  na base aponta uma direção que leva a uma melhor solução. A razão mínima indica a variável  $x_3$  para sair da base, determinando o máximo que se pode seguir nessa direção de decrescimento da função original. Atinge-se assim o ponto  $D$ , onde se comprova a otimalidade.



*Exercício 4.4.1.* Resolver os seguintes problemas pelo algoritmo simplex duas fases:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) min} & 2x_1 + 5x_2 & \\
\text{s.a:} & x_1 \leq 3 & \\
& x_1 - x_2 \geq 2 & \\
& 2x_1 + x_2 \geq 9 & \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\
\text{b) max} & x_1 + x_2 & \\
\text{s.a:} & 2x_1 + 3x_2 = 5 & \\
& x_1 - x_2 \geq 0 & \\
& 6x_1 + 9x_2 = 15 & \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & \\
\text{c) max} & 4x_1 + x_2 & \\
\text{s.a:} & x_1 + 4x_2 \geq 4 & \\
& 3x_1 + x_2 = 1 & \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

## 4.5 Corretude do algoritmo Simplex

Nesta seção, formalizamos resultados teóricos que garantem a corretude do algoritmo simplex. Primeiro, consideramos a condição de parada do algoritmo estabelecendo que uma solução ótima foi encontrada.

**Proposição 4.5.1.** *Seja  $(B, N)$  uma partição de  $J$  tal que  $A_B$  é base viável. Se  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N \geq 0$  então a solução  $\bar{x}$  tal que  $\bar{x}_N = 0$  e  $\bar{x}_B = A_B^{-1} b$  é ótima.*

*Prova:* Como  $A_B$  é base viável, temos que  $A_B^{-1} b \geq 0$  e, portanto,  $\bar{x}$  é solução viável, de valor igual a  $c^\top \bar{x} = c_B^\top A_B^{-1} b$ . Seja  $x$  uma solução viável, ou seja, tal que  $Ax = b$  e  $x \geq 0$ . Particionando as componentes de  $x$  conforme  $(B, N)$ , temos que  $A_B x_B + A_N x_N = b$ , ou melhor,  $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ , com  $x_B \geq 0$  e  $x_N \geq 0$ . Então,

$$\begin{aligned}
c^\top x &= c_B^\top x_B + c_N^\top x_N \\
&= c_B^\top (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^\top x_N \\
&= c_B^\top A_B^{-1} b + (c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N) x_N \\
&\geq c_B^\top A_B^{-1} b = c^\top \bar{x},
\end{aligned}$$

onde a desigualdade decorre do fato de que  $c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N \geq 0$  e  $x_N \geq 0$ . Logo,  $\bar{x}$  é solução ótima. ■

Agora, tratamos da condição de parada para o caso de problema ilimitado.

**Proposição 4.5.2.** *Seja  $(B, N)$  uma partição de  $J$  tal que  $A_B$  é base viável. Se existe  $k \in N$  tal que  $\bar{c}_k = c_k - c_B^\top A_B^{-1} A_k < 0$  e  $\bar{A}_k = A_B^{-1} A_k \leq 0$ , então o PPL é ilimitado.*

*Prova:* Seja  $\bar{x}$  a solução básica definida por  $A_B$ . Seja  $k = N(s)$  e defina  $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_{N(s)} \\ e_s \end{bmatrix}$ ,

onde  $e_s \in \mathbb{B}^{|N|}$  é o vetor unitário com 1 na posição  $s$ . Temos que  $d \geq 0$  e  $Ad = A_B d_B + A_N d_N = A_B (-A_B^{-1} A_{N(s)}) + A_N e_s = -A_{N(s)} + A_{N(s)} = 0$ . Então, para todo  $\alpha \geq 0$ ,  $\bar{x} + \alpha d$  é viável, pois  $\bar{x} + \alpha d \geq 0$  e  $A(\bar{x} + \alpha d) = A\bar{x} = b$ . Adicionalmente,  $c^\top d = c_B^\top d_B + c_N^\top d_N = c_B^\top (-A_B^{-1} A_{N(s)}) + c_N^\top e_s = -c_B^\top A_B^{-1} A_k + c_k = \bar{c}_k < 0$ . Isso implica  $c^\top (\bar{x} + \alpha d) = c^\top \bar{x} + \alpha c^\top d \rightarrow -\infty$  quando  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Logo, o PPL é ilimitado. ■

Os resultados acima permitem mostrar a corretude do algoritmo simplex.

**Teorema 4.5.1.** *Na ausência de degeneração, o Algoritmo 1 pára, retornando uma conclusão correta sobre o PPL.*

*Prova:* Tanto na primeira fase, quanto na segunda, o algoritmo simplex gera uma sequência de soluções básicas viáveis. Em cada iteração em que o algoritmo não pára, sendo  $x_k$  a variável que entra na base e  $x_{B(r)}$  a variável que sai da base, o valor da função objetivo é alterado de  $\delta = \bar{c}_k \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$ , onde  $\bar{c}_k < 0$  é o custo reduzido de  $x_k$  na função considerada em cada fase e  $\varepsilon = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} \geq 0$  é a razão mínima. Na ausência de degeneração, temos  $\varepsilon > 0$ , posto que  $\bar{b}_r > 0$ . Por conseguinte, obtemos  $\delta < 0$ , garantindo que a função objetivo decresce estritamente. Como o número de soluções básicas é finito, o algoritmo eventualmente pára.

Na primeira fase, a função artificial, dada pela soma das variáveis artificiais, pode assumir valor nulo se, e somente se,  $Ax + x^a = b$  é satisfeito por algum ponto  $(\bar{x}, 0)$ , ou seja, tal que

$A\bar{x} = b$ . Em outros termos, tal função pode ter valor nulo se, e somente se, o PPL é viável. Dessa forma, as duas paradas da primeira fase apresentam conclusões corretas, pois ocorrem exatamente quando: (i) o valor ótimo é positivo, mostrando que a função artificial não pode atingir valor nulo e, portanto, o PPL é inviável, ou (ii) o valor ótimo é nulo, garantindo que a solução do problema artificial gera uma solução viável para o PPL. Nesse segundo caso, pode haver ainda ajustes para representar tal solução viável com uma base do PPL.

Na segunda fase, o algoritmo pára, com uma base  $A_B$ , em um dos seguintes casos:

- (i)  $c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N \geq 0$ , quando a Proposição 4.5.1 garante que o algoritmo afirma, corretamente, que a solução básica associada é ótima;
- (ii)  $\bar{c}_k = c_k - c_B^\top A_B^{-1} \bar{A}_k < 0$  e  $\bar{A}_k = A_B^{-1} A_k \leq 0$ : nesse caso, a Proposição 4.5.2 assegura que o PPL é ilimitado, como reportado pelo algoritmo.

■

## 4.6 Exercícios

4.1. Resolva pelo método simplex. Identifique o conjunto ótimo e aponte se o problema tem única ou múltiplas soluções ótimas ou se é ilimitado.

$$\begin{array}{lll}
 a) \max 5x_1 + 6x_2 - 17x_3 & b) \max 6x_1 + 4x_2 + x_3 & c) \min -x_1 - 4x_2 + x_3 \\
 \text{s.a: } 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 \leq 10 & \text{s.a: } 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 & \text{s.a: } -2x_1 + x_2 + x_3 \geq -10 \\
 x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 6 & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 & 2x_2 + x_3 \leq 30 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 40 \\
 & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0
 \end{array}$$

4.2. Resolva pelo método simplex. Identifique o conjunto ótimo e aponte se o problema tem única ou múltiplas soluções ótimas, se é inviável ou se é ilimitado.

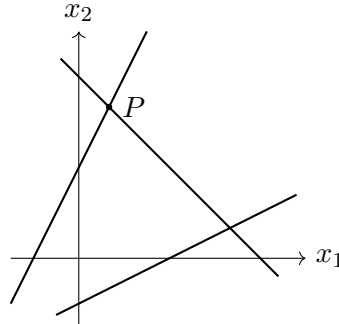
$$\begin{array}{lll}
 a) \max 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 & b) \min -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 & c) \max x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a: } 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 & \text{s.a: } x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 & \text{s.a: } 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -3 \\
 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6 & x_2 - x_3 + x_4 = 6 & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 29 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ livre} & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 & x_1 \leq 0, x_i \geq 0, i = 2, \dots, 4 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\
 d) \min x_1 + 3x_2 - x_3 & e) \max x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 & f) \min x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\
 \text{s.a: } 2x_2 - x_3 \leq -2 & \text{s.a: } 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 & \text{s.a: } x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\
 x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 & x_2 - x_3 + x_4 \geq 6 \\
 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 & 4x_1 - x_2 - x_4 = 2 & 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\
 x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & x_1, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \leq 0 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4
 \end{array}$$

4.3. Resolva pelo método simplex, a partir da base  $A_{\{1,2,3\}}$ .

$$\begin{array}{ll}
 a) \min -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 - x_5 - 6x_6 & b) \min x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 - 6x_5 \\
 \text{s.a: } x_1 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 & \text{s.a: } x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 2 \\
 x_2 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 6 & x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 \leq 6 \\
 x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 12 & x_3 - 2x_4 - 2x_5 \leq 12 \\
 x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5
 \end{array}$$

4.4. No PPL abaixo, sejam  $x_3, x_4$  e  $x_5$  as variáveis de folga, não negativas, da primeira, segunda e terceira restrição, respectivamente. A figura ao seu lado esboça as retas suporte dessas restrições. Em seguida são apresentados três quadros simplex, todos relativos ao ponto  $P$ , porém associados a conjuntos viáveis distintos. Em cada caso, identifique o conjunto viável, hachurando a região correspondente na figura, e determine os sinais de  $r$  e  $s$ . Refaça o exercício considerando agora que se deseja maximizar  $a_{31}x_1 + a_{32}x_2$ .

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 \\
\text{s.a:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\
& a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

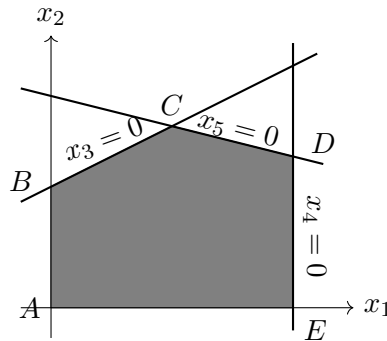


$$\begin{array}{c|ccccc|c}
& x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
a) \ x_1 & 1 & 0 & + & 0 & + & + \\
\ x_2 & 0 & 1 & - & 0 & + & + \\
\ x_4 & 0 & 0 & - & 1 & + & + \\
\hline
& 0 & 0 & r & 0 & s & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
& x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
b) \ x_1 & 1 & 0 & - & 0 & - & + \\
\ x_2 & 0 & 1 & + & 0 & - & + \\
\ x_4 & 0 & 0 & + & 1 & - & + \\
\hline
& 0 & 0 & r & 0 & s & 
\end{array}$$

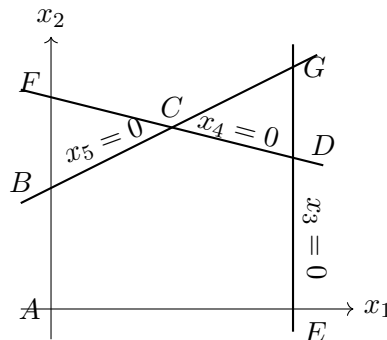
$$\begin{array}{c|ccccc|c}
& x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
c) \ x_1 & 1 & 0 & + & 0 & - & + \\
\ x_2 & 0 & 1 & - & 0 & - & + \\
\ x_4 & 0 & 0 & - & 1 & - & + \\
\hline
& 0 & 0 & r & 0 & s & 
\end{array}$$

4.5. Seja (P) o PPL  $\max c^\top x$  s.a:  $Ax \leq b, x \geq 0$ , onde  $x^\top = (x_1, x_2)$ ,  $c \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^3$  e  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . Admita que (P) está representado no gráfico abaixo, onde é usada a mesma escala nos dois eixos. As variáveis  $x_3, x_4, x_5$  são as folgas das restrições. Considere ainda que os pontos B e E estão sobre a reta  $c^\top x = k$ , onde  $k$  é uma constante. Determine a sequência de pontos gerados pelo método simplex, sendo o critério de entrada na base o menor custo reduzido. Em cada ponto gerado, identifique as variáveis básicas. Além disso, determine os sinais dos elementos no quadro simplex (de minimização) relativo ao ponto D, identificando os positivos (+), negativos (-) e nulos (0).



4.6. Seja (P) o PPL  $\min c^\top x$  s.a:  $Ax \leq b, x \geq 0$ , representado no gráfico abaixo, onde  $x^\top = (x_1, x_2)$ ,  $c^\top = (1, 0)$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^3$  e  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . As variáveis  $x_3, x_4, x_5$  são as folgas das restrições, conforme indicado no gráfico. Em cada um dos seguintes abaixo, apresente o quadro simplex relativo à G, identificando o sinal de cada coeficiente das restrições e função objetivo com + (positivo), - (negativo) ou 0 (nulo):

- os pontos C, F e G são viáveis.
- os pontos G e D são viáveis e o ponto C é inviável.



4.7. Um fabricante de brinquedos, que emprega 50 operários a uma jornada de 40 horas semanais, conclui que sua melhor opção de mercado está na linha de cachorrinhos de pelúcia que produz. Tais bichinhos são fabricados em três tamanhos PP(miniatura), M(médio) e G(grande), a partir de dois processos (enchimento e cobertura). Os registros de estoque mostram uma disponibilidade de 400Kg de enchimento e 500m<sup>2</sup> de material para revestimento. O quadro simplex (de minimização) abaixo apresenta um plano de produção que maximiza o lucro e respeita as restrições de mão-de-obra e matéria-prima. As variáveis  $x_1, x_2, x_3$  descrevem as quantidades fabricadas de PP, M e G respectivamente, enquanto  $x_4, x_5, x_6$  são as folgas das restrições de enchimento, revestimento e mão-de-obra, respectivamente.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$	0	1	5	2,5	0	-0,5	0
$x_5$	0	0	0	-0,5	1	0	300
$x_1$	1	0	-6	-4	0	1	400
	0	0	5	10	0	0	$Z + 4000$

1. Encontre outra uma solução básica igualmente ótima para o fabricante.
  2. Mostre que, qualquer que seja a relação desejada  $r = x_1/x_2$ , entre a quantidade de PP e de M, existe uma solução ótima de valor 4000. (Sug. Expresse uma solução que satisfaça a relação  $r$  como combinação convexa das duas soluções ótimas básicas conhecidas).
- 4.8. Considere o PPL abaixo. Seja  $B = \{2, 4\}$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

1. Mostre que  $A_B$  é uma base viável. A solução básica correspondente é degenerada?
  2. Mostre que  $A_B$  é uma base ótima? Ela é a única base ótima?
- 4.9. Considere o seguinte PPL, onde  $a$  e  $b$  são constantes e otimizar corresponde a maximizar ou minimizar.

$$\begin{aligned} \text{otimizar} \quad & x_1 + ax_2 - ax_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 - 7x_2 - x_3 = b \\ & -x_1 - 14x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq b - 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Sejam  $x_4 \geq 0$  e  $x_5 \geq 0$  as folgas da segunda e terceira restrição, respectivamente. Para que valores de  $a$  e  $b$ :

1.  $[x_1, x_4, x_5]$  define uma base viável?
  2. verifica-se que o problema de maximização é ilimitado a partir dessa solução básica?
  3. verifica-se que essa solução é ótima para o problema de minimização?
- 4.10. Para que valores de  $a$  e  $b$ , o seguinte PPL tem solução básica ótima única, atingida em um ponto que se encontra fora dos eixos?

$$\begin{aligned} \min \quad & 2ax_1 - x_2 - ax_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 - 4b \\ & 3x_2 + 2x_3 \geq 7b \\ & 2x_2 + x_3 \geq 4b \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- 4.11. Seja (P) um PPL de minimização. Considere o quadro simplex (de minimização) abaixo referente a uma base de (P). Especifique uma condição para  $a, b, c$  e  $d$  que seja suficiente para garantir cada um das seguintes conclusões.



							Conclusão	$a$	$b$	$c$	$d$
							(P) é viável				
							(P) tem solução ótima única				
$x_1$	1	0	0	-1	-2	1	(P) tem múltiplas soluções ótimas				
$x_2$	0	1	0	0	3	6	(P) é ilimitado				
$x_3$	0	0	1	$a$	1	$b$	(P) é inviável				
	0	0	0	$c$	$d$		A base se mantém viável trocando $x_3$ por $x_5$				
							A base não é ótima, mas o ponto que ela define sim				

4.12. Considere o PPL (P)  $\min c^\top x$  s.a  $Ax \leq b, x \geq 0$ , onde  $x^\top = (x_1, x_2)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^3$  e  $c \in \mathbb{R}^2$ . Seja  $x_f^\top = (x_3, x_4, x_5)$  o vetor de folgas das restrições, ou seja,  $Ax + x_f = b$ . Um solução básica viável é determinada pelo quadro simplex abaixo, onde  $0 < \beta < 2\alpha$ ,  $\chi > 0$  e  $\delta > 0$ . Esboce o gráfico de (P) no plano  $(x_1, x_2)$ , representando cada restrição e associando-a à variável de folga correspondente, bem como identificando a região viável e o sentido do vetor  $c$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	$-\alpha$	0	1	$\alpha$	0	1
$x_2$	$-\beta$	1	0	$\beta$	0	2
$x_5$	$\chi$	0	0	0	1	3
	$\delta$	0	0	0	0	

4.13. Considere a forma canônica de  $Ax = b, x \geq 0$ , relativa a uma base inviável  $A_B$ ,  $B \subset J$ :

$$x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b}, \quad x_B \geq 0, x_N \geq 0,$$

onde  $\bar{b} \not\geq 0$ . Subtraia então uma mesma variável artificial  $x_a \geq 0$  do lado esquerdo de cada restrição  $i$  tal que  $\bar{b}_i < 0$ , obtendo

$$x_B + \bar{A}_N x_N - e^a x_a = \bar{b}, \quad x_B \geq 0, x_N \geq 0, x_a \geq 0,$$

onde  $e_i^a = 1$ , se  $\bar{b}_i < 0$ , e  $e_i^a = 0$ , se  $\bar{b}_i \geq 0$ . Mostre que a base obtida com a entrada de  $x_a$  e saída de  $x_{B(r)}$  tal que  $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i : i \in \{1, \dots, m\}\}$  é viável para o sistema estendido. Detalhe como usar essa estratégia para determinar uma base viável para o sistema original ou mostrar que ele é inviável. Essa alternativa para o primeira fase do simplex, embora use uma única variável artificial, costuma ser computacionalmente menos eficiente.

## Capítulo 5

# Teoria do Método Simplex

Ao longo de todo este capítulo, vamos estudar propriedades teóricas dos problemas de programação linear, considerando a forma padrão

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Vamos denotar por  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  o conjunto viável e admitir que  $X \neq \emptyset$ . Supomos a hipótese (PC) satisfeita, o que significa, nesse caso, que não existem equações redundantes em  $Ax = b$ .

As propriedades aqui estudadas fundamentam o método simplex, permitindo um entendimento mais rico e detalhado de seu funcionamento e corretude. Exploramos conceitos relevantes em otimização matemática como convexidade, direções viáveis, pontos e direções extremas. Os resultados aqui apresentados também serão importantes para os próximos capítulos.

### 5.1 Combinações lineares

As operações de soma e multiplicação por escalar em  $\mathbb{R}^n$  são a base para gerar outros vetores desse espaço vetorial. Algumas combinações especiais dessas operações têm papel fundamental no estudo que desenvolvemos neste capítulo.

**Definição 5.1.1.** Seja  $S = \{x^1, x^2, \dots, x^p\} \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que o vetor  $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^i$  é:

- uma *combinação linear* de  $S$ , onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ ;
- uma *combinação cônica* de  $S$ , se  $\alpha_i \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ;
- uma *combinação convexa* de  $S$ , se  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$  e  $\alpha_i \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

A combinação é dita *própria* se todos os multiplicadores são não nulos.

**Definição 5.1.2.** O *fecho cônico* e o *fecho convexo* de  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , denotados por  $\text{cone}(S)$  e  $\text{conv}(S)$ , são os conjuntos de todas as combinações cônicas e todas as combinações convexas de subconjuntos finitos de  $S$ , respectivamente. Por convenção,  $\text{cone}(\emptyset) = \{0\}$  e  $\text{conv}(\emptyset) = \emptyset$ .

Exploremos o significado das definições acima. Em particular, uma combinação convexa de dois pontos  $x^1$  e  $x^2$  é um ponto

$$x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2 = x^1 + \alpha(x^2 - x^1),$$

para algum  $\alpha \in [0, 1]$ , ou seja, um ponto do segmento entre  $x^1$  e  $x^2$ , conforme ilustra a Figura 5.1. Logo, o fecho convexo de  $x^1$  e  $x^2$  é o segmento de reta entre esses dois pontos (ver Figura 5.2(a)).

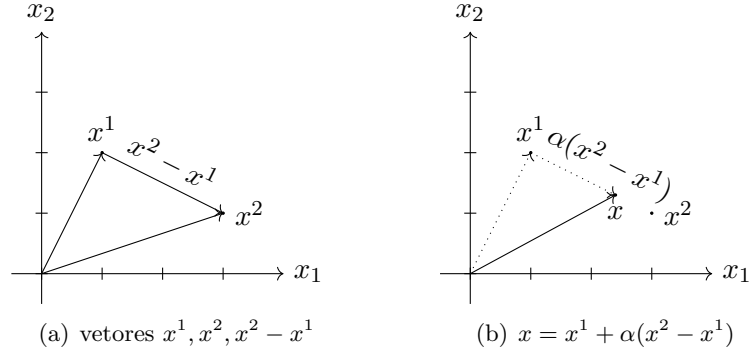


Figura 5.1: Combinação convexa de dois pontos em  $\mathbb{R}^2$ .

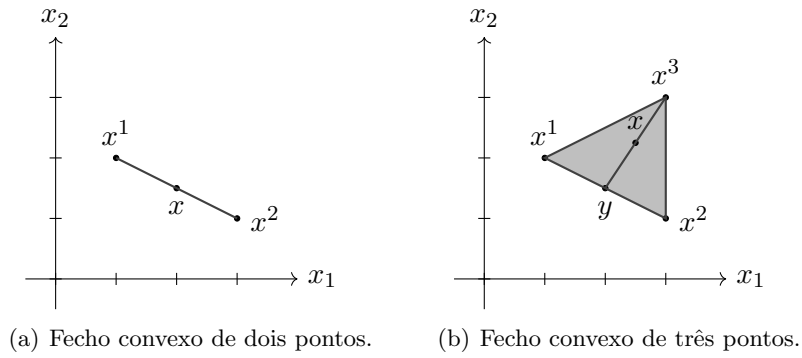


Figura 5.2: Fechos convexas em  $\mathbb{R}^2$ .

Já uma combinação convexa  $x$  de três pontos  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  pode ser escrita como combinação convexa de  $x^3$  com outro ponto  $y$  que é, por sua vez, combinação convexa de  $x^1$  e  $x^2$ . De fato, temos que

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0.$$

Se  $\alpha_3 = 1$ , a afirmação é trivial, pois  $x = x^3 = \alpha_3 x^3 + (1 - \alpha_3)y$  para qualquer  $y \in \text{conv}(x^1, x^2)$ . Quando  $\alpha_3 < 1$ , ou seja,  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ , podemos escrever

$$x = (\alpha_1 + \alpha_2) \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} x^1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x^2 \right) + \alpha_3 x^3.$$

Então, fazendo  $\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \in [0, 1]$  (por conseguinte  $1 - \beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ ) e  $y = \beta x^1 + (1 - \beta)x^2$ , temos que

$$x = (1 - \alpha_3)y + \alpha_3 x^3, \quad \text{com } y \in \text{conv}(x^1, x^2).$$

Dessa forma, vemos que o fecho convexo de três pontos é um segmento, caso eles sejam colineares, ou o triângulo cujos vértices são esses três pontos (ver Figura 5.2(b)).

Em geral, uma combinação convexa  $x$  de  $p$  pontos  $S = \{x^1, x^2, \dots, x^p\}$  é uma combinação convexa de um deles, digamos  $x_p$ , com um ponto que é combinação convexa dos demais  $S \setminus \{x^p\}$ , pois  $x = x_p$  ou

$$x = (1 - \alpha_p) \left( \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_p} x^1 + \dots + \frac{\alpha_{p-1}}{1 - \alpha_p} x^{p-1} \right) + \alpha_p x^p.$$

Por sua vez, uma combinação cônica de dois pontos é a soma de qualquer múltiplo não negativo de um deles com qualquer múltiplo não negativo do outro. Assim, o fecho cônico de

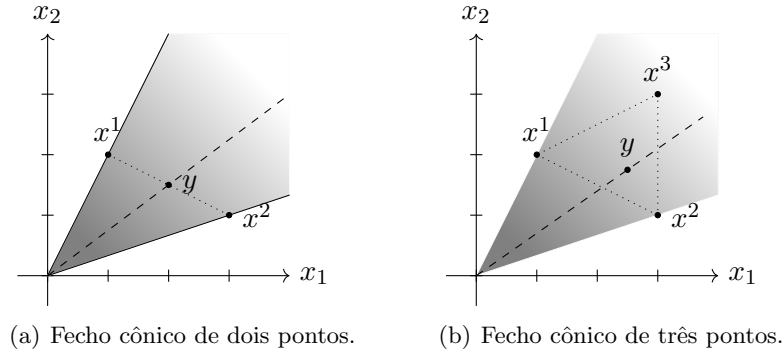


Figura 5.3: Fechos cônicos em  $\mathbb{R}^2$ .

$x^1$  e  $x^2$  compreende todas as semirretas que iniciam na origem e passam por algum ponto  $y$  do segmento entre  $x^1$  e  $x^2$  (ver Figura 5.3(a)). Em geral, se  $x$  é combinação cônica de  $p$  pontos  $S = \{x^1, x^2, \dots, x^p\}$  então  $x = 0$  ou

$$x = \alpha \left( \frac{\alpha_1}{\alpha} x^1 + \dots + \frac{\alpha_p}{\alpha} x^p \right),$$

onde  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_p > 0$ . Em outros termos,  $x$  é um múltiplo não negativo de um ponto de  $\text{conv}(S)$ . Logo, o fecho cônico de  $p$  pontos é o conjunto de todas as semirretas que iniciam na origem e passam por alguma combinação convexa  $y$  desses  $p$  pontos (ver Figura 5.3(b)).

## 5.2 Conjunto convexo e cone

A partir de combinações convexas e cônicas, definimos dois tipos importantes de conjuntos.

**Definição 5.2.1.** Um conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é dito *conjunto convexo* se o fecho convexo de quaisquer dois pontos de  $C$  está contido em  $C$ . Em outros termos, para todos  $x^1, x^2 \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $(1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2 \in C$ .

Exemplos de conjuntos convexas e não convexas podem ser vistos nas Figura 5.4(a) e 5.4(b), respectivamente.

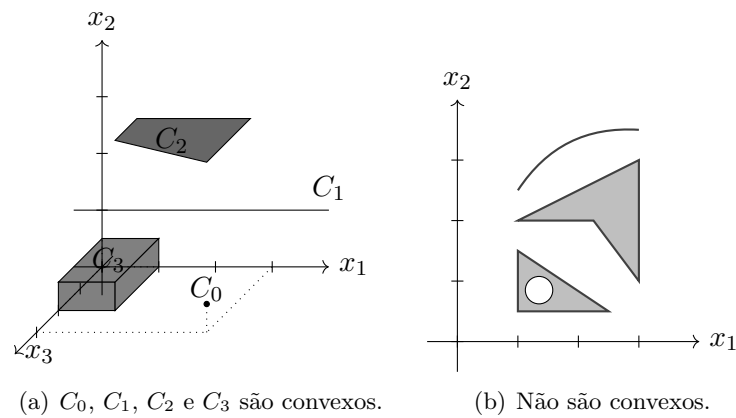


Figura 5.4: Exemplos de conjuntos convexas e não convexas.

**Proposição 5.2.1.**  $X$  é um conjunto convexo.

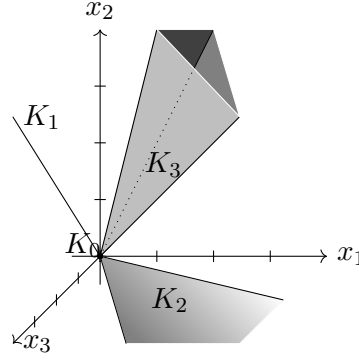


Figura 5.5: Exemplos de cones:  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ .

*Prova:* Sejam  $x^1, x^2 \in X$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Defina  $x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2$ . Devemos mostrar que  $x \in X$ . Sendo  $x^1, x^2 \geq 0$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , temos que  $x \geq 0$ . Adicionalmente,  $Ax = A((1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2) = (1 - \alpha)Ax^1 + \alpha Ax^2 = (1 - \alpha)b + \alpha b = b$ . Logo,  $x \in X$ . ■

*Exercício 5.2.1.* Mostre que  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, Dx \leq d, x \geq 0\}$  é convexo.

**Definição 5.2.2.** Um conjunto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  é dito *cone* se o fecho cônico de quaisquer dois pontos de  $K$  está contido em  $K$ . Em outros termos, para todos  $x^1, x^2 \in K$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in K$ .

Exemplos de cones podem ser encontrados na Figura 5.5.

*Exercício 5.2.2.* Mostre que  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, x \geq 0\}$  e  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0, x \geq 0\}$  são cones.

### 5.3 Direções viáveis

Assim como outros métodos de otimização, o Simplex pode ser visto como um método que gera iterativamente uma sequência de pontos, sendo que o próximo ponto é gerado a partir do anterior, caminhando um certo passo ao longo de uma direção, dentro do conjunto viável. Para formalizar essa ideia, precisamos do conceito de direção viável.

**Definição 5.3.1.** Sejam  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $\bar{x} \in C$ . Um vetor  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , é uma *direção viável para  $C$  em  $\bar{x}$*  se existe  $\alpha_0 > 0$  tal que  $\bar{x} + \alpha d \in C$ , para todo  $\alpha \in [0, \alpha_0]$ . Mais ainda, se  $\bar{x} + \alpha d \in C$  para todo  $\alpha \geq 0$ ,  $d$  é uma *direção de recessão*<sup>1</sup>. O conjunto de direções de recessão de  $C$  junto com o vetor nulo é denotado por  $\text{rec}(C)$ . Em particular,  $\text{rec}(\emptyset) = \{0\}$ .

A Figura 5.6 ilustra os conceitos de direção viável e de direção de recessão. Observe que essas direções formam cones, como demonstramos formalmente a seguir. Note também que não há direção de recessão quando o conjunto é limitado.

**Proposição 5.3.1.** Sejam  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $\bar{x} \in C$ . O conjunto de direções viáveis para  $C$  em  $\bar{x}$  junto com o vetor nulo formam um cone. Similarmente,  $\text{rec}(C)$  é um cone.

*Prova:* Seja  $\text{dir}(C, \bar{x})$  o conjunto de direções viáveis para  $C$  em  $\bar{x}$  junto com o vetor nulo. Sejam  $d^1, d^2 \in \text{dir}(C, \bar{x})$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  e  $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ . Devemos mostrar que  $d \in \text{dir}(C, \bar{x})$ , ou seja, que  $d = 0$  ou existe  $\theta_0 > 0$  tal que  $\bar{x} + \theta d \in C$ , para todo  $\theta \in [0, \theta_0]$ . Suponha então que  $d \neq 0$  e, sem perda de generalidade, que  $\lambda_1 > 0$ . Como  $d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n$  são direções viáveis ou o vetor nulo, existem  $\alpha_0 > 0$  e  $\beta_0 > 0$  tais que  $\bar{x} + \alpha d^1 \in C$  e  $\bar{x} + \beta d^2 \in C$ , para todos  $\alpha \in [0, \alpha_0]$  e  $\beta \in [0, \beta_0]$ .

<sup>1</sup>Pode-se mostrar que, se existe  $\bar{x} \in C$  tal que  $\bar{x} + \alpha d \in C$  para todo  $\alpha \geq 0$ , então a mesma propriedade vale para todo  $x \in C$ . Por isso, o conceito de direção de recessão é relativo apenas ao conjunto e não a cada ponto.

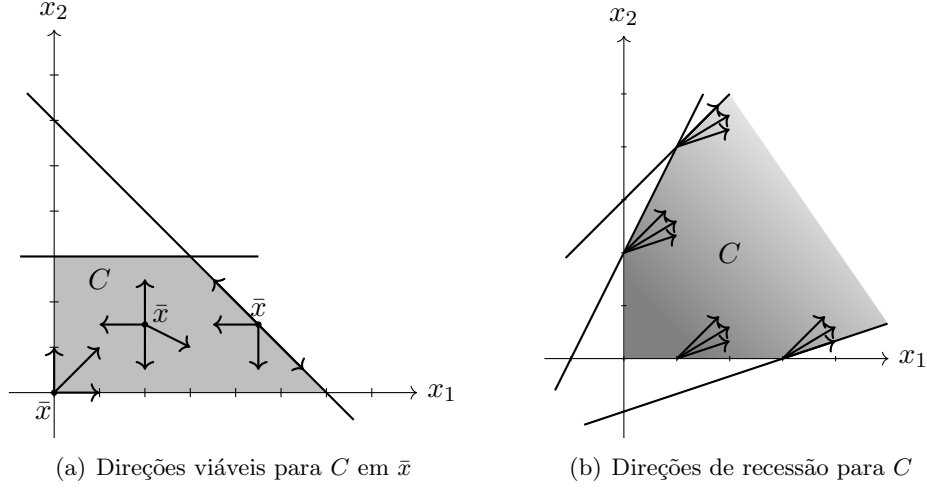


Figura 5.6: Direções viáveis e de recessão

Se  $\lambda_2 d^2 = 0$ , temos que  $d = \lambda_1 d^1$ . Nesse caso, basta tomar  $\theta_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda_1} > 0$  para obter  $\bar{x} + \theta d \in C$ , para todo  $\theta \in [0, \theta_0]$ . Caso  $\lambda_2 d^2 \neq 0$ , tome  $\theta_0 = \frac{1}{2} \min\{\frac{\alpha_0}{\lambda_1}, \frac{\beta_0}{\lambda_2}\} > 0$ . Seja  $\theta \in [0, \theta_0]$ . Então,

$$\bar{x} + \theta d = \bar{x} + \theta(\lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2) = \frac{1}{2}(\bar{x} + 2\theta\lambda_1 d^1) + \frac{1}{2}(\bar{x} + 2\theta\lambda_2 d^2).$$

Como  $2\theta\lambda_1 \leq \alpha_0$  e  $2\theta\lambda_2 \leq \beta_0$ , temos que  $(\bar{x} + 2\theta\lambda_1 d^1) \in C$  e  $(\bar{x} + 2\theta\lambda_2 d^2) \in C$ . Logo,  $\bar{x} + \theta d$  é combinação convexa de dois pontos de  $C$  e, por conseguinte, é um ponto de  $C$ .

Prova similar é válida para o caso de direção de recessão. ■

As direções viáveis para  $X$  podem ser caracterizadas de forma particular, que pode ser mais facilmente verificada.

**Proposição 5.3.2.** *Sejam  $\bar{x} \in X$  e  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Então  $d$  é direção viável para  $X$  em  $\bar{x}$  se, e somente, se  $Ad = 0$  e  $d_j \geq 0$ , para todo  $j \in J$  tal que  $\bar{x}_j = 0$ .*

*Prova:* Primeiro, suponha que  $d$  é direção viável para  $X$  em  $\bar{x}$ . Então, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que  $A(\bar{x} + \alpha d) = b$  e  $\bar{x} + \alpha d \geq 0$ , para todo  $\alpha \in [0, \alpha_0]$ . Em particular, temos que  $\alpha_0 Ad = b - A\bar{x} = 0$ , implicando em  $Ad = 0$ . Além disso, se  $\bar{x}_j = 0$ , temos que  $\alpha_0 d_j \geq 0$ , mostrando que  $d_j \geq 0$ .

Suponha agora que  $Ad = 0$  e  $d_j \geq 0$  para todo  $j \in J$  tal que  $\bar{x}_j = 0$ . Temos que  $A(\bar{x} + \alpha d) = A\bar{x} + \alpha Ad = b$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Adicionalmente, defina

$$\alpha_0 = \begin{cases} \min_{j \in J} \left\{ \frac{\bar{x}_j}{-d_j} : d_j < 0 \right\}, & \text{se } d \not\geq 0, \\ +\infty, & \text{se } d \geq 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Note que  $\alpha_0 > 0$ , pois  $d_j < 0$  implica  $\bar{x}_j > 0$ . Resta-nos mostrar que  $\bar{x}_j + \alpha d_j \geq 0$  para todo  $j \in J$  e para todo  $\alpha \in [0, \alpha_0]$ . Se  $d_j \geq 0$ , temos trivialmente  $\bar{x}_j + \alpha d_j \geq 0$ , pois  $\bar{x}_j, \alpha \geq 0$ . Se  $d_j < 0$  temos que  $\alpha \leq \alpha_0 \leq \frac{\bar{x}_j}{-d_j}$ , de modo que  $\bar{x}_j + \alpha d_j \geq 0$ . ■

Quando  $d$  e  $-d$  são simultaneamente direções viáveis para  $X$  em  $\bar{x}$ , podemos construir um segmento contido em  $X$  que contém  $\bar{x}$ . O lema acima permite caracterizar esse tipo de direção e propriedades de pontos do segmento.

**Corolário 5.3.1.** *Sejam  $\bar{x} \in X$  e  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  com  $Ad = 0$  e  $d_j = 0$  para todo  $j \in J$  tal que  $\bar{x}_j = 0$ . Defina*

$$\varepsilon = \min_{j \in J} \left\{ \frac{\bar{x}_j}{|d_j|} : d_j \neq 0 \right\} > 0. \quad (5.2)$$

*Temos que:*

1.  $d$  e  $-d$  são direções viáveis
2.  $x^1 = \bar{x} + \varepsilon d$  e  $x^2 = \bar{x} - \varepsilon d$  pertencem a  $X$
3. as componentes nulas em  $\bar{x}$  também são nulas em  $x^1$  e  $x^2$
4.  $x^1$  ou  $x^2$  tem pelo menos uma componente nula a mais que  $\bar{x}$

*Prova:* Diretamente da Proposição 5.3.2, obtemos o item 1. Na verdade, pela demonstração dessa proposição, existem  $\alpha_0$  e  $\alpha'_0$ , dados por (5.1) para  $d$  e  $-d$ , respectivamente, tais que  $\bar{x} + \alpha d \in X$  e  $\bar{x} + \alpha(-d) \in X$  para todo  $0 \leq \alpha \leq \min\{\alpha_0, \alpha'_0\}$ . Note que  $0 < \varepsilon = \min\{\alpha_0, \alpha'_0\}$ . Isso mostra o item 2. Adicionalmente, se  $\bar{x}_j = 0$ , temos  $d_j = 0$  por hipótese, implicando  $x_j^1 = x_j^2 = 0$ , como enuncia o item 3. Finalmente, temos que  $\varepsilon = \frac{\bar{x}_k}{|d_k|}$  para algum  $k \in J$  tal que  $d_k \neq 0$ . Se  $d_k > 0$ , então  $\varepsilon = \frac{\bar{x}_k}{d_k}$  e, por conseguinte,  $x_k^2 = \bar{x}_k - \frac{\bar{x}_k}{d_k} d_k = 0$ . Se  $d_k < 0$ , então  $\varepsilon = \frac{\bar{x}_k}{-d_k}$  e, por conseguinte,  $x_k^1 = \bar{x}_k + \frac{\bar{x}_k}{-d_k} d_k = 0$ . Assim temos uma componente nula a mais em  $x^1$  ou  $x^2$ , mostrando o item 4. ■

Similarmente à prova da Proposição 5.3.2, mostramos a seguinte caracterização de  $\text{rec}(X)$ .

**Proposição 5.3.3.** *Suponha  $X \neq \emptyset$  e seja  $d \in \mathbb{R}^n$ . Então  $d$  é direção de recessão para  $X$  se, e somente, se  $Ad = 0$ ,  $d \geq 0$  e  $d \neq 0$ .*

*Exercício 5.3.1.* Demonstre a Proposição 5.3.3.

As direções viáveis que o Simplex percorre nas mudanças de base podem ser determinadas diretamente a partir das colunas da matriz  $A_B^{-1}A_N$ . Os exercícios a seguir detalham essa questão.

*Exercício 5.3.2.* Sejam  $\bar{x}$  e  $\hat{x}$  duas soluções básicas viáveis distintas geradas consecutivamente pelo método simplex. Suponha  $(B, N)$  a partição que define as variáveis básicas e não básicas em  $\bar{x}$ ,  $x_k$  ( $k \in N$ ) a variável que entrou na base e  $x_{B(r)}$  ( $r \in \{1, \dots, m\}$ ) a variável que saiu da base. Seja  $d = \frac{1}{\varepsilon}(\hat{x} - \bar{x})$ , onde  $\varepsilon = \frac{\bar{b}_r}{a_{rk}} > 0$  é a razão mínima calculada para a mudança de base. Expresse  $d$  em função da matriz  $A$  e da partição  $(B, N)$ . Usando a Proposição 5.3.2, mostre que  $d$  é direção viável para  $X$  em  $\bar{x}$ .

*Exercício 5.3.3.* Seja  $d$  a direção calculada no Exercício 5.3.2. Mostre que  $d$  é direção de recessão se  $\bar{A}_k \leq 0$ . Mostre que  $\bar{c}_k = c^\top d$ .

Nesta seção, caracterizamos as direções viáveis para o conjunto definido pela forma padrão. Alternativamente, poderíamos explorar esses conceitos associados ao conjunto o PPL original.

*Exercício 5.3.4.* Sejam  $X^\leq = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  e  $\bar{x} \in X^\leq$ . Caracterize o conjunto de direções viáveis para  $X^\leq$  em  $\bar{x}$ . Determine  $\text{rec}(X^\leq)$ .

*Exercício 5.3.5.* Sejam  $X^\leq = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  e  $X^= = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Mostre que  $d \in \text{rec}(X^\leq)$  se, e somente se,  $(d, -Ad) \in \text{rec}(X^=)$ .

## 5.4 Vértices

Pelas ilustrações feitas nos capítulos anteriores, percebemos que pelo menos uma solução ótima, quando existe alguma, ocorre em um “canto” do conjunto viável. Essa propriedade é sempre verdadeira, como demonstraremos mais adiante. Daí a importância de caracterizarmos esse tipo de ponto, a quem denominamos vértice.

**Definição 5.4.1.** Um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é um *vértice* de um conjunto convexo  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  se não pertence a qualquer intervalo contido em  $C$ , a não ser que seja um dos extremos do intervalo. Em outros termos, se  $x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2$  para  $x^1, x^2 \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , então  $x^1 = x^2$  ou  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

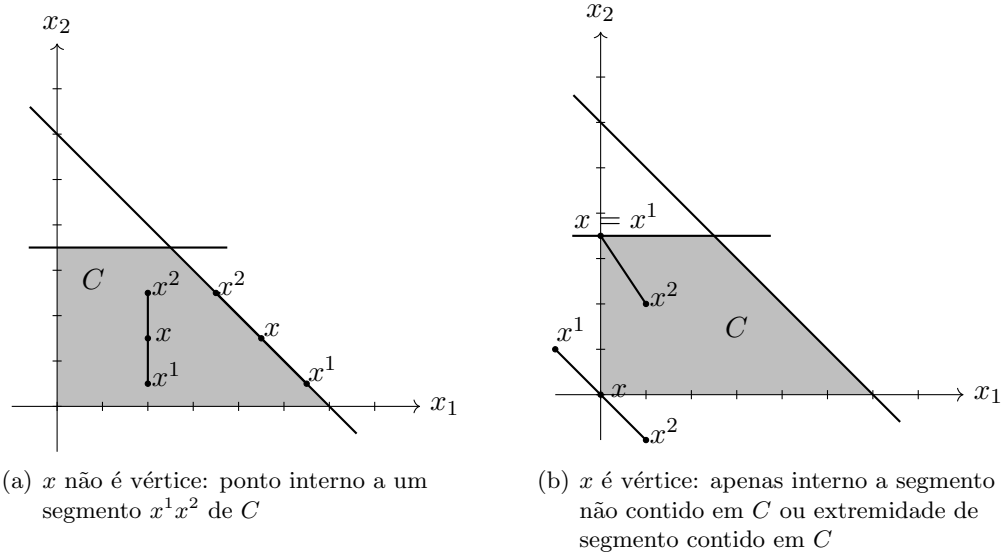


Figura 5.7: Ilustração do conceito de vértice

A Figura 5.7 apresenta pontos que são vértices de um conjunto  $C$  (não internos qualquer segmento contido em  $C$ ) e pontos que não são vértices desse conjunto (pertencentes a algum segmento contido em  $C$ ).

**Exercício 5.4.1.** Sejam  $X^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  e  $X^= = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Mostre que  $x$  é vértice de  $X^{\leq}$  se, e somente se,  $(x, b - Ax)$  é vértice de  $X^=$ .

No caso do conjunto  $X$ , os vértices podem ser caracterizados a partir das bases da matriz  $A$ .

**Lema 5.4.1.** Sejam  $\bar{x} \in X$  e  $P = \{j \in J : \bar{x}_j > 0\}$ . Então  $\bar{x}$  é vértice de  $X$  se, e somente se, as colunas de  $A_P$  são linearmente independentes.

*Prova:* Primeiro, suponha que as colunas de  $A_P$  são linearmente dependentes. Então existe vetor  $d_P \neq 0$  tal que  $A_P d_P = 0$ . Seja  $Z = J \setminus P$ , particione  $A = [A_P \ A_Z]$  e defina  $d = \begin{bmatrix} d_P \\ d_Z \end{bmatrix}$  com  $d_Z = 0$ . Então  $Ad = A_P d_P + A_Z d_Z = 0$ . Pelo Corolário 5.3.1(2),  $x^1 = \bar{x} + \varepsilon d \in X$  e  $x^2 = \bar{x} - \varepsilon d \in X$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Como  $\bar{x} = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ , concluímos que  $\bar{x}$  não é vértice.

Agora, suponha que as colunas de  $A_P$  são linearmente independentes. Então  $|P| \leq m$ . Mais ainda, pela hipótese (PC), existe<sup>2</sup>  $P' \subset J \setminus P$  com  $|P'| = m - |P|$  tal que as colunas de  $A_{P \cup P'}$  são linearmente independentes. Defina  $B = P \cup P'$  e  $N = J \setminus B$ . Então  $A_B$  é base e  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix}$  com  $\bar{x}_N = 0$ . Tome  $x^1, x^2 \in X$  e  $\alpha \in (0, 1)$  tais que  $\bar{x} = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2$ . Queremos mostrar que  $x^1 = x^2$ . Temos que  $0 = \bar{x}_N = (1 - \alpha)x_N^1 + \alpha x_N^2$ . Então, como  $\alpha > 0$ ,  $1 - \alpha > 0$ ,  $x_N^1 \geq 0$  e  $x_N^2 \geq 0$ , chegamos a  $x_N^1 = x_N^2 = 0$ . Consequentemente, posto que  $Ax^1 = Ax^2 = b$ , temos que  $0 = A(x^1 - x^2) = A_B(x_B^1 - x_B^2)$ , implicando  $x_B^1 = x_B^2$ . Logo  $x^1 = x^2$ . ■

**Teorema 5.4.1.**  $\bar{x}$  é vértice de  $X$  se, e somente se,  $\bar{x}$  é solução básica viável de  $X$ .

*Prova:* Seja  $P = \{j \in J : \bar{x}_j > 0\}$ . Primeiro suponha que  $\bar{x}$  é vértice de  $X$ . Pelo Lema 5.4.1, as colunas de  $A_P$  são linearmente independentes. Então existe  $B \supseteq P$  tal que  $A_B$  é base. Como  $\bar{x}_N = 0$ , para  $N = J \setminus B$ , concluímos que  $\bar{x}$  é solução básica viável.

<sup>2</sup>Como  $\text{posto}(A) = m$ , sendo  $|P| < m$ , existe  $j \in J \setminus P$  tal que  $A_{P \cup \{j\}}$  tem colunas LI. Essa propriedade pode ser usada para construir iterativamente  $P'$ .



Agora, admita que  $\bar{x}$  é solução básica viável. Então existe partição  $(B, N)$  tal que  $A_B$  é invertível e  $\bar{x}_N = 0$ . Como  $P \subseteq B$ , temos que  $A_P$  tem colunas linearmente independentes e, pelo Lema 5.4.1,  $\bar{x}$  é vértice. ■

**Corolário 5.4.1.** *O conjunto de vértices de  $X$  é finito.*

Também será útil caracterizar pontos que não são vértices de  $X$ . Como sabemos, quando não é vértice, o ponto é interno a algum segmento contido no conjunto. Complementando o Corolário 5.3.1, a proposição a seguir estabelece propriedades dos extremos de alguns desses segmentos.

**Proposição 5.4.1.** *Seja  $x \in X$ . Se  $x$  não é vértice, então existem  $x^1, x^2, \dot{x}^2 \in X$ , com pelo menos as mesmas componentes nulas que  $x$  e  $x^1$  com pelo menos uma nula a mais, satisfazendo:*

1.  $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ ;
2.  $x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha\dot{x}^2$ , para algum  $\alpha \in (0, 1)$ , e  $x - x^1 \in \text{rec}(X)$  ou  $\dot{x}^2$  tem pelo menos uma componente nula a mais que  $x$ .

