LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

O PROBLEMA DA k-FLORESTA GERADORA MINIMAMENTE ROTULADA

Kennedy Corrêa
Universidade Federal do Ceará
Av. Mister Hull, s/n - Campus do Pici, Fortaleza, Ceará 60440-900, Brazil
kennedycorrea2001@gmail.com

Manoel Campêlo
Universidade Federal do Ceará - Dep. Estatística e Matemática Aplicada
Av. Mister Hull, s/n - Campus do Pici, Fortaleza, Ceará 60440-900, Brazil
mcampelo@ufc.br

RESUMO

O problema da k-Floresta Geradora Minimamente Rotulada consiste em, dado um grafo colorido em arestas, encontrar uma floresta geradora com no máximo k componentes conexas e número mínimo de cores. Este trabalho apresenta o problema, introduz uma formulação de programação inteira e relata experimentos computacionais.

PALAVRAS CHAVE. Otimização em Grafos, Coloração de Arestas, Floresta Geradora.

Tópicos (Otimização Combinatória, Programação Matemática, Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

The Minimum Labelling Spanning k-Forest consists in, given an edge-colored graph, finding a spanning forest with at most k components and minimum number of colors. This paper presents the problem, introduces an integer linear programming formulation, and reports computational experiments.

KEYWORDS. Graph Optimization. Edge-coloring. Spanning Forest.

Paper topics (Combinatorial Optimization, Mathematical Programming, Graph Theory and Algorithms)

1. Introdução

Um grafo colorido em arestas (GCA) é um grafo $G = (V, E)$ que possui duas estruturas adicionais associadas: Um conjunto L de cores e uma função $l : E \to L$ que colore cada aresta de G. Neste trabalho os grafos serão identificados pela tupla $G = (V, E, L, l)$.

Dado um GCA G, o problema da k-Floresta Geradora Minimamente Rotulada (k-FGMR) consiste em encontrar uma floresta geradora de G com, no máximo, k componentes e o número mínimo de cores. O caso especial em que $k = 1$ consiste no problema da Árvore Geradora Minimamente Rotulada [Chang e Leu, 1997]. Em geral, o k-FGMR é um problema bastante similar ao da Floresta Geradora k-Rotulada, abordado em Cerulli et al. [2014], que consiste em determinar uma floresta geradora com até k cores e menor quantidade de componentes. Conforme Chang e Leu [1997], tal problema pode modelar aplicações em redes de comunicações onde cada rótulo representaria um meio de comunicação distinto.

Nas Figuras 1 e 2 temos um GCA e uma solução para 2-FGMR neste grafo.

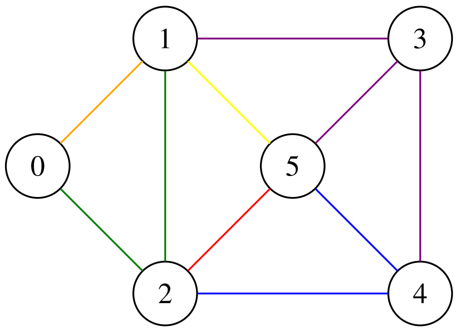

Figura 1: GCA inicial.