*Prova:* Admita que  $x$  não é vértice. Pela Definição 5.4.1, existem  $x', x'' \in X$ ,  $x' \neq x''$ , e  $\beta \in (0, 1)$  tais que  $x = (1 - \beta)x' + \beta x''$ . Defina  $d = x'' - x' \neq 0$ . Temos que  $Ad = Ax'' - Ax' = 0$ . Além disso, como  $\beta \in (0, 1)$  e  $x', x'' \geq 0$ , se  $x_j = 0$  então  $(1 - \beta)x'_j + \beta x''_j = 0$ , implicando  $x'_j = x''_j = 0$  ou ainda  $d_j = 0$ . Então, pelo Corolário 5.3.1, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x^1 = x + \varepsilon d \in X$ ,  $x^2 = x - \varepsilon d \in X$ ,  $x^1$  e  $x^2$  tem pelo menos as mesmas componentes nulas que  $x$ , e  $x^1$  ou  $x^2$  tem pelo menos uma componente nula a mais. Sem perda de generalidade, podemos supor que isso ocorre como  $x^1$ . Do contrário, bastaria substituir  $d$  por  $-d$ . Somando as expressões de  $x^1$  e  $x^2$ , obtemos  $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ , mostrando o item 1.

Defina agora  $d = x - x^1 \neq 0$ . Temos  $Ad = 0$  e  $d_j = 0$  sempre que  $x_j = 0$ . Se  $d \geq 0$  (ou equivalentemente,  $d \in \text{rec}(X)$ ), é suficiente tomar  $\dot{x}^2 = x^2$  e  $\alpha = 1/2$  para obter o item 2. Caso contrário, seja

$$\varepsilon = \frac{x_k}{-d_k} = \min_{j \in J} \left\{ \frac{x_j}{-d_j} : d_j < 0 \right\} > 0.$$

Então, similarmente à prova da Proposição 5.3.2, podemos mostrar que  $\dot{x}^2 = x + \varepsilon d \in X$ . Além disso,  $\dot{x}_k^2 = 0$ , garantindo que  $\dot{x}^2$  tem pelo menos uma componente nula a mais que  $x$ . Mais ainda, temos que

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}x^1 + \frac{1}{1 + \varepsilon}\dot{x}^2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(x - d) + \frac{1}{1 + \varepsilon}(x + \varepsilon d) = x.$$

Por conseguinte, tomando  $\alpha = \frac{1}{1 + \varepsilon}$ , chegamos também ao item 2 nesse caso. ■

**Corolário 5.4.2.** *Um ponto de  $X$  com a menor quantidade de componentes positivas é um vértice.*

## 5.5 Otimalidade

Demonstramos, nesta seção, que pelo menos uma solução ótima, quando existe alguma, ocorre em um vértice. Tal propriedade fundamenta a corretude do simplex. Para a demonstração, fazemos uso do seguinte resultado auxiliar.

**Lema 5.5.1.** *Para todo  $x \in X$ , existem  $\hat{x}, \tilde{x} \in X$ , com  $\hat{x}$  vértice, e  $\alpha \in (0, 1]$  tais que  $x = \alpha\hat{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}$ .*

*Prova:* Sejam  $p$  o número de componentes positivas em  $x$  e  $p_0$  a menor quantidade de componentes positivas em um ponto de  $X$ . A prova será por indução sobre  $p \geq p_0$ . Se  $p = p_0$ , o Corolário 5.4.2 garante que  $x$  é vértice. Então, basta tomar  $\hat{x} = \tilde{x} = x$  e  $\alpha = 1$ . Suponha então que o resultado vale para todo ponto com até  $p - 1$  componentes positivas.

Considere agora que  $p > p_0$ . Se  $x$  é vértice, o resultado é trivial, bastando tomar  $\hat{x} = \tilde{x} = x$  e  $\alpha = 1$ . Suponha então que  $x$  não é vértice. Então, pela Proposição 5.4.1(1), existem  $x^1, x^2 \in X$  tais que  $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ , e  $x^1$  tem menos que  $p$  componentes positivas. Dessa forma, a hipótese indutiva aplica-se a  $x^1$ , ou melhor, existem  $\theta \in (0, 1]$  e  $\bar{x}, \dot{x} \in X$ , com  $\bar{x}$  vértice, tais que  $x^1 = \theta\bar{x} + (1 - \theta)\dot{x}$ . Por outro lado, como  $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ , segue que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\theta\bar{x} + (1 - \theta)\dot{x}) + \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{\theta}{2}\bar{x} + \frac{2 - \theta}{2} \left( \frac{1 - \theta}{2 - \theta}\dot{x} + \frac{1}{2 - \theta}x^2 \right). \end{aligned}$$

Então, fazendo  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ ,  $\hat{x} = \bar{x}$  e  $\tilde{x} = \frac{1 - \theta}{2 - \theta}\dot{x} + \frac{1}{2 - \theta}x^2$ , obtemos  $x = \alpha\hat{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}$ . Temos também que  $\hat{x}$  é vértice e  $\alpha \in (0, 1]$ , pois  $\bar{x}$  é vértice e  $\theta \in (0, 1]$ . Além disso,  $\tilde{x}$  é combinação convexa de dois pontos,  $\dot{x}$  e  $x^2$ , de  $X$ . Logo,  $\tilde{x} \in X$ . ■

**Corolário 5.5.1.** *Se  $X \neq \emptyset$ , então  $X$  possui um vértice.*

O Lema 5.5.1 permite demonstrar o resultado anunciado no início da seção. Uma prova alternativa será vista posteriormente.

**Teorema 5.5.1.** *Se existe solução ótima, pelo menos uma delas ocorre em um vértice.*

*Prova:* Seja  $\bar{x} \in X$  uma solução ótima. Pelo Lema 5.5.1, existem  $\alpha \in (0, 1]$  e  $\hat{x}, \tilde{x} \in X$ , com  $\hat{x}$  vértice, tais que  $\bar{x} = \alpha\hat{x} + (1 - \alpha)\tilde{x}$ . Então,  $c^\top \bar{x} = \alpha c^\top \hat{x} + (1 - \alpha)c^\top \tilde{x}$ . Como  $c^\top \tilde{x} \geq c^\top \bar{x}$  (pois  $\bar{x}$  é ótimo) e  $1 - \alpha \geq 0$ , obtemos que  $c^\top \bar{x} \geq \alpha c^\top \hat{x} + (1 - \alpha)c^\top \bar{x}$ , ou ainda  $\alpha c^\top \bar{x} \geq \alpha c^\top \hat{x}$ . Sendo  $\alpha > 0$ , concluímos que  $c^\top \bar{x} \geq c^\top \hat{x}$ , ou melhor,  $\hat{x}$  também é ótimo. ■

Observe que o conjunto ótimo é composto pelos pontos viáveis que possuem um certo valor  $k^*$ , ótimo, de função objetivo, ou seja, que satisfazem uma restrição linear da forma  $c^\top x = k^*$ . Desse modo, podemos obter o seguinte resultado.

**Proposição 5.5.1.** *O conjunto de soluções ótimas é convexo.*

**Corolário 5.5.2.** *Se existe mais de uma solução ótima, existem infinitas soluções ótimas.*

*Exercício 5.5.1.* Demonstrar a Proposição 5.5.1.

## 5.6 Direções extremas

Na Seção 5.3 introduzimos os conceitos de direção viável e direção de recessão e mostramos que toda combinação linear positiva de duas direções também é um direção. Concentramo-nos agora naquelas direções viáveis e de recessão que não podem ser expressas dessa maneira.

**Definição 5.6.1.** Sejam  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $\bar{x} \in C$ . Uma direção viável para  $C$  em  $\bar{x}$  (resp. de recessão para  $C$ ) é dita *extrema* se não é combinação linear positiva de duas direções viáveis para  $C$  em  $\bar{x}$  (resp. de recessão para  $C$ ) distintas. Em outros termos  $d$  é uma direção viável (resp. de recessão) extrema se  $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ , com  $d^1$  e  $d^2$  direções viáveis (resp. de recessão) e  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ , implica  $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_2 = 0$  ou  $d^1 = \lambda d^2$  para algum  $\lambda > 0$ .

*Exercício 5.6.1* (cont. 5.3.2). Sejam  $\bar{x}$  e  $\hat{x}$  duas soluções básicas viáveis distintas geradas consecutivamente pelo método simplex, onde a razão mínima calculada foi  $\varepsilon = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} > 0$ . Seja  $d = \frac{1}{\varepsilon}(\hat{x} - \bar{x})$ . Mostre que  $d$  é direção viável extrema para  $X$  em  $\bar{x}$ .

Pela proposição 5.3.1, note que, se  $d$  é uma direção viável (resp. de recessão), então  $\lambda d$  também é uma direção viável (resp. de recessão), para todo  $\lambda > 0$ . Note também que o vetor  $\lambda d$  possui a mesma direção e sentido de  $d$ , de modo que  $d$  e  $\lambda d$  podem ser consideradas a mesma direção viável (resp. de recessão). Então podemos considerar um único representante de cada direção, tomando vetores normalizados.

Como estabelece a Proposição 5.3.3, o conjunto de direções de recessão de  $X \neq \emptyset$  junto com o vetor nulo é  $\text{rec}(X) = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0, d \geq 0\}$ . Vamos denotar por  $\text{rec}_1(X) = \{d \in \text{rec}(X) : e^\top d = 1\}$  o conjunto de vetores de  $\text{rec}(X)$  com norma retilinear unitária.

**Proposição 5.6.1.** *Seja  $d \in \mathbb{R}^n$ . Então  $d$  é direção de recessão extrema de  $X$  e  $e^\top d = 1$  se, e somente se,  $d$  é vértice de  $\text{rec}_1(X)$ .*

*Prova:* Suponha que  $d$  é direção de recessão extrema de  $X$  e  $e^\top d = 1$ . Logo,  $d \in \text{rec}_1(X)$  e, se  $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ , com  $d^1, d^2 \in \text{rec}(X) \setminus \{0\}$  e  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , então  $d^1 = \lambda d^2$  para algum  $\lambda > 0$ . Suponha agora que  $d = (1 - \alpha)d^1 + \alpha d^2$ , com  $\alpha \in (0, 1)$  e  $d^1, d^2 \in \text{rec}_1(X)$ . Queremos mostrar que  $d^1 = d^2$  e, portanto,  $d$  é vértice de  $\text{rec}_1(X)$ . Como  $\text{rec}_1(X) \subset \text{rec}(X)$ , temos que  $d^1 = \lambda d^2$ , para algum  $\lambda > 0$ . Por outro lado, como  $e^\top d^1 = e^\top d^2 = 1$ , devemos ter  $\lambda = 1$ , mostrando que  $d^1 = d^2$ .

Seja  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $d$  é vértice de  $\text{rec}_1(X)$ . Portanto, se  $d = \beta d^1 + (1 - \beta)d^2$ , com  $\beta \in (0, 1)$  e  $d^1, d^2 \in \text{rec}_1(X)$ , então  $d^1 = d^2$ . Queremos mostrar que  $d$  é direção extrema de  $X$ . Suponha agora que  $d = \alpha_1 d^1 + \alpha_2 d^2$ , com  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $d^1, d^2 \in \text{rec}(X) \setminus \{0\}$ . Devemos mostrar que  $d^1 = \lambda d^2$ , para algum  $\lambda > 0$ . Temos que  $1 = e^\top d = \alpha_1 e^\top d^1 + \alpha_2 e^\top d^2$ ,  $\alpha_1 e^\top d^1 > 0$  e  $\alpha_2 e^\top d^2 > 0$ . Além disso,

$$d = (\alpha_1 e^\top d^1) \frac{d^1}{e^\top d^1} + (\alpha_2 e^\top d^2) \frac{d^2}{e^\top d^2}.$$

Então  $d$  é combinação convexa própria de dois pontos,  $\frac{d^1}{e^\top d^1}$  e  $\frac{d^2}{e^\top d^2}$ , de  $\text{rec}_1(X)$ . Logo,  $\frac{d^1}{e^\top d^1} = \frac{d^2}{e^\top d^2}$ , ou ainda  $d^1 = \frac{e^\top d^1}{e^\top d^2} d^2$ . ■

**Corolário 5.6.1.** *O conjunto de direções (normalizadas) de recessão extremas de  $X$  é finito.*

*Exercício 5.6.2.* Considere uma partição  $(B, N)$  de  $J$  tal que  $A_B$  é base viável. Mostre que, se existe  $s$  tal que  $A_B^{-1} A_{N(s)} \leq 0$ , então  $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_B^{-1} A_{N(s)} \\ e_s \end{bmatrix}$  é uma direção de recessão extrema de  $X$ .

*Exercício 5.6.3.* Seja  $X^\leq = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ . Caracterize o conjunto de direções de recessão extremas de  $X^\leq$ .

*Exercício 5.6.4.* Sejam  $X^\leq = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  e  $X^\equiv = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Mostre que  $d$  é direção de recessão extrema de  $X^\leq$  se, e somente se,  $(d, -Ad)$  é direção de recessão extrema de  $X^\equiv$ .

## 5.7 Representação por vértices e direções

Nesta seção mostramos que  $X$  pode ser descrito apenas em termos de seus vértices e direções de recessão extremas. Lembramos que  $0 \in \text{rec}(X)$ , e  $\text{rec}(X) = \{0\}$  se  $X$  é um conjunto limitado. Vamos denotar por  $X_v$  e  $X_r$ , respectivamente, os conjuntos (finitos) de vértices e direções (normalizadas) de recessão extremas de  $X$ . Para todo  $d \in X_r$ , temos que  $e^\top d = 1$  e, portanto,  $X_r$  é o conjunto de vértices de  $\text{rec}_1(X)$  pela Proposição 5.6.1.

O seguinte resultado auxiliar é um passo importante para a apresentação do teorema de Minkowski, que estabelece a representação de  $X$  via vértices e direções extremas.

**Lema 5.7.1.** *Se  $x \in X$ , então  $x = \hat{x} + \hat{d}$ , para algum  $\hat{x} \in \text{conv}(X_v)$  e algum  $\hat{d} \in \text{rec}(X)$ .*

*Prova:* A prova será por indução sobre o número de componentes positivas  $p$  de  $x$ . Seja  $p_0$  a menor quantidade de componentes positivas em um ponto de  $X$ . Se  $p = p_0$ , temos que  $x$  é vértice de  $X$ , segundo o Corolário 5.4.2. Então podemos tomar  $\hat{x} = x$  e  $\hat{d} = 0$ , e o resultado vale trivialmente. Suponha agora o enunciado verdadeiro para todo ponto de  $X$  com até  $p - 1$  componentes positivas. Queremos mostrar que o resultado vale quando  $x$  tem  $p > p_0$  componentes positivas. Se  $x$  é vértice, novamente podemos tomar  $\hat{x} = x$  e  $\hat{d} = 0$ . Suponha então que  $x$  não é vértice. Pela Proposição 5.4.1(2), existem  $x^1, x^2 \in X$  e  $\alpha \in (0, 1)$  tais que  $x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2$ ,  $x^1$  tem menos que  $p$  componentes positivas, e  $d = x - x^1 \in \text{rec}(X)$  ou  $x^2$  tem menos que  $p$  componentes positivas. Logo a hipótese de indução se aplica a  $x^1$ , garantindo que  $x^1 = \bar{x} + \bar{d}$ , com  $\bar{x} \in \text{conv}(X_v)$  e  $\bar{d} \in \text{rec}(X)$ . Agora consideramos dois casos.

Se  $d \in \text{rec}(X)$ , como  $x = x^1 + d = \bar{x} + (\bar{d} + d)$ , temos o resultado desejado pois  $\bar{x} \in \text{conv}(X_v)$  e  $\bar{d} + d \in \text{rec}(X)$  pela Proposição 5.3.1. Do contrário,  $x^2$  tem no máximo  $p - 1$  componentes positivas, de modo que a hipótese de indução assegura que  $x^2 = \tilde{x} + \tilde{d}$ , com  $\tilde{x} \in \text{conv}(X_v)$  e  $\tilde{d} \in \text{rec}(X)$ . Portanto,

$$x = (1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2 = (1 - \alpha)(\bar{x} + \bar{d}) + \alpha(\tilde{x} + \tilde{d}).$$

Logo,  $x = \hat{x} + \hat{d}$ , onde

$$\hat{x} = (1 - \alpha)\bar{x} + \alpha\tilde{x}, \quad \hat{d} = (1 - \alpha)\bar{d} + \alpha\tilde{d}.$$

Assim,  $\hat{x}$  é uma combinação convexa de  $\bar{x} \in \text{conv}(X_v)$  e  $\tilde{x} \in \text{conv}(X_v)$ , pertencendo pois a  $\text{conv}(X_v)$ . Adicionalmente, concluímos que  $\hat{d} \in \text{rec}(X)$  pela Proposição 5.3.1. Chegamos assim ao resultado desejado. ■

**Corolário 5.7.1.** *Se  $X$  é limitado, então  $X = \text{conv}(X_v)$ .*

*Prova:* Sendo  $X$  limitado, temos que  $\text{rec}(X) = \{0\}$ . Então  $X \subseteq \text{conv}(X_v)$  pelo Lema 5.7.1. Por outro lado,  $\text{conv}(X_v) \subseteq X$ , porque  $X$  é convexo, contendo pois qualquer combinação convexa de pontos seus. ■

Para obter o teorema da representação, falta ainda mostrar que o cone de recessão é gerado pelas direções de recessão extremas.

**Proposição 5.7.1.**  $\text{rec}(X) = \text{cone}(X_r)$ .

*Prova:* Se  $\text{rec}(X) = \{0\}$ , então  $X_r = \emptyset$ , e o resultado vale trivialmente. Suponha então  $\text{rec}(X) \neq \{0\}$  e, portanto,  $\text{rec}_1(X) \neq \emptyset$ . Queremos mostrar primeiro que  $\text{rec}_1(X) = \text{conv}(X_r)$ .

Lembramos que  $\text{rec}_1(X) = \{d \in \mathbb{R}^n : A'd = b', d \geq 0\}$ , com  $(A', b') = \begin{bmatrix} A & 0 \\ e^\top & 1 \end{bmatrix}$ . Então  $\text{rec}_1(X)$  é um conjunto definido de forma similar a  $X$ , trocando  $(A, b)$  por  $(A', b')$ . Além disso, como  $\text{rec}_1(X) \neq \emptyset$  e  $e^\top d = 1$  não pode ser combinação linear do sistema  $Ad = 0$ , concluímos que  $\text{posto}(A') = m + 1$ , de modo que a hipótese (PC) é satisfeita para esse sistema. Logo, podemos aplicar os resultados aqui obtidos. Em particular, pelo Corolário 5.7.1, concluímos que  $\text{rec}_1(X)$  é o fecho convexo de seus vértices. Assim, pela Proposição 5.6.1, temos que  $\text{rec}_1(X) = \text{conv}(X_r)$ .

Pela Proposição 5.3.1, chegamos a  $\text{cone}(X_r) \subseteq \text{rec}(X)$ . Tome agora  $\bar{d} \in \text{rec}(X)$ . Então,  $\bar{d} = \theta \tilde{d}$ , onde  $\tilde{d} = d/(e^\top d) \in \text{rec}_1(X)$  e  $\theta = e^\top \bar{d} > 0$ . Como  $\text{rec}_1(X) = \text{conv}(X_r) \subseteq \text{cone}(X_r)$ , temos que  $\tilde{d} \in \text{cone}(X_r)$ . Logo,  $\bar{d} = \theta \tilde{d} \in \text{cone}(X_r)$ . ■

Chegamos então ao resultado principal, anunciado no início da seção.

**Teorema 5.7.1.**  $X = \left\{ \sum_{x \in X_v} \alpha_x x + \sum_{d \in X_r} \beta_d d : \sum_{x \in X_v} \alpha_x = 1, \alpha_x \geq 0 \forall x \in X_v, \beta_d \geq 0 \forall d \in X_r \right\}$ .

*Prova:* Seja  $X' = \{\sum_{x \in X_v} \alpha_x x + \sum_{d \in X_r} \beta_d d : \sum_{x \in X_v} \alpha_x = 1, \alpha_x \geq 0 \forall x \in X_v, \beta_d \geq 0 \forall d \in X_r\}$ . Observe que  $X' = \emptyset$  se, e somente se,  $X_v = \emptyset$  ou, equivalentemente,  $X = \emptyset$  (ver Corolário 5.5.1). Suponha então  $X' \neq \emptyset$  e, por conseguinte,  $X \neq \emptyset$ . Pelo Lema 5.7.1 e Proposição 5.7.1, concluímos que  $X \subseteq X'$ . Por outro lado,  $X' \subseteq X$  decorre trivialmente do fato de que  $X$  é convexo e da definição de direção de recessão. ■

*Exercício 5.7.1.* Seja  $X^\leq = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ . Mostre que

$$X^\leq = \left\{ \sum_{x \in X_v^\leq} \alpha_x x + \sum_{d \in X_r^\leq} \beta_d d : \sum_{x \in X_v^\leq} \alpha_x = 1, \alpha_x \geq 0 \forall x \in X_v^\leq, \beta_d \geq 0 \forall d \in X_r^\leq \right\}$$

onde  $X_v^\leq$  e  $X_r^\leq$  são os conjuntos de vértices e direções extremas de  $X^\leq$ , respectivamente.

## 5.8 Direções de descida

Tal qual outros métodos iterativos de otimização, o simplex baseia sua convergência no fato de que a função objetivo decresce (no caso de minimização) ao determinar o próximo ponto viável. Em outros termos, a direção viável por onde ele caminha é de descida para a função objetivo.

**Definição 5.8.1.** Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Um vetor  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \neq 0$ , é uma *direção de descida para  $f$  em  $\bar{x}$*  se existe  $\alpha_0 > 0$  tal que  $f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x})$ , para todo  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ .

No caso de funções lineares, as direções de descida são trivialmente caracterizadas.

**Proposição 5.8.1.** Um vetor  $d$  é direção de descida para  $f(x) = c^\top x$  em  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  se, e somente, se  $c^\top d < 0$ .

*Prova:* Primeiro, suponha que  $d$  é direção de descida para  $f$  em  $\bar{x}$ . Então, existe  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $c^\top(\bar{x} + \alpha d) < c^\top \bar{x}$ , para todo  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ . Como  $\alpha > 0$ , concluímos que  $c^\top d < 0$ . Suponha agora que  $c^\top d < 0$ . Tome  $\alpha_0 > 0$  qualquer e  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ . Temos que  $c^\top(\bar{x} + \alpha d) = c^\top \bar{x} + \alpha c^\top d < c^\top \bar{x}$ . ■

Pela proposição acima, note que, para uma função linear  $f(x) = c^\top x$ , o conceito de direção de descida pode ser posto apenas em referência à função, independente do ponto.

*Exercício 5.8.1.* Considere uma partição  $(B, N)$  de  $J$  tal que  $A_B$  é base viável. Seja  $k = N(s)$  o índice da  $s$ -ésima variável não básica. Mostre que, se  $\bar{c}_k < 0$ , então  $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_k \\ e_s \end{bmatrix}$  é uma direção de descida para  $c^\top x$ .

## 5.9 Ilimitação

Estudamos nesta seção o caso em que o PPL é ilimitado. Por definição, temos que a função objetivo decresce infinitamente (no caso de minimização) ao longo de uma sequência de pontos. Mostramos que essa sequência pode ser escolhida sobre uma direção de recessão extrema.

**Teorema 5.9.1.** O PPL é ilimitado se, e somente se, existe uma direção de recessão extrema para  $X$  que é de descida para  $c^\top x$ .

*Prova:* Primeiro, suponha que existe uma direção de recessão extrema  $d \in X_r$  tal que  $c^\top d < 0$ . Então  $X \neq \emptyset$  e, para quaisquer  $x \in X$  e  $\alpha > 0$ ,  $x + \alpha d \in X$ . Além disso, quando  $\alpha \rightarrow +\infty$ , temos que  $f(x + \alpha d) = c^\top x + \alpha c^\top d \rightarrow -\infty$ . Logo o PPL é ilimitado.

Admita agora que toda direção de recessão extrema  $d \in X_r$  satisfaz  $c^\top d \geq 0$ . Se  $X = \emptyset$ , o resultado é trivial. Seja então  $\bar{x} \in X$ . Pelo Teorema 5.7.1, temos que  $\bar{x} = \sum_{x \in X_v} \alpha_x x + \sum_{d \in X_r} \beta_d d$ , onde  $\sum_{x \in X_v} \alpha_x = 1$ ,  $\alpha_x \geq 0$  para todo  $x \in X_v$  e  $\beta_d \geq 0$  para todo  $d \in X_r$ . Então,

$$\begin{aligned} c^\top \bar{x} &= \sum_{x \in X_v} \alpha_x c^\top x + \sum_{d \in X_r} \beta_d c^\top d \\ &\geq \sum_{x \in X_v} \alpha_x c^\top x \\ &\geq \min\{c^\top x : x \in X_v\} \sum_{x \in X_v} \alpha_x = \min\{c^\top x : x \in X_v\}. \end{aligned}$$

Logo, o PPL não pode ser ilimitado. ■

Vale mencionar que demonstração semelhante à apresentada acima pode ser uma alternativa à prova do Teorema 5.5.1, que estabelece a existência de um vértice ótimo. De fato, se o PPL tem solução ótima, ele não é ilimitado e, por conseguinte,  $c^\top d \geq 0$ , para todo  $d \in X_r$ . Similarmente à segunda parte da demonstração do Teorema 5.9.1, concluímos que o valor da função objetivo em qualquer ponto viável é pelo menos  $\min\{c^\top x : x \in X_v\}$ , mostrando que um ótimo ocorre em um vértice.

Como o cone de recessão é gerado pelas direções de recessão extremas, isto é,  $\text{rec}(X) = \text{cone}(X_r)$ , existe uma direção de recessão de descida se, e somente se, existe uma direção de recessão extrema de descida. Por conseguinte, o Teorema 5.9.1 caracteriza o caso ilimitado por meio da consistência de um sistema linear de igualdades e desigualdades.

**Corolário 5.9.1.** *O PPL é ilimitado se, e somente se, existe  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ad = 0$ ,  $d \geq 0$  e  $c^\top d < 0$*

Uma caracterização alternativa do caso ilimitado, em termos da inconsistência de um sistema de desigualdades, é apresentada a seguir.

**Teorema 5.9.2.** *O PPL é ilimitado se, e somente se, não existe  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que  $u^\top A \leq c^\top$ .*

*Prova:* Suponha que existe  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que  $u^\top A \leq c^\top$ . Seja  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ad = 0$ ,  $d \geq 0$ . Então,  $0 = u^\top Ad \leq c^\top d$ . Logo, não existe  $d \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo simultaneamente  $Ad = 0$ ,  $d \geq 0$  e  $c^\top d < 0$ . Pelo Corolário 5.9.1, o PPL não é ilimitado.

Admita agora que o PPL não é ilimitado. Pelo Corolário 5.9.1, para todo  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ad = 0$  e  $d \geq 0$ , temos  $c^\top d \geq 0$ . Então, o problema  $\min\{c^\top d : Ad = 0, d \geq 0\}$  tem solução ótima (de valor zero). Pelos Teoremas 5.5.1 e 5.4.1, deduzimos que existe base  $A_B$  de  $A$  tal que  $c^\top - c_B^\top A_B^{-1} A \geq 0$ . Defina  $u^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ . Então,  $c^\top - u^\top A \geq 0$ . Em outros termos, existe  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que  $u^\top A \leq c^\top$ . ■

## 5.10 Exercícios

5.1. Desenhe em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\text{conv}(S)$  e  $\text{cone}(S)$  para:

1.  $S = \{(1, 0), (0, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$
2.  $S = \{(1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$
3.  $S = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0), (-1, 0), (0, -1)\}$

5.2. Mostre que todo vértice ótimo para o problema abaixo tem  $x_1 = 0$ , independente dos valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  (sug.: analise as bases). Também é verdade que toda solução ótima tem  $x_1 = 0$ ?

$$\begin{aligned} \max \quad & ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 - x_3 \leq b \\ & x_1 - x_2 \leq c \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

5.3. Considere o PPL abaixo.

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 \geq 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Mostre que:

1.  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$  é vértice do conjunto viável
2. o PPL é ilimitado

5.4. Considere o PPL abaixo, onde  $a$  e  $b$  são constantes. Considere a base definida por  $x_1, x_2$  e a folga da última restrição.

$$\begin{array}{ll} \max & 2bx_1 + (b-a)x_2 \\ \text{s.a:} & x_2 \geq b+1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq b-4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 2b+5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Para que valores de  $a$  e  $b$ , essa base define um vértice do conjunto viável?
- Para que valores de  $a$  e  $b$ , tal vértice é uma solução ótima?

5.5. Considere o PPL abaixo, onde  $a$  e  $b$  são constantes.

$$\begin{array}{ll} \min & (a-1)x_1 + (b-2a)x_2 \\ \text{s.a:} & -x_1 + 4x_2 \geq a+5 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq a+2 \\ & x_2 \leq a+1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Para que valores de  $a$  e  $b$ ,  $(a, a+1)$  é um vértice do conjunto viável?
- Para que valores de  $a$  e  $b$ , tal vértice é a única solução ótima?

5.6. Considere um PPL cujo conjunto viável é  $X = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\text{posto}(A) = m$ . Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.

- Se para toda base  $A_B$  de  $A$  não ocorre  $A_B^{-1}b \geq 0$ , então o PPL é inviável.
- O PPL tem solução ótima se  $X \neq \emptyset$  e cada coluna de  $A_B^{-1}A$  é não-negativa, para toda base viável  $A_B$  de  $A$ .
- Se há três pontos ótimos não colineares, então também é ótimo todo ponto do triângulo por eles definido.
- O número de vértices de  $X$  é menor ou igual ao de bases viáveis de  $A$ .

5.7. Seja  $X = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 7x_2 - x_3 = 9, -x_1 - 14x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_5 = 6, x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5\}$ . Mostre que:

- $d = (15, 1, 8, -3, 32)^\top$  é direção viável para  $X$  em  $\bar{x} = (9, 0, 0, 10, 3)^\top$
- $d' = (1, 1/7, 0, 3, 0)^\top$  é direção de recessão para  $X$

5.8. Considere o PPL  $\min -x_1 + 15x_2$  s.a:  $x \in X$ , onde  $X$  é dado no Exercício 5.7. Faça o que se pede:

- Encontre o quadro canônico relativo à base  $A_B$ , para  $B = \{1, 3, 5\}$
- Determine a direção viável  $d$  definida pela entrada de  $x_4$  na base
- Essa direção é de subida ou descida para a função objetivo?
- Calcule o vértice  $x'$ , obtido com a entrada de  $x_4$  na base, usando a fórmula  $x' = \bar{x} + \epsilon d$ , onde  $\bar{x}$  é o vértice definido por  $A_B$

5.9. Seja  $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3, x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5\}$ . Mostre que  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)$  é vértice de  $X$ . Quais são as bases que definem esse vértice?

5.10. Considere o quadro simplex abaixo, que apresenta a forma canônica relativa a uma base viável de um PPL, cuja função objetivo (de minimização) é  $Z(x) = ax_1 + bx_2$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	0	3	1	-1	-1	4
$x_1$	1	-1	0	1	-2	1
	0	2	0	0	?	

1. Determine uma direção viável  $d$  em  $\bar{x} = (1, 0, 4, 0, 0)$  ao longo da qual a função objetivo não muda.
  2. Qual o valor da função objetivo em  $\bar{x}$ ? (Sug.: Determine  $a$  e  $b$  usando  $d$  e outra direção viável  $d'$  em  $\bar{x}$ )
  3. Determine uma direção de recessão.
  4. O problema é inviável, ilimitado ou tem solução ótima? Justifique.
- 5.11. Mostre que  $\text{rec}(X)$  tem um único vértice.
- 5.12. Suponha que, em uma certa iteração do SIMPLEX, uma variável  $x_s$ , de folga, seja a  $i$ -ésima variável básica. Mostre que, se  $\bar{a}_{ij} \leq 0$ , para todo  $j \neq s$ , então a restrição associada a  $x_s$  pode ser excluída sem alterar o conjunto viável.
- 5.13. Mostre que, para todo  $c \in \mathbb{R}^n$ , o problema  $\min c^\top x$  s.a:  $Ax = 0, x \geq 0$  é ilimitado ou tem solução ótima nula.
- 5.14. Considere o PPL  $\min c^\top x$  s.a  $Ax \geq c, x \geq 0$ , onde  $A$  é simétrica e invertível. Mostre que  $A^{-1}c$  não é vértice ou é solução ótima.
- 5.15. Seja  $A_B$  uma base ótima não degenerada para o problema  $\min c^\top x$  s.a  $Ax = b, x \geq 0$ . Defina  $\bar{A} = A_B^{-1}A$ ,  $\bar{b} = A_B^{-1}b$ ,  $\bar{c}^\top = c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A$  e  $u^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ . Em termos de  $\bar{A}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $u$  e  $A_B^{-1}$ , responda a cada uma das seguintes questões. Para que  $A_B$  continue base ótima:
1. Que valores podem ser somados a  $b_i$ ?
  2. Que valores podem ser somados a  $c_j$ ? (Sug.: Separe nos casos  $x_j$  básica ou não básica.)
  3. Que valores podem ser somados a  $a_{ij}$ ? (Sug.: Separe nos casos  $x_j$  básica ou não básica.)
- 5.16. Considere os problemas

$$(P) \min c^t x \text{ s.a } Ax = b, x \geq 0$$

$$(P(M)) \min c^t x + M e^t x^a \text{ s.a } Ax + x^a = b, x \geq 0, x^a \geq 0.$$

onde  $M$  é um parâmetro e  $e^t = (1, 1, \dots, 1)$ . Observe que  $P(M)$  é similar ao problema artificial, da primeira fase do simplex, porém combinando a função objetivo original com a função objetivo artificial, esta última ponderada por  $M$ . Tomando  $M$  um valor “suficientemente” grande, priorizamos a obtenção da viabilidade, como na primeira fase, mas também procuramos simultaneamente uma solução viável de melhor valor para o problema  $(P)$ , como na segunda fase.

Sejam  $\hat{A} = [A \ I]$  e  $\hat{c}^t = [c^t \ M e^t]$  a matriz de restrições e vetor de coeficientes da função objetivo de  $P(M)$ . Dada uma base  $\hat{A}_B$  de  $\hat{A}$ , defina  $\bar{c}^t = \hat{c}^t - \hat{c}_B^t \hat{A}_B^{-1} \hat{A}$  e  $\bar{A} = \hat{A}_B^{-1} \hat{A}$ . Defina também  $\bar{c}_k := \min \bar{c}_j$ .

1. Suponha que existe  $M_0$  tal que  $P(M)$  tem uma solução ótima  $(\bar{x}, \bar{x}^a)$ , para todo  $M \geq M_0$ . Mostre que  $\bar{x}$  é tem solução ótima de  $(P)$ , se  $\bar{x}^a = 0$ , e  $(P)$  é inviável, caso contrário.
  2. Suponha que existe  $M_0$  tal que  $P(M)$  é ilimitado, para todo  $M \geq M_0$ . Neste caso, existe uma base viável  $\hat{A}_B$  de  $\hat{A}$  tal que  $\bar{c}_k < 0$ , para todo  $M \geq M_0$ , e  $\bar{A}_k \leq 0$ . Seja  $(\bar{x}, \bar{x}^a)$  a solução definida por  $\hat{A}_B$ . Mostre que  $(P)$  é ilimitado, se  $\bar{x}^a = 0$ , e  $(P)$  é inviável, caso contrário. (Sug. No primeiro caso, mostre que a direção de recessão e descida de  $P(M)$ , associada a  $x_k$ , fornece uma direção de recessão e descida de  $P$ . No segundo, some as linhas do quadro referentes às variáveis básicas artificiais.)
- 5.17. Considere novamente o Exercício 5.16(2) e mostre que as seguintes conclusões também são possíveis:
1. O problema  $(P)$  é inviável se  $\bar{x}^a \neq 0$  e  $\bar{a}_{ik} \leq 0$  para todo  $i$  tal que a  $i$ -ésima variável básica é artificial (note que não é preciso ter  $\bar{A}_k \leq 0$  como no Exercício 5.16(2)).
  2. O problema  $(P)$  pode ser ilimitado mesmo se  $\bar{x}^a \neq 0$  e existe variável não básica  $x_j$ ,  $j \neq k$ , tal que  $\bar{c}_j < 0$  e  $\bar{A}_j \leq 0$  (note que, se tal ocorre com  $j = k$ , podemos concluir que  $(P)$  é inviável, conforme Exercício 5.16(2)).



## Capítulo 6

# Degeneração

Degeneração em programação linear e suas implicações no método simplex são estudadas neste capítulo. Procuramos entender geometricamente o que significa uma solução básica degenerada e como essa situação pode levar o método a não convergir. Apresentamos então modificações a serem incorporadas ao algoritmo, de forma a garantir que ele funcione corretamente, mesmo quando aplicado a problemas degenerados.

### 6.1 Ciclagem

Considere a aplicação do método simplex ao PPL abaixo, usando a regra de Dantzig para escolha da variável a entrar na base e decidindo empates na razão mínima em favor da primeira variável básica candidata a sair da base.

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\ \text{s.a:} \quad & \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Adicionando as variáveis de folgas, chegamos à forma padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 \\ \text{s.a:} \quad & \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\ & x_3 + x_7 = 1 \\ & x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, 7\} \end{aligned}$$

Aplicando o método simplex, obtemos a seguinte sequência de quadros, onde estão destacados os pivôs em negrito.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	<b>1/4</b>	-8	-1	9	1	0	0	0
$x_6$	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	-32	-4	36	4	0	0	0
$x_6$	0	<b>4</b>	3/2	-15	-2	1	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	-4	-7/2	33	3	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	0	<b>8</b>	-84	-12	8	0	0
$x_2$	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	0	-2	18	1	1	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_3$	1/8	0	1	-21/2	-3/2	1	0	0
$x_2$	0	1	0	<b>1/5</b>	1/9	-1/8	0	0
$x_7$	-1/8	0	0	21/2	3/2	-1	1	1
	1/4	0	0	-3	-2	3	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_3$	-5/2	56	1	0	<b>2</b>	-6	0	0
$x_4$	-1/4	16/3	0	1	1/3	-2/3	0	0
$x_7$	5/2	-56	0	0	-2	6	1	1
	-1/2	16	0	0	-1	1	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	-5/4	28	1/2	0	1	-3	0	0
$x_4$	1/6	-4	-1/6	1	0	<b>1/3</b>	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	-7/4	44	1/2	0	0	-2	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	1/4	-8	-1	9	1	0	0	0
$x_6$	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0

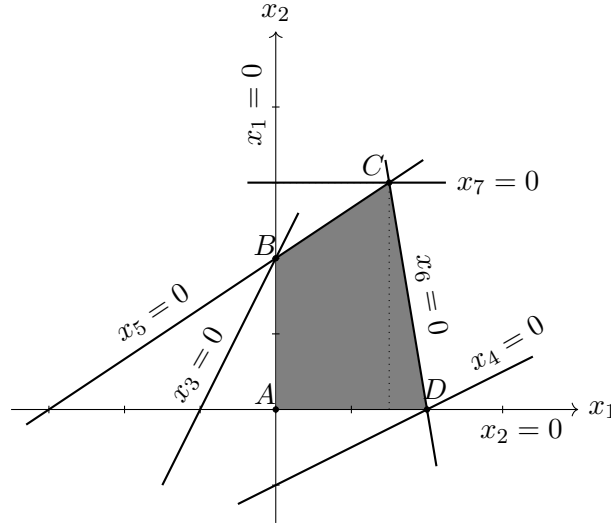
Observe que os sete quadros determinam a mesma solução básica, a saber  $x_1 = \dots = x_6 = 0$  e  $x_7 = 1$ , embora gerada por seis bases diferentes. Mais importante, a base do sétimo quadro é a mesma do primeiro quadro, mostrando que o algoritmo iria entrar em *loop*. Esse fenômeno é conhecido como *ciclagem*. E, como se infere do Teorema 4.5.1, isso só pode ocorrer na presença de degeneração. Relembre que uma solução básica é dita degenerada quando o valor de alguma variável básica é nulo (Definição 3.4.1).

Já sabíamos da demonstração da equivalência entre vértice e solução básica viável que um vértice degenerado pode ser definido por mais de uma base viável. É exatamente o que ocorre no exemplo acima: temos uma solução básica degenerada definida por diferentes bases. Com isso, o algoritmo passa de uma base a outra, sem mudar de ponto. Observe que a razão mínima em cada iteração é zero, mostrando que a variável não básica que entra na base vai receber valor zero, não mudando assim a solução. Com isso, embora o algoritmo escolha uma direção de descida para caminhar, um passo “nulo” precisa ser dado, de modo a não sair da região viável.

Vamos ilustrar essa situação geometricamente com o seguinte exemplo em  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.a:} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& 6x_1 + x_2 \leq 12 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Considere  $x_3, x_4, x_5, x_6$  e  $x_7$  as variáveis de folgas das restrições na ordem apresentada acima. A região viável do problema está descrita no gráfico a seguir:



Observe que o conjunto viável possui quatro vértices,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , correspondendo os três últimos a soluções básicas viáveis degeneradas. Tomemos, por exemplo, o vértice  $B$ , ou seja, o ponto  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 2, 0, 6, 0, 10, 1)$ . As variáveis positivas evidentemente são básicas. Além disso, uma das três variáveis nulas também será básica, uma vez que o tamanho da base é 5. Dessa forma, a esse vértice estão associadas as bases  $B_1 = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B_2 = \{2, 3, 4, 6, 7\}$  e  $B_3 = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ . Similarmente, os vértices  $C$  e  $D$  são definidos por três bases cada um. Quais são as bases que definem cada um deles?

Analisando de outra forma, em  $\mathbb{R}^2$  cada vértice é definido pela interseção de (pelo menos) duas restrições ativas (incluindo as restrições de não negatividade). Então, considerando que há um total de  $m + 2$  restrições (incluindo  $x_1 \geq 0$  e  $x_2 \geq 0$ ), quando há mais de duas restrições satisfeitas na igualdade em um vértice, haverá menos que  $m$  restrições inativas e, portanto, menos que  $m$  variáveis positivas (as folgas dessas restrições). Sendo assim, sob a hipótese  $(PC)$ , esse vértice corresponde a uma solução básica degenerada. Reciprocamente, supondo que  $m$  é a ordem de uma base, em uma solução básica degenerada há mais que duas variáveis básicas nulas, mostrando que o vértice correspondente é sobredeterminado.

Generalizando, em  $\mathbb{R}^n$ , sob a hipótese  $(PC)$ , há mais de  $n$  restrições ativas em um vértice, isto é, ele é sobredeterminado, se e somente se tal vértice corresponde a uma solução básica viável degenerada, estando associado, geralmente, a mais de uma base.

Na verdade, em  $\mathbb{R}^2$ , sobredeterminação de um vértice significa geralmente a existência de restrições que poderiam ser eliminadas sem a modificação do conjunto viável. No problema acima, por exemplo, poderíamos eliminar a restrição  $-2x_1 + x_2 \leq 2$ , sem prejuízo, o que tornaria o vértice  $B$  não degenerado. Similarmente, eliminando as restrições  $x_2 \leq 3$  e  $x_1 - 2x_2 \leq 2$ , respectivamente, tornaríamos os vértices  $C$  e  $D$  não degenerados, além de manter o conjunto viável idêntico ao original. Entretanto, mesmo em  $\mathbb{R}^2$  e na ausência de restrições cuja remoção não modifica o conjunto viável, a degeneração pode aparecer devido à forma escolhida para representar tal conjunto. Por exemplo, considere o problema acima sem as restrições  $-2x_1 + x_2 \leq 2$ ,  $x_2 \leq 3$  e  $x_1 - 2x_2 \leq 2$ , porém adicionado de  $6x_1 + x_2 \geq 12$ . O conjunto viável passa a ser o segmento entre  $C$  e  $D$ , e esses vértices correspondem a soluções básicas degeneradas, pois há três restrições ativas em cada um deles, duas delas sendo  $6x_1 + x_2 \leq 12$  e  $6x_1 + x_2 \geq 12$ . Por outro lado, caso essas duas restrições fossem trocadas por  $6x_1 + x_2 = 12$ , o que manteria o mesmo conjunto viável, os vértices  $C$  e  $D$  passariam a corresponder a soluções básicas não degeneradas.

Vale destacar ainda que, em  $\mathbb{R}^n$ , já para  $n = 3$ , degeneração não implica haver restrições que poderiam ser eliminadas ou agrupadas, sem modificação do conjunto viável, como no caso acima. Por exemplo, considere que a região viável seja uma pirâmide poliedral com base quadrada. O topo da pirâmide é um vértice por onde passam 4 restrições ativas. Embora três delas sejam suficientes para determinar o vértice, implicando que o mesmo é degenerado, a eliminação de

qualquer uma modificaria o conjunto viável. Observe ainda que, aumentando o número de faces dessa pirâmide, cresceria o número de bases viáveis definindo o vértice-topo. Por exemplo, se a pirâmide tiver  $f \geq 4$  faces, o número de bases que definem o vértice é  $\binom{f}{3}$ . Como  $f$  pode ser arbitrariamente grande (fazendo a pirâmide “tender” a um cone), o vértice pode tornar-se altamente degenerado.

Pelo visto acima, a ciclagem é viabilizada pela degeneração, que significa sobre-determinação de um vértice. Porém, não se pode evitar a ciclagem simplesmente eliminando restrições que tornariam o problema não degenerado.

## 6.2 Método Simplex Lexicográfico

Sejam  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$  duas bases consecutivas geradas pelo algoritmo simplex, com  $\hat{B} = (B \setminus B(r)) \cup \{k\}$ , ou seja, com a entrada da variável  $x_k$  e saída da variável  $x_{B(r)}$ . Sejam  $x$  e  $\hat{x}$  os vértices definidos por  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$ , respectivamente. Como vimos

$$Z(\hat{x}) = Z(x) + \bar{c}_k \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}},$$

de modo que sempre temos

$$Z(\hat{x}) \leq Z(x)$$

e só pode ocorrer  $Z(\hat{x}) = Z(x)$  quando  $\bar{b}_r = 0$ , significando que  $x$  é degenerado e  $\hat{x} = x$ . Sendo assim, nem sempre é possível garantir um decréscimo estrito no valor da função objetivo, argumento que é usado na prova de convergência do algoritmo (Teorema 4.5.1).

A estratégia então é definir uma função que dependa da base, e não apenas do vértice que ela gera, e que seja monotonicamente decrescente ao longo do algoritmo, o que garantiria a não repetição de bases e levaria à parada do algoritmo, já que o conjunto de bases é finito. Como veremos em detalhes mais adiante, vamos definir uma função vetorial  $\mathcal{Z}$  que leva cada base  $A_B$  em um vetor de  $\mathbb{R}^{m+1}$ , cuja primeira componente é exatamente o valor  $Z(x)$ , onde  $x$  é o vértice definido por  $A_B$ . O valor de  $\mathcal{Z}$  definido por duas bases consecutivas será comparado agora lexicograficamente.

### 6.2.1 Comparação lexicográfica

Um vetor  $y \in \mathbb{R}^p$  é dito *lexicograficamente positivo*, a ser denotado por  $y \succ 0$ , se  $y \neq 0$  e a primeira coordenada não nula de  $y$  é positiva. Similarmente, quando  $-y \succ 0$ , dizemos que o vetor  $y$  é *lexicograficamente negativo*, a ser denotado por  $y \prec 0$ . Por exemplo,  $(0, 1, -3, 0) \succ 0$  e  $(0, 0, -2, 50) \prec 0$ . Em extensão, dizemos que  $y \in \mathbb{R}^p$  é *lexicograficamente maior* que  $z \in \mathbb{R}^p$ , a ser denotado por  $y \succ z$ , quando  $y - z \succ 0$ . Nesse caso, equivalentemente,  $z$  é *lexicograficamente menor* que  $y$ , que se escreve  $z \prec y$ . Definimos ainda as relações  $\preceq$  (lexicograficamente menor ou igual) e  $\succeq$  (lexicograficamente maior ou igual).

Como consequência, podemos adicionalmente definir o *mínimo lexicográfico* ( $\prec$ -min) e o *máximo lexicográfico* ( $\prec$ -max) de um conjunto não vazio  $C \subset \mathbb{R}^p$ , significando um elemento  $y \in C$  tal que  $y \preceq z$  para todo  $z \in C$  e  $y \succeq z$  para todo  $z \in C$ , respectivamente. Por exemplo, em  $C = \{(1, 1, -3, 0), (1, 0, -2, 50), (1, 0, -2, 40), (1, 0, -1, -80)\}$ ,  $y = (1, 0, -2, 40)$  é lexicograficamente mínimo (ou o mínimo lexicográfico). Note que podemos determinar o mínimo lexicográfico, percorrendo, da esquerda para a direita, as coordenadas de cada ponto: a primeira coordenada diferente, identifica a relação de ordem lexicográfica entre um vetor e outro (tal como se ordenam palavras em um dicionário).

### 6.2.2 Razão lexicograficamente mínima

Considere uma base viável não ótima  $A_B$ . Definida uma variável  $x_k$  a entrar na base, quando calculamos a razão mínima

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}, \quad (6.1)$$

identificamos a variável a sair da base, ou melhor, qual será a nova base. Quando existe mais de um índice  $r \in \{1, 2, \dots, m\}$  que fornece a razão mínima, em princípio podemos escolher qualquer um deles para determinar uma nova base viável. Entretanto, para garantir que não haverá volta a uma base já enumerada, evitando a ciclagem, essa escolha será definida precisamente. Em outros termos, vamos definir um critério de desempate.

Para isso, sejam  $D$  uma matriz de ordem  $m$  invertível e  $R = [b \ D]$ . Defina também  $\bar{D} = A_B^{-1}D$  e  $\bar{R} = A_B^{-1}R = [\bar{b} \ \bar{D}]$ . Sejam  $\bar{D}_i$  e  $\bar{R}_i$  a  $i$ -ésima linha de  $\bar{D}$  e  $\bar{R}$ , respectivamente. Então,  $\bar{R}_i = [\bar{b}_i \ \bar{D}_i]$ . Agora a razão mínima será calculada por:

$$\frac{\bar{R}_r}{\bar{a}_{rk}} = \prec \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{R}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}. \quad (6.2)$$

Mostramos a seguir que a razão mínima determina agora uma única variável candidata a sair da base, resolvendo possíveis empates que poderiam existir no cálculo anterior.

**Proposição 6.2.1.** *Em (6.2), existe um único índice  $r \in \{1, 2, \dots, m\}$  que fornece o mínimo lexicográfico.*

*Prova:* Suponha que existam  $r, r' \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $r \neq r'$ , tais que  $\frac{\bar{R}_r}{\bar{a}_{rk}} = \frac{\bar{R}_{r'}}{\bar{a}_{r'k}}$ . Em particular,  $\frac{\bar{D}_r}{\bar{a}_{rk}} = \frac{\bar{D}_{r'}}{\bar{a}_{r'k}}$ , ou ainda  $\bar{D}_r = \frac{\bar{a}_{rk}}{\bar{a}_{r'k}} \bar{D}_{r'}$ . Logo, as linhas  $r$  e  $r'$  de  $\bar{D}$  são proporcionais, implicando que  $\bar{D}$  não é invertível. Isto é um absurdo, pois  $\bar{D} = A_B^{-1}D$  é o produto de duas matrizes invertíveis, sendo, pois, invertível. Logo, o mínimo lexicográfico é único. ■

Observe que a primeira componente do vetor  $\frac{\bar{R}_i}{\bar{a}_{ik}}$  é exatamente  $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$ , para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Nesse sentido, a primeira componente considerada no cálculo do mínimo lexicográfico em (6.2) é exatamente a razão  $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$ . Em outros termos, a regra (6.2) de escolha da variável a sair da base se alinha com (6.1), apenas decidindo, em caso de empate, por uma variável específica, conforme estabelece a Proposição 6.2.1.

### 6.2.3 O algoritmo

Como observado na subseção anterior, o mínimo lexicográfico de um conjunto de vetores pode ser determinado, percorrendo iterativamente as componentes de cada vetor, da primeira à última, mantendo como candidatos a mínimo aqueles vetores cuja componente em foco possuem o menor valor. Dessa maneira, a variável a sair da base pode ser determinada pelo seguinte

algoritmo.

---

**Algoritmo 2:** RAZÃO MÍNIMA LEXICOGRÁFICA

---

**Entrada:**  $\bar{b}, A_B^{-1}, D$   
**Saída:**  $r$

0 **início**  
1      $\bar{D} = [\bar{d}_{ij}] \leftarrow A_B^{-1} D$   
2      $t \leftarrow 0$   
3      $I_0 \leftarrow \arg \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$   
4     **enquanto**  $|I_t| > 1$  **faça**  
5          $t \leftarrow t + 1$   
6          $I_t \leftarrow \arg \min \left\{ \frac{\bar{d}_{it}}{\bar{a}_{ik}} : i \in I_{t-1} \right\}$   
7     **fim**  
8      $\{r\} \leftarrow I_t$   
9 **fim**

---

O Algoritmo 2 substitui o passo 6 do Algoritmo 1, gerando o *método simplex lexicográfico*. A Proposição 6.2.1 assegura que o laço do Algoritmo 2 termina em no máximo  $m$  iterações.

É conveniente escolher  $D$  como uma base de  $A$ , de modo que  $\bar{D} = A_B^{-1} D$  está presente no quadro simplex. Dessa forma, é possível calcular a razão lexicográfica mínima (6.2), usando valores já disponíveis no quadro (não é necessário o passo 1 do Algoritmo 2). Por exemplo, podemos tomar  $D$  como a primeira base viável (usualmente a identidade). Em geral, se  $j_1, j_2, \dots, j_m$  são índices de colunas linearmente independentes de  $A$ , a variável a sair da base, pode ser determinada pelo seguinte processo iterativo:

---

**Algoritmo 3:** RAZÃO MÍNIMA LEXICOGRÁFICA

---

**Entrada:**  $\bar{b}, \bar{A}_{\{j_1, \dots, j_m\}}$   
**Saída:**  $r$

0 **início**  
1      $t \leftarrow 0$   
2      $I_0 \leftarrow \arg \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$   
3     **enquanto**  $|I_t| > 1$  **faça**  
4          $t \leftarrow t + 1$   
5          $I_t \leftarrow \arg \min \left\{ \frac{\bar{a}_{ij_t}}{\bar{a}_{ik}} : i \in I_{t-1} \right\}$   
6     **fim**  
7      $\{r\} \leftarrow I_t$   
8 **fim**

---

Vale destacar que a matriz  $D$  é fixada a priori. No caso de ser uma base de  $A$ , isso significa que os índices  $j_1, \dots, j_m$  devem ser determinados de início, e as colunas consideradas sempre nessa ordem para o cálculo das razões. Na verdade, como vai ficar evidente com a demonstração de correteza desse processo, a ser apresentada da subseção seguinte, a ordem dessas colunas (ou em geral a matriz  $D$ ) estabelece uma ordenação das bases de  $A$ , segundo a função  $\mathcal{Z}$ .

### 6.3 Corretude do Método Simplex Lexicográfico

Seja  $D$  uma matriz de ordem  $m$  invertível. Para cada base de  $A$ , com colunas indexadas por  $B \subset J$ , definimos

$$\mathcal{Z}(B) = (c_B^\top A_B^{-1} b, c_B^\top A_B^{-1} D) = c_B^\top A_B^{-1} (b, D).$$

Queremos mostrar que, se  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$  são duas bases consecutivas geradas pelo método simplex lexicográfico, então  $\mathcal{Z}(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}(B)$ , implicando que bases não serão repetidas ao longo do algoritmo.

Primeiro, note que  $\mathcal{Z}(B)$  é um vetor de  $\mathbb{R}^{m+1}$ , cuja primeira componente é exatamente o valor da função objetivo no vértice definido por  $A_B$ . Assim, se  $x$  e  $\hat{x}$  são as soluções básicas definidas pelas bases  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$ , respectivamente, e ocorre  $\mathcal{Z}(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}(B)$ , temos que  $Z(\hat{x}) < Z(x)$ , ou  $Z(\hat{x}) = Z(x)$  e  $\hat{x} = x$ . Dessa forma, o critério  $\mathcal{Z}(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}(B)$  está de acordo com a estratégia do simplex de gerar uma sequência de bases que não piores o valor da função objetivo nos vértices a elas associados.

Por facilidade, vamos usar um quadro simplex estendido para apresentarmos as demonstrações. Considere o PPL na forma padrão

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x = Z \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que a hipótese (PC) seja satisfeita. Seja  $(B, N)$  uma partição de  $J$  tal que  $A_B$  é uma base viável. Considere o quadro simplex acrescido da matriz  $D$ , usada pelo método lexicográfico, e as operações elementares realizadas sobre o problema original para obter a forma canônica associada à  $A_B$ .

Problema original		Forma canônica relativa a $A_B$
$x$		$x$
$A$		$A_B^{-1}A$
$b$		$A_B^{-1}b$
$D$		$A_B^{-1}D$
$c^\top$		$c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A$
$0$		$-c_B^\top A_B^{-1}b$
$0$		$-c_B^\top A_B^{-1}D$

Observe que juntas as duas últimas colunas do quadro armazenam a matriz  $\bar{R} = [\bar{b} \ \bar{D}] = [A_B^{-1}b \ A_B^{-1}D]$  e o vetor  $-\mathcal{Z}(B) = (-c_B^\top A_B^{-1}b, -c_B^\top A_B^{-1}D)$ . Ou seja,  $\bar{R}$  e  $\mathcal{Z}(B)$  podem ser calculados, realizando as mesmas operações elementares necessárias para obter a forma canônica relativa a  $A_B$ .

Considere agora  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$  duas bases consecutivas geradas pelo método simplex lexicográfico, onde  $\hat{B} = (B \setminus B(r)) \cup \{k\}$ . Da mesma forma,  $[A_{\hat{B}}^{-1}b \ A_{\hat{B}}^{-1}D]$  e o vetor  $\mathcal{Z}(\hat{B})$  podem ser gerados por meio das operações elementares realizadas sobre o problema original para obter a forma canônica relativa à  $A_{\hat{B}}$ . Entretanto, conforme visto no final da Seção 4.2, eles também podem ser calculados a partir da forma canônica relativa à  $A_B$ , usando as seguintes operações elementares:

- $L_r \leftarrow \frac{1}{\bar{a}_{rk}} L_r$
- $L_i \leftarrow L_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} L_r$ , para  $i = 1, \dots, m, i \neq r$
- $L_{m+1} \leftarrow L_{m+1} - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} L_r$

Em particular, pela operação elementar realizada sobre a linha da função objetivo temos que

$$-\mathcal{Z}(\hat{B}) = -\mathcal{Z}(B) - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r,$$

onde  $\bar{R}_r$  é a  $r$ -ésima linha de  $\bar{R}$ . Logo,

$$\mathcal{Z}(\hat{B}) - \mathcal{Z}(B) = \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r \quad (6.3)$$

Para analisarmos a diferença  $\mathcal{Z}(\hat{B}) - \mathcal{Z}(B)$ , que desejamos ser lexicograficamente negativa, vamos analisar  $\bar{R}_r$ , ou melhor, uma linha qualquer de  $\bar{R}$ , já que não sabemos a priori quem será o índice  $r$ .

**Lema 6.3.1.** *Suponha  $D = I$ . Se  $A_B$  é uma base gerada pelo simplex lexicográfico, então toda linha de  $\bar{R} = [A_B^{-1}b \ A_B^{-1}D]$  é lexicograficamente positiva.*

*Prova:* A prova será por indução sobre a iteração em que a base  $A_B$  foi gerada. Se  $A_B$  é a primeira base, então  $A_B = I$  e  $\bar{R} = [b \ I]$ . Como  $b \geq 0$ , claramente toda linha de  $\bar{R}$  é lexicograficamente positiva. Suponha o resultado verdadeiro na iteração em que a matriz  $A_B$  foi gerada, isto é,  $\bar{R}_i \succ 0$ , onde  $\bar{R}_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz  $\bar{R} = [A_B^{-1}b \ A_B^{-1}D]$ , para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Seja  $A_{\hat{B}}$  a base seguinte, com  $\hat{B} = (B \setminus B(r)) \cup \{k\}$ , onde  $r$  foi determinado por (6.2). Denote  $\hat{R} = [A_{\hat{B}}^{-1}b \ A_{\hat{B}}^{-1}D]$ . Pelo exposto acima, temos que

- $\hat{R}_r = \frac{1}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r$
- $\hat{R}_i = \bar{R}_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r$ , para  $i = 1, \dots, m, i \neq r$

Como  $\bar{R}_r \succ 0$  por hipótese e  $\bar{a}_{rk} > 0$ , temos que  $\hat{R}_r \succ 0$ . Tome agora  $i \in \{1, \dots, m\}, i \neq r$ . Se  $\bar{a}_{ik} \leq 0$ , então

$$\hat{R}_i = \bar{R}_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r \succ 0,$$

pois  $\bar{R}_i, \bar{R}_r \succ 0$  e  $-\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} \geq 0$ . Se  $\bar{a}_{ik} > 0$ , então pela Proposição 6.2.1 concluímos que

$$\frac{\bar{R}_r}{\bar{a}_{rk}} \prec \frac{\bar{R}_i}{\bar{a}_{ik}},$$

ou melhor,  $\bar{R}_i - \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r \succ 0$ . Logo,  $\hat{R}_i \succ 0$ . Em todo caso, concluímos que qualquer linha de  $\hat{R}$  é lexicograficamente positiva. ■

O lema acima leva ao resultado desejado, que estabelece uma ordenação, segundo a função  $\mathcal{Z}$ , das bases geradas pelo algoritmo.

**Proposição 6.3.1.** *Suponha  $D = I$ . Se  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$  são duas bases consecutivas geradas pelo método simplex lexicográfico, então  $\mathcal{Z}(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}(B)$ .*

*Prova:* Por (6.3), temos que

$$\mathcal{Z}(\hat{B}) - \mathcal{Z}(B) = \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \bar{R}_r.$$

Como  $\bar{R}_r \succ 0$  pelo Lema 6.3.1,  $\bar{c}_k < 0$  e  $\bar{a}_{rk} > 0$ , concluímos que  $\mathcal{Z}(\hat{B}) - \mathcal{Z}(B) \prec 0$ . ■

Vale observar que, para as demonstrações dos dois resultados acima, tomamos  $D = I$ . Entretanto, o importante é garantir que, para a primeira base  $A_B$ , tenhamos as linhas de  $A_B^{-1}R = [A_B^{-1}b \ A_B^{-1}D]$  lexicograficamente positivas. Por exemplo, se  $A_B$  é não degenerada, ou seja,  $A_B^{-1}b > 0$ , então  $D$  pode ser qualquer matriz invertível. Podemos ainda tomar  $D$  exatamente igual a primeira base viável  $A_B$ , pois assim temos  $A_B^{-1}R = [A_B^{-1}b \ I]$ . Vale também mencionar que não é necessário usar sempre a mesma matriz  $D$  ao longo de todo o algoritmo. O fundamental é manter a mesma matriz  $D$  durante todas as iterações que determinam um mesmo vértice. Isso garante uma ordenação entre as bases que definem esse vértice, evitando a ciclagem. Após mudar efetivamente de vértice, uma outra matriz  $D$  poderia ser escolhida.

Outra observação a ser reforçada aqui é que o método simplex lexicográfico não impede a geração de bases que definam um mesmo vértice, isto é, pode haver mudança de base que não leve a um novo vértice. O método evita, porém, a ciclagem, o que é suficiente para garantir convergência.

**Teorema 6.3.1.** *O Algoritmo Simplex Lexicográfico pára, retornando uma conclusão correta sobre o PPL.*



*Prova:* Considerando a prova do Teorema 4.5.1 e o fato de que o simplex lexicográfico apenas aplica um critério de desempate para a escolha da variável que sai da base, resta mostrar que o algoritmo com essa modificação pára. Pela Proposição 6.3.1, podemos concluir que o simplex lexicográfico não repete bases. Então, ele eventualmente pára, posto que o número de bases é finito. ■

## 6.4 Aplicação a um exemplo

Voltemos ao exemplo da Seção 6.1, agora aplicando o simplex lexicográfico. A partir do primeiro quadro simplex (abaixo), escolhemos  $x_1$  para entrar na base.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	1/4	-8	-1	9	1	0	0	0
$x_6$	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0

Vamos considerar  $D = A_{\{5,6,7\}} = I$ . Então, calculando a razão mínima

$$\min \left\{ \frac{0}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = 0,$$

temos um empate entre  $x_5$  e  $x_6$  para sair da base. Usando a primeira coluna de  $D$ , ou seja,  $A_5$ , já desempatamos em favor de  $x_6$ , pois

$$\min \left\{ \frac{1}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = 0.$$

Assim, o próximo quadro é

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	0	-2	-3/4	15/2	1	-1/2	0	0
$x_1$	1	-24	-1	6	0	2	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	2	-5/4	21/2	0	3/2	0	0

Embora o ponto ainda seja o mesmo do quadro anterior, essa nova base é diferente da segunda base gerada na Seção 6.1. Agora  $x_3$  é escolhida para entrar na base e  $x_7$ , única candidata, para sair. O novo quadro, ótimo, é então:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	0	-2	0	15/2	1	-1/2	3/4	3/4
$x_1$	1	-24	0	6	0	2	1	1
$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	2	0	21/2	0	3/2	5/4	5/4

Resolvemos agora o mesmo PPL, mas tomando  $D = A_{\{7,6,5\}}$ , isto é, a matriz  $D$  escolhida anteriormente, porém com as colunas na ordem inversa. Retomando o primeiro quadro simplex

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_5$	1/4	-8	-1	9	1	0	0	0
$x_6$	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0	0

escolhemos  $x_1$  para entrar na base e, novamente, calculamos a razão mínima

$$\min \left\{ \frac{0}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = 0,$$

para verificar um empate entre as candidatas  $x_5$  e  $x_6$  a sair da base. Agora, mesmo usando a primeira coluna de  $D$ , ou seja,  $A_7$ , o empate se mantém, pois novamente temos:

$$\min \left\{ \frac{0}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = 0.$$

Passamos então à segunda coluna de  $D$ , quer dizer,  $A_6$ . Calculamos então

$$\min \left\{ \frac{0}{1/4}, \frac{1}{1/2} \right\} = 0,$$

desempatando em favor de  $x_5$ . Com isso, os dois próximos quadros são idênticos àqueles obtidos na Seção 6.1, quais sejam:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	-32	-4	36	4	0	0	0
$x_6$	0	4	3/2	-15	-2	1	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	-4	-7/2	33	3	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	0	8	-84	-12	8	0	0
$x_2$	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0	0
$x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1
	0	0	-2	18	1	1	0	0

Nesse quadro, verificamos que o empate na saída se mantém até considerar a primeira coluna de  $D$ . Já na segunda, calculamos

$$\min \left\{ \frac{8}{8}, \frac{1/4}{3/8} \right\} = 2/3,$$

indicando um desempate em favor de  $x_2$ . Nesse ponto, a mudança de base passa a ser diferente daquela realizada na Seção 6.1, quando  $x_1$  foi escolhida para sair da base. A nova forma canônica torna-se:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	-64/3	0	-4	-4/3	8/3	0	0
$x_3$	0	8/3	1	-10	-4/3	2/3	0	0
$x_7$	0	-8/3	0	10	4/3	-2/3	1	1
	0	16/3	0	-2	-5/3	7/3	0	0

Agora  $x_4$  entra na base para a saída de  $x_7$ , gerando o quadro

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	-112/5	0	0	-4/5	12/5	2/5	2/5
$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	1
$x_4$	0	4/15	0	1	2/15	1/15	1/10	1/10
	0	24/5	0	0	-7/5	11/5	1/5	1/5

Como o vértice mudou, poderíamos nesse momento adotar outra matriz  $D$  invertível. Por exemplo, a matriz básica corrente, isto é,  $D = A_{\{1,3,4\}}$ . De qualquer modo, entrando com  $x_5$  na

base, a única candidata a sair é  $x_4$ , levando ao quadro:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_1$	1	-24	0	6	0	2	1	1
$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	1
$x_5$	0	-2	0	15/2	1	-1/2	3/4	3/4
	0	2	0	21/2	0	3/2	5/4	5/4

Obtemos, assim, a solução ótima. Note que esse quadro é equivalente ao quadro ótimo obtido anteriormente com linhas permutadas.

## 6.5 Exercícios

6.1. Considere novamente o primeiro PPL apresentado na Seção 6.1. Usando o método simplex, foram enumeradas 6 bases que definem o ponto  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1 - x_7 = 0$ . Identifique as outras bases que definem o mesmo ponto, realizando mudanças de bases a partir dos quadros simplex apresentados. Em cada base, quais as restrições escolhidas para definir esse ponto ao se tornarem ativas?

6.2. Usando o método simplex lexicográfico, resolver o segundo exemplo apresentado na Seção 6.1. Acompanhe o processo no gráfico apresentado. Teria havido ciclagem caso o critério lexicográfico não tivesse sido aplicado?

6.3. Aplicar o método lexicográfico aos PPLs abaixo. Em cada caso, desenhe o conjunto viável e identifique vértices degenerados bem como as bases que os definem. Em que momento do algoritmo a solução degenerada apareceu: no início, ao longo, na solução ótima?

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \max 2x_1 + x_2 & \text{b) } \min -3x_1 + x_2 & \text{c) } \max 3x_1 + 4x_2 \\
 \text{s.a: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12 & \text{s.a: } x_1 - x_2 \leq 0 & \text{s.a: } 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
 4x_1 + x_2 \leq 8 & x_1 - 5x_2 \leq 0 & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 4x_1 - x_2 \leq 8 & 3x_1 + x_2 \leq 16 & x_1 + x_2 \leq 15 \\
 x_1 \leq 2 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & 
 \end{array}$$

6.4. Aplicar o método lexicográfico aos seguintes PPLs:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \min -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & \text{b) } \max 10x_1 - 9x_2 - 24x_3 - 70x_4 \\
 \text{s.a: } x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 0 & \text{s.a: } 0.5x_1 - 0.5x_2 + x_3 - 1.5x_4 \leq 0 \\
 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 0 & 0.5x_1 - 2.5x_2 + 9x_3 - 5.5x_4 \leq 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 & x_1 \leq 1 \\
 x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 4\} & x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 4\}
 \end{array}$$

6.5. Identifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa. Procure corrigir as incorretas.

1. Se há vértice degenerado, então o número de bases viáveis é maior que o de vértices.
2. Se duas bases distintas definem o mesmo vértice, então ele é degenerado.
3. Se nenhum vértice do conjunto viável é degenerado, o método simplex converge qualquer que seja a função objetivo linear, mesmo sem usar o critério lexicográfico.
4. Embora raro, o fenômeno da ciclagem pode ocorrer em problemas não degenerados, comprometendo assim a convergência do algoritmo simplex também nesses casos.
5. No método simplex, sempre que se alcança um vértice degenerado vai ocorrer ciclagem, a menos que se utilize, por exemplo, o critério lexicográfico para saída da base.

6. Mesmo no método simplex lexicográfico, pode-se enumerar uma sequência de bases que definem o mesmo vértice; entretanto, nunca haverá bases repetidas, o que garante o término do algoritmo.
  7. A aplicação do método simplex lexicográfico evita a geração de soluções básicas viáveis que representem um mesmo vértice.
  8. O método simplex lexicográfico transforma um problema degenerado em não-degenerado e, por isso, evita a ciclagem.
  9. Se ocorre empate na escolha da linha pivô no método simplex ou simplex lexicográfico, a próxima solução básica é degenerada.
  10. Se a solução básica viável não ótima em uma certa iteração do simplex é degenerada, após a mudança de base o valor da função objetivo se mantém inalterado.
- 6.6. Apresente exemplos de problemas que contemplem cada uma das seguintes situações e encontre os quadros simplex associados:
1. Existe uma única solução ótima, portanto básica, sendo nulo o custo reduzido de uma variável não básica;
  2. Existe uma solução básica ótima degenerada e uma solução básica ótima não degenerada;
  3. Existem múltiplas soluções básicas ótimas não degeneradas.
- 6.7. Considere uma solução básica viável degenerada relativa à uma base  $A_B$ . Sejam  $A = [A_B \ A_N]$ ,  $\bar{A} = A_B^{-1}A$  e  $\bar{b} = A_B^{-1}b$ . Considere uma mudança de base definida pelo simplex com a entrada da coluna  $A_k$ ,  $k \in N$ , na base. Em que condições a nova base irá definir uma solução diferente daquela definida por  $A_B$ ? Em que condições adicionais essa outra solução básica será também degenerada? E para ser não degenerada, o que deve acontecer? Determine tais condições em função de  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$ .
- 6.8. Demonstre o Lema 6.3.1 e a Proposição 6.3.1 considerando  $D$  uma matriz invertível tal que as linhas de  $[A_B^{-1}b \ A_B^{-1}D]$  sejam lexicograficamente positivas.
- 6.9. Considere uma variação do simplex lexicográfico em que diferentes matrizes  $D$  são escolhidas ao longo do método, da seguinte forma: para cada vértice encontrado, tome  $D$  como sendo a primeira base que definiu esse vértice. Note que a matriz  $D$  muda sempre que o vértice muda e se mantém constante enquanto um mesmo vértice (degenerado) é gerado. Para mostrar que esse método modificado é correto, considere dois vértices,  $x$  e  $x'$ , gerados ao longo do método, nessa ordem, em iterações distintas. Sejam  $D$  e  $D'$  as matrizes correspondentes. Defina  $\mathcal{Z}(B) = c_B^\top A_B^{-1}(b \ D)$  e  $\mathcal{Z}'(B) = c_B^\top A_B^{-1}(b \ D')$  para toda base  $A_B$ . Para duas bases distintas,  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$ , geradas nessa ordem por esse método, mostre que:
1. se ambas definem  $x$ , então  $\mathcal{Z}(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}(B)$ ;
  2. se ambas definem  $\hat{x}$ , então  $\mathcal{Z}'(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}'(B)$ ;
  3. se  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$  definem  $x$  e  $\hat{x}$  respectivamente, então  $\mathcal{Z}'(\hat{B}) \prec \mathcal{Z}(B)$ .
- 6.10. Use o primeiro exemplo da seção 6.1 para mostrar que a variação sugerida no Exercício 6.9 poderia ciclar caso a matriz  $D$  escolhida a cada iteração fosse a base corrente.

## Capítulo 7

# Simplex Revisado

Neste capítulo, revisitamos o método simplex e apresentamos uma implementação diferente do algoritmo, conhecida como simplex revisado. Basicamente, ela procura evitar alguns cálculos desnecessários, a partir de uma reorganização das operações realizadas a cada iteração para a obtenção da forma canônica. Esse algoritmo é fundamental para implementação de um processo conhecido como geração de colunas, onde as colunas do PPL (coeficientes associados a cada variável) são incluídas iterativamente no modelo, apenas quando necessárias.

### 7.1 Revisitando o algoritmo Simplex

Como mencionado na Seção 4.2, o maior volume de cálculo em uma iteração do simplex ocorre no passo 2 do Algoritmo 1. Nesse momento, dada uma base viável  $A_B$ , calculam-se

$$\bar{b} = A_B^{-1}b, \quad \bar{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N \quad \text{e} \quad \bar{A}_N = A_B^{-1}A_N. \quad (7.1)$$

Os vetores  $\bar{b}$  e  $\bar{c}_N$  são usados em passos seguintes do algoritmo, em particular para determinar a variável  $x_k$ ,  $k \in N$ , que entra na base (associada a  $\bar{c}_k < 0$ ) e a variável  $x_{B(r)}$ ,  $r \in \{1, \dots, m\}$ , que sai da base. Por outro lado, apenas a coluna  $\bar{A}_k$  de  $\bar{A}_N$  é efetivamente usada na iteração corrente do algoritmo, para o cálculo da razão mínima. É importante notar que não é necessário calcular a matriz  $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N$  para obter  $\bar{c}_N$ , se associarmos os termos de sua expressão como  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - (c_B^\top A_B^{-1})A_N$ . Essa parentização também leva a menos operações aritméticas do que calcular  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top(A_B^{-1}A_N)$ , posto que o número de contas é quadrático na multiplicação vetor-matriz e cúbico na multiplicação matriz-matriz. Além disso, na multiplicação do vetor  $c_B^\top A_B^{-1}$  pela matriz  $A_N$  pode-se tirar proveito da esparsidade desta.

Essas observações sugerem que alguns cálculos poderiam ser evitados ou reduzidos em (7.1). Por exemplo, se alguma coluna de  $A$  não entra na base ao longo das iterações, ela não precisaria ser atualizada em momento algum. Embora não possamos prever tal situação, poderíamos pensar em atualizar uma coluna de  $A$  apenas quando ela for entrar na base. Como o número de mudanças de base é usualmente menor que o número de variáveis (especialmente quando  $m$  é bem menor que  $n$ ), espera-se que diversas variáveis nunca entrem na base, e a estratégia mencionada poderia trazer uma boa economia na quantidade de contas realizadas.

Tal ideia é a base do que se chama *simplex revisado*. Primeiro, vamos reorganizar as expressões em (7.1), como segue

$$\bar{b} = A_B^{-1}b, \quad u^\top = c_B^\top A_B^{-1}, \quad \bar{c}_N^\top = c_N^\top - u^\top A_N \quad \text{e} \quad \bar{A}_k = A_B^{-1}A_k, \quad (7.2)$$

onde  $k \in N$  é tal que  $\bar{c}_k < 0$ . Isto nos leva a reestruturar o algoritmo simplex como no Algoritmo 4. Em particular, note que os cálculos de  $\bar{b}$ ,  $u$  e  $\bar{A}_k$  (passos 2 e 6) são os mais complexos, pois envolvem a solução dos sistemas lineares

$$A_B \bar{b} = b, \quad u^\top A_B = c_B^\top \quad \text{e} \quad A_B \bar{A}_k = A_k,$$

definidos pela mesma matriz  $A_B$  e três diferentes termos independentes  $b$ ,  $c_B$  e  $\bar{A}_k$ . Além disso, a matriz  $A_B$  muda de uma única coluna de uma iteração para outra, e esse fato deve ser explorado para a redução no número de operações.

---

**Algoritmo 4:** ALGORITMO SIMPLEX REVISADO

---

**Entrada:**  $A, b, c$

**Saída:** Solução ótima ou Problema ilimitado

0 **início**

- 1 | Determine  $(B, N)$  tal que  $A_B$  é base viável
- 2 | Calcule  $\bar{b} = A_B^{-1}b$  e  $u^\top = c_B^\top A_B^{-1}$
- 3 | Calcule  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - u^\top A_N$
- 4 | **se**  $\bar{c}_N \geq 0$  **então Pare:**  $x_N = 0$ ,  $x_B = \bar{b}$  é solução ótima;
- 5 | Seja  $k \in N$  tal que  $\bar{c}_k < 0$
- 6 | Calcule  $\bar{A}_k = A_B^{-1}A_k$
- 7 | **se**  $\bar{A}_k \leq 0$  **então Pare:** Problema ilimitado;
- 8 | Seja  $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$
- 9 | Faça  $B \leftarrow (B \setminus \{B(r)\}) \cup \{k\}$ ,  $N \leftarrow (N \setminus \{k\}) \cup \{B(r)\}$  e volte a 2

10 **fim**

---

## 7.2 Usando operações elementares sobre linhas

Há diferentes formas de implementar as operações em (7.2), aproveitando os cálculos realizados na iteração anterior, cuja base difere de apenas uma coluna da base corrente. Começamos ilustrando como podemos efetuá-las usando operações elementares sobre linhas. Para isso, vamos usar o seguinte quadro simplex revisado, relativo à uma base viável  $A_B$ :

$$\begin{array}{c|c} & \\ \hline & A_B^{-1} \\ \hline & A_B^{-1}b \\ \hline -c_B^\top A_B^{-1} & Z - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array} \quad (7.3)$$

Esses são os valores atualizados a cada iteração do algoritmo revisado. Assim, temos os vetores  $\bar{b} = A_B^{-1}b$  e  $u^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ , calculados no passo 2. Por conveniência, vamos manter o valor  $-u$  em lugar de  $u$ . Os demais dados necessários para a execução do algoritmo, calculados nos passos 3 e 6, quais sejam  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top + (-u^\top)A_N$  e  $\bar{A}_k = A_B^{-1}A_k$ , serão determinados a partir de  $A_B^{-1}$  e  $-u$ , cujos valores estão disponíveis no quadro, e da matriz  $A_N$  e vetor  $c_N$  do problema original.

É importante notar que esse quadro simplex revisado é uma parte do quadro simplex padrão. De fato, consideremos as colunas do quadro original que formam uma identidade. Sua atualização para a forma canônica relativa à base  $A_B$  contém exatamente o quadro simplex revisado, como vemos abaixo.

$$\begin{array}{c|c|c} \text{Problema original} & & \\ \hline & & \\ \hline \dots & I & b \\ \hline \dots & 0 & Z \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c} \text{Forma canônica relativa a } A_B \\ \hline & \\ \hline \dots & A_B^{-1} \\ \hline \dots & -c_B^\top A_B^{-1} \end{array} \begin{array}{c} A_B^{-1}b \\ Z - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Concluimos então que o quadro simplex revisado pode ser atualizado por meio das mesmas operações elementares sobre linhas realizadas para atualização do quadro simplex padrão<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Calculamos  $-u$  em lugar de  $u$  exatamente para manter essa igualdade com o quadro simplex padrão.

### 7.3 Aplicação a um exemplo

Considere o PPL

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 6\} \end{array}$$

Sua forma padrão é:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 6 \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_8 = 4 \\ & x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_9 = 4 \\ & x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 9\} \end{array}$$

Começando com a base canônica  $A_B$ , para  $B = \{7, 8, 9\}$ , o quadro (7.3) é dado trivialmente por

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_7$	1	0	0	6
$x_8$	0	1	0	4
$x_9$	0	0	1	4
	0	0	0	$Z$

A linha superior do quadro revisado identifica as únicas colunas do quadro completo que sempre serão mantidas. A coluna mais à esquerda marca a variável básica presente em cada equação, enquanto a última coluna mostra o valor correspondente a cada uma dessas variáveis na solução básica corrente  $A_B^{-1}b$ . Na parte central temos a matriz  $A_B^{-1}$ . Na linha inferior, temos o vetor  $-u^\top$  e, à sua direita, o valor  $c_B^\top A_B^{-1}b$  da função objetivo representado como  $Z - c_B^\top A_B^{-1}b$ .

Seguindo os passos do Algoritmo 4, devemos agora calcular  $\bar{c}_N^\top = c_N + (-u^\top)A_N$ , onde  $N = \{1, \dots, 6\}$ , no passo 3. Extraíndo  $-u$  do quadro e  $c_N$  e  $A_N$  do problema na forma padrão, temos então:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^\top &= c_N^\top + (-u^\top)A_N \\ &= [-1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad -4 \quad 2] + [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ [-1 & -2 & 1 & -1 & -4 & 2] \end{matrix}. \end{aligned}$$

Pela regra de Dantzig, escolhemos  $x_5$  para entrar na base, pois  $\bar{c}_5 = -4$  é o elemento mais negativo de  $\bar{c}_N^\top$ . Então, no passo 6, devemos determinar

$$\bar{A}_5 = A_B^{-1}A_5 = A_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por conveniência, para calcular a razão mínima no passo 8, vamos colocar a coluna atualizada de  $x_5$  ao lado do quadro simplex revisado.

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$			$x_5$	
$x_7$	1	0	0	6		1	
$x_8$	0	1	0	4		0	
$x_9$	0	0	1	4		2	
	0	0	0	$Z$		-4	

A razão mínima é então dada por

$$\min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{2} \right\} = 2,$$

implicando que  $x_9$  deve sair da base. As operações elementares a serem realizadas devem assim converter a coluna de  $x_5$  num vetor unitário com 1 na terceira posição. Precisamente, estas são as operações a serem realizadas:

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$			$x_5$	
$x_7$	1	0	0	6		1	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3$
$x_8$	0	1	0	4		0	$L_2 \leftarrow L_2 + 0L_3$
$x_9$	0	0	1	4		2	$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$
	0	0	0	$Z$		-4	$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$

Com isso, obtemos

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_7$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
$x_8$	0	1	0	4
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	0	0	2	$Z + 8$

Novamente calculamos os custos reduzidos, agora para  $N = \{1, \dots, 4, 6, 9\}$ , usando  $-u$  do quadro e  $c_N$  e  $A_N$  do problema na forma padrão. Precisamente, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_N^\top &= c_N^\top + (-u^\top)A_N \\
&= [-1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [-1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2] \\
&= [-1 \quad -2 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2].
\end{aligned}$$

Assim, a variável  $x_2$  entra na base e, por conseguinte, devemos calcular  $\bar{A}_2 = A_B^{-1}A_2$ . Utilizando  $A_B^{-1}$  do quadro e  $A_2$  da forma padrão, temos:

$$\bar{A}_2 = A_B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Colocando a coluna atualizada de  $x_2$  ao lado do quadro simplex revisado atual, chegamos a:

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$			$x_2$	
$x_7$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4		1	
$x_8$	0	1	0	4		-1	
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2		0	
	0	0	2	$Z + 8$		-2	



Percebemos que  $x_7$  é a única candidata a sair da base. As operações elementares para atualização do quadro são:

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$		$x_2$	
$x_7$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4	1	$L_1 \leftarrow L_1$
$x_8$	0	1	0	4	-1	$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	$L_3 \leftarrow L_3 + 0L_1$
	0	0	2	$Z + 8$	-2	$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$

Após o pivoteamento, o quadro torna-se:

VB	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_2$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
$x_8$	1	1	$-\frac{1}{2}$	8
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	2	0	1	$Z + 16$

Agora  $N = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$ , e o custos reduzidos são:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_N^\top &= c_N^\top + (-u^\top)A_N \\
&= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0] + [2 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0] + [2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1] \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & x_9 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Atingimos assim a condição de parada do passo 4, retornando como solução ótima

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = (0, 4, 0, 0, 2, 0, 0, 8, 0),$$

com valor  $Z = -16$ .

Vale notar que, neste exemplo, as colunas de  $x_1$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_6$  nunca foram atualizadas ao longo do processo, visto que tais variáveis não entraram na base em momento algum.

Consideramos agora o PPL obtido do anterior, mudando o sentido da primeira e terceira restrições. Com isso, a forma padrão desse novo PPL é:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\
\text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_8 = 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 - x_9 = 4 \\
& x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 9\}
\end{aligned}$$

Agora precisamos começar pela primeira fase do simplex, onde também aplicaremos o revisado. Com a inclusão de variáveis artificiais na primeira e terceira restrições, chegamos ao problema artificial:

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1^a + x_2^a = Z^a \\
\text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 + x_1^a = 6 \\
& 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_8 = 4 \\
& x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 - x_9 + x_2^a = 4 \\
& x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 9\}, \quad x_1^a \geq 0, \quad x_2^a \geq 0
\end{aligned}$$

Começando com a base canônica definida pelas variáveis  $x_1^a$ ,  $x_8$  e  $x_2^a$ , nesta ordem, o quadro (7.3) inicial é dado por

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$	
$x_1^a$	1	0	0	6
$x_8$	0	1	0	4
$x_2^a$	0	0	1	4
	-1	0	-1	$Z^a - 10$

É importante destacar que estamos trabalhando neste momento com a função artificial, logo os custos básicos são  $c_B^\top = [1 \ 0 \ 1]$ , associados às variáveis básicas  $x_1^a$ ,  $x_8$  e  $x_2^a$ , respectivamente. Dessa maneira, temos  $-u^\top = [-1 \ 0 \ -1]$  e  $-u^\top b = -10$ , como mostra a última linha do quadro acima.

Calculando os custos reduzidos da função objetivo artificial, para  $N = \{1, \dots, 7, 9\}$ , temos:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_N^\top &= c_N^\top + (-u^\top)A_N \\
&= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] + [-1 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_9 \\ [-1 & -1 & -2 & -2 & -3 & -2 & 1 & 1] \end{matrix}.
\end{aligned}$$

Escolhemos assim a variável  $x_5$  para entrar na base, pois  $\bar{c}_5 = -3$  é o elemento mais negativo de  $\bar{c}_N^\top$ . Então, devemos determinar

$$\bar{A}_5 = A_B^{-1}A_5 = A_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Colocamos a coluna atualizada de  $x_5$  ao lado do quadro simplex revisado

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$		$x_5$
$x_1^a$	1	0	0	6	1
$x_8$	0	1	0	4	0
$x_2^a$	0	0	1	4	2
	-1	0	-1	$Z^a - 10$	-3

e calculamos a razão mínima:

$$\min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{4}{2} \right\} = 2.$$

Concluimos que  $x_2^a$  deve sair da base. As operações elementares a serem realizadas são:

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$		$x_5$	
$x_1^a$	1	0	0	6	1	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3$
$x_8$	0	1	0	4	0	$L_2 \leftarrow L_2 + 0L_3$
$x_2^a$	0	0	1	4	2	$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$
	-1	0	-1	$Z^a - 10$	-3	$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_3$

Com isso, obtemos

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$	
$x_1^a$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
$x_8$	0	1	0	4
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	-1	0	$\frac{1}{2}$	$Z^a - 4$

Novamente calculamos os custos reduzidos, agora para  $N = \{1, \dots, 4, 6, 7, 9\}$ . Note que nem vamos calcular o custo reduzido de  $x_2^a$ , que já saiu da base. Ela já cumpriu seu papel, de gerar uma coluna para a base, e pode ser eliminada do modelo. Usando  $-u$  do quadro e  $c_N$  e  $A_N$  do problema artificial, determinamos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_N^\top &= c_N^\top + (-u^\top)A_N \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & x_9 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Podemos então escolher a variável  $x_2$  para entrar na base, pois  $\bar{c}_2 = -1$ . Sua coluna atualizada vale:

$$\bar{A}_2 = A_B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Posicionando-a ao lado do quadro simplex revisado atual, como abaixo, observamos que  $x_1^a$  é a variável a sair da base.

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$		$x_2$
$x_1^a$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4	1
$x_8$	0	1	0	4	-1
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0
	-1	0	$\frac{1}{2}$	$Z^a - 4$	-1

As operações elementares para atualização do quadro são:

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$		$x_2$	
$x_1^a$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4	1	$L_1 \leftarrow L_1$
$x_8$	0	1	0	4	-1	$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	$L_3 \leftarrow L_3 + 0L_1$
	-1	0	$\frac{1}{2}$	$Z^a - 4$	-1	$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

Após o pivoteamento, o quadro torna-se:

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$	
$x_2$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
$x_8$	1	1	$-\frac{1}{2}$	8
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	0	0	0	$Z^a$

Nem é necessário calcular os custos reduzidos para concluirmos que essa é uma solução ótima, posto que as variáveis artificiais estão fora da base. Mais ainda, essa solução é viável para o problema original e representada por uma base deste. Podemos então passar para a segunda fase. Para isso, precisamos atualizar a última linha do quadro, pois iremos agora trabalhar com a função objetivo original. Usando agora os coeficientes dessa função, calculamos

$$-u^\top = -c_B^\top A_B^{-1} = - \begin{bmatrix} x_2 & x_8 & x_5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_8 & x_5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z - c_B^\top A_B^{-1} b = Z + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = Z + 16.$$

O quadro para o início da segunda fase é então:

VB	$x_1^a$	$x_8$	$x_2^a$	
$x_2$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
$x_8$	1	1	$-\frac{1}{2}$	8
$x_5$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	2	0	1	$Z + 16$

Calculando os custos reduzidos das variáveis não básicas, indexadas por  $N = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{c}_N^\top &= c_N^\top + (-u^\top) A_N \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & x_9 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, vamos escolher a variável  $x_7$  para entrar na base e, por conseguinte, calcular sua coluna atualizada:

$$\bar{A}_7 = A_B^{-1} A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Atingimos assim a condição de parada do passo 7, identificando que o problema é ilimitado.

## 7.4 Forma produto da inversa

Sejam  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$  duas bases consecutivas geradas pelo simplex, com  $\hat{B} = (B \setminus B(r)) \cup \{k\}$ , ou seja, a nova base é obtida da anterior com a entrada da variável  $x_k$  e saída da variável  $x_{B(r)}$ . Como visto em (4.11), temos que

$$A_{\hat{B}}^{-1} = M_{r,k} A_B^{-1}, \quad (7.4)$$

onde

$$M_{r,k} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{\bar{a}_{r-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & -\frac{\bar{a}_{r+1,k}}{\bar{a}_{rk}} & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Definindo o vetor

$$w^{r,k} = -\frac{1}{\bar{a}_{rk}} \begin{bmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{r-1,k} \\ -1 \\ \bar{a}_{r+1,k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{bmatrix},$$

temos que

$$M_{r,k} = I - e_r e_r^\top + w^{r,k} e_r^\top.$$

Dado um vetor  $z \in \mathbb{R}^m$ , temos que

$$M_{r,k} z = (I - e_r e_r^\top + w^{r,k} e_r^\top) z = z + (w^{r,k} - e_r)(e_r^\top z) = z + z_r (w^{r,k} - e_r) \quad (7.5)$$

e

$$z^\top M_{r,k} = z^\top (I - e_r e_r^\top + w^{r,k} e_r^\top) = z^\top + (z^\top w^{r,k} - z_r) e_r^\top. \quad (7.6)$$

Em outros termos, para calcular  $M_{r,k} z$ , basta anular a componente  $r$  de  $z$  e somar o resultado ao múltiplo  $z_r$  do vetor  $w^{r,k}$ . Já a diferença entre  $z^\top M_{r,k}$  e  $z^\top$  ocorre apenas na componente  $r$ , que deve ser substituída por  $z^\top w^{r,k}$ . Em ambos os casos o número de operações realizadas é da ordem de  $m$ .

Note que, para armazenar a matriz  $M_{r,k}$ , basta guardar o vetor  $w^{r,k}$  e o escalar  $r$ . Além disso, a manutenção das matrizes  $M_{r,k}$  fornece outra maneira de realizar os cálculos dos passos 2 e 6 do simplex revisado. De fato, suponha que a base  $A_B$  foi obtida após  $t$  iterações, com a entrada da variável não básica  $x_{k_i}$  e saída da  $r_i$ -ésima variável básica em cada iteração  $i \in \{1, \dots, t\}$ , sendo a identidade a primeira base usada. Então, por (7.4), concluímos que

$$A_B^{-1} = M_{r_t, k_t} \cdots M_{r_2, k_2} M_{r_1, k_1}.$$

Essa expressão é conhecida como *forma produto da inversa*.

Para qualquer vetor  $z \in \mathbb{R}^m$ , podemos então calcular

$$A_B^{-1} z = M_{r_t, k_t} (\cdots M_{r_2, k_2} (M_{r_1, k_1} z))$$

e

$$z^\top A_B^{-1} = ((z^\top M_{r_t, k_t}) \cdots M_{r_2, k_2}) M_{r_1, k_1},$$

onde cada parêntese é uma operação do tipo (7.5) ou (7.6). Assim, tendo as matrizes que definem a forma produto da inversa da base corrente e considerando  $z \in \{b, c_B, A_k\}$ , podemos realizar os cálculos de  $\bar{b}$ ,  $u$  e  $\bar{A}_k$  dos passos 2 e 6 do simplex revisado. Note que a inversa da base não é explicitamente calculada a cada iteração.

Vale destacar que existem ainda outras formas de implementar os cálculos desses passos do algoritmo. Como observamos, eles consistem em resolver três sistemas lineares, definidos pela mesma matriz,  $A_B$ . Assim, podemos usar alguma decomposição dessa matriz, em lugar de calcular sua inversa. Por exemplo, podemos determinar a decomposição LU da matriz, isto é, uma matriz quadrada  $L$ , triangular inferior com diagonal unitária, e uma matriz quadrada  $U$ , triangular superior invertível, tais que  $A_B = LU$ . Desse modo, um sistema  $A_B z = d$ , para qualquer vetor  $d \in \mathbb{R}^m$ , reescreve-se como  $LUz = d$  e pode, por conseguinte, ser decomposto em dois sistemas triangulares, a saber,  $Ly = d$  e  $Uz = y$ , que podem ser facilmente resolvidos por substituição. Além disso, dado que a matriz  $A_B$  muda de uma única coluna de uma iteração para outra do algoritmo, os fatores  $L$  e  $U$  podem ser atualizados de forma conveniente para tirar proveito dessa circunstância.

Outra decomposição de destaque é aquela que determina matrizes  $Q$ , ortogonal (cuja inversa é a transposta), e  $R$ , triangular superior invertível, tais que  $A_B = QR$ . Novamente, o sistema  $A_B z = d$ , para qualquer vetor  $d \in \mathbb{R}^m$ , pode ser decomposto em  $Qy = d$  e  $Rz = y$ , dois sistemas que podem ser resolvidos facilmente. Novamente a atualização dos fatores  $Q$  e  $R$  pode ser feita de modo eficiente, levando em conta que apenas uma coluna básica muda a cada iteração.

## 7.5 Geração de colunas

No passo 3 do Algoritmo 4, calculamos  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - u^\top A_N$ . Na verdade, não é necessário calcular todo o vetor para a continuidade do algoritmo, mas sim verificar a existência ou não de alguma componente negativa em  $\bar{c}_N$ . Note que a componente de  $\bar{c}$  associada a  $x_j$  é dada por

$$\bar{c}_j = c_j - u^\top A_j \quad \forall j \in J.$$

Em particular,  $\bar{c}_j = 0$  para todo  $j \in B$ . Portanto, estamos interessados em determinar  $k \in J$  tal que

$$\bar{c}_k = \min\{c_j - u^\top A_j : j \in J\}$$

e verificar se  $\bar{c}_k = 0$ , apontando que a solução ótima foi determinada, ou  $\bar{c}_k < 0$ , indicando  $A_k$  como coluna a entrar na base.

Nesse sentido, a escolha da variável a entrar na base define um problema de otimização, conhecido como *problema de pricing*. Em alguns casos, é possível resolver esse problema com programação matemática, determinando o menor custo reduzido, sem a necessidade de calcular todos eles. Isso acontece quando as colunas da matriz  $A$  formam um conjunto de vetores que é solução de um sistema de equações ou inequações.

Por exemplo, no caso do problema de corte, formulado através do conceito de padrões de corte (ver página 25), apresentamos o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^p s_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{aligned}$$

onde a variável  $x_j$  determina o quanto será cortado segundo o padrão  $j \in \{1, \dots, p\}$ , e  $b_i$  é a demanda mínima do item  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Nesse modelo, cada coluna  $A_j$  da matriz de restrições define um padrão de corte e é solução do sistema

$$\sum_{i=1}^n \ell_i a_{ij} \leq L, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall j \in \{1, \dots, p\},$$

onde  $\ell_i$  é o tamanho do item  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $L$  é o tamanho da peça. Além disso, a sobra  $s_j$  do padrão é

$$s_j = L - \sum_{i=1}^n \ell_i a_{ij} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}.$$

Neste caso, dado o vetor  $u$  da iteração corrente do simplex revisado, o problema de *pricing* é  $\min\{s_j - \sum_{i=1}^n u_i a_{ij} : j \in \{1, \dots, p\}\}$ , ou mais precisamente

$$\begin{aligned} \min \quad & L - \sum_{i=1}^n (\ell_i + u_i) a_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^n \ell_i a_i \leq L \\ & a_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & a_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Em outras palavras, não é necessário gerar a priori toda a matriz de restrições. A cada iteração do simplex revisado, ao chegar ao passo 3, resolve-se o problema acima. Se ele tem valor ótimo não negativo, a solução básica atual é ótima (passo 4). Do contrário, sua solução ótima  $a^* = [a_i^*]$  define a nova coluna a entrar na base, e  $s^* = L - \sum_{i=1}^n \ell_i a_i^*$  é o coeficiente na função objetivo da variável associada a essa coluna. Esse processo chama-se *geração de colunas*.

## 7.6 Exercícios

7.1. Resolver os seguintes problemas usando o método simplex revisado. Identifique o conjunto ótimo e aponte se o problema tem única ou múltiplas soluções ótimas ou se é ilimitado.

- a)  $\max 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4$   
s.a:  $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 225$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 117$   
 $4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 420$   
 $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 4\}$
- b)  $\max 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5$   
s.a:  $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1$   
 $x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 1$   
 $5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22$   
 $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$
- c)  $\max 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5$   
s.a:  $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20$   
 $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30$   
 $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$

7.2. Resolva pelo método simplex revisado. Identifique o conjunto ótimo e aponte se o problema tem única ou múltiplas soluções ótimas, se é ilimitado ou se é inviável.

- a)  $\min 3x_1 - x_2$   
s.a:  $-x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geq -3$   
 $7x_2 + \quad + 2x_4 = 5$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$   
 $x_3 + x_4 \leq 2$   
 $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
- b)  $\min 9x_1 - 5x_2 + 14x_3 + 3x_4$   
s.a:  $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1$   
 $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq -7$   
 $x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 1$   
 $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 4\}$
- c)  $\min x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5$   
s.a:  $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1.5$   
 $x_2 - x_3 - x_4 = 1$   
 $2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 1$   
 $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$
- d)  $\min x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 8x_6$   
s.a:  $x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 4$   
 $x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 1$   
 $2x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 1$   
 $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 6\}$

7.3. Resolva pelo método simplex revisado, a partir da base  $A_{\{1,2,3\}}$ .

- a)  $\min -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 - x_5 - 6x_6$   
s.a:  $x_1 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 = 3$   
 $x_2 - 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 6$   
 $x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 12$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$
- b)  $\min x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 - 6x_5$   
s.a:  $x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 2$   
 $x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 \leq 6$   
 $x_3 - 2x_4 - 2x_5 \leq 12$   
 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$

7.4. Detalhe os passos 2 e 6 do Algoritmo 4. Em lugar de calcular  $A_B^{-1}$ , suponha que sejam armazenadas as matrizes  $M_{r,k}$  referentes a cada iteração. Mais precisamente, admita que a primeira base (iteração 0) seja uma identidade e que, em cada iteração  $i \geq 0$ , ocorra uma mudança de base com a entrada da variável não básica  $x_{k_i}$  e saída da  $r_i$ -ésima variável básica. Supondo que  $r_i$  e  $w^i := w^{r_i, k_i}$  sejam armazenados em cada iteração  $i \geq 0$ , calcule os vetores  $\bar{b}$ ,  $u$  e  $\bar{A}_{k_{i+1}}$  referentes à iteração  $i + 1$ .

7.5. Considere o problema de coloração (de vértices) de um grafo  $G = (V, E)$  definido no Exercício 1.15. Note que os vértices que recebem uma mesma cor definem um conjunto independente em  $G$ , ou seja, um conjunto de vértices dois-a-dois não adjacentes (que não definem uma aresta). Sendo assim, o problema de coloração é um problema de cobertura de conjuntos (ver Ex. 1.4.3), ou mais precisamente consiste em determinar uma cobertura mínima dos vértices por conjuntos independentes. Apresente um modelo de cobertura de conjuntos para o problema de coloração. Qual seria o problema de *pricing*? Relacione-o com o problema de determinar um conjunto de independente de peso máximo em um grafo com pesos atribuídos aos vértices.

# Capítulo 8

## Dualidade

Neste capítulo, veremos que a todo PPL se associa outro PPL, chamado dual, definido a partir dos mesmos coeficientes, e que esse par de problemas possui estreitas relações. A definição do problema dual e sua obtenção a partir do problema original são o foco da primeira seção. Nas duas seções seguintes, estudamos diversas relações entre o par de problemas e, particularmente, como obter uma solução ótima de um a partir de uma solução ótima do outro. Em seguida, apresentamos interpretações geométrica e econômica para as variáveis duais e o problema dual.

### 8.1 O problema dual

Uma estratégia usual para abordar um problema de otimização matemática com restrições consiste em remover algumas dessas restrições e penalizar o seu descumprimento na função objetivo. Dessa maneira, gera-se o que costumamos chamar uma *relaxação* do problema. Esse problema relaxado costuma ser mais facilmente resolvido e fornece um limite inferior (no caso de problema de minimização) ou superior (no caso de problema de maximização) para o problema original.

Apliquemos essa ideia ao PPL

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min c^\top x \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Fazendo uma combinação linear das equações  $Ax = b$ , ponderadas pelas componentes de um vetor  $u \in \mathbb{R}^m$ , obtemos a equação  $u^\top Ax = u^\top b$ . Então, removendo as restrições  $Ax = b$  de (P) e levando a restrição agregada  $u^\top Ax = u^\top b$  para a função objetivo, obtemos o problema

$$\begin{aligned} P(u) \quad & \min c^\top x + u^\top (b - Ax) = (c^\top - u^\top A)x + b^\top u \\ & \text{s.a: } x \geq 0. \end{aligned}$$

Note que esse problema é trivialmente resolvido. Se o vetor  $c^\top - u^\top A$  tem alguma componente negativa, então  $P(u)$  é ilimitado; basta fazer a componente correspondente em  $x$  tender a infinito e as demais componentes nulas. Por outro lado, caso  $c^\top - u^\top A \geq 0$ , a solução ótima é  $x = 0$  e o valor ótimo de  $P(u)$  é  $b^\top u$ .

Sejam então  $V[P]$  e  $V[P(u)]$  os valores ótimos de (P) e  $P(u)$ , respectivamente, sendo que o valor ótimo de um problema inviável e de um problema ilimitado, no caso de minimização, são  $+\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente. Mostramos que  $V[P(u)]$  é um limite inferior para  $V[P]$ .

**Proposição 8.1.1.** *Para todo  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $V[P] \geq V[P(u)]$ .*



*Prova:* Seja  $u \in \mathbb{R}^m$ . Note que as funções objetivo de  $(P)$  e  $P(u)$  coincidem nos pontos viáveis de  $(P)$ , e o conjunto viável de  $P(u)$  contém aquele de  $P$ . Então, se o primeiro problema é ilimitado, o segundo também o é, mostrando que  $V[P] = V[P(u)] = -\infty$  nesse caso. Por outro lado, se  $(P)$  é inviável, o resultado  $+\infty = V[P] \geq V[P(u)]$  vale trivialmente. Finalmente, falta considerar o caso em que  $(P)$  tem solução ótima, digamos  $x^*$ . Então,

$$V[P] = c^\top x^* = c^\top x^* + u^\top(b - Ax^*) \geq V[P(u)],$$

onde a segunda igualdade e a desigualdade decorrem do fato que  $Ax^* = b$  e  $x^*$  é viável para  $P(u)$ , respectivamente. ■

Pela proposição acima, torna-se interessante determinar um vetor  $u$  que forneça o maior valor possível de  $V[P(u)]$ . Sendo assim, podemos nos restringir a vetores  $u \in \mathbb{R}^m$  para os quais  $P(u)$  tenha solução ótima, ou melhor, a  $u \in \mathbb{R}^m$  com  $c^\top - u^\top A \geq 0$ , que resulta em  $V[P(u)] = b^\top u$ . Note que as condições  $c^\top - u^\top A \geq 0$  equivalem a  $u^\top A \leq c^\top$ , ou ainda  $A^\top u \leq c$ . Isso nos leva ao seguinte problema:

$$(D) \max b^\top u \\ \text{s.a: } A^\top u \leq c,$$

que é chamado o *dual* de  $(P)$ . Nesse contexto,  $(P)$  é chamado problema *primal*. Pelo exposto, o conjunto viável de  $(D)$  é composto pelos vetores  $u$  que fazem  $P(u)$  ter solução ótima, e função objetivo é igual a  $V[P(u)]$  nesse caso. Desse modo, o problema dual determina o maior limite inferior possível obtido com a relaxação  $P(u)$ , para todo  $u \in \mathbb{R}^m$ .

*Ex. 8.1.1.* Considere o seguinte PPL

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 \\ \text{s.a:} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Para determinar o dual desse problema, vamos primeiro convertê-lo à forma (8.1), ou seja,

$$\begin{array}{llllllll} \min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s.a:} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & + & x_5 & = & 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Definindo a variável dual  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , obtemos o problema dual:

$$\begin{array}{llll} \max & u_1 & + & u_2 \\ \text{s.a:} & -2u_1 & - & u_2 & \leq & 2 \\ & u_1 & + & 2u_2 & \leq & 1 \\ & u_1 & - & u_2 & \leq & 4 \\ & -u_1 & & & \leq & 0 \\ & & & u_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Note que cada variável do primal dá origem a uma restrição do dual, e cada restrição do primal se associa a uma variável do dual. Neste exemplo,  $u_1$  está associada à primeira restrição, enquanto  $u_2$ , à segunda.

Como todo PPL pode ser expresso na forma (8.1)<sup>1</sup>, essa definição de dual se aplica a todo problema de programação linear. Em particular, podemos determinar o dual de  $(D)$ .

<sup>1</sup>Essa é a forma padrão, mas sem pedir  $b \geq 0$ .

**Proposição 8.1.2.** *O dual do dual é o primal.*

*Prova:* Vamos colocar  $(D)$  na forma (8.1), de modo a aplicar a definição de dual. Então, mudando o sentido da função objetivo para minimização, fazendo a mudança de variáveis  $u = u' - u''$  e acrescentando as variáveis de folga  $u^f$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \min \quad & -b^\top u' + b^\top u'' \\ \text{s.a:} \quad & A^\top u' - A^\top u'' + u^f = c, \\ & u' \geq 0, u'' \geq 0, u^f \geq 0. \end{aligned}$$

Para evidenciar a forma matricial do problema, reescrevemo-lo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ u^f \end{bmatrix} \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ u^f \end{bmatrix} = c, \\ & \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ u^f \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando então a definição, obtemos o dual de  $(D)$ :

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top y \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{bmatrix}^\top y \leq \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{bmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix},$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \max \quad & c^\top y \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^\top y \\ \text{s.a:} \quad & Ay \leq -b, \\ & -Ay \leq b, \\ & y \leq 0. \end{aligned}$$

Note que convertimos o sentido de otimização da função objetivo de maximização para minimização, revertendo a operação feita anteriormente em  $(D)$ . Finalmente, simplificando  $Ay \leq -b$

Primal		Dual	
min	$c^\top x$	max	$b^\top u$
s.a:	$Ax = b$	s.a:	$A^\top u \leq c$
	$x \geq 0$		
min	$c^\top x$	max	$b^\top u$
s.a:	$Ax \geq b$	s.a:	$A^\top u \leq c$
	$x \geq 0$		$u \geq 0$
min	$c^\top x$	max	$b^\top u$
s.a:	$Ax \leq b$	s.a:	$A^\top u \leq c$
	$x \geq 0$		$u \leq 0$
min	$c^\top x$	max	$b^\top u$
s.a:	$Ax = b$	s.a:	$A^\top u \geq c$
	$x \leq 0$		
min	$c^\top x$	max	$b^\top u$
s.a:	$Ax = b$	s.a:	$A^\top u = c$
Dual		Primal	

Tabela 8.1: Exemplos de pares primal-dual.

e  $-Ay \leq b$  como  $-Ay = b$  e fazendo a mudança de variáveis  $x = -y$ , reescrevemos o problema dual de  $(D)$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Concluimos assim que o dual de  $(D)$  é  $(P)$ . ■

## 8.2 Pares primal-dual

Como já observado na seção anterior, podemos obter o dual de um PPL convertendo-o à forma (8.1) e depois aplicando a definição. Nesta seção, veremos como encontrar o dual diretamente do primal, sem a necessidade de passar pela forma (8.1). Começamos obtendo os pares primal-dual exibidos na Tabela 8.1.

O primeiro par é exatamente aquele apresentado na seção anterior. No segundo e terceiro pares, estamos mudando o sentido das restrições. No segundo consideramos restrições do tipo  $\geq$ , enquanto no terceiro elas são do tipo  $\leq$ . Vamos considerar os dois casos simultaneamente. Assim, o problema  $(P)$  convertido à forma (8.1) é:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.a:} \quad & Ax \pm x^f = b, \\ & x \geq 0, x^f \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $\pm$  significa que uma variável de folga  $x_i^f$  é somada à ou subtraída da  $i$ -ésima restrição

original, caso ela seja de  $\leq$  ou  $\geq$ , respectivamente. Reescrevendo, o problema, temos:

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x \\ x^f \end{bmatrix} \\ \text{s.a:} \quad & [A \quad \pm I] \begin{bmatrix} x \\ x^f \end{bmatrix} = b, \\ & \begin{bmatrix} x \\ x^f \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $\pm I$  denota a matriz cuja  $i$ -ésima coluna é  $e_i$  ou  $-e_i$ , a depender se a  $i$ -ésima restrição original é de  $\leq$  ou  $\geq$ , respectivamente. Aplicando a definição, obtemos o dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & [A \quad \pm I]^\top u \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como

$$[A \quad \pm I]^\top = \begin{bmatrix} A^\top \\ \pm I \end{bmatrix},$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A^\top \\ \pm I \end{bmatrix} u \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & A^\top u \leq c, \\ & \pm u \leq 0. \end{aligned}$$

A restrição  $\pm u \leq 0$  mostra que  $u_i \leq 0$  ou  $u_i \geq 0$ , caso a  $i$ -ésima restrição de  $(P)$  seja de  $\leq$  ou  $\geq$ , respectivamente. Isto comprova o segundo e terceiro pares primal-dual. Mais que isso, mostra que o sentido da restrição primal define o sinal da variável dual correspondente. Note que, a menos do sinal das variáveis, a estrutura do problema dual é a mesma nos três primeiros pares.

Agora, consideramos o quarto par na Tabela 8.1. Em relação ao primeiro par, estamos modificando o sinal das variáveis  $x$ , antes tínhamos  $x \geq 0$  e agora  $x \leq 0$ . Para tratar simultaneamente os dois casos, consideramos a seguinte mudança de variáveis  $x' = \pm x$ , significando que  $x'_j = x_j$ , se  $x_j \geq 0$ , e  $x'_j = -x_j$ , se  $x_j \leq 0$ . Assim, na forma (8.1), os problemas primais do primeiro e quarto pares tornam-se

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top (\pm x') \\ \text{s.a:} \quad & A(\pm x') = b, \\ & x' \geq 0, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \min \quad & (\pm c)^\top x' \\ \text{s.a:} \quad & (\pm A)x' = b, \\ & x' \geq 0. \end{aligned}$$

Note que  $\pm A$  representa a matriz  $A$  com a  $j$ -ésima coluna igual àquela de  $A$  multiplicada por  $+1$  ou  $-1$ , a depender se  $x_j \geq 0$  ou  $x_j \leq 0$ . Similarmente, a  $j$ -ésima componente de  $\pm c$  é  $c_j$  ou  $-c_j$ , a depender se  $x_j \geq 0$  ou  $x_j \leq 0$ .

Aplicando a definição do dual, obtemos

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & \pm A^\top u \leq \pm c, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} (D) \quad & \max \quad b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & A^\top u \lesseqgtr c, \end{aligned}$$

onde  $\lesseqgtr$  indica que a  $j$ -ésima restrição em  $A^\top u \lesseqgtr c$  é de  $\leq$ , se  $x_j \geq 0$ , ou de  $\geq$ , se  $x_j \leq 0$ , respectivamente. Isso leva ao quarto par primal-dual da Tabela 8.1 e mostra, mais ainda, que o sinal de uma variável primal define o sentido da restrição dual correspondente (quando usamos exatamente os mesmos coeficientes dessa variável na formação da restrição).

Finalmente, observamos o último par da Tabela 8.1, que considera, agora, as variáveis  $x$  livres de sinal. Assim, fazendo a mudança de variáveis  $x = x' - x''$ , chegamos à forma (8.1):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x' - c^\top x'' \\ \text{s.a:} \quad & Ax' - Ax'' = b, \\ & x' \geq 0, x'' \geq 0, \end{aligned}$$

ou melhor

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = b, \\ & \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando então a definição, obtemos o dual:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix}^\top u \leq \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou melhor

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & \begin{bmatrix} A^\top \\ -A^\top \end{bmatrix} u \leq \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que pode ainda ser reescrito como

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & A^\top u = c. \end{aligned}$$

Obtemos assim o último par da Tabela 8.1, confirmando que o sinal (ou ausência dele neste caso) da variável primal define o sentido da restrição dual correspondente.

Observando os vários pares primal-dual da Tabela 8.1 e o desenvolvimento realizado para obtê-los, chegamos às seguintes conclusões:

1. Dado um primal com função objetivo definida por um vetor  $c$  e restrições definidas por por uma matriz  $(A, b)$ , o dual pode ser expresso pelos mesmos coeficientes, sendo a função dada pelo vetor  $b$  e as restrições, pela matriz  $(A^T, c)$ ;
2. o sinal de cada variável dual é definido pelo sentido da restrição primal correspondente, independentemente do sinal das outras variáveis;
3. o sentido de cada restrição dual é definido pelo sinal da variável primal correspondente, independentemente do sentido das outras restrições.

Mais especificamente um par primal-dual é da forma

$$\begin{array}{ll}
 (P) \min c^T x & (D) \max b^T u \\
 \text{s.a: } Ax \begin{array}{l} \geq \\ = \\ \leq \end{array} b, & \text{s.a: } A^T u \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} c, \\
 x \begin{array}{l} \geq 0 \\ ? \\ \leq 0 \end{array}, & u \begin{array}{l} \geq 0 \\ ? \\ \leq 0 \end{array},
 \end{array}$$

onde as correspondências entre variáveis (resp. restrições) de um problema e restrições (resp. variáveis) do seu dual são sumarizadas no quadro da Figura 8.1.

Primal			Dual		
MIN	Restrição	$\geq$	$\geq 0$	Variável	MAX
		$=$	livre		
		$\leq$	$\leq 0$		
	Variável	$\geq 0$	$\leq$	Restrição	
livre		$=$			
$\leq 0$		$\geq$			
Dual			Primal		

Figura 8.1: Correspondências entre variáveis e restrições em um par primal-dual.

O quadro da Figura 8.1 pode ser resumido, se introduzirmos o conceito de restrição efetiva para um PPL, entendida como aquela cujo sentido ( $\geq$  ou  $\leq$ ) se opõe ao sentido de otimização (minimização ou maximização). Veja a Figura 8.2.

Objetivo	Restrição	
	Efetiva	Não Efetiva
MIN	$\geq$	$\leq$
MAX	$\leq$	$\geq$

Restrição	Variável
Efetiva	$\geq 0$
$=$	livre
Não efetiva	$\leq 0$

Figura 8.2: Resumo das correspondências entre variáveis e restrições em um par primal-dual.

*Ex.* 8.2.1. Considere o seguinte PPL, onde a variável dual associada a cada restrição está indicada à direita dela.

$$\begin{array}{llll}
 \max & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & & \\
 \text{s.a:} & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 & \leftarrow u_1 & \\
 & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 4 & \leftarrow u_2 & \\
 & 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq -1 & \leftarrow u_3 & \\
 & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 & \leftarrow u_4 & \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ livre} & & 
 \end{array}$$

Seu problema dual é:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2u_1 + 4u_2 - u_3 - 5u_4 \\ \text{s.a:} \quad & 3u_1 - u_2 + 5u_3 - u_4 \geq 2 \\ & u_1 - 2u_2 - 3u_3 + 3u_4 \leq -3 \\ & u_1 + 3u_2 + 2u_3 - u_4 = 4 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \leq 0, \quad u_3 \leq 0, \quad u_4 \text{ livre} \end{aligned}$$

### 8.3 Teoremas de dualidade

Para a demonstração dos próximos resultados, consideremos o par primal-dual

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & c^\top x \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (D) \quad \max \quad & b^\top u \\ \text{s.a:} \quad & A^\top u \leq c \end{aligned} \qquad (8.2)$$

que representa qualquer outro par.

O Teorema de Dualidade Fraca, estabelecido a seguir, assegura que qualquer solução viável de um PPL fornece um limite (inferior ou superior, a depender do sentido de otimização) para qualquer solução viável do dual.

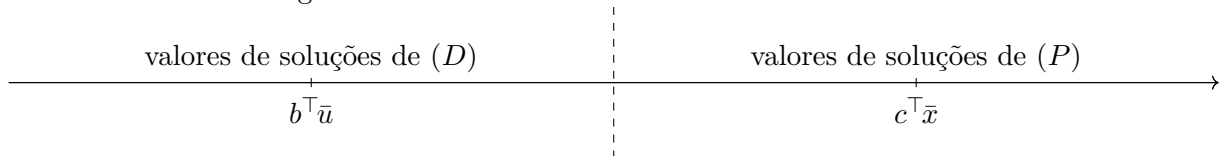
**Teorema 8.3.1.** *Em um par primal-dual, o valor de objetivo de qualquer solução viável para o problema de minimização é pelo menos o valor de objetivo de qualquer solução viável para o problema de maximização.*

*Prova:* Sejam  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  são viáveis para (P) e (D), respectivamente. Usando primeiro o fato de que  $b = A\bar{x}$  e depois  $\bar{x} \geq 0$  e  $A^\top \bar{u} \leq c$ , obtemos

$$b^\top \bar{u} = (A\bar{x})^\top \bar{u} = \bar{x}^\top A^\top \bar{u} \leq \bar{x}^\top c = c^\top \bar{x}.$$

■

O Teorema de Dualidade Fraca é usado, frequentemente, para definir dualidade em outras áreas de programação matemática, como por exemplo programação inteira. Ele estabelece uma separação entre os valores de soluções primal e dual viáveis, conforme ilustra a figura abaixo. Essa dicotomia leva aos seguintes resultados imediatos.



**Corolário 8.3.1.** *Se um PPL é ilimitado, então seu dual é inviável.*

**Corolário 8.3.2.** *Se um PPL e seu dual têm soluções viáveis de mesmo valor para as respectivas funções objetivo, então essas soluções são ótimas.*

*Prova:* Sejam  $\bar{x}$  e  $\bar{u}$  soluções viáveis para (P) e (D), respectivamente, tais que  $c^\top \bar{x} = b^\top \bar{u}$ . Suponha que  $\bar{x}$  não é ótimo. Então existe  $x^*$  viável tal que  $c^\top x^* < c^\top \bar{x}$  e, por conseguinte,  $c^\top x^* < b^\top \bar{u}$ , contrariando o Teorema 8.3.1. Logo,  $\bar{x}$  é ótimo. Similarmente, mostramos que  $\bar{u}$  é ótimo. ■

A recíproca do corolário acima é estabelecida pelo Teorema de Dualidade Forte, a seguir.

**Teorema 8.3.2.** *Se um PPL tem solução ótima, seu dual também o tem e os valores ótimos são iguais.*

*Prova:* Sem perda de generalidade, suponha que  $(P)$  é o PPL com solução ótima, digamos  $x^*$ . Pelos Teoremas 5.5.1 e 5.4.1, podemos admitir que existe base  $A_B$  tal que  $x_B^* = A_B^{-1}b$  e  $x_N^* = 0$ . Além disso, os custos reduzidos associados a  $A_B$  são não negativos, isto é,  $c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A \geq 0$ . Defina  $(u^*)^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ . Então  $c^\top - (u^*)^\top A = c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A \geq 0$ , ou seja,  $A^\top u^* \leq c$ . Logo,  $u^*$  é viável para  $(D)$ . Além disso,  $b^\top u^* = (u^*)^\top b = c_B^\top A_B^{-1}b = c_B^\top x_B^* = c^\top x^*$ . Portanto, pelo Corolário 8.3.2,  $u^*$  é ótimo para  $(D)$ . Temos ainda que os valores ótimos de  $(P)$  e  $(D)$  são iguais a  $c^\top x^* = b^\top u^*$ . ■

Resumindo os resultados anteriores, podemos estabelecer o Teorema Fundamental de Dualidade.

**Teorema 8.3.3.** *Para um par de problemas duais, ocorre uma, e somente uma, das seguintes alternativas:*

1. *ambos possuem solução ótima, e de mesmo valor;*
2. *um é ilimitado e o outro é inviável;*
3. *ambos são inviáveis.*

*Prova:* Um problema de programação linear é inviável, ilimitado ou tem solução ótima. Então, haveria nove possibilidades para um par de PPLs. Sendo ele um par primal-dual, o Corolário 8.3.1 e o Teorema 8.3.2 asseguram a existência dos casos (1) e (2) deste teorema, bem como excluem os outros casos, à exceção do caso (3). Em outras palavras, resta mostrar que o caso (3) ocorre. Considere então o seguinte PPL e seu dual:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & u_1 + 2u_2 \\ \text{s.a:} & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 \leq -1 \\ & u_1 \leq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

que são claramente inviáveis. ■

O Teorema Fundamental de Dualidade estabelece as possíveis situações entre um par primal-dual com respeito à existência de solução. O próximo resultado, conhecido como Teorema Fraco de Folgas Complementares, analisa mais profundamente o caso em que ambos os problemas possuem solução ótima e mostra uma relação entre elas. Para apresentar esse teorema, usamos, por conveniência, o seguinte par primal-dual:

$$\begin{array}{ll} (P') \min & c^\top x \\ \text{s.a:} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D') \max & b^\top u \\ \text{s.a:} & A^\top u \leq c \\ & u \geq 0 \end{array} \quad (8.3)$$

Note que ele representa qualquer par primal-dual, uma vez que todo PPL pode ser convertido à forma do problema  $(P')$  acima. A preferência por esse par neste momento do texto deve-se simplesmente ao fato de todas as restrições serem desigualdades em  $(P')$  e  $(D')$ , o que torna mais explícita a relação entre as variáveis originais de um PPL e as variáveis de folga do seu dual, conforme estabelece o teorema.

**Teorema 8.3.4.** *As soluções  $x^*$  e  $u^*$  são ótimas para os problemas  $(P')$  e  $(D')$  se, e somente se,  $x^*$  e  $u^*$  são viáveis para os problemas  $(P')$  e  $(D')$  e satisfazem as condições:*

$$(Ax^* - b)^\top u^* = 0 \quad e \quad (c - A^\top u^*)^\top x^* = 0. \quad (8.4)$$

*Prova:* Primeiro, note que, para todos  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ , temos:

$$c^\top x - b^\top u = c^\top x - u^\top Ax + u^\top Ax - b^\top u = (c - A^\top u)^\top x + (Ax - b)^\top u. \quad (8.5)$$

Se  $x^*$  e  $u^*$  são soluções ótimas, então são soluções viáveis e  $c^\top x^* = b^\top u^*$  pelo Teorema 8.3.2. Logo, por (8.5), temos  $(c - A^\top u^*)^\top x^* + (Ax^* - b)^\top u^* = 0$ . Como  $(c - A^\top u^*)^\top x^* \geq 0$  e  $(Ax^* - b)^\top u^* \geq$



0, obtemos (8.4). Por outro lado, se  $x^*$  e  $u^*$  são viáveis para  $(P')$  e  $(D')$  e satisfazem (8.4), temos  $c^\top x^* = b^\top u^*$  por (8.5), e o Corolário 8.3.2 garante que essas soluções são ótimas. ■

O Teorema acima pode ser reescrito de forma alternativa como:

**Corolário 8.3.3.** *Um ponto  $x^*$  é solução ótima para o problema  $(P')$  se, e somente se, é viável para  $(P')$  e existe um ponto  $u^*$  viável para  $(D')$  satisfazendo (8.4).*

Sendo  $x^*$  e  $u^*$  viáveis, temos que  $(x^f)^* = Ax^* - b \geq 0$  e  $(u^f)^* = c - A^\top u^* \geq 0$ . Assim as equações (8.4) podem ser desmembradas nas conhecidas *condições de folgas complementares*:

$$(x^f)_i^* u_i^* = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (u^f)_j^* x_j^* = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (8.6)$$

Como observado, o Teorema de Folgas Complementares vale para qualquer par primal-dual. Independentemente de qual seja o par considerado, ele estabelece que, no ótimo, é sempre nulo o produto da folga de uma restrição primal (resp. dual) pela variável dual (resp. primal) correspondente. Além disso, essas condições, junto com a viabilidade, são necessárias e suficientes para otimalidade.

Vale destacar que existe uma versão forte do Teorema de Folgas Complementares, estabelecendo que *existe um par* de soluções primal  $(x^*, (x^f)^*)$  e dual  $(u^*, (u^f)^*)$  onde *exatamente* uma variável é nula em cada produto das condições de folgas complementares (8.6). Ver Exercício 8.7.

## 8.4 Obtenção de solução ótima dual

Dada uma solução ótima de um PPL, as condições de folgas complementares (8.6) permitem encontrar as soluções ótimas do dual, resolvendo um sistema linear. Por exemplo, fixando  $u^*$  em (8.6), as equações resultantes são

$$\begin{aligned} (x^f)_i^* &= 0, \forall i \text{ tal que } u_i^* \neq 0, \\ x_j^* &= 0, \forall j \text{ tal que } (u^f)_j^* \neq 0, \end{aligned}$$

que definem um sistema linear, obtido de  $Ax \geq b$  e  $x \geq 0$  pela transformação de algumas desigualdades em igualdades. Perceba a semelhança com a forma de obtenção de soluções básicas da Seção 3.5. Entretanto, não podemos esperar que os dois processos sejam completamente equivalentes, tendo em vista que as soluções desse sistema linear que forem viáveis para o problema fornecem todas as soluções ótimas e não apenas aquelas que sejam básicas.

*Ex. 8.4.1.* Voltemos ao problema do Exemplo 8.1.1. Como visto, o problema dual tem apenas duas variáveis  $u_1$  e  $u_2$ . Seu conjunto viável é apresentado na Figura 8.3(a). Resolvendo o dual graficamente, é fácil encontrar a única solução ótima  $(u_1^*, u_2^*) = (3, -1)$ , que é não degenerada. O valor das variáveis de folga duais é  $(u_3^*, u_4^*, u_5^*) = (7, 0, 0)$ . Então, as condições de folgas complementares resultam no sistema:

$$\begin{aligned} u_1^* \neq 0 &\implies -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ u_2^* \neq 0 &\implies -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ u_3^* \neq 0 &\implies x_1 = 0 \end{aligned}$$

A solução desse sistema é  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ . Pelo Teorema 8.3.4 ainda deveríamos verificar se esse ponto é viável para concluirmos que é uma solução ótima. Entretanto, como ele é o único candidato a solução e há certamente uma solução ótima (pois o dual tem solução ótima), já podemos garantir que  $x^*$  é ótimo.

Considere agora a inclusão de uma nova variável não negativa  $y$  no problema primal, com coeficiente 2 na função objetivo e coeficiente 1 nas duas restrições. Isso leva à adição, no dual, da restrição  $u_1 + u_2 \leq 2$ , conforme ilustrado na Figura 8.3(b). Observe que a solução ótima do

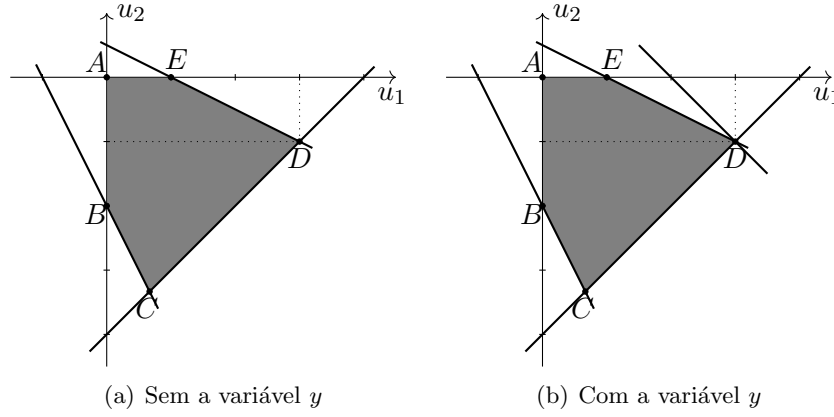


Figura 8.3: Conjunto viável do dual

dual continua a mesma,  $(u_1^*, u_2^*) = (3, -1)$ , porém passa a ser degenerada (a variável de folga  $u_6$  da nova restrição dual é nula nessa solução). As condições de folgas complementares tornam-se:

$$\begin{aligned} u_1^* \neq 0 &\implies -2x_1 + x_2 + x_3 + y = 1 \\ u_2^* \neq 0 &\implies -x_1 + 2x_2 - x_3 + y = 1 \\ u_3^* \neq 0 &\implies x_1 = 0 \end{aligned}$$

Com isso, o sistema linear definido passa a ter infinitas soluções, dadas pelo conjunto

$$\{(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y^*) = (0, \frac{2-y^*}{3}, \frac{1-y^*}{3}, y^*) : y^* \in \mathbb{R}\}.$$

Nem todas essas soluções são viáveis. Embora elas satisfaçam na igualdade as restrições  $-2x_1 + x_2 + x_3 + y \geq 1$ ,  $-x_1 + 2x_2 - x_3 + y \leq 1$  e  $x_1 \geq 0$ , devido às condições de folgas complementares, para satisfazer as restrições  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$  e  $y \geq 0$  é preciso ter  $0 \leq y^* \leq 1$ . Logo o conjunto de soluções ótimas é

$$\{(x_1^*, x_2^*, x_3^*, y^*) = (0, \frac{2-y^*}{3}, \frac{1-y^*}{3}, y^*) : 0 \leq y^* \leq 1\}.$$

Como vimos, a solução ótima dual pode ser determinada a partir da solução ótima primal, com a resolução de um sistema linear, originado pela aplicação do Teorema de Folgas Complementares. Entretanto, mostramos a seguir que, sendo a solução ótima primal obtida pelo simplex, determinamos diretamente a solução ótima dual, como subproduto.

Considere o par primal-dual

$$\begin{array}{ll} (P) \min c^\top x & (D) \max b^\top u \\ \text{s.a: } Ax \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} b, & \text{s.a: } A^\top u \leq c, \\ x \geq 0, & u \begin{array}{l} > \\ < \end{array} 0, \end{array}$$

onde o sentido da  $i$ -ésima restrição de  $(P)$  define o sinal de  $i$ -ésima variável  $u_i$  de  $(D)$ , conforme quadro da Figura 8.1.

Seja  $A_B$  uma base ótima para  $(P)$ . Considere o quadro simplex de  $(P)$  apresentando a forma canônica relativa à  $A_B$ , que pode ser obtido do quadro inicial com as operações elementares indicadas abaixo. Destacamos nesses quadros as colunas associadas a uma variável original arbitrária  $x_j$  e uma variável de folga arbitrária  $x_i^f$ . A variável de folga  $x_i^f \geq 0$  é somada à ou subtraída da  $i$ -ésima restrição, conforme esta seja de  $\leq$  ou  $\geq$ , respectivamente, gerando assim no quadro inicial uma coluna  $+e_j$  ou  $-e_j$ . Adicionalmente, essa restrição dá origem, no dual, a uma variável  $u_i \leq 0$  ou  $u_i \geq 0$ , respectivamente.

Problema original

$x_j$	$x_i^f$		
$\dots A_j \dots \pm e_j \dots$	$b$	$L \leftarrow A_B^{-1} L$	$\rightarrow$
$\dots c_j \dots 0 \dots$	$Z$	$L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1} L$	

Forma canônica relativa à base ótima  $A_B$

$x_j$	$x_i^f$	
$\dots A_B^{-1} A_j \dots \pm A_B^{-1} e_i \dots$	$A_B^{-1} b$	
$\dots \underbrace{c_j - c_B^\top A_B^{-1} A_j}_{\bar{u}_j^f} \dots \mp \underbrace{c_B^\top A_B^{-1} e_i}_{\mp \bar{u}_i} \dots$	$Z - \underbrace{c_B^\top A_B^{-1} b}_{\bar{u}^\top}$	

Tome  $\bar{u}^\top = c_B^\top A_B^{-1}$ . Então, temos que o custo reduzido da variável  $x_j$ , ou seja,  $c_j - c_B^\top A_B^{-1} A_j = c_j - \bar{u}^\top A_j$  é a folga  $\bar{u}_j^f$  da  $j$ -ésima restrição dual  $A_j^\top u \leq c_j$  em  $\bar{u}$ . Como os custos reduzidos em uma solução ótima são não negativos, temos que as restrições  $A^\top u \leq c$  são satisfeitas em  $\bar{u}$ . Adicionalmente, o custo reduzido da variável  $x_i^f$  é  $-c_B^\top A_B^{-1} e_i = -\bar{u}_i$  ou  $c_B^\top A_B^{-1} e_i = \bar{u}_i$ , se a  $i$ -ésima restrição de  $(P)$  é de  $\leq$  ou  $\geq$ , respectivamente. Novamente pela não negatividade dos custos reduzidos no ótimo, concluímos que  $\bar{u}_i \leq 0$  no primeiro caso e  $\bar{u}_i \geq 0$  no segundo. Em qualquer caso,  $\bar{u}_i$  respeita as restrições de sinal das variáveis de  $(D)$ . Logo,  $\bar{u}^\top = c_B^\top A_B^{-1}$  é viável para  $(D)$ . E seu valor é  $\bar{u}^\top b = c_B^\top A_B^{-1} b$ , que é igual àquele da solução ótima de  $(P)$ , sendo portanto também ótimo para  $(D)$ .

Pelo exposto acima, concluímos que, no quadro simplex ótimo, o custo reduzido da variável original  $x_j$  é exatamente o valor ótimo da folga da  $j$ -ésima restrição dual. Já o custo reduzido da variável de folga da  $i$ -ésima restrição de  $(P)$  e o valor ótimo da  $i$ -ésima variável dual  $u_i$  são iguais em módulo. Mais precisamente, o valor ótimo de  $u_i$  é exatamente tal custo reduzido ou este multiplicado por  $-1$ , caso a  $i$ -ésima restrição de  $(P)$  seja de  $\geq$  ou  $\leq$ , respectivamente.

Note que a complementaridade de folgas é respeitada, como esperado, tendo em vista que o custo reduzido de uma variável primal não nula é zero. Na verdade, é possível mostrar que a solução  $\bar{u}$  definida acima é básica para  $(D)$ , e que há a seguinte correspondência entre variáveis básicas e não básicas de um par de soluções primal-dual complementares (no sentido do Teorema de Folgas). Ver Exercício 8.14. Essa constatação nos leva ainda a concluir que custo reduzido nulo de uma variável não básica primal equivale a degeneração dual, que é, portanto, condição necessária para múltiplas soluções ótimas primais.

PRIMAL	Variáveis Originais		Variáveis de Folga	
	Básicas	Não básicas	Básicas	Não básicas
DUAL	Não básicas	Básicas	Não básicas	Básicas
	Variáveis de Folga		Variáveis Originais	

Vale mencionar que, no quadro simplex padrão, não estará presente a variável dual associada a uma restrição primal de igualdade, caso a coluna da variável artificial correspondente tenha sido descartada no final da primeira fase. Já o quadro simplex revisado armazena sempre o valor  $-c_B^\top A_B^{-1}$ , ou seja, o vetor dual  $u$  multiplicado por  $-1$ .

*Ex.* 8.4.2. Voltemos novamente ao problema do Exemplo 8.1.1. O quadro ótimo desse problema,

onde se separam as variáveis originais  $x_1, x_2, x_3$  das variáveis de folga  $x_4$  e  $x_5$ , encontra-se abaixo:

	Originais			Folgas		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	7	0	0	3	1	$Z - 2$
	$u_3^*$	$u_4^*$	$u_5^*$	$u_1^*$	$-u_2^*$	
	Folgas			Originais		

No dual, as variáveis originais são  $u_1 \geq 0$  e  $u_2 \leq 0$ , enquanto as de folga são  $u_3, u_4$  e  $u_5$ . Dessa maneira, essas três últimas variáveis se associam, nas condições de folgas complementares, às variáveis originais do primal  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , e os valores ótimos daquelas são exatamente os custos reduzidos ótimos destas, como apontado no quadro acima. Já as variáveis originais do dual  $u_1$  e  $u_2$  se associam respectivamente às folgas primais  $x_4$  e  $x_5$ , conforme o quadro indica. Como  $u_1 \geq 0$ , seu valor ótimo é o custo reduzido ótimo de  $x_4$ . Por outro lado, sendo  $u_2 \leq 0$ , seu valor ótimo é o custo reduzido ótimo de  $x_5$  multiplicado por  $-1$ . Além disso, a solução  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*, u_5^*) = (3, -1, 7, 0, 0)$  é básica para o dual, sendo as três primeiras variáveis as básicas e as duas últimas as não básicas.

## 8.5 Interpretação geométrica do dual

Considere o seguinte par primal-dual usado para apresentação do Teorema de Folgas Complementares:

$$\begin{array}{ll}
 (P) \min & c^\top x \\
 \text{s.a:} & Ax \geq b \\
 & x \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 (D) \max & b^\top u \\
 \text{s.a:} & A^\top u \leq c \\
 & u \geq 0
 \end{array}$$

A  $i$ -ésima restrição de  $Ax \geq b$  é  $A_i^\top x \geq b_i$ , onde  $A_i^\top$  é a  $i$ -ésima linha de  $A$  (ou equivalentemente a  $i$ -ésima coluna de  $A^\top$ ) e  $b_i$  é a  $i$ -ésima componente de  $b$ . O vetor  $A_i$  é dito o gradiente da restrição  $A_i^\top x \geq b_i$  (em referência ao gradiente da função  $g_i(x) = A_i^\top x - b_i$ ), sendo perpendicular ao hiperplano  $A_i^\top x = b_i$ . Já a  $j$ -ésima restrição de  $x \geq 0$  é  $e_j^\top x \geq 0$ , onde  $e_j$  é a  $j$ -ésima coluna (ou linha) de  $I$ . Similarmente,  $e_j$  é o gradiente dessa restrição, sendo perpendicular ao hiperplano  $x_j = 0$ .

Dado um par  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , defina  $x^f = Ax - b$  e  $u^f = c - A^\top u$ . A  $i$ -ésima restrição de  $Ax \geq b$  está ativa em  $x$  se  $A_i^\top x = b_i$ , ou melhor, se  $x_i^f = 0$ . Similarmente, a  $j$ -ésima restrição de  $x \geq 0$  está ativa em  $x$  se  $x_j = 0$ .

Pelo Teorema de Folgas Complementares, um par de soluções  $(x, u)$  é ótimo para  $(P)$  e  $(D)$  se, e somente se, satisfaz as seguintes equações:

$$\text{Viabilidade primal: } Ax - x^f = b, \ x \geq 0, \ x^f \geq 0,$$

$$\text{Viabilidade dual: } A^\top u + u^f = c, \ u \geq 0, \ u^f \geq 0,$$

$$\text{Complementaridade de folgas: } u^\top x^f = 0, \ x^\top u^f = 0.$$

A condição de viabilidade dual equivale a pedir que o vetor  $c$  pertença ao cone gerado pelas colunas de  $[A^\top I]$ , ou seja, pelos gradientes das restrições de  $(P)$ . Mais ainda, observando, pela complementaridade de folgas, que  $u_i \neq 0$  e  $u_j^f \neq 0$  somente se  $x_i^f = 0$  e  $x_j = 0$ , respectivamente, podemos reescrever  $A^\top u + u^f = c$  como:

$$\sum_{i: x_i^f = 0} A_i^\top u_i + \sum_{j: x_j = 0} e_j u_j^f = c. \quad (8.7)$$

Logo, as condições juntas atestam que um ponto viável  $x$  é um ótimo se, e somente se, o gradiente da função objetivo pertence ao cone gerado pelos gradientes das restrições ativas em  $x$ .

A expressão (8.7) pode ser interpretada como a existência, em qualquer ponto ótimo, de um “equilíbrio de forças” entre o vetor  $-c$ , que fornece o sentido de otimização da função objetivo, e os gradientes das restrições ativas, as que limitam efetivamente o decrescimento da função naquele ponto. Esses dois conjuntos de forças antagônicas se equilibram em um ponto ótimo, onde os gradientes (ponderados) das restrições ativas somados a  $-c$  resultam no vetor nulo. Os multiplicadores duais na equação revelam o peso de cada restrição na construção desse equilíbrio.

A Figura 8.4 ilustra tal equilíbrio de forças para o seguinte par primal-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ \text{s.a:} & -x_1 - x_2 \geq -6 \\ & -x_2 \geq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & 6u_1 - 3u_2 \\ \text{s.a:} & -u_1 \leq 1 \\ & -u_1 - u_2 \leq -1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

No ponto  $B$ ,  $(x_1, x_2) = (0, 3)$ , os gradientes das restrições ativas, quais sejam  $-x_2 \geq -3$  e  $x_1 \geq 0$ , ponderados pelos multiplicadores duais  $u_2 = 1$  e  $u_1^f = 1$ , quando somados a  $-c^\top = (-1, 1)$ , resultam no vetor nulo, mostrando o equilíbrio nesse ponto, a solução ótima do problema. Observe, por outro lado, que nos vértices  $A$ ,  $C$  e  $D$  não é possível equilibrar o vetor  $-c$  com os gradientes das respectivas restrições ativas.

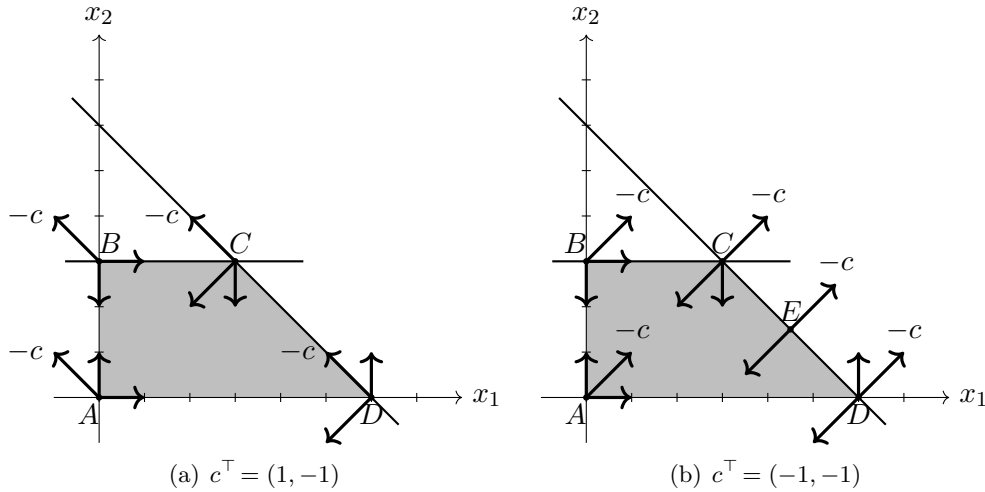


Figura 8.4: Equilíbrio entre  $-c$  e os gradientes das restrições ativas

Considere agora uma mudança na função objetivo do problema primal, que passa a ser definida pelo vetor  $c^\top = (-1, -1)$  (Figura 8.4(b)). Agora, todo o segmento entre  $C$  e  $D$  é ótimo. Em  $C$ , as restrições ativas são  $-x_1 - x_2 \geq -6$  e  $-x_2 \geq -3$ , cujos gradientes equilibram o vetor  $-c$  quando ponderados pelos multiplicadores duais  $u_1 = 1$  e  $u_2 = 0$ . Nesse caso, a solução dual  $(u_1, u_2, u_1^f, u_2^f) = (1, 0, 0, 0)$  é degenerada. Essa mesma solução dual satisfaz a complementaridade de folgas com os pontos  $D$  e  $E$ . É suficiente usar o gradiente da restrição  $-x_1 - x_2 \geq -6$ , ativa em todos os pontos do segmento  $CD$ , para equilibrar o vetor  $-c$ .

## 8.6 Interpretação econômica do dual

Os resultados apresentados acima demonstram a relevância do problema dual, no sentido que estabelecem fortes relações com o problema primal. Aqui, estendemos a utilidade do dual, procurando atribuir uma interpretação às suas variáveis e ao problema como um todo no contexto do primal.

### 8.6.1 Interpretação das variáveis duais

Além de uma interpretação geométrica para o dual, podemos ainda atribuir-lhe uma interpretação “econômica”. Começamos associando a uma solução ótima do dual uma interpretação que permite estimar como varia o valor ótimo devido a mudanças nos termos independentes das restrições do problema primal. Esse tipo de estimativa é bastante útil em contextos práticos. Por exemplo, em um problema de produção onde as restrições são impostas por limitações de matérias-primas descritas no vetor  $b$ , parece bastante natural considerar a questão de como se alteraria o plano ótimo de produção, caso houvesse mudança nas disponibilidades de tais recursos. Essa avaliação indicaria, por exemplo, se valeria à pena e em que condições adquirir esses materiais para uso no processo produtivo.

Pelo Teorema de Dualidade Forte, sabemos que os valores ótimos primal e dual são iguais. Seja então  $(x^*, u^*)$  um par de soluções primal-dual ótimo com valor  $Z^* = c^\top x^* = b^\top u^*$ . Se considerarmos o vetor  $b$  como um parâmetro, podemos calcular a variação de  $Z^* = \sum_{i=1}^m u_i^* b_i$  em relação a ele. Em outros termos, temos que

$$\frac{\partial Z^*(b)}{\partial b_i} = u_i^*.$$

Logo, genericamente falando, o valor ótimo da variável dual  $u_i^*$  é a taxa de variação do valor ótimo em relação ao lado direito  $b_i$  da  $i$ -ésima restrição primal. Sendo assim, alterando  $b_i$  para  $b'_i = b_i + \delta_i$ ,  $\delta_i \in \mathbb{R}$ , estima-se uma variação no valor ótimo de  $b^\top u^*$  para  $b^\top u^* + \delta_i u_i^*$ . Vamos mostrar adiante que tal estimativa é de fato a variação exata quando  $\delta_i$  encontra-se dentro de um certo intervalo. Nesse sentido, no caso do problema de produção mencionado acima,  $u_i^*$  representa uma valoração do recurso  $i$  no contexto do problema, isto é, o quanto cada unidade do recurso adiciona ao valor ótimo. Por isso, o valor da variável dual é comumente chamado *preço sombra* ou *custo marginal*.

De forma análoga, podemos calcular as derivadas parciais do valor ótimo  $Z^*$  como função do vetor  $c$ , por meio da expressão  $Z^* = c^\top x^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$ . Assim, derivamos

$$\frac{\partial Z^*(c)}{\partial c_j} = x_j^*,$$

e, por conseguinte, podemos compreender  $x_j^*$  como a taxa de variação do valor ótimo em relação ao custo  $c_j$ .

Para dar uma interpretação às folgas duais, usamos o fato de que uma solução ótima dual também pode ser vista como os custos reduzidos de uma solução básica ótima primal. Assim, podemos expressar o valor ótimo como  $Z^* = c_B^\top A_B^{-1} b + \sum_{j \in J} \bar{c}_j^* x_j^*$ , onde  $\bar{c}_j^*$  é o custo reduzido de  $x_j$  em uma solução básica ótima, definida por uma partição  $(B, N)$  de  $J$ . Consequentemente, para  $j \in J$ , obtemos

$$\frac{\partial Z^*(x^*)}{\partial x_j^*} = \bar{c}_j^*.$$

Sendo assim, o valor ótimo da  $j$ -ésima folga dual, que é igual a  $\bar{c}_j^*$ , é a taxa de variação do valor ótimo com uma variação em  $x_j^*$ . Em particular, para  $j \in N$ , temos  $x_j^* = 0$ . Portanto, como  $\bar{c}_j^* \geq 0$  para o problema de minimização, podemos interpretar o valor da  $j$ -ésima folga dual como a perda no valor ótimo por cada unidade de  $x_j$ . Note que a mesma interpretação vale para um problema de maximização, considerando que neste caso  $\bar{c}_j^* \leq 0$ .

### 8.6.2 Intervalos em que a base não muda

As soluções básicas ótimas primal e dual são dadas por

$$x_B^* = A_B^{-1} b, x_N^* = 0 \quad \text{e} \quad (u^*)^\top = c_B^\top A_B^{-1},$$

com valor ótimo

$$Z^* = c^\top x^* = b^\top u^*,$$

onde  $A_B$  é uma base ótima. Lembramos que uma base  $A_B$  é ótima se, e somente se,

$$\bar{b} := A_B^{-1}b \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{c}^\top := c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A \geq 0. \quad (8.8)$$

Se modificamos o problema, mudando (apenas) o vetor  $b$  para  $b' = b + \Delta$ , e a base se mantém ótima, então a solução ótima dual fica inalterada e o novo valor ótimo é calculado diretamente como

$$Z^* = (b + \Delta)^\top u^* = b^\top u^* + \Delta^\top u^*.$$

Em particular, se somente a  $i$ -ésima componente de  $b$  é alterada para  $b_i + \delta_i$ , ou seja,  $\Delta = \delta_i e_i$ , e base ótima não muda, então a variação no valor ótimo é exatamente  $\delta_i u_i^*$ . Em outros termos, a taxa de variação  $u_i^*$  permanece constante no intervalo de variação de  $b_i$  em que a base ótima se mantém.

Para calcularmos esse intervalo, observemos que uma mudança de  $b$  para  $b' = b + \delta_i e_i$  mantém a base  $A_B$  ótima se, e somente se,  $A_B^{-1}b' \geq 0$ , conforme (8.8). Temos que

$$A_B^{-1}b' = A_B^{-1}(b + \delta_i e_i) = A_B^{-1}b + \delta_i A_B^{-1}e_i = \bar{b} + \delta_i (A_B^{-1})_i,$$

onde  $(A_B^{-1})_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $A_B^{-1}$ . Logo, a base  $A_B$  se mantém ótima se, e somente se,

$$\bar{b}_k + \delta_i (A_B^{-1})_{ki} \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}.$$

Para determinar  $\delta_i$  satisfazendo a condição acima, consideremos três casos sobre o sinal de  $(A_B^{-1})_{ki}$ :

- $(A_B^{-1})_{ki} = 0$ : Como  $\bar{b}_k \geq 0$ , temos  $\bar{b}_k + \delta_i (A_B^{-1})_{ki} \geq 0$  para todo  $\delta_i$ ;
- $(A_B^{-1})_{ki} > 0$ : Então  $\bar{b}_k + \delta_i (A_B^{-1})_{ki} \geq 0$  equivale a  $\delta_i \geq -\frac{\bar{b}_k}{(A_B^{-1})_{ki}}$ ;
- $(A_B^{-1})_{ki} < 0$ : Então  $\bar{b}_k + \delta_i (A_B^{-1})_{ki} \geq 0$  equivale a  $\delta_i \leq -\frac{\bar{b}_k}{(A_B^{-1})_{ki}}$ .

Assim, a base  $A_B$  continua ótima no seguinte intervalo:

$$\sup_{k=1, \dots, m} \left\{ -\frac{\bar{b}_k}{(A_B^{-1})_{ki}} : (A_B^{-1})_{ki} > 0 \right\} \leq \delta_i \leq \inf_{k=1, \dots, m} \left\{ -\frac{\bar{b}_k}{(A_B^{-1})_{ki}} : (A_B^{-1})_{ki} < 0 \right\}.$$

Usamos *supremo* e *ínfimo* em lugar de máximo e mínimo na expressão acima pelo fato de que algum dos conjuntos sobre os quais são calculados pode ser vazio, ou seja,  $(A_B^{-1})_i \leq 0$  ou  $(A_B^{-1})_i \geq 0$ , levando a valor  $-\infty$  e  $+\infty$  para o limite inferior e superior de  $\delta_i$ , respectivamente.

Similarmente, se a base ótima não muda ao alterarmos (apenas) o vetor  $c$  para  $c' = c + \Lambda$ , então a solução ótima primal não se modifica e o novo valor ótimo é

$$Z^* = (c + \Lambda)^\top x^* = c^\top x^* + \Lambda^\top x^*.$$

A mudança ocorrendo somente na  $j$ -ésima componente de  $c$ , de um valor  $\lambda_j$ , ou seja,  $\Lambda = \lambda_j e_j$ , sem alteração da base ótima, a variação no valor ótimo é exatamente  $\lambda_j x_j^*$ . Neste caso, a taxa de variação  $x_j^*$  permanece constante no intervalo de variação de  $c_j$  para o qual a base não muda.

Por (8.8), temos que essa mudança não provoca alteração na base ótima se, e somente se,  $(c')^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A \geq 0$ , ou melhor,

$$(c'_N)^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A_N \geq 0. \quad (8.9)$$

Primeiro admitamos que  $j \in N$ , ou seja,  $x_j$  é variável não básica. Então,  $c'_B = c_B$ ,  $c'_{N \setminus \{j\}} = c_{N \setminus \{j\}}$  e  $c'_j = c_j + \lambda_j$ . Assim, posto que  $c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N \geq 0$ , a condição (8.9) se reduz a  $(c_j + \lambda_j) - c_B^\top A_B^{-1} A_j \geq 0$ . Usando  $\bar{c}_j = c_j - c_B^\top A_B^{-1} A_j$ , concluímos que a base se mantém ótima se, e somente se,

$$\lambda_j \geq -\bar{c}_j.$$

Suponhamos agora que  $j \in B$ , mas precisamente  $j = B(r)$ . Nesse caso,  $c'_N = c_N$  e  $c'_B = c_B + \lambda_j e_r$ . A condição (8.9) torna-se então  $c_N^\top - (c_B + \lambda_j e_r)^\top \bar{A}_N \geq 0$  ou, equivalentemente,  $\bar{c}_N^\top - \lambda_j e_r^\top \bar{A}_N \geq 0$ . Mas precisamente, a base se mantém ótima se, e somente se,

$$\bar{c}_k - \lambda_j \bar{a}_{rk} \geq 0 \quad \forall k \in N.$$

Para determinar os possíveis valores de  $\lambda_j$  satisfazendo essa expressão, consideramos três casos:

- $\bar{a}_{rk} = 0$ : Como  $\bar{c}_k \geq 0$ , temos  $\bar{c}_k - \lambda_j \bar{a}_{rk} \geq 0$  para todo  $\lambda_j$ ;
- $\bar{a}_{rk} > 0$ : Então  $\bar{c}_k - \lambda_j \bar{a}_{rk} \geq 0$  equivale a  $\lambda_j \leq \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}}$ ;
- $\bar{a}_{rk} < 0$ : Então  $\bar{c}_k - \lambda_j \bar{a}_{rk} \geq 0$  equivale a  $\lambda_j \geq \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}}$ .

Logo, o intervalo em que a base  $A_B$  não muda é:

$$\sup_{k \in N} \left\{ \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} : \bar{a}_{rk} < 0 \right\} \leq \lambda_j \leq \inf_{k \in N} \left\{ \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} : \bar{a}_{rk} > 0 \right\}.$$

Aqui também o limite inferior ou o limite superior para  $\lambda_j$  pode ser  $-\infty$  ou  $+\infty$ , respectivamente, quando  $\bar{a}_{rk} \geq 0$ , para todo  $k \in N$ , ou  $\bar{a}_{rk} \leq 0$ , para todo  $k \in N$ .

*Ex.* 8.6.1. Consideremos uma vez mais o problema do Exemplo 8.1.1, cujo quadro ótimo é reapresentado abaixo, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	7	0	0	3	1	$Z - 2$
				$u_1$	$-u_2$	

Note que, no sistema  $Ax = b$ , a submatriz associada às variáveis de folga é  $A_{\{4,5\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Então, no quadro ótimo, relativo à base  $A_B = A_{\{3,2\}}$ , as colunas de  $x_4$  e  $x_5$  armazenam  $\bar{A}_{\{4,5\}} = A_B^{-1} A_{\{4,5\}} = [-(A_B^{-1})_1 \ (A_B^{-1})_2]$ , onde  $(A_B^{-1})_i$  denota a  $i$ -ésima coluna de  $A_B^{-1}$ . Em outros termos, podemos extrair a inversa da base a partir das colunas  $-\bar{A}_4$  e  $\bar{A}_5$ . Isso posto, podemos calcular os intervalos de variação de cada componente de  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  em que a base não muda. Mais precisamente, passando de  $b_i$  para  $b_i + \delta_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , temos:

- $i = 1$ :  $\max \left\{ -\frac{1}{2/3}, -\frac{2}{1/3} \right\} \leq \delta_1 \leq +\infty$ , ou seja,  $-\frac{1}{2} \leq \delta_1 \leq +\infty$ ; logo tomando  $b_1 \in [\frac{1}{2}, +\infty]$  a base ótima é a mesma;
- $i = 2$ :  $\max \left\{ -\frac{2}{1/3} \right\} \leq \delta_2 \leq \min \left\{ -\frac{1}{-1/3} \right\}$ , isto é,  $-2 \leq \delta_2 \leq 1$ , de modo que a base se mantém ótima para  $b_2 \in [-1, 2]$ .



Sendo assim, para todo  $\delta_1 \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$ , a variação no valor ótimo é  $u_1^* \delta_1 = 3\delta_1$ . Da mesma forma, o valor ótimo varia de  $u_2^* \delta_2 = -\delta_2$  para todo  $\delta_2 \in [-2, 1]$ .

Similarmente, podemos calcular os intervalos de variação de cada componente de  $c^\top = (2 \ 1 \ 4)$  em que a base não muda, usando os valores do quadro ótimo. Considere então que passamos de  $c_j$  para  $c_j + \lambda_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Se  $j = 1$ , então  $j \in N$  e, trivialmente, temos  $\lambda_1 \geq -\bar{c}_1 = -7$ . Logo, a base não muda para  $c_1 \in [-5, +\infty]$  e, por conseguinte, o valor ótimo se mantém constante nesse intervalo (pois  $x_1^* = 0$ ). No caso das variáveis básicas, calculamos os intervalos como segue:

- $j = 2$  ( $j = B(2)$ ):  $\max \left\{ \frac{7}{-1}, \frac{3}{-1/3} \right\} \leq \lambda_2 \leq \min \left\{ \frac{1}{1/3} \right\}$ , ou seja,  $-7 \leq \lambda_2 \leq 3$ ; então, quando  $c_2 \in [-6, 4]$  a base não muda;
- $j = 3$  ( $j = B(1)$ ):  $\max \left\{ \frac{7}{-1}, \frac{3}{-2/3}, \frac{1}{-1/3} \right\} \leq \lambda_3 \leq +\infty$ , isto é,  $-3 \leq \lambda_3 \leq +\infty$ , mostrando que a base não muda para  $c_1 \in [1, +\infty]$ .

Portanto, temos que o valor ótimo varia de  $x_2^* \lambda_2 = \frac{2}{3} \lambda_2$  (resp.  $x_3^* \lambda_3 = \frac{1}{3} \lambda_3$ ) para todo  $\lambda_2 \in [-7, 3]$  (resp.  $\lambda_3 \in [-3, +\infty)$ ).

### 8.6.3 Interpretação do problema dual

Como visto anteriormente, é possível dar uma interpretação geral para a variável dual em termos de variação no valor ótimo do problema. Porém, para o problema dual como um todo, atribuir uma interpretação é tarefa bem mais desafiadora. Na verdade, muitas vezes conseguimos associar um significado relevante ao dual de uma classe de problemas de programação linear, mas não interpretação geral para todo PPL. Dessa maneira, não podemos aqui ser exaustivos nesse intento. Apresentamos nesta subseção dois exemplos que ilustram possíveis interpretações de um problema dual.

Consideremos inicialmente um problema de utilização de recursos para produzir itens, de forma a maximizar o lucro com a produção. Especificamente, suponha que desejamos produzir um conjunto  $J$  de itens a partir de um conjunto  $I$  de recursos, sendo que uma unidade do item  $j \in J$  demanda  $a_{ij}$  unidades do recurso  $i \in I$ . A disponibilidade do recurso  $i \in I$  é  $b_i$  unidades, enquanto o lucro unitário gerado pelo item  $j \in J$  é  $c_j$  unidades monetárias. Um problema de programação linear para determinar o plano de produção que maximiza o lucro é:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq b_i, \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in N. \end{aligned}$$

O fabricante pode se colocar a questão de comparar as alternativas dadas por produzir os itens ou vender os recursos. Qual seria, então, um preço justo  $u_i$ , a ser cobrado por uma unidade do recurso  $i \in I$ ? Parece razoável que essa precificação seja tal que o valor total dos recursos necessários para a produção de um item  $j \in N$  some pelo menos o lucro que esse produto geraria caso os recursos fossem usados para produzi-lo. Sendo assim, a menor valorização dos recursos para cumprir essa restrição pode ser dada pelo modelo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in M} b_i u_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i \in M} a_{ij} u_i \geq c_j, \\ & u_i \geq 0 \quad \forall i \in M. \end{aligned}$$

Como sabemos, esse segundo problema é o dual do primeiro. Podemos então interpretar o dual de um problema de produção semelhante ao descrito acima como o problema de determinar a valoração mínima dos recursos, respeitando a condição de que o valor dos recursos usados na produção de cada item não seja inferior ao seu lucro.

Nesse contexto, podemos ainda interpretar as condições de folgas complementares como segue. Considere um par de soluções ótimas  $(x^*, u^*)$ . Se  $\sum_{j \in N} a_{ij}x_j^* < b_i$ , então a disponibilidade do recurso  $i$  não seria completamente usada, sendo nulo seu valor incremental  $u_i^*$ . Por outro lado,  $\sum_{i \in M} a_{ij}u_i^* > c_j$  significa que o lucro do produto  $j$  é inferior ao que se obteria com a valoração mínima dos recursos que ele utiliza, justificando a não fabricação desse item ( $x_j^* = 0$ ).

Vamos considerar agora o problema de caminho mínimo entre os vértices  $s$  e  $t$  de um digrafo  $G = (V, A)$  com custo  $c_{ij} \geq 0$  atribuído a cada arco  $(i, j) \in A$ . Vamos admitir, sem perda de generalidade, que não existem arcos chegando em  $s$  ou saindo de  $t$ . Como vimos, esse problema pode ser modelado pelo seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a.:} \quad & - \sum_{(s,j) \in A} x_{sj} = -1, \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\sum_{(i,t) \in A} x_{it} = 1, \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned} \sum_{(i,k) \in A} x_{ik} - \sum_{(k,j) \in A} x_{kj} &= 0 \quad \forall k \in V \setminus \{s, t\}, \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \forall (i, j) \in A. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Note que o modelo acima tem uma restrição para cada  $k \in V$  e uma variável para cada arco  $(i, j) \in A$ . Mais ainda, na matriz de restrições, a coluna associada a  $x_{ij}$  tem dois únicos elementos não nulos:  $-1$ , na linha associada a  $i \in V$ , e  $+1$ , na linha associada a  $j \in V$ . Além disso, somando todas as restrições (8.12), obtemos:

$$0 = \sum_{k \in V \setminus \{s, t\}} \sum_{(i,k) \in A} x_{ik} - \sum_{k \in V \setminus \{s, t\}} \sum_{(k,j) \in A} x_{kj} = \sum_{(s,k) \in A} x_{sk} - \sum_{(k,t) \in A} x_{kt}.$$

Essa igualdade nos leva a concluir que as restrições (8.10) e (8.11) são equivalentes, de modo que podemos excluir uma delas do modelo, digamos (8.10).

Assim, definindo uma variável dual  $u_i$ , para todo  $i \in V \setminus \{s\}$ , o problema dual é:

$$\begin{aligned} \max \quad & u_t \\ \text{s.a.:} \quad & -u_i + u_j \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, i \neq s. \end{aligned}$$

Podemos interpretar a variável  $u_i$  como a menor distância de um caminho de  $s$  a  $i$ . Com isso, a restrição  $u_j \leq u_i + c_{ij}$ , para todo  $(i, j) \in A$ , estabelece que o menor caminho de  $s$  a  $j$  é no máximo o menor caminho de  $s$  a  $i$  mais o custo de  $i$  a  $j$ , para todo  $(i, j) \in A$ . Adicionalmente, a função objetivo tende a maximizar o valor  $u_j$  que satisfaz essas restrições, em particular para  $j = t$ , fazendo com que, no ótimo, tenhamos  $u_j = \min\{u_i + c_{ij} : (i, j) \in A\}$ , considerando  $u_s = 0$  nessa última expressão. Assim, o problema dual procura rotular cada vértice com a distância mínima de  $s$  a esse vértice.

Observe que, para esse par primal-dual, a complementaridade de folgas estabelece  $x_{ij}^* = 0$  sempre que  $u_j^* < u_i^* + c_{ij}$ , em um par ótimo  $(x^*, u^*)$ . De fato, quando a distância mínima de  $s$  a  $j$  é inferior àquela de  $s$  a  $i$  mais  $c_{ij}$ , o caminho mínimo não passa pelo arco  $(i, j)$ , justificando fazer  $x_{ij}^* = 0$ .

## 8.7 Exercícios

8.1. Determine os duais dos problemas do Exercício 4.2.

8.2. Determine o dual do problema de transporte (Exemplo 1.2.5).

8.3. Como dito anteriormente, o problema de emparelhamento máximo pode ser modelado como um PPL, com o uso das restrições (1.27). Determine o dual desse PPL.

8.4. Considere o primal  $\min c^\top x$  s.a  $Ax = b, x \geq 0$ . O que acontece à solução dual se (considere os casos em que o primal é inviável, ilimitado ou tem solução ótima):

- i) a  $k$ -ésima restrição primal é multiplicada por um escalar  $\lambda \neq 0$ ?
- ii) a  $k$ -ésima restrição primal é somada com a  $\ell$ -ésima restrição primal multiplicada por  $\lambda \neq 0$ ?
- iii) a  $k$ -ésima coluna do primal é somada com a  $\ell$ -ésima coluna do primal multiplicada por  $\lambda > 0$ ?

No item iii), o que acontece também à solução primal?

8.5. Demonstre os teoremas de dualidade fraca e dualidade forte para o par primal-dual  $(P')$  e  $(D')$  de (8.3), usados na apresentação do teorema de folgas complementares. Adapte o enunciado e demonstração deste último teorema para o par primal-dual  $(P)$  e  $(D)$  de (8.2).

8.6. Dados  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , mostre, usando dualidade, que exatamente um dos seguintes conjuntos é não vazio em cada caso:

- i)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}, \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \geq 0, b^\top u < 0\}$ ;
- ii)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}, \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \geq 0, u \geq 0, b^\top u < 0\}$ ;
- iii)  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}, \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq 0, u \geq 0, b^\top u > 0\}$ .

8.7. Siga os seguintes passos para mostrar o Teorema Forte de Folgas Complementares:

- i) Supondo  $K = -K^\top$ , mostre que o sistema  $Ky \geq 0, y \geq 0$ , têm solução  $\bar{y}$  tal que  $K\bar{y} + \bar{y} > 0$ . (Sug.: aplique o Exercício 8.6(iii) a cada sistema  $Ky \geq 0, y \geq 0, e_j^\top y > 0$  e some as soluções obtidas).
- ii) Suponha que os problemas duais  $\min c^\top x$  s.a  $Ax \geq b, x \geq 0$  e  $\max b^\top u$  s.a  $A^\top u \leq c, u \geq 0$  tenham solução ótima. Mostre que, em pelo menos uma das soluções ótimas  $(x^*, u^*)$ , em cada par de variáveis complementares primal/dual, uma das variáveis é nula e a outra é estritamente positiva. (Sug.: Aplique o primeiro item ao sistema

$$\begin{aligned} Ax - br &\geq 0, x \geq 0, \\ -A^\top u + cr &\geq 0, u \geq 0, \\ b^\top u - c^\top x &\geq 0, r \geq 0, \end{aligned}$$

para obter uma solução  $\bar{y}^t = (\bar{u}^t, \bar{x}^t, \bar{r})$ . Argumente que  $\bar{r} > 0$ , caso contrário um dos problemas seria ilimitado, e então construa a solução desejada.)

8.8. Considere o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cujas solução ótima é  $(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$ . Note que essa solução é degenerada. Encontre o dual e seu conjunto de soluções ótimas, usando o Teorema de Folgas Complementares.

8.9. Considere o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

cujas soluções ótimas são  $(x_1^*, x_2^*) = (2, 0)$ . Note que essa solução é degenerada. Encontre o dual e seu conjunto de soluções ótimas, usando o Teorema de Folgas Complementares.

8.10. Considerando o segundo problema do Exemplo 8.4.1 e os dois exercícios anteriores, procure estabelecer uma relação entre solução ótima única de um problema e solução ótima degenerada do seu dual.

8.11. Usando o teorema de folgas complementares, encontre o conjunto de soluções ótimas dos seguintes problemas, para os quais está indicada uma solução ótima do dual.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \max 5x_1 + 7x_2 + 14x_3 & \text{b) } \min 34x_1 + 5x_2 + 19x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a: } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200 \leftarrow u_1 & \text{s.a: } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \leftarrow u_1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 820 \leftarrow u_2 & -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 \geq 18 \leftarrow u_2 \\ x_1 \geq 40 \leftarrow u_3 & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \leftarrow u_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ (u_1, u_2, u_3) = (7, 0, -2) & (u_1, u_2, u_3) = (5, 0, 0) \end{array}$$

8.12. Usando o teorema de folgas complementares, verifique se cada PPL apresentado abaixo tem como solução ótima o ponto indicado. Em caso afirmativo, determine o conjunto de soluções ótimas do PPL e de seu dual.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \max 18x_1 + 6x_2 + 4x_3 & \text{b) } \min -3x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 9x_4 \\ \text{s.a: } 7x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 2 & \text{s.a: } x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 8 \\ 8x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 0 & 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0 \\ (x_1, x_2, x_3) = (2, -4, 0) & (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 0) \\ \text{c) } \max x_2 + 2x_3 & \text{d) } \min 10x_1 - 7x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a: } 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 5 & \text{s.a: } 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 0 & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 & 3x_1 + x_2 \geq 60 \\ x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre} \\ (x_1, x_2, x_3) = (10, 5, 0) & (x_1, x_2, x_3) = (20, 0, -30) \end{array}$$

8.13. Encontre as soluções duais dos problemas apresentados nas seções 4.1 e 7.3 e no Exemplo 4.4.1, a partir dos quadros ótimos.

8.14. Considere o par de problemas duais

$$\begin{array}{ll} (P) \min (c^1)^\top x^1 + (c^2)^\top x^2 & (D) \max (b^1)^\top u^1 + (b^2)^\top u^2 \\ \text{s.a: } A_{11}x^1 + A_{12}x^2 - y^1 = b^1 & \text{s.a: } A_{11}^\top u^1 + A_{21}^\top u^2 + w^1 = c^1 \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 - y^2 = b^2 & A_{12}^\top u^1 + A_{22}^\top u^2 + w^2 = c^2 \\ x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, y^1 \geq 0, y^2 \geq 0 & u^1 \geq 0, u^2 \geq 0, w^1 \geq 0, w^2 \geq 0 \end{array}$$

A complementaridade de folgas para  $(P)$  e  $(D)$  é  $(w^1)^\top x^1 = (w^2)^\top x^2 = (u^1)^\top y^1 = (u^2)^\top y^2 = 0$ .

Suponha que  $G = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & -I \end{bmatrix}$  seja uma base para  $(P)$ . Considere  $H = \begin{bmatrix} A_{11}^\top & 0 \\ A_{12}^\top & I \end{bmatrix}$ . Mostre que:

- $H$  é base de  $(D)$  e define a solução  $[(u^1)^\top \ (u^2)^\top] = [(c^1)^\top \ 0] G^{-1}$ , que complementar àquela definida por  $G$ ;
- Nas soluções básicas  $(x, y)$  e  $(u, w)$  definidas  $G$  e  $H$ , respectivamente, há uma variável básica e uma não básica em cada par de variáveis complementares;
- Se  $G$  é base ótima para  $(P)$ , então  $H$  é base ótima para  $(D)$ .

8.15. Suponha que o problema primal  $\min c^\top x$  s.a  $Ax \geq b, x \geq 0$  tenha solução ótima. Cada variável em  $x$  se associa a uma folga dual, e cada variável de folga em  $x^f = Ax - b$  se associa a uma variável dual. Mostre que:

- uma variável primal é nula em toda solução ótima se, e somente se, sua variável dual correspondente é positiva em alguma solução ótima.
- uma variável primal é ilimitada no conjunto viável primal se, e somente se, sua variável dual correspondente é limitada no conjunto viável dual.

iii) uma variável primal é ilimitada no conjunto ótimo primal se, e somente se, sua variável dual correspondente é zero em toda solução viável dual.

8.16. Ao mudarmos o vetor  $b$  de um PPL ilimitado, que situações podem acontecer: (i) ele passa a ter solução ótima, (ii) ele passa a ser inviável, (iii) ela continua sendo ilimitado? Justifique sua resposta usando dualidade. E se o PPL inicial tiver solução ótima?

8.17. Repita o exercício anterior, supondo alternativamente uma mudança no vetor  $c$ .

8.18. Considere os problemas abaixo:

$$\begin{aligned}(P) \min c^\top x \quad \text{s.a.:} \quad Ax = b, x \geq 0 \\ (P') \min c^\top x \quad \text{s.a.:} \quad Ax = b + \mu, x \geq 0\end{aligned}$$

Sejam  $x^*$  e  $u^*$  as soluções ótimas de  $(P)$  e seu dual. Mostre que: se  $x$  é solução ótima de  $(P')$  então  $c^\top x \leq c^\top x^* + \mu^\top u^*$ . Em particular, prove que  $c^\top x = c^\top x^* + \mu^\top u^*$  se  $x^*$  e  $x$  são definidos pela mesma base de  $A$ . Sug.: Verifique que  $u^*$  é dual viável para  $(P')$  e use teoremas de dualidade.

8.19. Considere os problemas abaixo:

$$\begin{aligned}(P) \min c^\top x \quad \text{s.a.:} \quad Ax = b, Dx = d, x \geq 0 \\ (P') \min (c^\top - u^\top D)x \quad \text{s.a.:} \quad Ax = b, x \geq 0\end{aligned}$$

onde  $u$  é o valor ótimo das variáveis duais associadas às restrições  $Dx = d$  em  $(P)$ . Mostre que  $(P)$  e  $(P')$  têm o mesmo conjunto de soluções ótimas. Sug.: Determine o dual dos dois problemas e use complementaridade de folgas.

8.20. Mostre que  $x$  é vértice de  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  se, e somente se, existe  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x$  é a única solução de  $\min\{c^\top x : x \in X\}$ . Lembre que o vetor  $c$  ‘equilibra’ os gradientes das restrições ativas no ponto ótimo.

8.21. Uma fábrica produz três tipos de chapas metálicas A, B e C, que são prensadas e depois esmaltadas mecanicamente. A disponibilidade semanal na seção de prensagem é de 200 horas e na seção de esmaltagem de 820 horas. Considerando os tempos que cada chapa demanda em cada seção bem como o lucro unitário (em reais) de cada chapa, e posto que já existe um contrato de 40 chapas A para ser atendido a cada semana, um modelo de PL para planejar a produção semanal da fábrica, maximizando seu lucro, é dado a seguir. A solução deste modelo é apresentada no quadro simplex de minimização ao lado, onde as variáveis  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$  são as respectivas folgas das restrições ordenadas de acordo com o modelo.

$\max$	$5x_1 + 7x_2 + 8x_3$	VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
s.a:	$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200$	$x_2$	0	1	2	1	0	1	160
	$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 820$	$x_5$	0	0	-7	-4	1	-1	60
	$x_1 \geq 40$	$x_1$	1	0	0	0	0	-1	40
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		0	0	6	7	0	2	$Z + 1320$

Responda ao que se pede:

1. Qual a taxa de variação do valor ótimo em relação à disponibilidade de tempo na seção de prensagem? Qual o valor máximo que valeria a pena pagar por uma hora extra nessa seção?
2. Considere as perguntas do primeiro item agora com respeito à seção de esmaltagem.
3. Qual a taxa de variação do valor ótimo em relação ao número de chapas A no contrato? Qual o valor máximo que a fábrica estaria disposta a pagar como multa por não entregar uma chapa A?
4. Qual a perda no lucro máximo por cada unidade de chapa C que fosse produzida? Caso o lucro unitário dessa chapa aumentasse em 50%, o plano de produção ótimo mudaria?

8.22. Um fazendeiro possui 300 hectares de terra e deseja plantar nessa área arroz, feijão e milho. O lucro esperado por hectare plantada de cada cereal é R\$70, R\$95 e R\$100 respectivamente. O fazendeiro dispõe de 1500 dias de trabalho e R\$2750 para o cultivo. Então, considerando o número de dias de trabalho e a soma em dinheiro necessários por hectare para o cultivo de cada produto, formula o PPL abaixo, que visa à maximização do lucro da produção. O quadro simplex ótimo (de minimização) é apresentado a seguir, onde as variáveis  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$  são as folgas das restrições, na ordem apresentada.

max	$70x_1 + 95x_2 + 100x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
s.a:	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$	$x_4$	0	0	0,5	1	-0,5	0,2	100
	$6x_1 + 8x_2 + 9x_3 \leq 1500$	$x_1$	1	0	-2,5	0	1,5	-0,8	50
	$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 2750$	$x_2$	0	1	3	0	-1	0,6	150
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		0	0	10	0	10	1	$Z + 17750$

Responda:

1. Quais os intervalos de variação de cada componente do vetor  $b$  e do vetor  $c$  dentro dos quais a base ótima não muda?
2. O fazendeiro decide não usar R\$ 250 do dinheiro que seria destinado ao cultivo e colocá-lo na poupança com rendimento esperado de 10% (até o momento de realização do lucro da produção). Essa decisão é vantajosa? Por quê?
3. O fazendeiro consegue contratar 125 dias adicionais de serviço. Qual o valor máximo que ele deveria pagar por essas dias extras? Justifique sua resposta.
4. Qual o percentual mínimo de aumento no lucro da milho que tornaria esse produto interessante para produção?
5. Qual é o intervalo de variação do lucro do feijão dentro do qual o fazendeiro continuaria com o mesmo plano ótimo de produção?

8.23. Um criador de coelhos alimenta seus animais com três tipos de ração A, B e C. Ele calculou as necessidades diárias de cada animal em, pelo menos, 12 unidades de proteína, 12 unidades de carboidratos e 11 unidades de gordura, sendo que a quantidade de carboidratos não pode ultrapassar 30 unidades. O custo de 1Kg de cada ração é respectivamente 2, 4 e 5 reais. Considerando a composição de nutrientes em cada ração, obtém-se o seguinte modelo de PL para determinar uma ração final de custo mínimo, cujo peso não exceda 7Kg. A solução ótima do problema é apresentada no quadro ao lado, onde as variáveis  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$ ,  $x_7$  e  $x_8$  são as respectivas folgas das restrições na ordem apresentada no modelo.

min	$2x_1 + 4x_2 + 5x_3$	VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
s.a:	$4x_1 + 1.5x_2 + 8x_3 \geq 12$	$x_4$	0	-17,5	0	1	0	-6	-20	0	28
	$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 12$	$x_5$	0	0	0	0	1	1	0	0	18
	$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 30$	$x_3$	0	-3	1	0	0	-1	-3	0	3
	$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 11$	$x_1$	1	2	0	0	0	0,5	1	0	4
	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$	$x_8$	0	2	0	0	0	0,5	2	1	0
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		0	15	0	0	0	4	13	0	$Z - 23$

Responda:

1. Qual a composição da ração ótima e sua riqueza com respeito aos nutrientes examinados?
2. O distribuidor da ração B a oferece gratuitamente, a título de experimentação. Do ponto de vista econômico, o criador deve aceitar a oferta e mudar a ração final planejada? Por quê?
3. Para as fêmeas que estão amamentando, o teor máximo de carboidrato na ração pode chegar a 32 unidades. Qual seria a mudança no custo da ração final para estes animais, dado que a base ótima não muda?
4. Uma ração final menos rica em proteína seria mais cara, mais barata, ou não afetaria o custo? Por quê?

5. Qual o custo mínimo de uma ração final que seja menos rica em uma unidade de gordura? Até que limite mínimo de teor de gordura garante-se esta mesma taxa de variação no custo?
6. Existe um limite máximo de custo a partir do qual a ração C não seria mais usada na ração final? Qual?

8.24. Neste mês a empresa AuAu dispõe de 2000 horas para produzir cachorrinhos de pelúcia em três tamanhos (miniatura, médio e grande). Quanto maior o tamanho do brinquedo, maior o lucro obtido. Duas etapas são críticas no processo de produção: o enchimento e o revestimento. A empresa possui em estoque 500m<sup>2</sup> de material para revestimento, do qual deseja usar pelo menos a metade para liberação de espaço. Por outro lado, o fornecedor do enchimento pode oferecer no máximo 400Kg do material. O modelo abaixo estabelece o plano de produção do mês que maximiza o lucro total (em reais). Sua solução é apresentada em seguida, no quadro simplex (de minimização), onde  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$  são as folgas das restrições na ordem apresentada.

max	$9x_1 + 20x_2 + 36x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
s.a:	$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 400$	$x_6$	1	0	0	-7	-6	1	700
	$0,5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 250$	$x_3$	0	0	1	-0,5	-1	0	50
	$5x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 2000$	$x_2$	0,5	1	0	1,5	2	0	100
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		1	0	0	12	4	0	$Z + 3800$

Responda (certifique-se de que as mudanças respeitam os intervalos em que a base não muda):

1. Qual o plano ótimo de produção e quanto será usado de cada recurso?
2. Acrescentando uma coleirinha personalizada, que custa R\$ 0,20, ao brinquedo tamanho miniatura, o fabricante consegue aumentar seu preço de venda em R\$ 1. Esta mudança tornaria a sua fabricação recomendada?
3. O material para enchimento pode ser adquirido de um outro fornecedor que cobra R\$ 10 a mais por cada Kg. Seria interessante adquirir esse material? Por quê?
4. Em lugar de obrigar a liberação do espaço, a empresa poderia alugar espaço extra. Qual o maior valor de aluguel que ela estaria disposta a pagar pelo espaço equivalente ao que seria liberado por 1m<sup>2</sup> do material para revestimento?
5. Caindo a margem de lucro do modelo grande, ele deixaria de ser fabricado? A partir de qual valor de lucro isso aconteceria?

8.25. Uma pequena fábrica de bebidas deseja produzir cerveja clara e escura e licor para abastecer a sua clientela. As bebidas são produzidas a partir de três insumos: malte, lúpulo e levedura, cujos estoques são de 500, 250 e 250 quilogramas respectivamente. Atualmente, os preços de venda por litro de cerveja clara, escura e licor são de R\$1, R\$2 e R\$3 respectivamente. Admite-se ainda que a demanda mínima de cerveja é de 120 litros. Considerando-se os estoques disponíveis e os requisitos de cada insumo por litro de bebida (em particular as três bebidas demandam a mesma quantidade de levedura), formula-se o seguinte modelo de PL para maximizar a receita esperada. Sua solução ótima é apresentada ao lado, onde  $x_4$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  e  $x_7$  são as folgas das restrições na ordem especificada no modelo.

max	$x_1 + 2x_2 + 3x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
s.a:	$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 500$	$x_3$	0	0	1	0	0	0,5	1	5
	$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 250$	$x_2$	0	1	0	0	0,5	-0,5	-0,5	60
	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 250$	$x_1$	1	0	0	0	-0,5	0,5	-0,5	60
	$x_1 + x_2 \geq 120$	$x_4$	0	0	0	1	-1	-3	-5	100
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		0	0	0	0	0,5	1	1,5	$Z + 195$

Responda (certifique-se de que as mudanças respeitam os intervalos em que a base não muda):

1. Com R\$5, o fabricante pode comprar alternativamente 20Kg de malte, 10Kg de lúpulo ou 6 Kg de levedura. Se ele vai comprar apenas uma das matérias-primas, como deveria aplicar o dinheiro? Por quê?
2. No inverno a demanda mínima de cerveja diminui e passa para 100 litros. Essa mudança é favorável aos objetivos do fabricante? Por quê?

3. Qual seria o novo plano de produção caso a cerveja escura passasse a ser vendida por apenas R\$1? E qual seria a receita esperada?
4. Até que limite de lucro do licor só seriam produzidos 5l dessa bebida?

8.26. Uma prefeitura deseja que a merenda escolar que fornece satisfaça certos requisitos de vitaminas A, C e D e tenha custo mínimo. Quatro alimentos básicos são considerados na composição da merenda: leite desnatado, carne bovina, peixe e uma salada variada. Os requisitos mínimos das vitaminas A e D na merenda são respectivamente 6,5mg e 84mg. Já a quantidade de vitamina C pode variar entre 23mg e 41mg. Os custos dos alimentos são: R\$ 1.2 por litro de leite, R\$ 6 por Kg de carne, R\$ 5 por Kg de peixe, R\$ 1,2 por 100g de salada. Exige-se um mínimo de 150 ml de leite. Considerando a constituição de cada alimento, um modelo de PL para o problema é sugerido abaixo, com o valor da função objetivo expresso em reais. A solução ótima do problema é apresentada em seguida, sendo  $x_5, x_6, x_7, x_8$  e  $x_9$  as folgas das restrições, conforme ordem no modelo. As colunas referentes às variáveis básicas foram suprimidas.

				VB	$x_3$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
min	$1,2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 1,2x_4$								
s.a:	$5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 10x_4 \geq 6,5$			$x_2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{2}$	0,175
	$25x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4 \geq 23$			$x_4$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{6}$	1,125
	$25x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4 \leq 41$			$x_6$	0	1	0	0	18
	$40x_1 + 60x_2 + 10x_3 + 60x_4 \geq 84$			$x_5$	$-\frac{25}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6}$	7,25
	$x_1 \geq 0,15$			$x_1$	0	0	0	-1	0,15
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$				7,2	0,48	0,26	2,8	$Z - 2,58$

1. Como variaria o custo da merenda em cada uma das seguintes situações:
  - i) Aumenta-se o requisito mínimo de vitamina A para 8 mg.
  - ii) O requisito máximo de vitamina C é reduzido de 5mg.
  - iii) Aumenta-se o requisito mínimo de vitamina D para 94mg.
  - iv) Retira-se a restrição da quantidade mínima de leite (substitua  $x_1 \geq 0,15$  por  $x_1 \geq 0$ ).
  - v) O preço do leite aumenta em 50%.
2. A prefeitura consegue uma doação de grande quantidade de peixe. Neste caso, seria interessante, do ponto de vista econômico, incluí-lo na merenda? Por quê?
3. Entre que limites o preço da carne pode variar, de modo que a composição da merenda não mude?

8.27. Determine o dual do problema de fluxo máximo (Exemplo 1.3.2) e compare-o com o problema de corte mínimo (Exemplo 1.3.3). Argumente que o valor de um fluxo máximo é igual a capacidade de um corte mínimo.

8.28. Sejam  $A = [a_{ij}] \in \{0,1\}^{n \times n}$  uma matriz quadrada, com valores binários 0-1, e  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  o conjunto de índices das linhas e colunas de  $A$ . Seja  $Z = \{(i, j) \in I \times I : a_{ij} = 0\}$  o conjunto das “células nulas” de  $A$ . Diz-se que  $S \subseteq Z$  é um conjunto de células nulas independentes de  $A$  se não existem duas células em  $S$  em uma mesma linha ou coluna. Por outro lado, uma cobertura das células nulas de  $A$  é um par  $(L, C)$ , com  $L \subseteq I$  e  $C \subseteq I$ , de subconjuntos de linhas e colunas que contêm todas as células nulas de  $A$ , ou seja,  $Z \subseteq (L \times I) \cup (I \times C)$  (todas as células de  $Z$  estão em linhas indexadas por  $L$  ou colunas indexadas por  $C$ ). Formule os problemas de encontrar um conjunto máximo de células nulas independentes e de determinar uma cobertura mínima de células nulas por meio de modelos de programação inteira 0-1 cujas relaxações lineares formem um par primal-dual. Sabendo que as restrições de integralidade em ambos os modelos podem ser substituídas simplesmente por condições de não negatividade das variáveis, argumente que o máximo número de células nulas independentes é igual ao mínimo número de linhas horizontais e verticais que cobrem todas as células nulas.

8.29. Considere o seguinte problema de dieta. Uma família deseja minimizar seu custo com alimentação, escolhendo, dentre  $n$  tipos de alimentos primários, uma certa quantidade de cada um, de modo a atender requisitos mínimos de  $m$  vitaminas. Suponha que o alimento  $j \in \{1, \dots, n\}$



provê  $a_{ij}$  unidades da vitamina  $i \in \{1, \dots, m\}$ , sendo que pelo menos  $b_i$  unidades dessa vitamina precisam ser supridas pela dieta. Sabendo que o custo unitário do alimento  $j$  é  $c_j$  reais, formule o problema (primal) para determinar a dieta de custo mínimo. Determine o problema dual e proponha uma interpretação no seguinte contexto: uma indústria de suplementos alimentares deseja convencer a família a substituir, como fonte de vitaminas, os alimentos por pílulas que fabrica. Apresente também uma interpretação para as condições de folgas complementares.

## Capítulo 9

# Método Dual Simplex

O estudo de dualidade nos fornece elementos que ensejam um método alternativo ao simplex para a resolução de problemas de programação linear. Neste capítulo, apresentamos tal método, o dual simplex. O algoritmo geral é descrito na primeira seção, seu funcionamento é ilustrado e interpretado geometricamente com exemplos nas duas seções seguintes, e sua corretude é demonstrada na Seção 9.4. Assim como no (primal) simplex, a execução do algoritmo parte de uma solução básica viável, neste caso para o dual. A integração desse passo ao algoritmo é o foco da Seção 9.5, que descreve o procedimento completo.

### 9.1 Descrição do método

Consideremos o seguinte PPL ( $P$ ) e seu dual ( $D$ ):

$$\begin{array}{ll} (P) \min & c^\top x \\ \text{s.a:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (D) \max & b^\top u \\ \text{s.a:} & A^\top u \leq c \end{array}$$

Como sabemos, uma base ótima  $A_B$  deve satisfazer simultaneamente as seguintes condições:

1. viabilidade primal:  $\bar{b} := A_B^{-1}b \geq 0$
2. viabilidade dual:  $\bar{c}^\top := c^\top - c_B^\top A_B^{-1}A \geq 0$

A primeira condição assegura viabilidade para a solução básica primal  $x_N^* = 0$ ,  $x_B^* = A_B^{-1}b$ , enquanto a segunda garante que a solução  $(u^*)^\top = c_B^\top A_B^{-1}$  é dual viável. Além disso, essas soluções têm o mesmo valor  $c^\top x^* = c_B^\top A_B^{-1}b = b^\top u^*$ , sendo, portanto, ótimas.

A estratégia do método simplex para encontrar uma base ótima consiste em:

- determinar uma sequência de bases viáveis para o primal, até obter uma que seja também viável para o dual;
- garantir a convergência pela melhoria da função objetivo primal.

Uma ideia alternativa para obter o mesmo resultado seria:

- determinar uma sequência de bases viáveis para o dual, até obter uma que seja também viável para o primal;
- garantir a convergência pela melhoria da função objetivo dual.

Na verdade, essa segunda estratégia corresponde a aplicar o método simplex ao problema dual. Entretanto, quando ela é desenvolvida sobre o problema primal, geramos o método dual-simplex.

Para descrevê-lo, precisamos essencialmente estabelecer como se faz a mudança, no primal, de uma base dual viável para outra base dual viável, melhorando o valor da função dual das soluções correspondentes. Aqui estamos chamando de dual viável uma base do primal cujos custos reduzidos são uma solução dual viável.

Consideremos então o quadro canônico relativo a uma base dual viável  $A_B$ , dado abaixo. Temos, portanto,  $\bar{c}_j \geq 0$ , para todo  $j \in N$ . Suponhamos que uma nova base dual viável  $A_{\hat{B}}$  seja obtida, fazendo  $\hat{B} = (B \setminus B(r)) \cup \{k\}$ . As operações elementares para determinação do quadro canônico relativo a  $A_{\hat{B}}$  estão indicadas a seguir:

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$		
$x_{B(1)}$	1 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} \cdots \bar{a}_{1k} \cdots \bar{a}_{1N(n-m)}$	$\bar{b}_1$	$L_1 \leftarrow L_1 - \bar{a}_{1k} L'_r$
$\vdots$	$\ddots \quad \ddots$	$\ddots \quad \ddots$	$\vdots$	
$x_{B(r)}$	0 $\cdots$ 1 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{rN(1)} \cdots \bar{a}_{rk} \cdots \bar{a}_{rN(n-m)}$	$\bar{b}_r$	$L_r \leftarrow L'_r = \frac{1}{\bar{a}_{rk}} L_r$
$\vdots$	$\ddots \quad \ddots$	$\ddots \quad \ddots$	$\vdots$	
$x_{B(m)}$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} \cdots \bar{a}_{mk} \cdots \bar{a}_{mN(n-m)}$	$\bar{b}_m$	$L_m \leftarrow L_m - \bar{a}_{mk} L'_r$
	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} \cdots \bar{c}_k \cdots \bar{c}_{N(n-m)}$	$Z - u^\top b$	$L_{m+1} \leftarrow L_{m+1} - \bar{c}_k L'_r$

Com as operações de pivoteamento, chegamos ao novo quadro:

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$		
$x_{B(1)}$	1 $\cdots -\frac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} - \frac{\bar{a}_{1k}\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0 $\cdots \bar{a}_{1N(n-m)} - \frac{\bar{a}_{1k}\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$\bar{b}_1 - \frac{\bar{a}_{1k}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	
$\vdots$	$\ddots \quad \ddots$	$\ddots \quad \ddots$	$\vdots$	
$x_k$	0 $\cdots \frac{1}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0	$\frac{\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 1 $\cdots \frac{\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	
$\vdots$	$\ddots \quad \ddots$	$\ddots \quad \ddots$	$\vdots$	
$x_{B(m)}$	0 $\cdots -\frac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} - \frac{\bar{a}_{mk}\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0 $\cdots \bar{a}_{mN(n-m)} - \frac{\bar{a}_{mk}\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$\bar{b}_m - \frac{\bar{a}_{mk}\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	
	0 $\cdots -\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rN(1)}}{\bar{a}_{rk}} \cdots$ 0 $\cdots \bar{c}_{N(n-m)} - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rN(n-m)}}{\bar{a}_{rk}}$	$Z - u^\top b - \frac{\bar{c}_k\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$	

A questão é, portanto, como deve ser feita a escolha das variáveis  $x_k$  e  $x_{B(r)}$  a entrar e sair da base, respectivamente, de modo a garantir que  $A_{\hat{B}}$  seja, de fato, uma base definindo uma solução dual viável melhor. Mais precisamente, desejamos que:

1.  $-\frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \geq 0$ ;
2.  $\bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \geq 0$ , para todo  $j \in N \setminus \{k\}$ ;
3.  $\frac{\bar{c}_k\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} > 0$ .

Os dois primeiros itens garantem que os novos custos reduzidos sejam não negativos, isto é, a nova base também seja dual viável. O terceiro item é necessário para termos o valor da nova solução dual,  $u^\top b + \frac{\bar{c}_k\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$ , maior que o valor da anterior,  $u^\top b$ .

Lembramos que  $\bar{c}_j \geq 0$ , para todo  $j \in N$ , visto que  $A_B$  é base dual viável. Assim, para obtermos 1, precisamos de

$$\bar{a}_{rk} < 0, \quad (9.1)$$

ou seja, o elemento pivô deve ser negativo. Para garantirmos 2, consideramos dois casos:

- $\bar{a}_{rj} \geq 0$ : Como  $\bar{c}_j \geq 0$ ,  $\bar{c}_k \geq 0$  e  $\bar{a}_{rk} < 0$ , temos trivialmente  $\bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \geq 0$ ;
- $\bar{a}_{rj} < 0$ : Então  $\bar{c}_j - \frac{\bar{c}_k\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rk}} \geq 0$  equivale a  $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} - \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{rk}} \leq 0$ , ou melhor,

$$\frac{\bar{c}_k}{-\bar{a}_{rk}} \leq \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{rj}}.$$

Portanto, devemos ter

$$\frac{\bar{c}_k}{-\bar{a}_{rk}} = \min_{j \in N} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0 \right\}. \quad (9.2)$$

Finalmente, para assegurarmos 3, devemos ter

$$\bar{b}_r < 0. \quad (9.3)$$

Vale destacar ainda que, se  $\bar{b}_r < 0$  e  $\bar{a}_{rj} \geq 0$ , para todo  $j \in N$ , a  $r$ -ésima equação do quadro canônico relativo à base  $A_B$ , qual seja,

$$x_{B(r)} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r$$

mostra que o problema é inviável, pois  $x_j \geq 0$ , para todo  $j \in J$ .

As deduções apresentadas acima levam ao seguinte algoritmo, conhecido como dual-simplex:

---

**Algoritmo 5:** ALGORITMO DUAL-SIMPLEX

---

**Entrada:**  $A, b, c$

**Saída:** Solução ótima ou Problema inviável

**0 início**

- 1** | Determine  $(B, N)$  tal que  $A_B$  é base dual viável<sup>a</sup>
- 2** | Calcule  $\bar{b} = A_B^{-1}b$ ,  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N$  e  $\bar{A}_N = A_B^{-1}A_N$
- 3** | **se**  $\bar{b} \geq 0$  **então Pare:**  $x_N = 0$ ,  $x_B = \bar{b}$  é solução ótima;
- 4** | Seja  $r \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $\bar{b}_r < 0$
- 5** | **se**  $\bar{a}_{rj} \geq 0 \ \forall j \in N$  **então Pare:** Problema inviável;
- 6** | Seja  $\frac{\bar{c}_k}{-\bar{a}_{rk}} = \min_{j \in N} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{-\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$
- 7** | Faça  $B \leftarrow (B \setminus \{B(r)\}) \cup \{k\}$ ,  $N \leftarrow (N \setminus \{k\}) \cup \{B(r)\}$  e volte a 2

**8 fim**

---

<sup>a</sup>Primeira fase do dual-simplex a ser vista posteriormente.

No passo 3, dado que a base  $A_B$  já é dual viável, a condição  $\bar{b} \geq 0$  garante também viabilidade primal e, por conseguinte, que  $A_B$  define uma solução ótima. A escolha do índice  $r$  da variável  $x_{B(r)}$  a sair da base, no passo 4, está de acordo com (9.3), possibilitando a melhoria da função objetivo dual. Escolhida essa variável, se a  $r$ -ésima linha do quadro só tem elementos não negativos, então, como vimos, o primal é inviável e, neste caso, o dual é ilimitado (pois estamos supondo que existe uma base dual viável). Essa é a conclusão do passo 5. Caso exista pelo menos um elemento negativo nessa linha, a escolha da variável a entrar na base,  $x_k$ , ocorre no passo 6, seguindo a razão mínima inferida em (9.2). Note que o pivô será negativo, conforme (9.1).

Observações similares àquelas feitas com o algoritmo simplex podem ser apresentadas aqui com respeito ao Algoritmo 5. No passo 4, podemos escolher qualquer variável básica com valor negativo para sair da base, de modo a garantir a correteza do processo. Todavia, essa escolha influencia o número de iterações do algoritmo. Analogamente à regra de Dantzig, uma heurística usual é escolher  $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ . Quanto à existência de mais de um índice  $k$  retornando a razão mínima no passo 6, podemos perceber que a próxima solução dual será degenerada (todos os custos reduzidos associados a esses índices terão valor nulo). É possível usar uma regra lexicográfica, usando as outras linhas do quadro como critério de desempate, de modo a garantir a convergência do algoritmo.

## 9.2 Aplicação a um exemplo

Considere o seguinte PPL

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 \\ \text{s.a:} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 4 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

cujo dual é:

$$\begin{array}{llll} \max & 3u_1 & + & 4u_2 & = & Z_D \\ \text{s.a:} & u_1 & + & 2u_2 & \leq & 2 \\ & 2u_1 & - & u_2 & \leq & 3 \\ & u_1 & + & 3u_2 & \leq & 4 \\ & u_1 \geq 0, & u_2 \geq 0 \end{array}$$

Acrescentando as variáveis de folga no problema primal e multiplicando suas restrições por  $-1$ , chegamos a

$$\begin{array}{llllllll} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & = & Z \\ \text{s.a:} & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ & -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & + & x_5 & = & -4 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x_4 \geq 0, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

A multiplicação por  $-1$  tem por objetivo obter uma identidade como submatriz da matriz de restrições. Ela será escolhida como base inicial. O fato de ter elementos negativos no termo independente das restrições não é impeditivo para aplicação dual simplex, como era para o (primal) simplex.

Transferindo esse problema para o quadro, obtemos

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	-1	-2	-1	1	0	-3
$x_5$	-2	1	-3	0	1	-4
	2	3	4	0	0	$Z$
				$u_1$	$u_2$	

Observamos que  $A_{\{4,5\}} = I$  é uma base dual viável, que define a solução  $(u_1, u_2) = (0, 0)$  de valor  $Z_D = 0$  (lembramos que os custos reduzidos de  $x_4$  e  $x_5$  definem  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente). Podemos então aplicar o dual-simplex a partir desse quadro. Percebemos que essa base não é primal viável, pois ambas as variáveis básicas são negativas. Assim, podemos escolher  $x_4$  ou  $x_5$  para sair da base. Optando por  $x_5$  (a variável mais negativa), percebemos que a linha associada a essa variável possui elementos negativos. Para determinar a mudança de base, calculamos então a razão mínima

$$\min \left\{ \frac{2}{-(-2)}, \frac{4}{-(-3)} \right\} = 1,$$

implicando que  $x_1$  deve ser a variável a entrar na base, de modo a gerar outra base dual viável.

As operações de pivoteamento estão indicadas no quadro abaixo:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	-1	-2	-1	1	0	-3 $L_1 \leftarrow L_1 + L'_2$
$x_5$	-2	1	-3	0	1	-4 $L_2 \leftarrow L'_2 = -\frac{1}{2}L_2$
	2	3	4	0	0	$Z$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

Após essas operações, o quadro torna-se

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
	0	4	1	0	1	$Z - 4$
				$u_1$	$u_2$	

A nova base define a solução dual viável  $(u_1, u_2) = (0, 1)$  de valor  $Z_D = 4$ . Essa solução é melhor para o dual que a anterior, porém ainda não é ótima, já que a base não é primal viável. Podemos escolher  $x_4$  para sair da base. A razão mínima agora é:

$$\min \left\{ \frac{4}{-(-5/2)}, \frac{1}{-(-1/2)} \right\} = \frac{8}{5},$$

indicando que a variável  $x_2$  deve entrar na base.

As operações elementares a serem realizadas para a obtenção da nova forma canônica estão apontadas abaixo:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1 $L_1 \leftarrow L'_1 = -\frac{2}{5}L_1$
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2 $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L'_1$
	0	4	1	0	1	$Z - 4$ $L_3 \leftarrow L_3 - 4L'_1$

Após essas operações, obtemos:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$x_1$	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$Z - \frac{28}{5}$
				$u_1$	$u_2$	

Chegamos assim a uma base simultaneamente primal e dual viável e, portanto, ótima. A solução dual é  $(u_1, u_2) = (\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$  e a solução primal é  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0)$ , com valor  $Z = Z_D = \frac{28}{5}$ .

### 9.3 Interpretação geométrica

Consideremos o PPL resolvido na seção anterior. Eliminando a variável  $x_3$ , o primal e seu dual tornam-se:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & 3u_1 + 4u_2 = Z_D \\ \text{s.a:} & u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ & 2u_1 - u_2 \leq 3 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Posto que a variável  $x_3$  não entrou na base em qualquer passo da resolução apresentada na seção anterior, a aplicação do dual simplex ao novo problema primal geraria a mesma sequência de quadros (agora sem  $x_3$ ):

I	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$		II	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$		III	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_5$	
$x_4$	-1	-2	1	0	-3	$x_4$	0	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$x_2$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$x_5$	-2	1	0	1	-4	$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2	$x_1$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
	2	3	0	0	$Z$		0	4	0	1	$Z - 4$		0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$Z - \frac{28}{5}$
			$u_1$	$u_2$					$u_1$	$u_2$					$u_1$	$u_2$	

A Figura 9.1 identifica os pontos primais e duais definidos pelos quadros I, II e III acima. No espaço primal  $(x_1, x_2)$ , os dois primeiros pontos gerados são inviáveis e o terceiro, viável. No espaço dual  $(u_1, u_2)$ , os pontos gerados não viáveis. Note que o ponto I marcado no espaço primal e o ponto I indicado no espaço dual são soluções básicas complementares, no sentido do teorema de folgas. O mesmo acontece com os pontos II e III.

Nesse sentido, o dual simplex gera uma sequência de soluções básicas, viáveis para o dual, e uma sequência de soluções básicas complementares correspondentes, todas primal inviáveis, a menos da última, que será viável para o primal e, por conseguinte, ótima. Assim, enquanto o primal simplex percorre pontos viáveis para o primal, cada vez melhores para a função objetivo primal, o dual simplex passeia por pontos inviáveis para o primal, cada vez piores para a função primal, mas que seguem reduzindo a inviabilidade.

A Figura 9.1 também apresenta a direção e sentido dos gradientes das restrições ativas e das funções objetivos de cada problema. Observe que, em cada ponto enumerado no espaço primal, os gradientes das restrições ativas equilibram o vetor  $-c$ , o que indica que esses pontos são complementares a soluções dual viáveis. Por outro lado, no espaço dual, apenas o último ponto, III, tem os gradientes das restrições ativas equilibrando o vetor  $b$  (gradiente da função objetivo de maximização). Isso porque apenas esse ponto é ótimo dual.

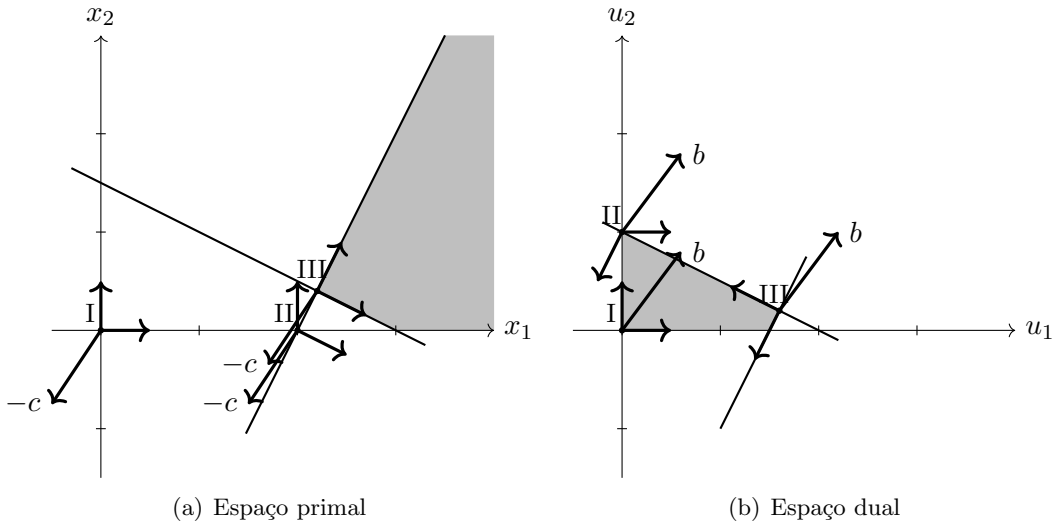


Figura 9.1: Soluções primal e dual complementares geradas pelo dual simplex

## 9.4 Corretude do dual-simplex

De uma iteração para outra do método dual-simplex, a função dual se altera de  $\delta = \bar{c}_k \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$ , onde  $x_k$  e  $x_{B(r)}$  são as variáveis que entra e sai da base  $A_B$ , respectivamente. Como  $\bar{c}_k \geq 0$ ,  $\bar{b}_r < 0$  e  $\bar{a}_{rk} < 0$ , temos que  $\delta \geq 0$ . Mais ainda,  $\delta > 0$  na ausência de degeneração dual, posto que

$\bar{c}_k > 0$  nesse caso. Sendo assim, sob essa hipótese, a função dual cresce monotonamente ao longo das iterações, de modo que bases não são repetidas ao longo do processo e, por conseguinte, o algoritmo eventualmente pára. Nesse momento, temos uma das seguinte situações:

- $\bar{b}_r < 0$  e  $\bar{a}_{rj} \geq 0$  para todo  $j \in N$ . Nesse caso, com as operações de pivoteamento, a  $r$ -ésima restrição de  $(P)$  tornou-se

$$x_{B(r)} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{rj} x_j = \bar{b}_r.$$

Como  $x_j \geq 0$ , para todo  $j \in N$ , em qualquer solução viável, concluímos que não é possível satisfazer a equação acima. Em outros termos,  $(P)$  é inviável.

- $\bar{b} \geq 0$ . Além de todas as bases geradas serem dual viáveis, nesse momento temos que a base é também primal viável. Além disso, as soluções primal e dual por ela geradas têm o mesmo valor, sendo, pois, ótimas.

A análise dos casos acima mostra que, ao parar, o dual simplex apresenta uma conclusão correta sobre problema original. Sendo assim, na ausência de degeneração dual, o método dual-simplex converge e retorna uma resposta correta. Na presença de degeneração, esse resultado pode ser obtido, aplicando o critério lexicográfico para evitar a repetição de bases. A aplicação desse critério não será detalhada aqui.

A correteza do algoritmo dual também poderia ser analisada de forma similar àquela demonstrada para o algoritmo primal, considerando que ele, na verdade, resolve o problema dual. Os passos para essa análise alternativa tomam por base os exercícios 9.6, 9.7 e 9.8.

## 9.5 Solução básica dual viável inicial

Analogamente ao método (primal) simplex, o dual-simplex necessita inicialmente de uma base dual viável. Nem sempre a identificação de uma tal base é trivial. Na verdade, ela pode nem existir se o problema primal for ilimitado, o que implica o dual inviável.

Uma estratégia para iniciar o dual-simplex é adicionar ao problema primal uma restrição que limite superiormente a soma das variáveis. Vejamos com esse processo funciona, primeiramente com um exemplo.

Consideremos o exemplo da Seção 9.2, agora com a função objetivo modificada como segue.

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Com a inclusão das variáveis de folga e multiplicação das restrições por -1 para obter uma identidade como submatriz de  $A$ , obtemos

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & & = & Z \\ \text{s.a:} \quad & -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & & = & -3 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 & & + & x_5 = -4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Note que a base  $A_{\{4,5\}} = I$  tornou-se dual inviável após a mudança na função objetivo (já não era primal viável). Vamos acrescentar a restrição

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq M,$$



que limita a soma das variáveis não básicas e, por conseguinte, de todas as variáveis. Com isso garantimos que o problema primal não é ilimitado, possibilitando viabilidade do dual. O valor de  $M$  é suficientemente grande, de modo que essa restrição não elimine nenhum vértice do conjunto viável (caso não vazio). Na verdade, não vamos especificar um valor para  $M$ , mas sempre que formos operar com ele, admitiremos que se trata de um valor maior que todos os envolvidos na operação.

Adicionando à restrição uma variável de folga não negativa,  $x_6$ , e transferindo o problema para o quadro simplex, temos:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	-1	-2	-1	1	0	0	-3
$x_5$	-2	1	-3	0	1	0	-4
$x_6$	1	1	1	0	0	1	$M$
	-2	-3	4	0	0	0	$Z$

A base trivial definida pelas variáveis de folga não é dual viável. Vamos então fazer uma mudança de base, entrando com a variável de custo mais negativo,  $x_2$ , e saindo com a variável de folga da restrição artificial  $x_6$ . As operações estão indicadas abaixo.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	-1	-2	-1	1	0	0	-3 $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$
$x_5$	-2	1	-3	0	1	0	-4 $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$x_6$	1	1	1	0	0	1	$M$ $L_3 \leftarrow L_3$
	-2	-3	4	0	0	0	$Z$ $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3$

Essa mudança de base é proposital. Note que o fato de termos escolhido a variável com custo reduzido mais negativo para entrar na base e a variável de folga da restrição artificial para sair da base faz com que os novos custos reduzidos tornem-se, todos, não negativos, ou melhor, que a nova base seja dual viável, como mostra o quadro resultante a seguir.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	1	0	1	1	0	2	$-3 + 2M$
$x_5$	-3	0	-4	0	1	-1	$-4 - M$
$x_2$	1	1	1	0	0	1	$M$
	1	0	7	0	0	3	$Z + 3M$

Como  $M$  é um valor positivo grande, os valores das variáveis básicas são  $-3 + 2M > 0$ ,  $-4 - M < 0$  e  $M > 0$ . Logo, a solução básica acima não é primal viável, sendo  $x_5$  a única candidata a deixar a base. Pelo cálculo da razão mínima, concluímos que  $x_1$  entra na base. As operações para mudança de base são as seguintes:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	1	0	1	1	0	2	$-3 + 2M$ $L_1 \leftarrow L_1 - L'_2$
$x_5$	-3	0	-4	0	1	-1	$-4 - M$ $L_2 \leftarrow L'_2 = -\frac{1}{3}L_2$
$x_2$	1	1	1	0	0	1	$M$ $L_3 \leftarrow L_3 - L'_2$
	1	0	7	0	0	3	$Z + 3M$ $L_4 \leftarrow L_4 - L'_2$

A forma canônica relativa à nova base dual viável é assim obtida:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-13+5M}{3}$
$x_1$	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4+M}{3}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-4+2M}{3}$
	0	0	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$Z + \frac{-4+8M}{3}$

Note que  $\bar{b} \geq 0$ , para todo  $M \geq \frac{13}{5}$ . Logo, para todo  $M \geq \frac{13}{5}$ , a solução  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{4+M}{3}, \frac{-4+2M}{3}, 0)$  é viável para o problema original e tem valor  $Z = \frac{4-8M}{3}$ . Assim, se fizermos  $M \rightarrow +\infty$  temos  $Z \rightarrow -\infty$ . Em outras palavras, eliminando a restrição artificial, podemos encontrar uma sequência infinita de pontos viáveis para o problema original ao longo da qual a função objetivo decresce. Logo, o problema é ilimitado e seu dual inviável.

Observe que a solução acima não é um vértice do problema original, mas um vértice deste acrescido da restrição artificial. À medida que aumentamos o valor de  $M$ , esse vértice vai se deslocando ao longo de uma direção de recessão e descida do problema original.

Considere agora o mesmo problema mas com a função objetivo  $Z = 6x_1 - 3x_2 + 10x_3$ . Nesse caso, após troca de  $x_6$  por  $x_2$  na base, o quadro simplex é:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	1	0	1	1	0	2	$-3 + 2M$
$x_5$	-3	0	-4	0	1	-1	$-4 - M$
$x_2$	1	1	1	0	0	1	$M$
	9	0	13	0	0	3	$Z + 3M$

Novamente, saímos com  $x_5$  da base e entramos com  $x_1$ , gerando um quadro igual ao do problema anterior, exceto pela linha da função objetivo, ou seja,

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-13+5M}{3}$
$x_1$	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4+M}{3}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-4+2M}{3}$
	0	0	1	0	3	0	$Z - 12$

Novamente, para todo  $M \geq \frac{13}{5}$ , temos uma solução viável para o problema original. Todavia, o valor da função objetivo agora se mantém constante, não dependendo de  $M$ . Em outras palavras, à medida que aumentamos o valor de  $M$  e deslocamos a restrição artificial, obtemos uma sequência de pontos de mesmo valor, indicando que tal restrição, embora ativa, não está limitando o decrescimento da função objetivo primal. Nesse caso, essas soluções são ótimas para o problema original.

Na verdade, temos nesse caso uma degeneração dual, sendo nulo o custo reduzido da variável de folga da restrição artificial. Então, entrando com  $x_6$  na base e saindo com  $x_4$  (a primeira variável que se anula com o aumento de  $M$ ), obtemos um novo quadro ótimo:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_6$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{-13}{5} + M$
$x_1$	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{11}{5}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
	0	0	1	0	3	0	$Z - 12$

Para  $M > \frac{13}{5}$ , temos que a restrição artificial é inativa (pois  $x_6 > 0$ ), indicando que a primeira linha do quadro poderia ser removida. Como isso, teríamos agora a solução ótima representada por uma base do problema original, a mesma base ótima encontrada na Seção 9.2.

Os passos realizados acima nos três exemplos podem ser aplicados a um PPL qualquer. De forma geral, considere uma base  $A_B$  do PPL

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad c^\top x \\ & \text{s.a:} \quad Ax = b \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Tal base pode ser obtida escalonando a matriz  $A$ , ao mesmo tempo em que obtemos a forma canônica relativa a  $A_B$ :

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$	
$x_{B(1)}$	1 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} \cdots \bar{a}_{1k} \cdots \bar{a}_{1N(n-m)}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{B(r)}$	0 $\cdots$ 1 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{rN(1)} \cdots \bar{a}_{rk} \cdots \bar{a}_{rN(n-m)}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{B(m)}$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} \cdots \bar{a}_{mk} \cdots \bar{a}_{mN(n-m)}$	$\bar{b}_m$
	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} \cdots \bar{c}_k \cdots \bar{c}_{N(n-m)}$	$Z - c^1 \bar{b}$

Suponha que  $A_B$  não seja dual viável, do contrário já podemos começar o método dual simplex. Acrescentemos a  $(P)$  a restrição artificial

$$\sum_{j \in N} x_j \leq M, \quad (9.4)$$

onde  $M$  é um parâmetro que admite valores suficientemente grandes, de modo que todo vértice de  $X = \{x \geq 0 : Ax = b\}$  satisfaça (9.4). Note que essa restrição limita o valor das variáveis não básicas  $x_N$ , que são não negativas, e, conseqüentemente, também o valor das variáveis básicas  $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ . Dessa forma, o problema assim obtido, qual seja,

$$\begin{aligned} (P^M) \quad & \min \quad c^\top x \\ & \text{s.a:} \quad Ax = b \\ & \quad \sum_{j \in N} x_j + x_{n+1} = M \\ & \quad x \geq 0, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

não pode ser ilimitado.

Usando a variável de folga  $x_{n+1}$  da nova restrição como básica, conseguimos uma base dual inviável para  $(P^M)$ , cuja forma canônica é trivialmente obtida a partir do quadro relativo a  $A_B$ :

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$	$x_{n+1}$	
$x_{B(1)}$	1 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} \cdots \bar{a}_{1k} \cdots \bar{a}_{1N(n-m)}$	0	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(r)}$	0 $\cdots$ 1 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{rN(1)} \cdots \bar{a}_{rk} \cdots \bar{a}_{rN(n-m)}$	0	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(m)}$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} \cdots \bar{a}_{mk} \cdots \bar{a}_{mN(n-m)}$	0	$\bar{b}_m$
$x_{n+1}$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	1 $\cdots$ 1 $\cdots$ 1	1	$M$
	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} \cdots \bar{c}_k \cdots \bar{c}_{N(n-m)}$	0	$Z - c^1 \bar{b}$

Seja  $\bar{c}_k = \min\{\bar{c}_j : j \in J\}$ . Note que  $\bar{c}_k < 0$ , pois  $A_B$  não é dual viável. Realizando uma mudança de base, com a entrada de  $x_k$  e saída  $x_{n+1}$ , obtemos uma base dual viável para  $(P^M)$ . De fato, percebemos na forma canônica relativa à nova base, apresentada abaixo, que todos os custos reduzidos tornam-se não negativos, devido a  $\bar{c}_k$  ser o menor elemento (negativo).

	$x_{B(1)} \cdots x_{B(r)} \cdots x_{B(m)}$	$x_{N(1)} \cdots x_{N(s)=k} \cdots x_{N(n-m)}$	$x_{n+1}$	
$x_{B(1)}$	1 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{1N(1)} - \bar{a}_{1k} \cdots 0 \cdots \bar{a}_{1N(n-m)} - \bar{a}_{1k}$	$-\bar{a}_{1k}$	$\bar{b}_1 - \bar{a}_{1k}M$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{B(r)}$	0 $\cdots$ 1 $\cdots$ 0	$\bar{a}_{rN(1)} - \bar{a}_{rk} \cdots 0 \cdots \bar{a}_{rN(n-m)} - \bar{a}_{rk}$	$-\bar{a}_{rk}$	$\bar{b}_r - \bar{a}_{rk}M$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{B(m)}$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 1	$\bar{a}_{mN(1)} - \bar{a}_{mk} \cdots 0 \cdots \bar{a}_{mN(n-m)} - \bar{a}_{mk}$	$-\bar{a}_{mk}$	$\bar{b}_m - \bar{a}_{mk}M$
$x_k$	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	1 $\cdots$ 1 $\cdots$ 1	1	$M$
	0 $\cdots$ 0 $\cdots$ 0	$\bar{c}_{N(1)} - \bar{c}_k \cdots 0 \cdots \bar{c}_{N(n-m)} - \bar{c}_k$	$-\bar{c}_k$	$Z - c^1 \bar{b} - \bar{c}_k M$

Essa mudança preliminar de base é fundamental para permitir a aplicação do dual simplex. A partir do quadro obtido, podemos então empregar o método, considerando o parâmetro  $M$  como tendo um valor positivo suficientemente grande. Isso significa que o sinal do multiplicador de  $M$  define o sinal da expressão linear em que ele está envolvido, no momento de escolher qual variável sai da base. Mais precisamente, podemos admitir  $M \geq M_0$ , onde  $M_0$  garante que  $\alpha + \beta M_0$  tem o mesmo sinal de  $\beta$ , independentemente de  $\alpha$ .

Seja  $A'x' = b'$  o sistema de igualdades que define o problema  $(P^M)$ . Seja  $(B, N)$  a partição de  $J \cup \{n+1\}$  tal que  $A'_B$  é a última base obtida com a aplicação do dual simplex. Sejam  $\bar{b}' = (A'_B)^{-1}b'$ ,  $\bar{A}' = (A'_B)^{-1}A'$ . Pelo Algoritmo 5, temos as seguintes situações possíveis:

**Caso 1:**  $\bar{b}'_r < 0$  e  $\bar{a}'_{rj} \geq 0$  para todo  $j \in N$ . Nesse caso, com as operações de pivoteamento, a  $r$ -ésima restrição de  $(P^M)$  tornou-se

$$x'_{B(r)} + \sum_{j \in N} \bar{a}'_{rj} x'_j = \bar{b}'_r.$$

Como  $x'_j \geq 0$ , para todo  $j \in N$ , em qualquer solução viável, concluímos que não é possível satisfazer a equação acima. Em outros termos,  $(P^M)$  é inviável. Além disso, tal inviabilidade não pode ser devida à restrição acrescentada a  $(P)$  para obter  $(P^M)$ , pois  $M$  é grande o suficiente para não eliminar todos os pontos viáveis de  $(P)$ . Logo,  $(P)$  também é inviável.

**Caso 2:**  $\bar{b}' \geq 0$  e a folga da restrição artificial é básica no ótimo de  $(P^M)$ . Como a variável dual associada à restrição artificial é nula, a solução permanece ótima mesmo com a retirada dessa restrição. Isto significa que ela é ótima para o problema original  $(P)$ .

**Caso 3:**  $\bar{b}' \geq 0$  e a folga da restrição artificial é não básica no ótimo de  $(P^M)$ . Aqui há dois subcasos:

**Caso 3.1:** a variável dual associada à restrição artificial é não nula no ótimo. Então, a restrição artificial, de fato, limita  $(P^M)$ , mostrando que o problema  $(P)$  é ilimitado.

**Caso 3.2:** a variável dual associada à restrição artificial é nula no ótimo. Nesse caso, podemos entrar com a variável de folga da restrição artificial na base, sem mudar a solução ótima, obtendo o Caso 2. Isso significa que a solução ótima de  $(P^M)$  também é ótima para  $(P)$ , porém não estava representada por uma base de  $(P)$ .

Os casos 2, 3.1 e 3.2 foram exemplificados com os problemas resolvidos nesta seção.

## 9.6 Exercícios

9.1. Resolva usando o dual simplex. Identifique o conjunto ótimo e aponte se o problema tem única ou múltiplas soluções ótimas, se é inviável ou se é ilimitado.

<p>a) <math>\min 3x_1 + 2x_2 + 2x_3</math>  s.a: <math>5x_1 - x_2 - 5x_3 \geq 0</math>  <math>-x_1 + x_3 \geq 1</math>  <math>x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 1</math>  <math>x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0</math></p>	<p>b) <math>\min 4x_1 + x_2 + 7x_3</math>  s.a: <math>x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3</math>  <math>x_1 + x_3 \geq 2</math>  <math>2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4</math>  <math>x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0</math></p>	<p>c) <math>\min 2x_1 + x_2 + 4x_3</math>  s.a: <math>-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1</math>  <math>-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1</math>  <math>x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0</math></p>
---	---	---

9.2. Resolva usando o dual simplex. Identifique o conjunto ótimo e aponte se o problema tem única ou múltiplas soluções ótimas, se é inviável ou se é ilimitado.

$$\begin{array}{lll}
a) \max -3x_1 - x_2 + 3x_3 & b) \min 9x_1 - 5x_2 + 14x_3 + 3x_4 & c) \max 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
\text{s.a: } 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 7 & \text{s.a: } x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1 & \text{s.a: } x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\
x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq -7 & 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
4x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq 16 & x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 1 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 4\} &
\end{array}$$

9.3. Resolva com o dual simplex os problemas do Exercício 4.2.

9.4. Seja (P) um PPL de minimização e (D) seu dual. Considere o quadro simplex de minimização abaixo referente à uma base de (P). Especifique uma condição para  $a, b, c, d$  e  $e$  que garanta cada um das seguintes conclusões.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		Conclusão	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$x_1$	1	0	0	1	-1	2	(D) é inviável					
$x_2$	0	1	0	0	$d$	$e$	(P) é inviável					
$x_3$	0	0	1	$c$	0	4	(P) tem única solução ótima					
	0	0	0	$a$	$b$		$x_1, x_2, x_3$ e $x_1, x_2, x_4$ definem bases ótimas					
							$x_2, x_3, x_4$ define base primal viável degenerada					
							$x_1, x_3, x_5$ define base dual viável					

9.5. Considere o quadro simplex abaixo, referente a uma certa base de um PPL primal de minimização. Especifique uma condição para  $a, b, c$  e  $d$  que permita cada um das seguintes conclusões:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		Conclusão	$a$	$b$	$c$	$d$
$x_1$	1	0	0	-1	-2	1	a base é primal viável				
$x_2$	0	1	0	$a$	3	$b$	a base é dual viável				
$x_3$	0	0	1	0	1	2	a base é ótima				
	0	0	0	$c$	$d$		o primal tem solução ótima única				
							o primal tem múltiplos vértices ótimos				
							o primal tem múltiplas soluções ótimas, mas só uma é vértice				
							o primal é ilimitado				
							o primal é inviável				
							o dual tem múltiplas soluções ótimas				

9.6. Considere o problema dual  $\max b^\top u$  s.a:  $u \in U$ , onde  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c\}$ . Seja  $\bar{u} \in U$ . Caracterize:

1. uma direção viável para  $U$  em  $\bar{u}$
2. uma direção de recessão para  $U$
3. uma direção de subida<sup>1</sup> para  $g(u) = b^\top u$  em  $\bar{u}$ .

9.7. Considere o problema primal  $\min c^\top x$  s.a  $Ax = b, x \geq 0$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tem posto linha completo. Sejam  $\bar{u}$  e  $\hat{u}$  duas soluções viáveis para o dual, distintas, geradas consecutivamente pelo método dual simplex, relativas a bases  $A_B$  e  $A_{\hat{B}}$ , respectivamente, com  $\hat{B} = (B \setminus \{B(r)\}) \cup \{k\}$ . Seja  $\varepsilon = \frac{\bar{c}_k}{-\bar{a}_{rk}} > 0$  a razão mínima calculada, a partir de  $\bar{c}^\top = c^\top - c_B^\top A_B^{-1} A$  e  $\bar{A} = A_B^{-1} A$ . Defina  $d = \frac{1}{\varepsilon}(\hat{u} - \bar{u})$ . Mostre que  $d = -e_r \in \mathbb{R}^m$ . Usando o Exercício 9.6, mostre que  $d$  é direção viável para  $U$  em  $\bar{u}$ .

9.8. Considere o problema primal  $\min c^\top x$  s.a  $Ax = b, x \geq 0$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tem posto linha completo. Suponha que, em uma certa iteração do método dual-simplex, relativa a uma base dual viável  $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , para algum  $r \in \{1, \dots, m\}$ , ocorre  $\bar{b}_r < 0$  e  $\bar{a}_{rj} \geq 0 \forall j = 1, \dots, n$ , onde  $\bar{b} = A_B^{-1} b$  e  $\bar{A} = A_B^{-1} A$ . Determine uma direção de recessão do dual que seja de subida para a função dual.

<sup>1</sup>Uma direção de subida para uma função  $g$  é uma direção de descida para  $-g$ .

## Capítulo 10

# Pós-otimização e Programação paramétrica

No Capítulo 8, avaliamos o efeito, na solução ótima, de modificações pontuais, em coeficientes da função objetivo ou em termos independentes das restrições, que mantivessem a base ótima. Ao longo deste capítulo, vamos considerar alterações mais gerais. Vamos admitir que conhecemos uma solução ótima de um PPL e desejamos encontrar uma solução de um PPL modificado, seja pela alteração de algum coeficiente, pelo acréscimo de novas restrições ou ainda pela inclusão de novas variáveis. A ideia é resolver o problema modificado a partir da solução ótima original, na expectativa de que essa estratégia resulte em menos operações. Em particular, quando as modificações introduzidas no problema não alteram a base ótima, a nova solução pode ser obtida sem grande esforço.

### 10.1 Mudança nos coeficientes da função objetivo

Suponha que conhecemos uma base ótima  $A_B$  do problema

$$(P) \min c^\top x = Z$$

$$\text{s.a: } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

e desejamos encontrar uma solução ótima para o problema

$$(P') \min (c')^\top x = Z'$$

$$\text{s.a: } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

cujos coeficientes da função objetivo foram modificados. Vamos denotar por  $\delta = c' - c$  a variação sofrida pelo vetor de custos.

Considere o quadro inicial e o quadro ótimo de  $(P)$ , relativo a  $A_B$ :

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_B & x_N & & \\ \hline A_B & A_N & b & L \leftarrow A_B^{-1}L \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z & L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

O quadro ótimo foi obtido por operações que correspondem àsquelas indicadas no quadro original. Caso operações similares tivessem sido efetuadas sobre o quadro inicial do problema modificado, teríamos obtido:

$$\begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline (c'_B)^\top & (c'_N)^\top & Z' \end{array} \quad L \leftarrow A_B^{-1}L \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & (c'_N)^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A_N & Z' - (c'_B)^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Observe que a base  $A_B$  continua primal viável para o problema modificado e, para determinar a forma canônica referente a ela, é suficiente calcular os novos custos reduzidos  $(c'_N)^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A_N$  e valor de objetivo  $Z' - (c'_B)^\top A_B^{-1}b$ , uma vez que os outros elementos do quadro não se alteram. Além disso, a matriz  $A_B^{-1}A_N$  e o vetor  $A_B^{-1}b$ , presentes no quadro, podem ser aproveitados nesses cálculos.

Caso o vetor  $c'$  tenha boa parte dos elementos iguais aos correspondentes em  $c$ , ou seja,  $\delta = c' - c$  seja um vetor com muitas entradas nulas, podemos preferir calcular os novos custos reduzidos a partir dos anteriores, da seguinte forma. Seja  $(\delta_B, \delta_N)$  a partição de  $\delta$  definida pela matriz  $A_B$ , ou seja,  $\delta_B = c'_B - c_B$  e  $\delta_N = c'_N - c_N$ . Então,

$$\begin{aligned} (\bar{c}'_N)^\top &= (c'_N)^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A_N \\ &= (c_N^\top + \delta_N^\top) - (c_B^\top + \delta_B^\top) A_B^{-1}A_N \\ &= (c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N) + (\delta_N^\top - \delta_B^\top A_B^{-1}A_N) \\ &= \bar{c}_N^\top + \delta_N^\top - \delta_B^\top A_B^{-1}A_N
\end{aligned}$$

Em particular, se a alteração ocorre apenas nos custos de variáveis não básicas, ou seja,  $\delta_B = 0$ , os novos custos reduzidos são dados trivialmente por  $(\bar{c}'_N)^\top = \bar{c}_N^\top + \delta_N^\top$ . Em outros termos, nesse caso, a mudança  $\delta_j$  em cada coeficiente  $c_j$  de variável não básica  $x_j$  é refletida diretamente em seu custo reduzido, ou seja,  $\bar{c}'_j = \bar{c}_j + \delta_j$ .

Similarmente, podemos calcular o valor da nova função objetivo na solução definida por  $A_B$  como

$$\begin{aligned} Z' &= (c'_B)^\top A_B^{-1}b \\ &= c_B^\top A_B^{-1}b + \delta_B^\top A_B^{-1}b \\ &= c_B^\top \bar{b} + \delta_B^\top \bar{b}
\end{aligned}$$

Se  $\bar{c}'_N \geq 0$ , concluímos que  $A_B$  também é base ótima para  $(P')$ . Do contrário, podemos aplicar o primal simplex, a partir da solução básica primal viável definida por essa base, para chegar ao novo ótimo ou concluir que o problema tornou-se ilimitado.

*Ex.* 10.1.1. Consideremos o PPL abaixo e seu quadro ótimo, apresentado no Exemplo 8.6.1, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente.

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & & \\ \text{s.a:} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 & x_3 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 1 & x_2 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_3 & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & 7 & 0 & 0 & 3 & 1 & Z - 2 \end{array}$$

Consideremos primeiro a mudança de  $c^\top = (2, 1, 4, 0, 0)$  para  $(c')^\top = (2 + \epsilon, 1, 4, 0, 0)$ , onde  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Note que essa mudança ocorre apenas no custo de uma variável não básica. Então, temos que os custos reduzidos passam de  $\bar{c}^\top = (7, 0, 0, 3, 1)$  para  $(\bar{c}')^\top = (7 + \epsilon, 0, 0, 3, 1)$ . Logo, se  $\epsilon \geq -7$ , a base ótima permanece a mesma e, para obter o novo quadro ótimo, basta trocar 7 por  $7 + \epsilon$  no custo reduzido de  $x_1$ . Por outro lado, se  $\epsilon < -7$ , então o custo reduzido de  $x_1$ , que passa a ser  $7 + \epsilon$ , torna-se negativo e o problema, ilimitado, posto que a coluna de  $x_1$  não tem valores positivos.

Tomemos agora  $(c')^\top = (-8, 6, 4, 0, 0)$ , ou seja,  $\delta^\top = (-10, 5, 0, 0, 0)$ . Nesse caso, estamos mudando tanto custo de variável básica ( $x_2$ ) quanto de variável não básica ( $x_1$ ). Dessa forma, os custos reduzidos de todas as variáveis não básicas são potencialmente modificados. Precisamente,

temos  $B = \{3, 2\}$ ,  $N = \{1, 4, 5\}$ ,  $\delta_B^\top = (0, 5)$ ,  $\delta_N^\top = (-10, 0, 0)$  e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} (\bar{c}'_N)^\top &= \bar{c}_N^\top + \delta_N^\top - \delta_B^\top A_B^{-1} A_N \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 2 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Além disso, o novo valor da função é

$$\begin{aligned} Z' &= c_B^\top \bar{b} + \delta_B^\top \bar{b} \\ &= 2 + \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Modificando apenas a última linha do quadro ótimo para o problema original, obtemos um quadro primal viável para o problema modificado, qual seja:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	2	0	0	$\frac{14}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$Z' - \frac{16}{3}$

Podemos então aplicar o primal simplex, para efetuar uma mudança de base, com a entrada de  $x_5$  e saída de  $x_2$ . O novo quadro canônico é:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-2	1	1	-1	0	1
$x_5$	-3	3	0	-1	1	2
	0	2	0	4	0	$Z' - 4$

Encontramos assim a nova solução ótima com apenas uma iteração.

## 10.2 Mudança no termo independente das restrições

Suponha novamente que conhecemos uma base ótima  $A_B$  do problema

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min c^\top x = Z \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

e desejamos agora encontrar uma solução ótima para o problema

$$\begin{aligned} (P') \quad & \min c^\top x = Z' \\ & \text{s.a: } Ax = b' \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde o lado direito do sistema linear foi alterado. Vamos denotar por  $\delta = b' - b$  a variação sofrida nesses elementos.

Considere o quadro inicial e o quadro ótimo de  $(P)$ , relativo a  $A_B$ :



$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_B & x_N & & \\
\hline
A_B & A_N & b & L \leftarrow A_B^{-1}L \\
\hline
c_B^\top & c_N^\top & Z & L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|c|c}
x_B & x_N & \\
\hline
I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\
\hline
0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z - c_B^\top A_B^{-1}b
\end{array}$$

O quadro ótimo foi obtido por operações que correspondem àsquelas indicadas no quadro original. Realizando essas mesmas operações a partir o quadro inicial do problema modificado, obtemos:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_B & x_N & & \\
\hline
A_B & A_N & b' & L \leftarrow A_B^{-1}L \\
\hline
c_B^\top & c_N^\top & Z' & L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|c|c}
x_B & x_N & \\
\hline
I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b' \\
\hline
0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z' - c_B^\top A_B^{-1}b'
\end{array}$$

Sendo assim, a base  $A_B$  mantém-se dual viável para o problema modificado e, para determinar a forma canônica referente a essa base, é suficiente calcular o novo lado direito  $A_B^{-1}b'$  e o novo valor da função objetivo  $Z' = c_B^\top A_B^{-1}b'$ , além de repetir os outros elementos do quadro. Note ainda que a matriz  $A_B^{-1}$ , necessária para esses cálculos, está presente no quadro onde havia inicialmente colunas da identidade, ou seja, nas colunas associadas as variáveis de folga ou artificiais. Na verdade, se a coluna inicial de uma variável de folga é  $e_i$  ou  $-e_i$ , temos no quadro relativo a  $A_B$  a  $i$ -ésima coluna de  $A_B$  ou tal coluna multiplicada por  $-1$ , respectivamente.

Usando  $\delta = b' - b$ , podemos alternativamente calcular os valores que se modificam, a partir dos anteriores:

$$\begin{aligned}
\bar{b}' &= A_B^{-1}b' \\
&= A_B^{-1}b + A_B^{-1}\delta \\
&= \bar{b} + A_B^{-1}\delta
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Z' &= c_B^\top A_B^{-1}b' = c_B^\top \bar{b}' \\
&= c_B^\top \bar{b} + c_B^\top A_B^{-1}\delta
\end{aligned}$$

Caso tenhamos  $\bar{b}' \geq 0$ , a base  $A_B$  ainda é ótima para  $(P')$ . Do contrário, podemos aplicar o dual simplex, a partir dessa base, para determinar o novo ótimo ou verificar que problema modificado tornou-se inviável.

*Ex.* 10.2.1. Consideremos o PPL abaixo e seu quadro ótimo, apresentado no Exemplo 8.6.1, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente.

$$\begin{array}{llllll}
\min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \\
\text{s.a:} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq 1 \\
& -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq 1 \\
& x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & & & 
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|ccccc|c}
& x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_3 & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
x_2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\
\hline
& 7 & 0 & 0 & 3 & 1 & Z - 2
\end{array}$$

Note que nesse exemplo  $A_B^{-1}$ , para  $B = \{3, 2\}$ , pode ser obtida do quadro a partir das colunas de  $x_4$  e  $x_5$ . Como  $A_4 = -e_1$  e  $A_5 = e_2$ , temos que  $\bar{A}_4$  armazena a primeira coluna da inversa multiplicada por  $-1$ , enquanto  $\bar{A}_5$  é exatamente a segunda coluna da inversa, ou seja,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ .

Consideremos agora a mudança de  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  para  $b' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ . Logo,  $\delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ . O novo lado

direito e valor da função objetivo são:

$$\begin{aligned}\bar{b}' &= \bar{b} + A_B^{-1}\delta \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z' &= c_B^\top \bar{b}' \\ &= \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Modificando apenas a última coluna do quadro ótimo para o problema original, obtemos um quadro dual viável para o problema modificado, a saber:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
	7	0	0	3	1	$Z' + \frac{1}{3}$

Podemos então aplicar o dual simplex, para efetuar uma mudança de base. Escolhendo  $x_3$  para sair da base e  $x_5$  para entrar, obtemos o novo quadro canônico:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_5$	3	0	-3	2	1	1
$x_2$	-2	1	1	-1	0	$\frac{2}{3}$
	4	0	3	1	0	$Z' - \frac{2}{3}$

Encontramos assim a nova solução ótima com apenas uma iteração.

### 10.3 Acréscimo de variáveis

Uma vez mais admitimos conhecida uma base ótima  $A_B$  para o PPL

$$\begin{aligned}(P) \quad &\min \quad c^\top x = Z \\ &\text{s.a: } Ax = b \\ &\quad x \geq 0\end{aligned}$$

Consideremos o acréscimo de variáveis ao problema, gerando o PPL estendido

$$\begin{aligned}(P') \quad &\min \quad c^\top x + (c')^\top x' = Z' \\ &\text{s.a: } Ax + A'x' = b \\ &\quad x \geq 0, x' \geq 0\end{aligned}$$

O quadro ótimo de  $(P)$ , relativo a  $A_B$ , é obtido do quadro original com as operações indicadas a seguir:

$$\begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Realizando as mesmas operações, mas agora sobre o problema estendido, obtemos:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_B & x_N & x' & \\ \hline A_B & A_N & A' & b \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & (c')^\top & Z' \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_B & x_N & x' & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}A' & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & (c')^\top - c_B^\top A_B^{-1}A' & Z' - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Desse modo, para obter a forma canônica do problema modificado, relativa à base  $A_B$ , que se mantém primal viável, basta calcular as colunas atualizadas e os custos reduzidos de  $x'$ , ou seja,  $A_B^{-1}A'$  e  $(c')^\top - c_B^\top A_B^{-1}A'$  e adicionar ao quadro ótimo do problema original. Caso esses custos reduzidos sejam não negativos, a solução anterior junto com  $x' = 0$  é ótima para o problema estendido. Caso contrário, é suficiente aplicar o primal simplex, a partir dessa solução básica, até chegar ao novo ótimo ou descobrir que o problema tornou-se ilimitado.

Similarmente ao caso de mudança no vetor  $b$ , a matriz  $A_B^{-1}$ , necessária para esses cálculos, pode ser retirada do quadro ótimo original, observando as colunas das variáveis de folga ou artificiais. Sendo a coluna inicial  $e_i$  ou  $-e_i$ , temos no quadro relativo a  $A_B$  a  $i$ -ésima coluna de  $A_B$  ou tal coluna multiplicada por  $-1$ , respectivamente.

*Ex.* 10.3.1. Consideremos novamente o PPL abaixo e seu quadro ótimo, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente.

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 \\ \text{s.a:} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \geq 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & & \end{array} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_3 & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ x_2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & 7 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ Z - 2 \end{array}$$

Como vimos,  $A_B^{-1}$ , onde  $B = \{3, 2\}$ , pode ser obtida do quadro a partir da coluna de  $x_4$ , multiplicada por  $-1$ , e da coluna de  $x_5$ . Precisamente,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ .

Consideremos agora o problema estendido

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 3x'_1 & + & 4x'_2 \\ \text{s.a:} & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x'_1 & + & 2x'_2 \geq 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x'_1 & + & 2x'_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, & x'_1 \geq 0, & x'_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Sendo assim,  $A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $(c')^\top = [-3 \quad 4]$ .

Calculando as colunas atualizadas e custos reduzidos de  $x'$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{A}' &= A_B^{-1}A' \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\bar{c}')^\top &= (c')^\top - c_B^\top (A_B^{-1} A') \\
&= \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ao acrescentarmos esses valores ao quadro, geramos

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x'_1$	$x'_2$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
	7	0	0	3	1	1	0	$Z' - 2$

Observamos que a solução ótima do problema original também é ótima para o problema estendido, porém passamos a ter soluções ótimas alternativas. Por exemplo, entrando com  $x'_2$  na base e saindo com  $x_3$ , obtemos um novo quadro ótimo:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x'_1$	$x'_2$	
$x'_2$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$x_2$	1	1	-2	1	1	2	0	0
	7	0	0	3	1	1	0	$Z' - 2$

Considere, alternativamente, que tivéssemos usado  $(c')^\top = [-5 \ 4]$  em lugar de  $(c')^\top = [-3 \ 4]$ . Percebemos, a partir do primeiro quadro ótimo, que o custo reduzido de  $x'_1$  passaria a ser -1, tornando o problema ilimitado.

## 10.4 Acréscimo de restrições

Seja  $A_B$  uma base ótima, já determinada, do problema

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \min c^\top x = Z \\
& \text{s.a: } Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

Suponha que acrescentamos novas desigualdades e desejamos encontrar uma solução ótima para o problema mais restrito:

$$\begin{aligned}
(P') \quad & \min c^\top x = Z' \\
& \text{s.a: } Ax = b \\
& A'x \leq b' \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

Como não estamos fazendo qualquer condição sobre  $b'$ , a proposta acima abrange todos os casos de restrições que poderiam ser consideradas. Desigualdade do tipo  $\geq$  poderia ser multiplicada por -1, e restrição de igualdade<sup>1</sup> poderia ser convertida em duas desigualdades.

<sup>1</sup>O tratamento de restrição de igualdade pode ser feito de outra forma, tomando o cuidado de que ela não seja redundante para  $Ax = b$

Para usarmos o simplex, vamos adicionar variáveis de folga às novas restrições, obtendo

$$A'x + x^f = b', \quad x^f \geq 0.$$

As operações efetuadas sobre o quadro inicial de  $(P)$  para obter o quadro ótimo, relativo a  $A_B$ , são as seguintes:

$$\begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Considerando a partição de  $A'$  conforme  $(B, N)$ , podemos acrescentar as novas restrições a esse quadro ótimo, obtendo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_B & x_N & x^f & \\ \hline & I & A_B^{-1}A_N & 0 & A_B^{-1}b \\ \hline & A'_B & A'_N & I & b' \\ \hline & 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & 0 & Z' - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Vale observar que as variáveis de folga  $x^f$  possuem coeficientes nulos nas restrições originais e função objetivo. Além disso, podemos notar que  $x_B$  e  $x^f$  definem uma base. Para gerar a forma canônica relativa a essa base, basta fazer operações elementares que anulem os coeficientes de  $x_B$  nas novas restrições. Tais operações estão indicadas abaixo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_B & x_N & x^f & \\ \hline & I & A_B^{-1}A_N & 0 & A_B^{-1}b \\ & A'_B & A'_N & I & b' \\ \hline & 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & 0 & Z' - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - A'_B L_1} \begin{array}{c|ccc|c} & x_B & x_N & x^f & \\ \hline x_B & I & A_B^{-1}A_N & 0 & A_B^{-1}b \\ x^f & 0 & A'_N - A'_B A_B^{-1}A_N & I & b' - A'_B A_B^{-1}b \\ \hline & 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & 0 & Z' - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Observe que a base estendida  $\begin{bmatrix} A_B & 0 \\ A'_B & I \end{bmatrix}$  é dual viável para o problema modificado. Mais ainda, caso  $b' - A'_B A_B^{-1}b \geq 0$ , ela também é primal viável e, portanto, ótima. Caso contrário, podemos aplicar o dual simplex a partir desse quadro canônico estendido, até encontrar uma nova solução ótima ou verificar que o problema tornou-se inviável.

Para obter a parte adicional do quadro, podemos calcular diretamente  $A'_N - A'_B(A_B^{-1}A_N)$  e  $b' - A'_B(A_B^{-1}b)$ , usando os valores  $A_B^{-1}A_N$  e  $A_B^{-1}b$  já disponíveis. Equivalentemente, podemos fazer diretamente as operações elementares sobre o quadro estendido para anular os elementos de  $A'_B$ .

*Ex. 10.4.1.* Consideremos uma vez mais o PPL abaixo e seu quadro ótimo, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente.

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a:} & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_3 & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ x_2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & 7 & 0 & 0 & 3 & 1 & Z - 2 \end{array}$$

Vamos acrescentar as seguintes restrições ao problema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

Para incluí-las no quadro, adicionamos variáveis de folga  $x_6$  e  $x_7$ , respectivamente, para obter:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_7 &= -2 \end{aligned}$$

O quadro estendido, onde destacamos a matriz  $A'_B$  a ser anulada e as operações elementares para atingir esse propósito, é:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
	1	1	1	0	0	1	0	1 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$
	1	-1	-1	0	0	0	1	-2 $L_4 \leftarrow L_4 + L_1 + L_2$
	7	0	0	3	1	0	0	$Z' - 2$

Note que essas operações elementares conjuntamente equivalem a

$$\begin{bmatrix} L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} - A'_B \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Após essas operações obtemos a forma canônica do problema, relativa à base definida pelas variáveis  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_6$  e  $x_7$ :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
$x_6$	3	0	0	1	0	1	0	0
$x_7$	-1	0	0	-1	0	0	1	-1
	7	0	0	3	1	0	0	$Z' - 2$

Aplicando o dual simplex, saímos com  $x_7$  da base e entramos com  $x_4$ , obtendo o seguinte quadro:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	
$x_3$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1
$x_2$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
$x_6$	2	0	0	0	0	1	0	-1
$x_4$	1	0	0	1	0	0	1	1
	4	0	0	0	1	0	3	$Z' - 5$

Essa base ainda não é primal viável, porém pela linha do quadro associada à variável básica  $x_5$  concluímos que, na verdade, o problema é inviável.

## 10.5 Mudança na matriz de restrições

Consideremos finalmente uma mudança na matriz  $A$  do seguinte PPL, de quem conhecemos uma base ótima  $A_B$ :

$$(P) \min c^\top x = Z \\ \text{s.a: } Ax = b \\ x \geq 0$$

A partir dessa base, queremos então resolver o problema modificado:

$$(P') \min c^\top x = Z' \\ \text{s.a: } A'x = b \\ x \geq 0$$

onde houve mudança em coeficientes da matriz de restrições, gerando a matriz  $A'$ .

No problema original  $(P)$ , a forma canônica relativa a  $A_B$  é obtida com as seguintes operações:

$$\begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Essas mesmas operações sobre o problema modificado resultariam em:

$$\begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline A'_B & A'_N & b \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z' \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cc|c} x_{B(r)} & x_{N(s)} & \\ \hline \dots & A_B^{-1}A'_{B(r)} & \dots & \dots & A_B^{-1}A'_{N(s)} & \dots \\ \hline c_{B(r)} - c_B^\top A_B^{-1}A'_{B(r)} & c_{N(s)} - c_B^\top A_B^{-1}A'_{N(s)} & Z' - c_B^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

No quadro canônico de  $(P')$ , relativo a  $A_B$ , destacamos a coluna relativa a  $r$ -ésima variável básica e a coluna relativa a  $s$ -ésima variável não básica. Vamos analisar como seguir a partir desse quadro, de acordo com as posições onde as alterações em  $A$  ocorreram.

**Mudança em coluna não básica** Para tratar simultaneamente todas as mudanças feitas em uma mesma coluna não básica, procedemos como segue, a partir do quadro ótimo de  $(P)$ . Admita que a coluna passou de  $A_j$  para  $A'_j$ , com  $j \in N$ . Nesse caso, simplesmente removemos a coluna associada a  $x_j$  junto com o custo reduzido e, em seu lugar, inserimos a nova coluna  $A_B^{-1}A'_j$  e novo custo reduzido  $c_j - c_B^\top(A_B^{-1}A'_j)$ . Esse procedimento pode ser aplicado a todas as mudanças em  $A_N$ . Procedemos como no caso de acréscimo de novas variáveis.

**Mudança em coluna básica** Suponha que a coluna  $A_{B(r)}$  passou para  $A'_{B(r)}$ , onde  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Calculamos então a nova coluna de  $x_{B(r)}$  e seu custo reduzido,  $\bar{A}'_{B(r)} = A_B^{-1}A'_{B(r)}$  e  $\bar{c}'_{B(r)} = c_{B(r)} - c_B^\top(A_B^{-1}A'_{B(r)})$ , respectivamente. Há dois casos, com tratamentos distintos:

1. Caso o elemento  $\bar{a}'_{rB(r)}$  seja não nulo, temos que a matriz obtida de  $A_B$  substituindo a coluna  $A_{B(r)}$  por  $A'_{B(r)}$  ainda é uma base. Nesse caso, podemos fazer operações elementares, considerando  $\bar{a}'_{rB(r)}$  como pivô, para obter uma nova matriz identidade, como indicado abaixo:

	$x_{B(1)}$	$\cdots$	$x_{B(r)}$	$\cdots$	$x_{B(m)}$	$\cdots$	$x_{N(s)=k}$	$\cdots$	
$x_{B(1)}$	1	$\cdots$	$\bar{a}'_{1B(r)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{b}_1 \quad L_1 \leftarrow L_1 - \bar{a}'_{1B(r)} L'_r$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$	
$x_{B(r)}$	0	$\cdots$	$\bar{a}'_{rB(r)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\bar{b}_r \quad L_r \leftarrow L'_r = \frac{1}{\bar{a}'_{rB(r)}} L_r$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$	
$x_{B(m)}$	0	$\cdots$	$\bar{a}'_{mB(r)}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{b}_m \quad L_m \leftarrow L_m - \bar{a}'_{mB(r)} L'_r$
	0	$\cdots$	$\bar{c}'_{B(r)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{c}_k$	$\cdots$	$Z' - c_B^\top \bar{b} \quad L_{m+1} \leftarrow L_{m+1} - \bar{c}'_{B(r)} L'_r$

	$x_{B(1)}$	$\cdots$	$x_{B(r)}$	$\cdots$	$x_{B(m)}$	$\cdots$	$x_{N(s)=k}$	$\cdots$	
$x_{B(1)}$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{a}_{1k} - \frac{\bar{a}'_{1B(r)} \bar{a}_{rk}}{\bar{a}'_{rB(r)}}$	$\cdots$	$\bar{b}_1 - \frac{\bar{a}'_{1B(r)} \bar{b}_r}{\bar{a}'_{rB(r)}}$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$	
$x_{B(r)}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\bar{a}_{rk}}{\bar{a}'_{rB(r)}}$	$\cdots$	$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}'_{rB(r)}}$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$		$\ddots$	
$x_{B(m)}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\bar{a}_{mk} - \frac{\bar{a}'_{mB(r)} \bar{a}_{rk}}{\bar{a}'_{rB(r)}}$	$\cdots$	$\bar{b}_m - \frac{\bar{a}'_{mB(r)} \bar{b}_r}{\bar{a}'_{rB(r)}}$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\bar{c}_k - \frac{\bar{c}'_{B(r)} \bar{a}_{rk}}{\bar{a}'_{rB(r)}}$	$\cdots$	$Z' - c_B^\top \bar{b} - \frac{\bar{c}'_{B(r)} \bar{b}_r}{\bar{a}'_{rB(r)}}$

Note que tanto os custos reduzidos (solução dual) quanto o valor das variáveis básicas (solução primal) ficam alterados. Sendo assim, a base pode não continuar nem primal nem dual viável. Caso ainda seja primal viável ou dual viável, podemos aplicar o primal simplex ou o dual simplex, respectivamente, a partir desse quadro. Caso contrário, para a aplicação de um desses métodos, é preciso incluir variáveis artificiais ou restrição artificial, para gerar uma base viável inicial.

2. Caso o elemento  $\bar{a}'_{rB(r)}$  seja nulo, podemos fazer uma cópia da variável  $x_{B(r)}$ , digamos  $x'_{B(r)}$ , que irá se associar à coluna modificada  $A'_{B(r)}$ , e tratar a variável  $x_{B(r)}$  como uma variável artificial a ser anulada na primeira fase do primal simplex. Mais precisamente, aplicamos o simplex duas fases a partir do quadro:

	$x_{B(1)}$	$\cdots$	$x_{B(r)}$	$\cdots$	$x_{B(m)}$	$x'_{B(r)}$	$\cdots$	$x_{N(s)=k}$	$\cdots$	
$x_{B(1)}$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}'_{1B(r)}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	
$x_{B(r)}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$		$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	
$x_{B(m)}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}'_{mB(r)}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{b}_m$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{c}'_{B(r)}$	$\cdots$	$\bar{c}_k$	$\cdots$	$Z' - c_B^\top \bar{b}$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	$-\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$Z^a - \bar{b}_r$

Note que a última linha do quadro já apresenta a função objetivo artificial  $Z^a = x_{B(r)}$  na forma canônica relativa a  $A_B$ , ou seja, essa expressão da função foi subtraída da linha associada à  $x_{B(r)}$ .

Vale destacar que a estratégia aplicada no caso 2 também poderia ser usada no caso 1, especialmente quando a base deixa de ser tanto primal quanto dual viável.

Caso haja mudança de valor em mais de uma coluna básica, podemos tratar iterativamente cada uma delas, de acordo com um dos dois casos acima, ou tratar conjuntamente todas essas colunas, fazendo os pivoteamentos ou inclusão das variáveis artificiais referentes a todas elas.



## 10.6 Parametrização dos coeficientes da função objetivo

Consideramos agora que o vetor de custos da função objetivo não é fixo, mas dependente, linearmente, de um ou mais parâmetros, e que desejamos estudar a solução ótima do problema paramétrico para os possíveis valores do(s) parâmetro(s).

Começamos estudando o caso de um único parâmetro. Para isso, consideramos o problema

$$\begin{aligned} (P_\lambda) \quad & \min (c + \lambda d)^\top x = Z_\lambda \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde os coeficientes da função objetivo são dados pelo vetor  $c' = c + \lambda d$ , com  $c, d \in \mathbb{R}^n$  vetores fixos e  $\lambda \in \mathbb{R}$  um parâmetro. Para cada valor de  $\lambda$ , temos um problema de programação linear. Desejamos, então, determinar os ótimos dessa família de problemas.

Vamos admitir que o conjunto  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  é não vazio, caso contrário  $(P_\lambda)$  é inviável para todo  $\lambda$ . Sendo assim, existe base primal viável  $A_B$ , que pode ser determinada, por exemplo, usando a primeira fase do simplex.

Considere abaixo o quadro inicial e o quadro canônico de  $(P_\lambda)$  relativo a  $A_B$ .

$$\begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline (c'_B)^\top & (c'_N)^\top & Z_\lambda \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - (c'_B)^\top A_B^{-1}L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & (c'_N)^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A_N & Z_\lambda - (c'_B)^\top A_B^{-1}b \end{array}$$

Note que  $c'_B = c_B + \lambda d_B$  e  $c'_N = c_N + \lambda d_N$ . Então, por conveniência, vamos dividir a linha referente à função objetivo em duas, separando a parte dos custos que não depende (linha  $L_z^0$ ) e que depende (linha  $L_z^\lambda$ ) de  $\lambda$ . Dessa maneira, a operação  $L_z \leftarrow L_z - (c'_B)^\top A_B^{-1}L$  pode ser desmembrada em  $L_z^0 \leftarrow L_z^0 - c_B^\top A_B^{-1}L$  e  $L_z^\lambda \leftarrow L_z^\lambda - d_B^\top A_B^{-1}L$ , como segue:

$$\begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z_\lambda \\ \lambda & d_B^\top & d_N^\top \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z^0 \leftarrow L_z^0 - c_B^\top A_B^{-1}L \\ L_z^\lambda \leftarrow L_z^\lambda - d_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z_\lambda - c_B^\top A_B^{-1}b \\ \lambda & 0 & d_N^\top - d_B^\top A_B^{-1}A_N \end{array}$$

Sejam  $(\bar{c}'_N)^\top = (c'_N)^\top - (c'_B)^\top A_B^{-1}A_N$ ,  $\bar{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N$  e  $\bar{d}_N^\top = d_N^\top - d_B^\top A_B^{-1}A_N$ , de modo que  $(\bar{c}'_N)^\top = \bar{c}_N^\top + \lambda \bar{d}_N^\top$ . A base  $A_B$  é dual viável e, portanto, ótima, se  $(\bar{c}'_N)^\top \geq 0$ , ou melhor, se

$$\bar{c}_j + \lambda \bar{d}_j \geq 0 \quad \forall j \in N. \quad (10.1)$$

Em outras palavras, a otimalidade de  $A_B$  agora depende de  $\lambda$ . Mais precisamente,  $A_B$  é base ótima quando  $\lambda$  varia no intervalo

$$\lambda_0 = \sup_{j \in N} \left\{ -\frac{\bar{c}_j}{\bar{d}_j} : \bar{d}_j > 0 \right\} \leq \lambda \leq \inf_{j \in N} \left\{ -\frac{\bar{c}_j}{\bar{d}_j} : \bar{d}_j < 0 \right\} = \lambda_1.$$

Se  $\lambda_0 = -\infty$ , então  $A_B$  é ótima para todo  $\lambda \leq \lambda_1$ . Do contrário,  $\lambda_0 = -\frac{\bar{c}_k}{\bar{d}_k}$ , para algum  $k \in N$  tal que  $\bar{d}_k > 0$ . Nesse caso,  $A_B$  não é base ótima para  $\lambda < \lambda_0$ , pois o custo reduzido  $\bar{c}'_k = \bar{c}_k + \lambda \bar{d}_k$  é negativo. Então, entrando com  $x_k$  na base, podemos potencialmente melhorar a função objetivo. Procedendo com uma iteração do primal simplex, chegamos a uma nova base  $A_{\hat{B}}$ , cuja otimalidade também depende de  $\lambda$ , subdividindo o intervalo  $(-\infty, \lambda_0)$ . A análise continua então a partir dessa nova base. Note que  $A_{\hat{B}}$  também é base ótima para  $\lambda = \lambda_0$ , assim como  $A_B$ .

Similarmente, se  $\lambda_1 = +\infty$ , então  $A_B$  é ótima para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ . Quando  $\lambda_1 \neq +\infty$  e, portanto,  $\lambda_1 = -\frac{\bar{c}_\ell}{\bar{d}_\ell}$ , para algum  $\ell \in N$  tal que  $\bar{d}_\ell < 0$ , a base  $A_B$  não é ótima para  $\lambda > \lambda_1$ . Dado que o custo reduzido  $\bar{c}'_\ell = \bar{c}_\ell + \lambda \bar{d}_\ell$  é negativo, podemos potencialmente melhorar a função objetivo, entrando com  $x_\ell$  na base. Uma base melhor  $A_{\bar{B}}$  pode ser obtida com uma iteração do primal simplex. Essa nova base será ótima para um subintervalo de  $(\lambda_1, +\infty)$ , e o cenário se repete a partir dela. Novamente, ambas  $A_B$  e  $A_{\bar{B}}$  são ótimas quando  $\lambda = \lambda_1$ .

A Figura abaixo ilustra o processo descrito acima, que determina as bases ótimas para  $(P_\lambda)$ , bem como os respectivos intervalos de valores para o parâmetro  $\lambda$ .

	$A_{\bar{B}}$ ótima	$A_B$ ótima	$A_{\bar{B}}$ ótima	
	$Z_\lambda = c_{\bar{B}}^\top A_{\bar{B}}^{-1}b + \lambda d_{\bar{B}}^\top A_{\bar{B}}^{-1}b$	$Z_\lambda = c_B^\top A_B^{-1}b + \lambda d_B^\top A_B^{-1}b$	$Z_\lambda = c_{\bar{B}}^\top A_{\bar{B}}^{-1}b + \lambda d_{\bar{B}}^\top A_{\bar{B}}^{-1}b$	$\lambda$
		$\lambda_0$	$\lambda_1$	

Observe que a reta vai ser dividida em segmentos, cuja quantidade é no máximo o número de vértices do conjunto viável primal, visto que cada segmento é definido por uma base primal viável, propriedade que independe do parâmetro.

Esse processo pode ser visto como a aplicação iterada de um procedimento de pós-otimização devido à mudança no vetor  $c$ . A base inicial  $A_B$  usada pode ser a ótima para algum valor de  $\lambda$ , tipicamente  $\lambda = 0$ , como ilustra o seguinte exemplo.

*Ex.* 10.6.1. Consideremos o PPL do Exemplo 10.1.1, usado para ilustrar o processo de pós-otimização com mudança do vetor  $c$ . O problema e seu quadro ótimo, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente, são reapresentados abaixo.

min	$2x_1 + x_2 + 4x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
s.a:	$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1$	$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		7	0	0	3	1	$Z - 2$

Consideremos a mudança paramétrica de  $c^\top = (2, 1, 4, 0, 0)$  para  $(c')^\top = (2 - 2\lambda, 1 + \lambda, 4, 0, 0)$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um parâmetro. Logo,  $c' = c + \lambda d$ , para  $d^\top = (-2, 1, 0, 0, 0)$ . Note que há alterações em custos básicos e não básicos. Para calcular os novos custos reduzidos  $\bar{c}'_N$ , podemos considerar a variação paramétrica  $\delta^\top = (c')^\top - c^\top = \lambda d^\top = \lambda(-2, 1, 0, 0, 0)$ . Como  $B = \{3, 2\}$  e  $N = \{1, 4, 5\}$ , temos  $\delta_B^\top = \lambda d_B^\top = \lambda(0, 1)$ ,  $\delta_N^\top = \lambda d_N^\top = \lambda(-2, 0, 0)$  e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
(\bar{c}'_N)^\top &= \bar{c}_N^\top + \delta_N^\top - \delta_B^\top A_B^{-1} A_N \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \left( \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 7 - \lambda & 3 + \frac{1}{3}\lambda & 1 - \frac{1}{3}\lambda \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Além disso, o novo valor da função é

$$\begin{aligned}
Z_\lambda &= c_B^\top \bar{b} + \delta_B^\top \bar{b} \\
&= 2 + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&= 2 + \frac{2}{3}\lambda
\end{aligned}$$

Substituindo e desmembrando a última linha do quadro ótimo do problema original, obtemos o seguinte quadro primal viável ( $Q.1$ ) para o problema paramétrico:

$Q.1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	7	0	0	3	1	$Z_\lambda - 2$
$\lambda$	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Esse quadro é ótimo para os valores de  $\lambda$  que tornam todos os custos reduzidos não negativos, ou seja, para  $\lambda$  satisfazendo simultaneamente

$$\begin{aligned}
 7 - \lambda &\geq 0 && \Leftrightarrow && \lambda \leq 7 \\
 3 + \frac{1}{3}\lambda &\geq 0 && \Leftrightarrow && \lambda \geq -9 \\
 1 - \frac{1}{3}\lambda &\geq 0 && \Leftrightarrow && \lambda \leq 3
 \end{aligned}$$

Logo, o quadro  $Q.1$  é ótimo se, e somente se,  $-9 \leq \lambda \leq 3$ .

Para  $\lambda < -9$ ,  $Q.1$  deixa de ser ótimo porque temos  $3 + \frac{1}{3}\lambda < 0$  e, portanto, a base deixa de ser dual viável, embora se mantenha primal viável. Neste caso, podemos aplicar o primal simplex. Como a coluna de  $x_4$  só possui valores não positivos, concluímos que o problema torna-se ilimitado quando  $\lambda < -9$ .

Para  $\lambda > 3$ , temos  $1 - \frac{1}{3}\lambda < 0$  e, com isso,  $Q.1$  deixa de ser ótimo. Agora, aplicando o primal simplex, podemos melhorar a solução entrando com  $x_5$  na base e saindo com  $x_2$ . O novo quadro canônico ( $Q.2$ ) é:

$Q.2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-2	1	1	-1	0	1
$x_5$	-3	3	0	-1	1	2
	10	-3	0	4	0	$Z_\lambda - 4$
$\lambda$	-2	1	0	0	0	0

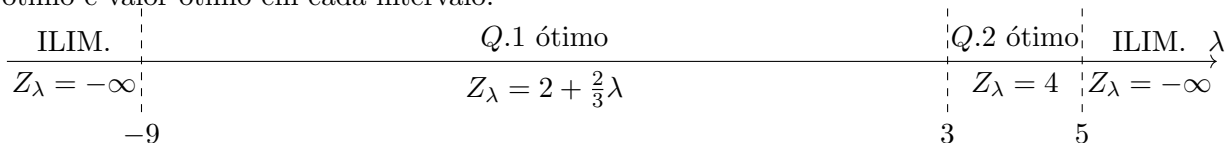
Para esse quadro ( $Q.2$ ) ser ótimo, devemos ter

$$\begin{aligned}
 10 - 2\lambda &\geq 0 && \Leftrightarrow && \lambda \leq 5 \\
 -3 + \lambda &\geq 0 && \Leftrightarrow && \lambda \geq 3
 \end{aligned}$$

ou seja,  $3 \leq \lambda \leq 5$ .

Visto que já foram estudados os valores de  $\lambda$  no intervalo  $(-\infty, 5)$ , resta considerar o caso  $\lambda > 5$ . Nesse caso, temos  $10 - 2\lambda < 0$ , levando a base associada a  $Q.2$  a se tornar dual inviável, posto que  $x_1$  tem custo reduzido negativo. Percebendo que a coluna de  $x_1$  em  $Q.2$  tem apenas elementos não positivos, concluímos que o problema é ilimitado para  $\lambda > 5$ .

A figura abaixo resume os vários casos para o problema paramétrico, identificando o quadro ótimo e valor ótimo em cada intervalo.



Adicionalmente, podemos ver na Figura 10.1 o gráfico do valor ótimo do problema como função do parâmetro  $\lambda$ , quando esse valor é finito. Percebemos que essa função é contínua, linear por partes, onde cada trecho linear corresponde a uma base ótima. Precisamente, sendo

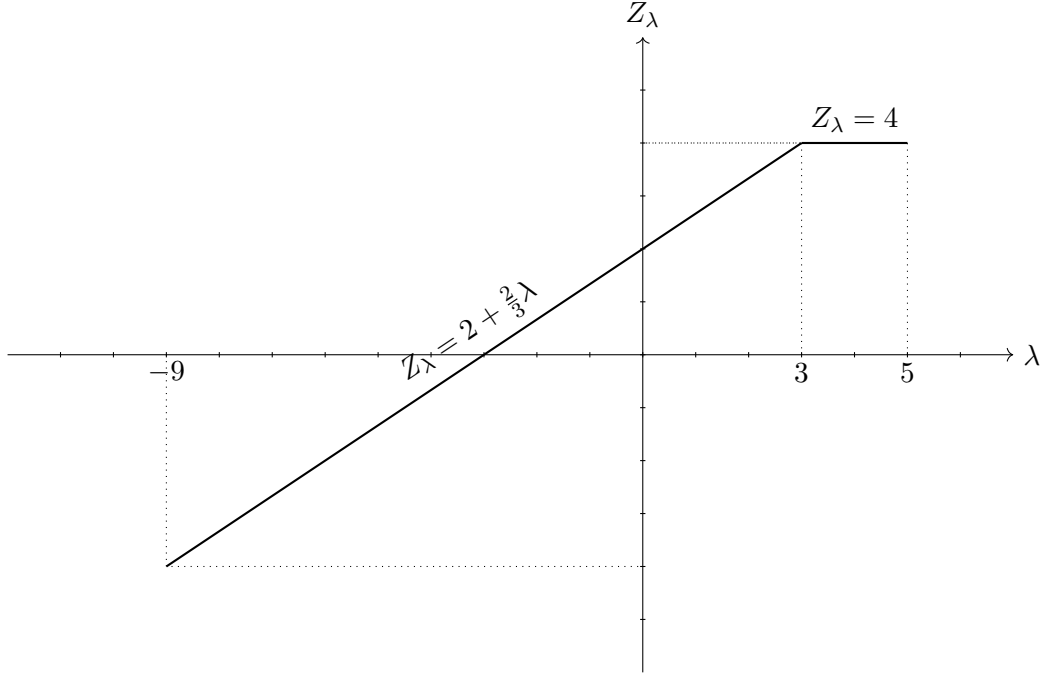


Figura 10.1: Valor ótimo como função de parametrização do vetor  $c$ .

$A_B$  a base ótima relativa a um certo trecho, temos que o valor ótimo ao longo dele é dado pela função linear  $Z_\lambda = (c_B + \lambda d_B)^\top \bar{b} = c_B^\top \bar{b} + \lambda d_B^\top \bar{b}$ , onde  $\bar{b} = A_B^{-1}b$ . Então o coeficiente angular dessa função é  $d_B^\top \bar{b}$ . Assim, em Q.1 e Q.2 temos, respectivamente:

$$d_B^\top \bar{b} = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad d_B^\top \bar{b} = \begin{bmatrix} x_3 & x_5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Quando mais de um parâmetro é usado na parametrização dos coeficientes da função objetivo, procede-se de forma similar. Digamos que  $Z_\lambda = (c + \sum_{i=1}^p \lambda_i d^i)^\top x$ , onde  $c, d^i \in \mathbb{R}^n$  são fixos e  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , para  $i \in \{1, \dots, p\}$ , são os parâmetros. Cada quadro obtido, referente a uma certa base  $A_B$ , será ótimo para certos valores dos parâmetros que satisfazem um sistema de inequações lineares, similar a (10.1), da seguinte forma:

$$\bar{c}_j + \sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{d}_j^i \geq 0 \quad \forall j \in N, \quad (10.2)$$

onde  $(\bar{d}_N^i)^\top = (d_N^i)^\top - (d_B^i)^\top A_B^{-1} A_N$ . As soluções desse sistema definem um “setor” de  $\mathbb{R}^p$ . Fora dele, a base  $A_B$  deixa de ser dual viável, embora se mantenha primal viável, e o primal simplex pode ser aplicado. Seguindo esse processo, o  $\mathbb{R}^p$  é dividido em “setores”, cada um associado a uma base ótima para os respectivos valores dos parâmetros. O exemplo a seguir ilustra esse processo para dois parâmetros.

*Ex.* 10.6.2. Retomemos o Exemplo 10.6.1, usando agora dois parâmetros na definição de  $(c')^\top = (2 - 2\lambda_1 + \lambda_2, 1 + \lambda_1, 4 + \lambda_2, 0, 0)$ , onde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Assim,  $c' = c + \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ , onde  $(d^1)^\top = (-2, 1, 0, 0, 0)$  e  $(d^2)^\top = (1, 0, 1, 0, 0)$ . Note que  $d^1$  dá a mesma parametrização usada no Exemplo 10.6.1. Sendo assim, aproveitando os cálculos já realizados naquele exemplo,

temos que os novos custos reduzidos e o novo valor da função objetivo são:

$$\begin{aligned}
(\bar{c}'_N)^\top &= \bar{c}_N^\top + \lambda_1[(d_N^1)^\top - (d_B^1)^\top A_B^{-1} A_N] + \lambda_2[(d_N^2)^\top - (d_B^2)^\top A_B^{-1} A_N] \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \lambda_2 \left( \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_\lambda &= c_B^\top \bar{b} + \lambda_1 (d_B^1)^\top \bar{b} + \lambda_2 (d_B^2)^\top \bar{b} \\
&= 2 + \frac{2}{3}\lambda_1 + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&= 2 + \frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2
\end{aligned}$$

Substituindo esses valores na última linha do quadro ótimo do problema original, desmembrada agora em três linhas, obtemos o seguinte quadro primal viável ( $Q.1$ ) para o problema paramétrico:

$Q.1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	7	0	0	3	1	$Z_\lambda - 2$
$\lambda_1$	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\lambda_2$	2	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Então, esse quadro é ótimo sob as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
7 - \lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 7 \\
3 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & -\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 9 \\
1 - \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1 - \lambda_2 \leq 3
\end{aligned}$$

Acompanhe no gráfico da Figura 10.2 a região de  $\mathbb{R}^2$  onde quadro  $Q.1$  é ótimo.

Para  $-\lambda_1 - 2\lambda_2 > 9$ ,  $Q.1$  deixa de ser ótimo, pois a base deixa de ser dual viável, embora se mantenha primal viável. Observando que a coluna relativa a  $x_4$  é não positiva, concluímos que o problema torna-se ilimitado nessa região (ver Figura 10.2).

Para  $\lambda_1 - \lambda_2 > 3$ ,  $Q.1$  também deixa de ser ótimo. Aplicando o primal simplex, temos que  $x_5$  entra na base e  $x_2$  sai. O novo quadro canônico ( $Q.2$ ) é:

$Q.2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	-2	1	1	-1	0	1
$x_5$	-3	3	0	-1	1	2
	10	-3	0	4	0	$Z_\lambda - 4$
$\lambda_1$	-2	1	0	0	0	0
$\lambda_2$	3	-1	0	1	0	-1

O quadro  $Q.2$  é ótimo se, e somente se:

$$\begin{array}{lll} 10 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 0 & \Leftrightarrow & -2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -10 \\ -3 + \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0 & \Leftrightarrow & \lambda_1 - \lambda_2 \geq 3 \\ 4 + \lambda_2 \geq 0 & \Leftrightarrow & \lambda_2 \geq -4 \end{array}$$

A região satisfeita por esse sistema, na qual  $Q.2$  é ótimo, pode ser vista na Figura 10.2.

Finalmente, quando  $-2\lambda_1 + 3\lambda_2 < -10$ , o quadro  $Q.2$  não é ótimo e percebemos que o problema torna-se ilimitado. Esse caso completa a análise de todos os possíveis valores para os parâmetros  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , conforme resumo apresentado na Figura 10.2.

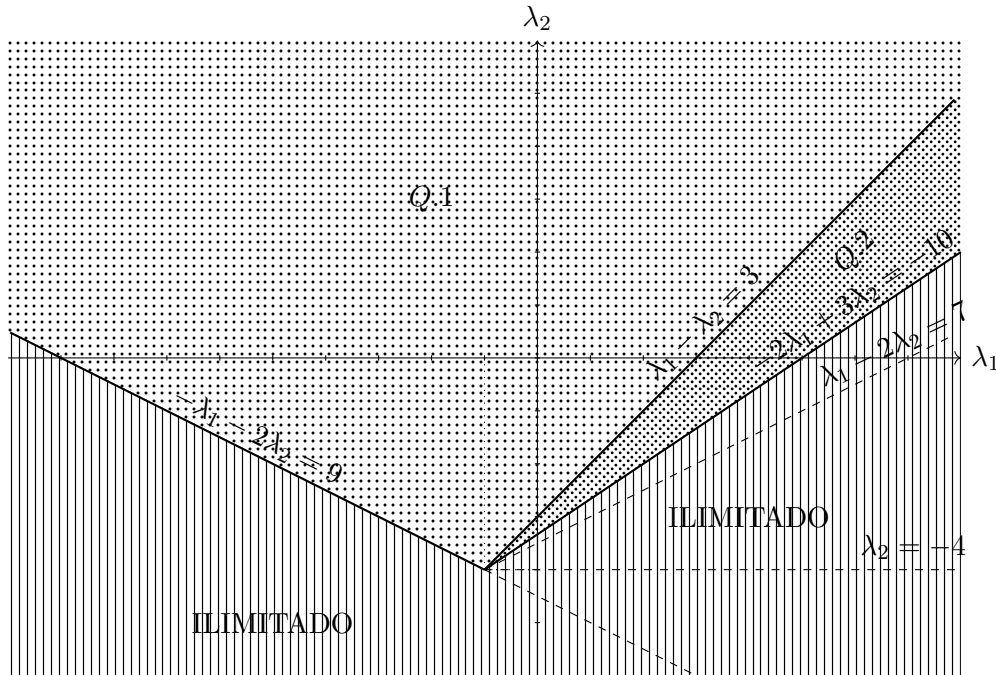


Figura 10.2: Regiões ótimas segundo parâmetros  $(\lambda_1, \lambda_2)$  do vetor  $c$ .

## 10.7 Parametrização do termo independente das restrições

Para finalizar o capítulo, estudamos a parametrização linear do termo independente das restrições de um PPL. No caso de parâmetro único, consideramos o seguinte problema paramétrico

$$\begin{array}{ll} (P_\mu) \min & c^\top x = Z_\mu \\ \text{s.a:} & Ax = b + \mu d \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde o termo independente das restrições é dado pelo vetor  $b' = b + \mu d$ , com  $b, d \in \mathbb{R}^m$  vetores fixos e  $\mu \in \mathbb{R}$  um parâmetro. Cada valor de  $\mu$  define um problema de programação linear. Determinar os ótimos dessa família de problemas é nosso objetivo.

Vamos admitir que o conjunto  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c\}$  é não vazio, caso contrário o dual de  $(P_\mu)$  é inviável para todo  $\mu$  e, conseqüentemente,  $(P_\mu)$  também não tem solução ótima para qualquer  $\mu$ . Dessa maneira, está garantida a existência de uma base dual viável  $A_B$ .

Considere abaixo o quadro inicial e o quadro canônico de  $(P_\mu)$  relativo a uma tal base  $A_B$ .

$$\begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline A_B & A_N & b' \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z_\mu \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x_B & x_N & \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b' \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z_\mu - c_B^\top A_B^{-1}b' \end{array}$$

Usando  $b' = b + \mu d$ , vamos dividir, por conveniência, a última coluna do quadro em duas partes: uma que não depende de  $\mu$  e outra que depende de  $\mu$ .

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_B & x_N & & \mu \\ \hline A_B & A_N & b & d \\ \hline c_B^\top & c_N^\top & Z_\mu & 0 \end{array} \begin{array}{l} L \leftarrow A_B^{-1}L \\ L_z \leftarrow L_z - c_B^\top A_B^{-1}L \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_B & x_N & & \mu \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b & A_B^{-1}d \\ \hline 0 & c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N & Z - c_B^\top A_B^{-1}b & -c_B^\top A_B^{-1}d \end{array}$$

Sejam  $\bar{b} = A_B^{-1}b$ ,  $\bar{d} = A_B^{-1}d$  e  $\bar{b}' = A_B^{-1}b' = \bar{b} + \mu\bar{d}$ . Sendo a base  $A_B$  dual viável, ela será ótima se, e somente se,  $\bar{b}' \geq 0$ , ou melhor,

$$\bar{b}_i + \mu\bar{d}_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (10.3)$$

Portanto, a otimalidade de  $A_B$  depende de  $\mu$ . Mais precisamente,  $A_B$  é base ótima quando  $\mu$  varia no intervalo

$$\mu_0 = \sup_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\bar{d}_i} : \bar{d}_i > 0 \right\} \leq \mu \leq \inf_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ -\frac{\bar{b}_i}{\bar{d}_i} : \bar{d}_i < 0 \right\} = \mu_1.$$

Quando  $\mu_0 = -\infty$ , a base  $A_B$  é ótima para todo  $\mu \leq \mu_1$ . Por outro lado, se  $\mu_0 \neq -\infty$ , então  $A_B$  não é base ótima para  $\mu < \mu_0$ . De fato, nesse caso,  $\mu_0 = -\frac{\bar{b}_r}{\bar{d}_r}$ , para algum  $r \in \{1, \dots, m\}$  com  $\bar{d}_r > 0$ , e, por conseguinte,  $\bar{b}'_r = \bar{b}_r + \mu\bar{d}_r < 0$  para todo  $\mu < \mu_0$ . Então, aplicando o dual simplex com a saída de  $x_{B(r)}$  da base, potencialmente podemos melhorar a função objetivo dual. Com uma iteração, chegamos a uma nova base  $A_{\hat{B}}$ , cuja otimalidade também depende de  $\mu$ , subdividindo o intervalo  $(-\infty, \mu_0)$ . Análise similar pode então ser realizada a partir dessa nova base. Vale mencionar que, tal qual  $A_B$ , a base  $A_{\hat{B}}$  também é ótima para  $\mu = \mu_0$ .

Analogamente, quando  $\mu_1 = +\infty$ ,  $A_B$  é ótima para todo  $\mu \geq \mu_0$ . Se  $\mu_1 \neq +\infty$ , ou melhor,  $\mu_1 = -\frac{\bar{b}_t}{\bar{d}_t}$ , para algum  $t \in \{1, \dots, m\}$  com  $\bar{d}_t < 0$ , a base  $A_B$  não é ótima para  $\mu > \mu_1$ . Nesse caso, temos  $\bar{b}'_t = \bar{b}_t + \mu\bar{d}_t < 0$ , indicando que há potencial de melhoria da função objetivo dual com a saída de  $x_{B(t)}$  da base. Após uma iteração do dual simplex, obtemos uma outra base  $A_{\tilde{B}}$ , cuja otimalidade depende de  $\mu$ . Dessa maneira, o intervalo  $(\mu_1, +\infty)$  é subdividido. A análise se repete a partir de  $A_{\tilde{B}}$ . Note que essa base, assim como  $A_B$ , é ótima quando  $\mu = \mu_1$ .

A figura abaixo ilustra o processo descrito acima, que determina os intervalos de valoração do parâmetro  $\mu$  juntamente com a respectiva base ótima para  $(P_\mu)$ .

$$\begin{array}{c|c|c|c} & A_{\hat{B}} \text{ ótima} & A_B \text{ ótima} & A_{\tilde{B}} \text{ ótima} \\ \hline & Z_\mu = c_{\hat{B}}^\top A_{\hat{B}}^{-1}b + \mu d_{\hat{B}}^\top A_{\hat{B}}^{-1}b & Z_\mu = c_B^\top A_B^{-1}b + \mu d_B^\top A_B^{-1}b & Z_\mu = c_{\tilde{B}}^\top A_{\tilde{B}}^{-1}b + \mu d_{\tilde{B}}^\top A_{\tilde{B}}^{-1}b \\ \hline & \mu_0 & \mu_1 & \end{array} \rightarrow \mu$$

Esses intervalos dividem a reta em um certo número de segmentos que é limitado superiormente pela quantidade de vértices do conjunto viável dual. De fato, cada segmento se associa a uma base dual viável, propriedade que independe do parâmetro.

As iterações do processo descrito acima podem ser vistas como aplicações do procedimento de pós-otimização com mudança no vetor  $b$ . A base inicial  $A_B$  usada no processo pode ser a base ótima para algum valor de  $\mu$ , tipicamente  $\mu = 0$ , como ilustra o seguinte exemplo.

*Ex. 10.7.1.* Voltemos ao PPL do Exemplo 10.2.1, usado para ilustrar o processo de pós-otimização com mudança do vetor  $b$ . O problema e seu quadro ótimo, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente, são reapresentados abaixo.

min	$2x_1 + x_2 + 4x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
s.a:	$-2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1$	$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		7	0	0	3	1	$Z - 2$

Consideremos agora uma mudança paramétrica de  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  para  $b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ . Logo,  $\delta = b' - b = \mu d$ , onde  $d = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ . Usando  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ , para  $B = \{3, 2\}$ , podemos recalculer o novo lado direito e valor da função objetivo:

$$\begin{aligned}
 \bar{b}' &= \bar{b} + \mu A_B^{-1} d \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_\mu &= c_B^\top \bar{b}' = c_B^\top \bar{b} + \mu c_B^\top A_B^{-1} d \\
 &= 2 + \mu \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= 2 + 7\mu
 \end{aligned}$$

Substituindo os valores da última coluna do quadro ótimo, desmembrados em duas colunas, obtemos o seguinte quadro dual viável (Q.1) para o problema paramétrico:

Q.1	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu$	
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1
	7	0	0	3	1	$Z_\mu - 2$	-7

Esse quadro é ótimo se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} + 2\mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \geq -\frac{1}{6} \\
 \frac{2}{3} - \mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \leq \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

ou seja,  $-\frac{1}{6} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$ .

Quando  $\mu < -\frac{1}{6}$ , ou melhor,  $\frac{1}{3} + 2\mu < 0$ , podemos aplicar o dual simplex, para efetuar uma mudança de base. A variável  $x_3$  sai da base e  $x_5$  entra, levando ao seguinte quadro:

Q.2	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu$	
$x_5$	3	0	-3	2	1	-1	-6
$x_2$	-2	1	1	-1	0	1	1
	4	0	3	1	0	$Z_\mu - 1$	-1

Novamente a otimalidade desse quadro (Q.2) depende de  $\mu$  e ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 -1 - 6\mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \leq -\frac{1}{6} \\
 1 + \mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \geq -1
 \end{aligned}$$



ou seja,  $-1 \leq \mu \leq -\frac{1}{6}$ .

Quando  $\mu < -1$ , ou melhor,  $1 + \mu < 0$ , aplicamos o dual simplex ao quadro  $Q.2$ , saindo com  $x_2$  da base e entrando com  $x_4$ . Assim, geramos um novo quadro canônico ( $Q.3$ ):

$Q.3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu$	
$x_5$	-1	2	-1	0	1	1	-4
$x_4$	2	-1	-1	1	0	-1	-1
	2	1	4	0	0	$Z_\mu$	0

O quadro  $Q.3$  é ótimo se, e somente se,

$$\begin{aligned} 1 - 4\mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \leq \frac{1}{4} \\ -1 - \mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \leq -1 \end{aligned}$$

ou seja,  $\mu \leq -1$ .

Resta-nos então analisar o caso em que  $\mu > \frac{2}{3}$ . Nesse caso, lembre que o quadro  $Q.1$  deixa de ser ótimo, pois temos  $\frac{2}{3} - \mu < 0$ . Como isso, aplicamos o dual simplex a  $Q.1$ , saindo com  $x_2$  da base e entrando com  $x_1$ , de modo a obter:

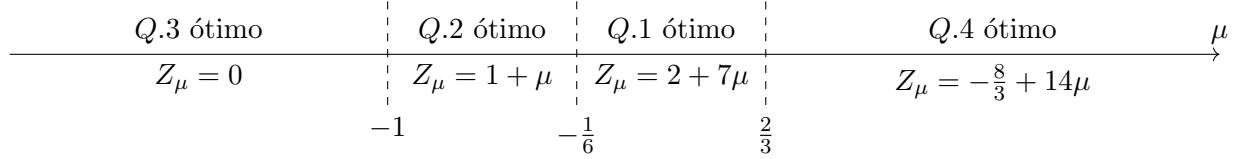
$Q.4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu$	
$x_3$	0	-1	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3
$x_1$	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
	0	7	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	$Z_\mu + \frac{8}{3}$	-14

A otimalidade desse quadro ( $Q.4$ ) ocorre quando

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} + 3\mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \geq \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} + \mu &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

quer dizer, quando  $\mu \geq \frac{2}{3}$ .

Com isso, estudamos todos os possíveis valores de  $\mu$ , conforme resume a figura abaixo.



Já a Figura 10.3 mostra o gráfico do valor ótimo do problema como função do parâmetro  $\mu$ . Percebemos que essa função é contínua, linear por partes, onde cada trecho linear corresponde a uma base ótima. Precisamente, sendo  $A_B$  a base ótima relativa a um certo trecho, temos que o valor ótimo ao longo dele é dado pela função linear  $Z_\mu = \bar{u}^\top b' = \bar{u}^\top b + \mu \bar{u}^\top d$ , onde  $\bar{u} = c_B^\top A_B^{-1}$  é a solução dual definida por  $A_B$ . Então o coeficiente angular dessa função é  $\bar{u}^\top d$ . Observando o vetor  $\bar{u}$  em cada quadro,  $Q.1$ ,  $Q.2$ ,  $Q.3$  e  $Q.4$ , temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{u}^\top d &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 7, & \bar{u}^\top d &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 1, \\ \bar{u}^\top d &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 0 & \text{e} & \bar{u}^\top d = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 14. \end{aligned}$$

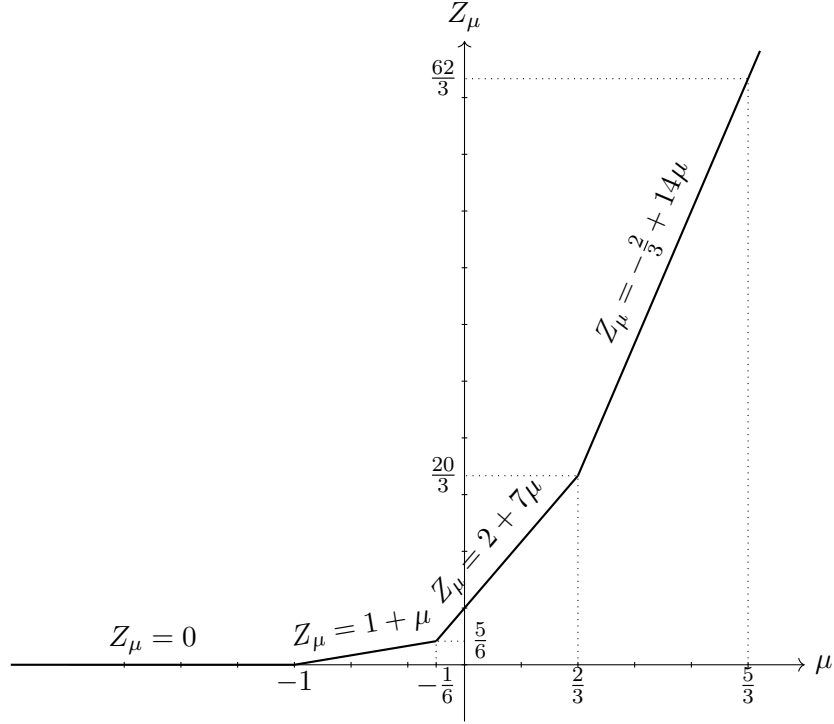


Figura 10.3: Valor ótimo como função de parametrização do vetor  $b$ .

A solução do problema paramétrico é similar, mesmo que vários parâmetros apareçam na definição do termo independente das restrições, isto é,  $b' = b + \sum_{j=1}^q \mu_j d^j$ , onde  $b, d^j \in \mathbb{R}^n$  são fixos e  $\mu_j \in \mathbb{R}$ , para  $j \in \{1, \dots, q\}$ , são os parâmetros. Cada quadro obtido, relativo a uma base  $A_B$ , será ótimo para certos valores dos parâmetros, dados pelas soluções do seguinte sistema de inequações lineares, similar a (10.3):

$$\bar{b}_i + \sum_{j=1}^j \mu_i \bar{d}_i^j \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (10.4)$$

onde  $\bar{d}^j = A_B^{-1} d^j$ . As soluções desse sistema definem um “setor” de  $\mathbb{R}^q$ , fora do qual a base  $A_B$  deixa de ser primal viável, embora se mantenha dual viável, e o dual simplex possa ser aplicado. Seguindo esse processo, o  $\mathbb{R}^q$  é dividido em “setores”, cada um associado a uma base ótima para certos valores dos parâmetros. O exemplo a seguir ilustra esse processo para dois parâmetros.

*Ex. 10.7.2.* Modifiquemos agora o Exemplo 10.7.2, usando dois parâmetros  $\mu_1$  e  $\mu_2$  para definir  $b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ -4\mu_2 \end{bmatrix}$ , ou seja,  $\delta = b' - b = \mu_1 d^1 + \mu_2 d^2$ , onde  $d^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $d^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ .

Usando  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ , para  $B = \{3, 2\}$ , calculamos o novo lado direito e valor da função objetivo:

$$\begin{aligned} \bar{b}' &= \bar{b} + \mu_1 A_B^{-1} d^1 + \mu_2 A_B^{-1} d^2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_\mu &= c_B^\top \bar{b}' = c_B^\top \bar{b} + \mu_1 c_B^\top A_B^{-1} d^1 + \mu_2 c_B^\top A_B^{-1} d^2 \\
&= 2 + \mu_1 \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\
&= 2 + 3\mu_1 + 4\mu_2
\end{aligned}$$

Desmembrando a última coluna do quadro ótimo para armazenar os novos valores, chegamos ao seguinte quadro dual viável ( $Q.1$ ) para o problema paramétrico:

$Q.1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu_1$ $\mu_2$		
$x_3$	-1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
$x_2$	-1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
	7	0	0	3	1	$Z_\mu - 2$	-3	-4

As condições necessárias e suficientes para o quadro  $Q.1$  ser ótimo são:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mu_1 + \frac{4}{3}\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & 2\mu_1 + 4\mu_2 \geq -1 \\
\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mu_1 - \frac{4}{3}\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_1 - 4\mu_2 \geq -2
\end{aligned}$$

A região de  $\mathbb{R}^2$  definida por esse sistema de desigualdades está representada na Figura 10.4.

Para  $2\mu_1 + 4\mu_2 < -1$ , ou seja,  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mu_1 + \frac{4}{3}\mu_2 < 0$ , o quadro  $Q.1$  não é ótimo. Aplicando o dual simplex, efetuamos uma mudança de base, saindo  $x_3$  e entrando  $x_5$ , de modo a obter o quadro abaixo.

$Q.2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu_1$ $\mu_2$		
$x_5$	3	0	-3	2	1	-1	-2	-4
$x_2$	-2	1	1	-1	0	1	1	0
	4	0	3	1	0	$Z_\mu - 1$	-1	0

Esse quadro ( $Q.2$ ) é ótimo se, e somente se,

$$\begin{aligned}
-1 - 2\mu_1 - 4\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & 2\mu_1 + 4\mu_2 \leq -1 \\
1 + \mu_1 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_1 \geq -1
\end{aligned}$$

A Figura 10.4 apresenta essa região onde  $Q.2$  é ótimo.

Quando  $\mu < -1$ , ou melhor,  $1 + \mu < 0$ , um novo quadro ótimo ( $Q.3$ ) é obtido a partir da aplicação do dual simplex a  $Q.2$ , com a saída de  $x_2$  da base e entrada de  $x_4$ .

$Q.3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu_1$ $\mu_2$		
$x_5$	-1	2	-1	0	1	1	0	-4
$x_4$	2	-1	-1	1	0	-1	-1	0
	2	1	4	0	0	$Z_\mu$	0	0

O quadro  $Q.3$  é ótimo se, e somente se,

$$\begin{aligned}
1 - 4\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_2 \leq \frac{1}{4} \\
-1 - \mu_1 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_1 \leq -1
\end{aligned}$$

conforme indicado na Figura 10.4.

Considerando  $\mu_2 > \frac{1}{4}$ , isto é,  $1 - 4\mu_2 < 0$ , o quadro  $Q.3$  não é mais ótimo. Novamente, o dual simplex, agora aplicado a  $Q.3$ , indica a saída de  $x_5$  da base e entrada de  $x_1$ , levando a um novo quadro:

$Q.4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu_1$	$\mu_2$
$x_1$	1	-2	1	0	-1	-1	0
$x_4$	0	3	-3	1	2	1	-1
	0	5	2	0	2	$Z_\mu + 2$	0

As condições para otimalidade de  $Q.4$  são:

$$\begin{aligned} -1 + 4\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_2 \geq \frac{1}{4} \\ 1 - \mu_1 - 8\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_1 + 8\mu_2 \leq 1 \end{aligned}$$

A Figura 10.4 mostra essa região na qual  $Q.4$  é ótimo.

Ainda precisamos analisar o caso em que  $\mu_1 + 8\mu_2 > 1$ , pois  $Q.4$  não é ótimo, posto que  $1 - \mu_1 - 8\mu_2 < 0$ . Aplicando o dual simplex a  $Q.4$ , realizamos a mudança de base dada pela saída de  $x_4$  e entrada de  $x_3$ , levando a:

$Q.5$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mu_1$	$\mu_2$
$x_1$	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_3$	0	-1	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	7	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	$Z_\mu + \frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Esse quadro ( $Q.4$ ) é ótimo quando

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{4}{3}\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_1 - 4\mu_2 \leq -2 \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{8}{3}\mu_2 &\geq 0 & \Leftrightarrow & \mu_1 + 8\mu_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Com isso, estudamos todos os possíveis valores de  $(\mu_1, \mu_2)$ , conforme resume a Figura 10.4.

## 10.8 Exercícios

10.1. Considere o seguinte PPL, cujo quadro simplex ótimo é apresentado ao lado, onde  $x_3$  e  $x_4$  são as folgas da primeira e segunda restrições.

$\min 5x_1 + 4x_2$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
s.a: $x_1 + 4x_2 \geq 5$	$x_2$	0	1	-0,3	0,1	0,8
$3x_1 + 2x_2 \geq 7$	$x_1$	1	0	0,2	-0,4	1,8
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$		0	0	0,2	1,6	$Z - 12,2$

Use pós-otimização, a partir desse quadro ótimo, para encontrar a nova solução nos seguintes casos não cumulativos:

- Os coeficientes de  $x_1$  e  $x_2$  na função objetivo são permutados.
- Triplique-se o termo independente da primeira restrição.
- A restrição  $x_1 + x_2 \geq 3$  é acrescentada ao problema.
- Inclui-se uma nova variável cujos coeficientes na função objetivo e restrições valem 3.
- Os sentidos das desigualdades das duas restrições são invertidos, tornando-se  $\leq$ .

10.2. Resolva o seguinte PPL a partir do quadro simplex ao lado, que apresenta a solução do problema quando as variáveis  $x_4$  e  $x_5$  são retiradas do modelo e  $x_6$  e  $x_7$  são as folgas da segunda e terceira restrições. Observe que as colunas de  $(-x_3)$ ,  $x_6$  e  $x_7$  definem, no quadro inicial, uma matriz identidade.

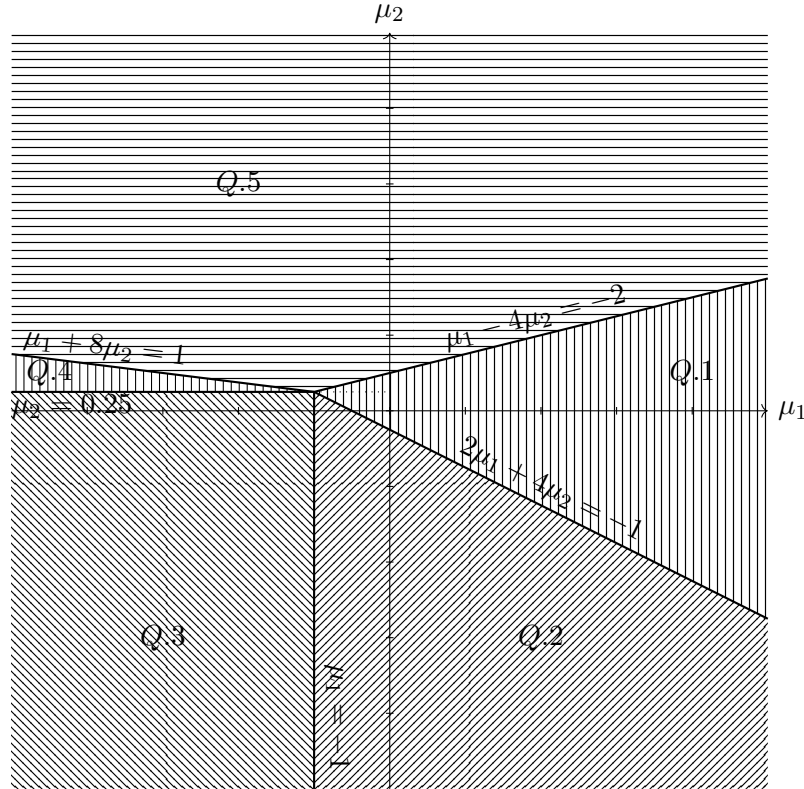


Figura 10.4: Regiões ótimas segundo parâmetros  $(\mu_1, \mu_2)$  do vetor  $b$ .

$$\begin{array}{ll}
 \min & -3x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 10x_4 - 9x_5 \\
 \text{s.a:} & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\
 & -2x_1 + 3x_2 - 5x_4 \leq 7 \\
 & \quad + 2x_2 - x_5 \leq 1 \\
 & x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, 5\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_6 & x_7 & \\
\hline
 x_1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 x_6 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 9 \\
 x_7 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & Z + 3
 \end{array}$$

10.3. Considere o seguinte problema linear com variáveis inteiras. Resolvendo o problema sem as restrições de integralidade, obtemos o quadro simplex ao lado, onde  $x_3$  e  $x_4$  são as variáveis de folga das restrições (I) e (II), respectivamente.

$$\begin{array}{ll}
 \min & 4x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a:} & 3x_1 + x_2 \geq 4 \quad \text{(I)} \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 4 \quad \text{(II)} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\
 & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
 x_1 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\
 x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & Z - 8
 \end{array}$$

Note que, combinando  $1/5$  (I) +  $2/5$  (II), obtemos a restrição  $x_1 + x_2 \geq \frac{12}{5}$ . Logo, como  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ , a desigualdade (III)  $x_1 + x_2 \geq 3$  é satisfeita por todos os pontos (inteiros) viáveis do problema. Da mesma forma, combinando  $3/5$  (I) +  $1/5$  (II) e arredondando o lado direito, obtemos a desigualdade (IV)  $2x_1 + x_2 \geq 4$ , que também é válida para o problema. Sendo assim, as restrições (III) e (IV) podem ser acrescentadas sem mudar o conjunto viável inteiro. Resolva então o problema linear acima (sem as condições de integralidade) acrescido das restrições (III) e (IV) e veja que sua solução agora é inteira e, portanto, ótima para o problema inteiro. Use pós-otimização. (Sug.: Para a primeira mudança de base, se possível, escolha um pivô com numerador unitário, o que facilitaria as contas.)

10.4. Considere o seguinte PPL e seu quadro ótimo (como problema de minimização) quando

a terceira restrição não é considerada. Encontre o quadro ótimo para o problema com as três restrições.

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 200 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 820 \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 100 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 400 \\ x_5 & 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 420 \\ \hline & 11 & 8 & 0 & 16 & 0 & Z + 3200 \end{array}$$

10.5. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

- Encontre a solução ótima do problema
- Suponha que o vetor  $c^\top = (-1, 1, -2)$  seja alterado parametricamente para  $(-1, 1, -2) + \lambda(2, -1, 1)$ . Encontre as soluções ótimas para todos os valores de  $\lambda$ .
- Suponha que o vetor  $b^\top = (6, 9)$  seja alterado parametricamente para  $(6, 9) + \mu(2, -1)$ . Encontre as soluções ótimas para todos os valores de  $\mu$ .
- Esboce os gráficos do valor ótimo em função de cada parâmetro dos itens anteriores.

10.6. Considere o seguinte problema parametrizado em  $\lambda$  e  $\mu$ . Para  $\lambda + \mu = 0$ , sua solução como problema de minimização é mostrada no quadro simplex ao lado, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as variáveis de folga da primeira e segunda restrições, respectivamente. Encontre a solução ótima do problema para todos os valores de  $\lambda$  e  $\mu$  tais que  $\mu = 2\lambda$ . Depois faça o mesmo para  $\lambda$  e  $\mu$  quaisquer.

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 5x_2 + 2x_3 - \frac{\lambda+\mu}{3}(2x_1 - 3x_2 + x_3) \\ \text{s.a:} & x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_3 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 5 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \hline & 0 & 3 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & Z + 11 \end{array}$$

10.7. Considere o seguinte PPL paramétrico em  $u$  e  $v$  para o qual apresentamos o quadro ótimo quando  $u = v = 0$ . Encontre os quadros ótimos para todos os valores de  $u$  e  $v$  tais que  $u + v = 10$ . Repita o exercício considerando  $u$  e  $v$  não relacionados.

$$\begin{array}{ll} \min & 25x_1 - 8x_2 - 8x_3 \\ \text{s.a:} & -x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq u + 50 \\ & 3x_1 - 4x_2 - x_3 \geq v - 150 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_5 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 50 \\ x_3 & -2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 100 \\ \hline & 9 & 9 & 0 & 16 & 0 & Z + 800 \end{array}$$

10.8. Considere o problema do Exercício 8.22 e sua solução ótima. Note que o fazendeiro não está usando toda a terra de que dispõe. Então, ele decide arrendar 50 hectares (metade da área não plantada) por R\$ 1500,00. Empregando, deste dinheiro, R\$ 1400,00 para contratar mais 150 dias de trabalho e o restante na preparação do cultivo, qual seria o novo plano de produção? (Use pós-otimização)

10.9. Uma fábrica produz três tipos de chapas metálicas A, B e C, que são prensadas e depois esmaltadas mecanicamente. Na configuração atual da fábrica, a disponibilidade semanal da prensa é de 200 horas e na seção de esmaltagem, de 820 horas. Essa limitação decorre do número de operários alocados em cada setor. Considerando os tempos que cada chapa demanda em cada seção, um modelo de PL para planejar a produção semanal da fábrica, maximizando seu lucro, é dado a seguir. A solução desse modelo é apresentada no quadro simplex de minimização ao lado, onde as variáveis  $x_4$  e  $x_5$  são as respectivas folgas das restrições ordenadas de acordo com o modelo.

$\max 5x_1 + 7x_2 + 8x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
s.a: $x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 200$	$x_3$	2	2	1	2	0	400
$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 820$	$x_5$	1	2	0	-2	1	420
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		11	9	0	16	0	$Z + 3200$

Suponha que alguns dos funcionários atualmente alocados na esmaltagem poderiam ser transferidos para a prensa e vice-versa. Sabendo que cada funcionário trabalha 40 horas semanais, planeje a realocação dos funcionários para maximizar o lucro. Um funcionário realocado deve trabalhar integralmente a semana na outra seção. Use Programação paramétrica.

10.10. Uma empresa fabrica 3(três) produtos A,B e C, que lhe proporcionam lucros de R\$ 7, R\$ 7 e R\$ 12 por quilograma. Para produzi-los, utiliza dois tipos de matéria-prima M e N, cujas disponibilidades são 50 e 80 litros, respectivamente. A empresa, desejando maximizar seu lucro e respeitando sua disponibilidade de matéria-prima, elabora o seguinte modelo de PL para determinar o número de unidades de cada produto a ser fabricado. A solução do modelo, resolvido como um problema de minimização, é apresentada ao lado, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as folgas das restrições relativas a M e N, respectivamente.

$\max 7x_1 + 7x_2 + 12x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
s.a: $3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50$	$x_3$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80$	$x_2$	-1	1	0	-1	1	30
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$		2	0	0	1	3	$Z + 290$

- Obtida a solução, verifica-se que a quantidade a ser produzida de B é insuficiente para atender o mercado. Seria necessária a produção de pelo menos 40 quilogramas. Considerando que é interessante o atendimento dessa demanda e que o produto A é similar ao B, a gerência gostaria de saber qual será o conjunto de soluções ótimas se for imposta a condição de que pelo menos 40Kg de qualquer combinação de A e B seja produzida. Use pós-otimização.
  - Em outro estudo, a empresa deseja determinar como varia seu lucro máximo em função do lucro unitário de C. Use programação paramétrica.
  - Admita agora que os lucros dos produtos A e B podem variar, desde que se mantenha a soma atual de R\$ 14. Quais os planos ótimos de produção para cada possível combinação de lucro desses produtos? Qual o menor lucro total que pode ocorrer?
  - Cada litro de ambas as matérias-primas foi adquirido a R\$ 10,00, de modo que o gasto total foi de R\$ 1300,00. Use programação paramétrica para determinar as soluções ótimas para todas as possíveis quantidades de M e N que podem ser adquiridas com esse mesmo montante. Qual a melhor opção?
  - Suponha que um cliente deseja comprar da empresa pelo menos  $k$  unidades do produto A. Como este produto não está sendo fabricado pela empresa, além de pagar o preço usual de compra do produto, o cliente oferece ainda (sem custo para a empresa) uma quantidade extra de 20 litros de M para ser usado na produção, caso seu pedido seja atendido. Estude qual seria o lucro da empresa em função de  $k$ . Qual é o valor máximo de  $k$  para o qual a empresa não reduz seu lucro?
- 10.11. Analise as seguintes alterações de cenário do problema descrito no Exercício 8.25:
- Considere que os lucros unitários sejam variáveis, mas que seja mantida a mesma proporção atual entre os lucros das cervejas (lucro da cerveja escura é o dobro da clara) e o que lucro do licor seja duas unidades a mais que o da cerveja clara. Para quais valores de lucros unitários seria mantida a produção atual?
  - Considere que 50 litros do estoque de malte seja trocado por  $2k$  litros de lúpulo e  $k$  litros de levedura. Para que valores de  $k$  a base ótima continuaria a mesma?
  - Supondo que o lucro esperado do licor fosse de apenas R\$1, determine a nova solução ótima a partir do quadro acima.

- iv) usando programação paramétrica, estude o comportamento da solução ótima do problema em função da quantidade mínima de cerveja exigida.

10.12. Um fabricante produz tecidos dos tipos A, B e C, sendo o lucro/m<sup>2</sup> gerado por B e C, respectivamente, o triplo e o dobro do lucro/m<sup>2</sup> fornecido por A. Para produzi-los, utiliza os fios F e G, sendo que 1Kg de G custa metade de 1Kg de F. Com o dinheiro de que dispõe, ele consegue comprar 6Kg de F e 8Kg de G. Então, desejando maximizar seu lucro, elabora o seguinte modelo de PL para determinar o quanto fabricar de cada tecido. A solução do modelo, resolvido como um problema de minimização, é apresentada abaixo, onde  $x_4$  e  $x_5$  são as folgas das restrições relativas a F e G, respectivamente.

				$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$\max x_1 + 3x_2 + 2x_3$									
s.a:	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$		$x_4$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$		$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$			$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$Z + 12$

Com o dinheiro disponível, a melhor opção do produtor é, de fato, adquirir 6Kg de F e 8Kg de G? Responda a essa questão estudando o comportamento do lucro máximo em função das combinações de quantidades de F e G possíveis de serem adquiridas com o mesmo montante. Esboce um gráfico que ilustre este comportamento.

10.13. Considere o modelo construído para o problema do Exercício 1.2.1. Sua solução é apresentada no quadro simplex (de minimização) abaixo, onde as variáveis  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$  são as folgas das restrições relativas às seções de corte, dobra e empacotamento, respectivamente. Suponha que um cliente faz um pedido de última hora de papel tipo A. A empresa explica que não incluiu este tipo em seu plano produtivo. O cliente faz a seguinte proposta: por cada Kg de papel A que receber por semana, empresta por 4 horas semanais máquina(s) de corte. Usando programação paramétrica, determine qual seria o lucro da empresa em função da quantidade produzida de A nas condições propostas. Observe que, nessas condições, pedir que se produza  $t$  Kg de A é o mesmo que pedir pelo menos  $t$  Kg de A. (Sug.: calcule o novo lado direito já em função da base estendida com a inclusão da nova restrição).

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$	1,8	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	10
$x_5$	-11	0	0	-2	1	0	160
$x_3$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	35
	7	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{35}{4}$	$Z + 850$

10.14. Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ . Supondo  $X$  não vazio e limitado, defina a função  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(\lambda) = \min\{(c + D\lambda)^\top x : x \in X\}$ .

- Mostre que a função  $f$  é côncava, ou seja, que  $f((1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2) \geq (1 - \alpha)f(\lambda^1) + \alpha f(\lambda^2)$ , para todos  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}^p$ . Lembre-se que  $\min\{g(x) + h(x) : x \in C\} \geq \min\{g(x) : x \in C\} + \max\{h(x) : x \in C\}$ .
- Mostre que  $f(\lambda) = (c_B + D_B \lambda)^\top \bar{b}$ , para todo  $\lambda$  no poliedro  $(\bar{A}^\top D_B - D)\lambda \leq \bar{c}$ , onde  $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma base primal viável,  $D_B \in \mathbb{R}^{m \times p}$  é a submatriz de  $D$  com as linhas indexadas por  $B$ ,  $\bar{b} = A_B^{-1}b$ ,  $\bar{A} = A_B^{-1}A$  e  $\bar{c}^\top = c^\top - c_B^\top \bar{A}$ . (Logo,  $f$  é linear por partes)
- Particularize a condição  $(\bar{A}^\top D_B - D)\lambda \leq \bar{c}$  quando  $p = 1$  e  $D = [e_j]$ , para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Divida nos casos  $j \notin B$  e  $j = B(r)$ . Compare o resultado com o intervalo em que a base não muda, calculado na Subseção 8.6.2.
- Desconsidere a hipótese sobre  $X$  e redefina  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  tal que  $f(\lambda) = \inf\{(c + D\lambda)^\top x : x \in X\}$ . Note que  $f(\lambda) = +\infty$ , para todo  $\lambda$ , ou  $f(\lambda) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . O que muda nos itens i) e ii)?



- 10.15. Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : A^\top u \leq c\}$ . Supondo  $U$  não vazio e limitado, defina a função  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(\mu) = \min\{c^\top x : Ax = b + D\mu, x \geq 0\}$ .
- Mostre que a função  $g$  é convexa, ou seja, que  $g((1 - \alpha)\mu^1 + \alpha\mu^2) \leq (1 - \alpha)g(\mu^1) + \alpha g(\mu^2)$ , para todos  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\mu^1, \mu^2 \in \mathbb{R}^p$ . Sug.: Mostre que  $g(\mu) = \max\{(b + D\mu)^\top u : u \in U\}$  e use argumento similar ao Exercício 10.14(i).
  - Mostre que  $g(\mu) = c_B^\top(\bar{b} + \bar{D}\mu)$ , para todo  $\mu$  no poliedro  $-\bar{D}\mu \leq \bar{b}$ , onde  $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma base dual viável,  $\bar{b} = A_B^{-1}b$  e  $\bar{D} = A_B^{-1}D$ . (Logo,  $g$  é linear por partes)
  - Particularize a condição  $-A_B^{-1}D\mu \leq \bar{b}$  quando  $p = 1$  e  $D = [e_i]$ , para algum  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Compare o resultado com o intervalo em que a base não muda, calculado na Subseção 8.6.2.
  - Desconsidere a hipótese sobre  $U$  e redefina  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  tal que  $g(\mu) = \inf\{c^\top x : Ax = b + D\mu, x \geq 0\}$ . Note que  $g(\mu) \in \{-\infty, +\infty\}$ , para todo  $\mu$ , ou  $g(\mu) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . O que muda nos itens i) e ii)?

# Capítulo 11

## Decomposições

Uma estratégia comum na resolução de problemas de grande porte é decompô-los em subproblemas menores cujas soluções possam ser usada na obtenção de uma solução para o problema original. No caso de programação linear, parece natural considerar a possibilidade de particionar as restrições ou as variáveis do modelo, especialmente quando possuem grande número de variáveis ou restrições. Podemos imaginar diferentes critérios para esse particionamento, como por exemplo priorizar a resolução de uma “parte mais relevante” do modelo matemático (seja definido por um subconjunto de variáveis que se espera contenha as básicas na solução ótima ou um conjunto de restrições entre as quais possivelmente estarão as ativas no ótimo) ou ainda aproveitar alguma subestrutura particular de subgrupos de restrições ou variáveis.

Neste capítulo, veremos algumas formas clássicas de decomposição de problemas de programação linear e como elas se relacionam. Vale destacar que elas podem ser adaptadas para programação inteira, onde têm papel fundamental na definição de métodos de solução.

### 11.1 Dantzig-Wolfe

Considere o PPL

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min c^\top x \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & \quad A'x = b' \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

onde as restrições foram particionadas em dois grupos, digamos com  $m$  e  $m'$  restrições, respectivamente. Assim, temos  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A' \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $b' \in \mathbb{R}^{m'}$ . Seja

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

o conjunto definido pelo primeiro grupo de restrições junto com as restrições de não negatividade. Dessa forma, reescrevemos

$$(P) \quad \min c^\top x \quad \text{s.a: } A'x = b', x \in X.$$

Vamos admitir que  $X \neq \emptyset$ , do contrário o problema é inviável.

Pelo Teorema 5.7.1, sabemos que

$$X = \left\{ x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^q \beta_j d^j : \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, q \right\}, \quad (11.1)$$

onde  $X_v = \{x^1, \dots, x^p\}$  e  $X_r = \{d^1, \dots, d^q\}$  são os conjuntos (finitos) de vértices e direções de recessão extremas de  $X$ . Usando (11.1), podemos substituir a restrição  $x \in X$  de  $(P)$ , obtendo a seguinte reformulação do problema:

$$(PM) \min \sum_{i=1}^p (c^\top x^i) \alpha_i + \sum_{j=1}^q (c^\top d^j) \beta_j \quad (11.2)$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^p (A' x^i) \alpha_i + \sum_{j=1}^q (A' d^j) \beta_j = b' \quad (11.3)$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \quad (11.4)$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (11.5)$$

$$\beta_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, q \quad (11.6)$$

Essa é a clássica reformulação de Dantzig-Wolfe, e  $(PM)$  é chamado *problema mestre*. Associando variáveis duais  $\pi \in \mathbb{R}^{m'}$  e  $\pi_0 \in R$  às restrições (11.3) e (11.4), respectivamente, obtemos o dual de  $(PM)$ :

$$(DM) \max \pi^\top b' + \pi_0 \quad (11.7)$$

$$\text{s.a: } \pi^\top (A' x^i) + \pi_0 \leq c^\top x^i \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (11.8)$$

$$\pi^\top (A' d^j) \leq c^\top d^j \quad \forall j = 1, \dots, q \quad (11.9)$$

O desenvolvimento acima aliado ao Teorema Fundamental da Dualidade nos leva diretamente ao seguinte resultado

**Proposição 11.1.1.**  $V[P] = V[PM] = V[DM]$ .

Note que, em  $(PM)$ , as variáveis são  $\alpha$  e  $\beta$ , potencialmente em número exponencial. Para resolver  $(PM)$ , podemos aplicar o método de geração de colunas, visto na Seção 7.5. Nesse método, partindo de um conjunto inicial de colunas (variáveis), geramos um problema restrito a elas, que é então resolvido, e, iterativamente, acrescentamos outras colunas a ele que possam melhorar sua solução. Esse processo é descrito precisamente a seguir.

Considere o problema mestre resolvido na iteração corrente, que é dado por  $(PM)$  restrito a um grupo de colunas (podemos imaginar que as variáveis associadas às outras colunas foram fixadas em zero). O dual desse problema restrito consiste em uma relaxação de  $(DM)$ , onde algumas restrições foram descartadas. Seja  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  uma solução ótima desse dual. Como sabemos, as folgas das restrições duais (11.8)-(11.9) em  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  fornecem os custos reduzidos das variáveis de  $(PM)$  na solução primal correspondente, dados por:

- **custo reduzido de  $\alpha_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ :**  $c^\top x^i - \bar{\pi}^\top A' x^i - \bar{\pi}_0 = (c^\top - \bar{\pi}^\top A') x^i - \bar{\pi}_0$
- **custo reduzido de  $\beta_j$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$ :**  $c^\top d^j - \bar{\pi}^\top A' d^j = (c^\top - \bar{\pi}^\top A') d^j$

Caso todos esses custos reduzidos sejam não negativos, a solução ótima do mestre restrito fornece uma solução ótima para o problema mestre completo, bastando atribuir valor nulo às variáveis ausentes no mestre restrito. Visto de outra forma, temos, nesse caso, que a solução  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$ , ótima para uma relaxação de  $(DM)$ , é, na verdade, viável para  $(DM)$ , sendo, portanto, ótima para  $(DM)$ .

Caso exista algum custo reduzido negativo, obtemos uma nova coluna a acrescentar ao mestre restrito com potencial para melhorar a solução corrente. Se  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A') x^{i*} - \bar{\pi}_0 < 0$ , para algum

$i^* \in \{1, \dots, p\}$ , então a variável  $\alpha_{i^*}$  tem custo reduzido negativo, não pertencendo ao mestre restrito corrente. Ela deve ser acrescentada ao problema corrente, usando a respectiva coluna

$$\begin{bmatrix} c^\top x^{i^*} \\ A' x^{i^*} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (11.10)$$

Similarmente, se  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')d^{j^*} < 0$  para algum  $j^* \in \{1, \dots, q\}$ , então a variável  $\beta_{j^*}$  tem custo reduzido negativo, não pertencendo ao mestre restrito corrente. Nesse caso, o problema corrente deve ser acrescido de  $\beta_{j^*}$ , cuja coluna correspondente é

$$\begin{bmatrix} c^\top d^{j^*} \\ A' d^{j^*} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.11)$$

A verificação da ocorrência de um ou outro caso pode ser realizada com a solução do seguinte subproblema, definido a partir da solução dual corrente  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$ :

$$\begin{aligned} P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0) \quad & \min (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x - \bar{\pi}_0 \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Como  $X \neq \emptyset$  por hipótese, esse problema é viável. Podem acontecer então dois casos:

- **Caso 1:**  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  é ilimitado. Então, pelo Teorema 5.9.1, existe  $d^{j^*} \in X_r$  tal que  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')d^{j^*} < 0$ . A direção extrema  $d^{j^*}$  de  $X$  é encontrada pelo simplex quando da constatação de que  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  é ilimitado. Nesse caso, devemos acrescentar a variável  $\beta_{j^*}$ , cuja coluna associada é (11.11).
- **Caso 2:**  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  tem solução ótima. Então, pelo Teorema 5.9.1,  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')d^j \geq 0$ , para todo  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Além disso, pelo Teorema 5.5.1, existe  $x^{i^*} \in X_v$  tal que  $\delta := (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i^*} - \bar{\pi}_0 = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^i - \bar{\pi}_0$ . O vértice  $x^{i^*}$  de  $X$  é encontrado pelo simplex. Temos então dois subcasos:
  - $\delta < 0$ : como  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i^*} - \bar{\pi}_0 < 0$ , então devemos acrescentar a variável  $\alpha_{i^*}$ , cuja coluna associada é (11.10).
  - $\delta \geq 0$ : nesse caso, temos  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^i - \bar{\pi}_0 \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , e  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')d^j \geq 0$ , para todo  $j \in \{1, \dots, q\}$ , ou seja, todos os custos reduzidos são não negativos. Portanto,  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  é ótima para  $(DM)$ , e a solução ótima do problema mestre restrito corrente, junto com valor zero para as variáveis de  $(PM)$  que ele não contém, é uma solução ótima para  $(PM)$ .

Quando uma solução ótima para  $(PM)$  é encontrada, determina-se também uma solução ótima para  $(P)$ , da seguinte forma.

**Proposição 11.1.2.** *Sejam  $\alpha_i^*$ ,  $i = 1, \dots, p$ , e  $\beta_j^*$ ,  $j = 1, \dots, q$ , uma solução ótima para  $(PM)$ . Então uma solução ótima para  $(P)$  é*

$$x^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i^* x^i + \sum_{j=1}^q \beta_j^* d^j. \quad (11.12)$$

*Prova:* Pelas restrições (11.4)-(11.6) e pela expressão de  $X$  em (11.1), temos que  $x^* \in X$ . Além disso, pela restrição (11.3), obtemos  $A'x^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i^* (A'x^i) + \sum_{j=1}^q \beta_j^* (A'd^j) = b'$ . Logo,  $x^*$  é viável para  $(P)$ . Mais ainda, pela expressão da função objetivo (11.2) e pela Proposição 11.1.1,

chegamos a  $c^\top x^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i^* (c^\top x^i) + \sum_{j=1}^q \beta_j^* (c^\top d^j) = V[PM] = V[P]$ . Portanto,  $x^*$  é ótimo para  $(P)$ . ■

Vale observar que, para o cálculo de  $x^*$  em (11.12), é suficiente conhecer os vértices e direções extremas associados a multiplicadores  $\alpha_i^*$  e  $\beta_j^*$  não nulos. Evidentemente, esses multiplicadores não nulos formam um subconjunto das variáveis presentes no último problema mestre restrito resolvido, e as colunas associadas a essas variáveis foram geradas exatamente pelos vértices e direções extremas desejados.

O processo iterativo descrito acima está resumido no Algoritmo 6. Na apresentação desse algoritmo, consideramos  $X_v = \{x^i : i \in V\}$  e  $X_r = \{d^j : j \in R\}$ , respectivamente, os conjuntos de vértices e direções de recessão extremas de  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ . Logo,  $V$  e  $R$  denotam os conjuntos de índices desses elementos. Além disso, denotamos por  $PM(V', R')$ , para  $V' \subseteq V$  e  $R' \subseteq R$ , o problema mestre de Dantzig-Wolfe restrito às colunas definidas pelos vértices  $\{x^i : i \in V'\}$  e direções  $\{d^j : j \in R'\}$ .

---

**Algoritmo 6:** DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE

---

**Entrada:**  $A, A', b, b', c$

**Saída:** Solução ótima ou Problema ilimitado

0 **início**

1     Determine  $V' \subseteq V$  e  $R' \subseteq R$  tais que  $PM(V', R')$  é viável<sup>1</sup>

2     Resolva  $PM(V', R')$

3     **se**  $PM(V', R')$  *é ilimitado* **então Pare:**  $(P)$  é ilimitado;

4     Seja  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  uma solução ótima para o dual de  $PM(V', R')$

5     Resolva  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$

6     **se**  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  *é ilimitado* **então**

7         Determine direção  $d^{j*}$  tal que  $(c^\top - \bar{\pi}^\top A')d^{j*} < 0$

8         Acrescente a coluna (11.11), ou seja,  $R' \leftarrow R' \cup \{j^*\}$

9         Volte a 2

10    **fim**

11    Seja  $x^{i*}$  solução ótima de  $PM(V', R')$  com valor  $\delta = (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i*} - \bar{\pi}_0$

12    **se**  $\delta < 0$  **então**

13         Acrescente a coluna (11.10), ou seja,  $V' \leftarrow V' \cup \{i^*\}$

14         Volte a 2

15    **fim**

16    **Pare:** Solução ótima de  $PM(V', R')$  define solução ótima para  $(P)$  dada por (11.12)

17 **fim**

---

Em cada iteração desse processo de resolução de  $(PM)$ , temos um limite inferior e um limite superior para  $(PM)$  e, conseqüentemente, para  $(P)$ .

**Proposição 11.1.3.** *Sejam  $(\overline{PM})$  o problema mestre corrente e  $(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  uma solução ótima para seu dual. Então,  $V[\overline{PM}] + V[P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)] \leq V[PM] \leq V[\overline{PM}]$ .*

*Prova:* A desigualdade  $V[PM] \leq V[\overline{PM}]$  é trivial, pois  $(\overline{PM})$  é o problema de minimização  $(PM)$  com algumas variáveis fixadas em zero. A outra desigualdade também é trivial quando  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  é ilimitado, pois  $V[P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)] = -\infty$  nesse caso. Suponha então que  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$  tenha solução ótima. Então,

$$(c^\top - \bar{\pi}^\top A')d^j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad (11.13)$$

$$V[P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)] = (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i*} - \bar{\pi}_0 \leq (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^i - \bar{\pi}_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad (11.14)$$

onde  $x^{i*} \in X_v$  é uma solução ótima para  $P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)$ . Além disso,

$$V[\overline{PM}] = \bar{\pi}^\top b' + \bar{\pi}_0.$$

Então,  $V[\overline{PM}] + V[P(\bar{\pi}, \bar{\pi}_0)] = \bar{\pi}^\top b' + (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i*}$  é o valor, segundo a função dual, do ponto  $(\hat{\pi}, \hat{\pi}_0) = (\bar{\pi}, (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i*})$ . Para chegar a desigualdade desejada, basta mostrar que esse ponto é viável para  $(DM)$ , pois  $V[PM]$  é pelo menos o valor de qualquer solução viável para  $(DM)$ . Por (11.13), temos que  $\bar{\pi}^\top(A'd^j) \leq c^\top d^j$ , ou melhor,  $\hat{\pi}^\top(A'd^j) \leq c^\top d^j$ , para todo  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Adicionalmente, por (11.14),  $\bar{\pi}^\top(A'x^i) + (c^\top - \bar{\pi}^\top A')x^{i*} \leq c^\top x^i$ , isto é,  $\hat{\pi}^\top(A'x^i) + \hat{\pi}_0 \leq c^\top x^i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Logo,  $(\hat{\pi}, \hat{\pi}_0)$  é viável para  $(DM)$ . ■

A primeira fase do Algoritmo 6, passo 1, pode ser implementada como a primeira fase do simplex. Podemos criar um problema mestre “artificial”, introduzindo as variáveis artificiais necessárias para construir uma base canônica viável e mudando a função objetivo (11.2) para a soma dessas variáveis. Ao final dessa primeira fase, podemos concluir que o problema  $(PM)$  é inviável (e portanto  $(P)$  é inviável, pois não é possível satisfazer  $A'x = b'$  para  $x \in X$ ) ou gerar um conjunto inicial de colunas indexadas por  $(V', R')$  tal que  $PM(V', R')$  seja viável. Em particular, se, em lugar de  $A'x = b'$ , tivermos  $A'x \leq b'$ ,  $b' \geq 0$ , então não precisamos dessa primeira fase. Podemos começar o processo de geração de colunas apenas com aquelas referentes às variáveis de folga dessas restrições (pois  $P(\{0\}, \emptyset)$  é viável).

## 11.2 Lagrange

Considere novamente o PPL

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min c^\top x \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & \quad A'x = b' \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

onde as restrições foram particionadas em dois grupos, sendo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A' \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $b' \in \mathbb{R}^{m'}$ . Seja

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$$

o conjunto definido pelo primeiro grupo de restrições junto com as restrições de não negatividade. Vamos admitir que  $X \neq \emptyset$ , do contrário o problema é inviável. Sejam  $X_v = \{x^1, \dots, x^p\}$  e  $X_r = \{d^1, \dots, d^q\}$  os conjuntos (finitos) de vértices e direções de recessão extremas de  $X$ .

Dado  $\lambda \in \mathbb{R}^{m'}$ , definimos a *relaxação lagrangiana* das restrições  $A'x = b'$  de  $(P)$  como o problema

$$\begin{aligned} RL(\lambda) \quad & \min c^\top x + \lambda^\top(b' - A'x) = (c^\top - \lambda^\top A')x + \lambda^\top b' \\ & \text{s.a: } Ax = b \\ & \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Similarmente ao desenvolvimento feito na Seção 8.1, podemos mostrar que essa relaxação fornece um limite inferior para  $(P)$ .

**Proposição 11.2.1.** *Para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^{m'}$ ,  $V[P] \geq V[RL(\lambda)]$ .*

*Prova:* Seja  $\lambda \in \mathbb{R}^{m'}$ . Note que as funções objetivo de  $(P)$  e  $RL(\lambda)$  coincidem nos pontos viáveis de  $(P)$ , e o conjunto viável de  $RL(\lambda)$  contém aquele de  $(P)$ . Então, se o primeiro problema é ilimitado, o segundo também o é. Adicionalmente, se  $(P)$  é inviável, o resultado  $+\infty = V[P] \geq V[RL(\lambda)]$  vale trivialmente. Finalmente, falta considerar o caso em que  $(P)$  tem solução, digamos  $x^*$ . Então,

$$V[P] = c^\top x^* = c^\top x^* + \lambda^\top(b' - A'x^*) \geq V[RL(\lambda)],$$

onde a segunda igualdade e a desigualdade decorrem do fato que  $A'x^* = b'$  e  $x^*$  é viável para  $RL(\lambda)$ , respectivamente. ■

**Corolário 11.2.1.** *Seja  $\lambda \in \mathbb{R}^{m'}$ . Se  $x^*$  é ótimo para  $RL(\lambda)$  e  $A'x^* = b'$ , então  $x^*$  é ótimo para  $(P)$ .*

*Prova:* Pela hipótese, concluímos que  $x^*$  é viável para  $(P)$  e, por conseguinte,  $c^\top x^* \geq V[P]$ . Por outro lado,  $V[RL(\lambda)] = c^\top x^* + \lambda^\top (b' - A'x^*) = c^\top x^*$ . O resultado então segue pela Proposição 11.2.1. ■

Quando as restrições relaxadas por meio dos multiplicadores lagrangianos são desigualdades, os dois resultados acima ainda valem, porém com algumas adaptações. Se em lugar de  $A'x = b'$  tivermos  $A'x \geq b'$  ou  $A'x \leq b'$ , precisamos exigir  $\lambda \geq 0$  ou  $\lambda \leq 0$ , respectivamente, na Proposição 11.2.1. Já no Corolário 11.2.1, além de trocar  $A'x^* = b'$  por  $A'x \geq b'$  ou  $A'x \leq b'$  e supor o sinal adequado de  $\lambda$ , precisamos também incluir a condição  $\lambda^\top (b' - A'x^*) = 0$  na hipótese.

A Proposição 11.2.1 sugere determinar o vetor  $\lambda$  que fornece o maior valor para  $V[RL(\lambda)]$ . Como  $X \neq \emptyset$  por hipótese, então  $V[RL(\lambda)] = -\infty$  ou  $V[RL(\lambda)] \in \mathbb{R}$ . O primeiro caso ocorre se, e somente se,  $(c^\top - \lambda^\top A')d^j < 0$  para algum  $j \in \{1, \dots, q\}$  (ver Teorema 5.9.1). Já no segundo caso, pelo Teorema 5.5.1, temos

$$V[RL(\lambda)] = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \{(c^\top - \lambda^\top A')x^i + \lambda^\top b'\}.$$

Pelo exposto, a determinação desse melhor vetor  $\lambda$  leva à definição do *dual lagrangiano* de  $(P)$ :

$$\begin{aligned} (DL) \quad & \max \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \{(c^\top - \lambda^\top A')x^i + \lambda^\top b'\} \\ & \text{s.a: } (c^\top - \lambda^\top A')d^j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, q\} \end{aligned}$$

ou ainda

$$(DL) \quad \max \lambda_0 \tag{11.15}$$

$$\text{s.a: } \lambda_0 \leq (c^\top - \lambda^\top A')x^i + \lambda^\top b', \forall i \in \{1, \dots, p\} \tag{11.16}$$

$$(c^\top - \lambda^\top A')d^j \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, q\} \tag{11.17}$$

Note que as restrições (11.17) só consideram  $\lambda$  tal que  $V[RL(\lambda)] \in \mathbb{R}$ , enquanto a função objetivo (11.15) e as restrições (11.16) garantem  $\lambda_0 = V[RL(\lambda)]$  no ótimo.

Reorganizando os termos em (11.15)-(11.17), chegamos ao modelo

$$(DL) \quad \max \lambda_0 \tag{11.18}$$

$$\text{s.a: } \lambda_0 - \lambda^\top (b' - A'x^i) \leq c^\top x^i, \forall i \in \{1, \dots, p\} \tag{11.19}$$

$$\lambda^\top (A'd^j) \leq c^\top d^j, \forall j \in \{1, \dots, q\} \tag{11.20}$$

Associando variáveis duais  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , e  $\beta_j \geq 0$ ,  $j \in \{1, \dots, q\}$ , às restrições de  $(DL)$  acima, obtemos o problema dual:

$$\begin{aligned} (DDL) \quad & \min \sum_{i=1}^p (c^\top x^i) \alpha_i + \sum_{j=1}^q (c^\top d^j) \beta_j \\ & \text{s.a: } \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^p -(b - A'x^i) \alpha_i + \sum_{j=1}^q (A'd^j) \beta_j = 0 \\ & \alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, p \\ & \beta_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{11.21}$$

Então, reescrevendo (11.21) como

$$\sum_{i=1}^p (A'x^i)\alpha_i + \sum_{j=1}^q (A'd^j)\beta_j = \sum_{i=1}^p b'\alpha_i = b',$$

percebemos que o dual do dual lagrangiano ( $DL$ ) é exatamente o problema mestre de Dantzig-Wolfe. Essa constatação e a Proposição 11.1.1 nos permitem concluir o seguinte.

**Proposição 11.2.2.**  $V[P] = V[PM] = V[DL]$ . Mais ainda, se  $(\lambda^*, \lambda_0^*)$  é uma solução ótima de (11.18)-(11.20), então  $\lambda_0^* = V[RL(\lambda^*)] = V[P]$ .

Note que o problema (11.18)-(11.20) possui, potencialmente, um número exponencial de restrições. Para resolvê-lo, podemos aplicar o método de geração de restrições. Partindo de um subconjunto inicial de restrições, obtemos uma relaxação de ( $DL$ ) apenas com essas restrições, que é então resolvida, e, iterativamente, acrescentamos outras restrições violadas pela solução corrente. Esse processo é descrito precisamente a seguir.

Considere a relaxação corrente de (11.18)-(11.20), onde apenas um subconjunto de restrições é considerado. Seja  $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  uma solução ótima dessa relaxação. A partir dessa solução, considere o subproblema:

$$\begin{aligned} P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0) \quad & \min (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x + \bar{\lambda}^\top b' - \bar{\lambda}_0 \\ \text{s.a:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

que é equivalente a  $RL(\bar{\lambda})$ , pois diferem apenas na função objetivo de um termo constante ( $\bar{\lambda}_0$ ).

Como  $X \neq \emptyset$  por hipótese, esse problema é viável. Podem acontecer então dois casos:

- **Caso 1:**  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  é ilimitado. Então, pelo Teorema 5.9.1, existe  $d^{j*} \in X_r$  tal que  $(c^\top - \bar{\lambda}^\top A')d^{j*} < 0$ . A direção extrema  $d^{j*}$  de  $X$  é encontrada pelo simplex quando da constatação de que  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  é ilimitado. Nesse caso, a restrição de (11.17) referente a  $d^{j*}$  está violada por  $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  e deve ser acrescentada à relaxação corrente.
- **Caso 2:**  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  tem solução ótima. Então, pelo Teorema 5.9.1,  $(c^\top - \bar{\lambda}^\top A')d^j \geq 0$ , para todo  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Além disso, pelo Teorema 5.5.1, existe  $x^{i*} \in X_v$  tal que  $\delta := (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^{i*} + \bar{\lambda}^\top b' - \bar{\lambda}_0 = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^i + \bar{\lambda}^\top b' - \bar{\lambda}_0$ . O vértice  $x^{i*}$  de  $X$  é encontrado pelo simplex. Temos então dois subcasos:
  - $\delta < 0$ : como  $\bar{\lambda}_0 > (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^{i*} + \bar{\lambda}^\top b'$ , então a restrição de (11.16) referente a  $x^{i*}$  está violada por  $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  e deve ser acrescentada à relaxação corrente.
  - $\delta \geq 0$ : nesse caso, temos  $\bar{\lambda}_0 \leq (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^i + \bar{\lambda}^\top b'$ , para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , e  $(c^\top - \bar{\lambda}^\top A')d^j \geq 0$ , para todo  $j \in \{1, \dots, q\}$ , ou seja, todas as restrições de ( $DL$ ) são verificadas por  $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$ . Logo, essa solução é ótima para ( $DL$ ).

Ao encontrarmos uma solução ótima  $(\lambda^*, \lambda_0^*)$  para ( $DL$ ), quando  $\delta \geq 0$  no caso 2 acima, obtemos também uma solução ótima  $(\alpha^*, \beta^*)$  para seu dual. Ela é dada pela solução dual ótima para a relaxação de ( $DL$ ) resolvida nesse momento junto com valor nulo para as variáveis duais associadas às restrições ausentes em tal relaxação. A solução  $(\alpha^*, \beta^*)$  fornece, por sua vez, uma solução ótima para ( $P$ ), da seguinte forma.

**Proposição 11.2.3.** Sejam  $\alpha_i^*$ ,  $i = 1, \dots, p$ , e  $\beta_j^*$ ,  $j = 1, \dots, q$ , uma solução ótima para o dual de ( $DL$ ). Então uma solução ótima para ( $P$ ) é

$$x^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i^* x^i + \sum_{j=1}^q \beta_j^* d^j. \quad (11.22)$$



*Prova:* Como o dual de  $(DL)$  é  $(PM)$ , o resultado segue da Proposição 11.1.2. ■

Vale registrar que os vértices e direções extremas efetivamente necessários para o cálculo de  $x^*$  em (11.22) foram determinados quando da geração de restrições de  $(DL)$ . De fato, é suficiente conhecer os vértices e direções extremas associados a multiplicadores  $\alpha_i^*$  e  $\beta_j^*$  não nulos, ou seja, variáveis duais que se associam a um subconjunto das restrições presentes na última relaxação de  $(DL)$  resolvida. E essas restrições foram geradas exatamente pelos vértices e direções extremas desejados.

O processo iterativo para resolução de  $(DL)$ , conforme descrito acima, está resumido no Algoritmo 7. Na apresentação desse algoritmo, consideramos  $X_v = \{x^i : i \in V\}$  e  $X_r = \{d^j : j \in R\}$ , respectivamente, os conjuntos de vértices e direções de recessão extremas de  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ . Logo,  $V$  e  $R$  denotam os conjuntos de índices desses elementos. Além disso, denotamos por  $DL(V', R')$ , para  $V' \subseteq V$  e  $R' \subseteq R$ , a relaxação de  $(DL)$  definida apenas pelas restrições referentes aos vértices  $\{x^i : i \in V'\}$  e direções  $\{d^j : j \in R'\}$ .

---

**Algoritmo 7:** DECOMPOSIÇÃO DE LAGRANGE

---

**Entrada:**  $A, A', b, b', c$

**Saída:** Solução ótima ou Problema ilimitado

0 **início**

```

1  Determine  $V' \subseteq V$  e  $R' \subseteq R$  tais que  $DL(V', R')$  não é ilimitado2
2  Resolva  $DL(V', R')$ 
3  se  $DL(V', R')$  é inviável então Pare:  $(P)$  é ilimitado;
4  Seja  $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  uma solução ótima para  $DL(V', R')$ 
5  Resolva  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$ 
6  se  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  é ilimitado então
7      Determine direção  $d^{j^*}$  tal que  $(c^\top - \bar{\lambda}^\top A')d^{j^*} < 0$ 
8      Acrescente restrição de (11.17) referente a  $d^{j^*}$ , ou seja,  $R' \leftarrow R' \cup \{j^*\}$ 
9      Volte a 2
10 fim
11 Seja  $x^{i^*}$  solução ótima de  $DL(V', R')$  com valor  $\delta = (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^{i^*} + \bar{\lambda}^\top b' - \bar{\lambda}_0$ 
12 se  $\delta < 0$  então
13     Acrescente a restrição de (11.16) referente a  $x^{i^*}$ , ou seja,  $V' \leftarrow V' \cup \{i^*\}$ 
14     Volte a 2
15 fim
16 Pare: Solução ótima dual de  $DL(V', R')$  define solução ótima para  $(P)$  dada por
    (11.22)

```

17 **fim**

---

Em cada iteração desse processo de resolução de  $(DL)$ , temos um limite inferior e um limite superior para  $(DL)$  e, consequentemente, para  $(P)$ .

**Proposição 11.2.4.** *Sejam  $(\overline{DL})$  a relaxação corrente de  $(DL)$  e  $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  uma solução ótima para ela. Então,  $V[\overline{DL}] + V[P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)] \leq V[DL] \leq V[\overline{DL}]$ .*

*Demonstração.* A desigualdade  $V[DL] \leq V[\overline{DL}]$  é trivial, pois  $(\overline{DL})$  é uma relaxação do problema de maximização  $(DL)$ , obtida com o descarte de algumas restrições. A outra desigualdade também é trivial quando  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  é ilimitado, pois  $V[P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)] = -\infty$  nesse caso. Suponha então que  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  tenha solução ótima, ocorrendo, digamos, em  $x^{i^*} \in X_v$ . Então,

$$V[\overline{DL}] + V[P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)] = \bar{\lambda}_0 + [(c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^{i^*} + \bar{\lambda}^\top b' - \bar{\lambda}_0] = (c^\top - \bar{\lambda}^\top A')x^{i^*} + \bar{\lambda}^\top b' = V[RL(\bar{\lambda})].$$

Note que a última igualdade decorre da equivalência entre  $P(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_0)$  e  $RL(\bar{\lambda})$ . Finalmente, a Proposição 11.2.1 garante que  $V[RL(\bar{\lambda})] \leq V[P] = V[DL]$ . □

## 11.3 Benders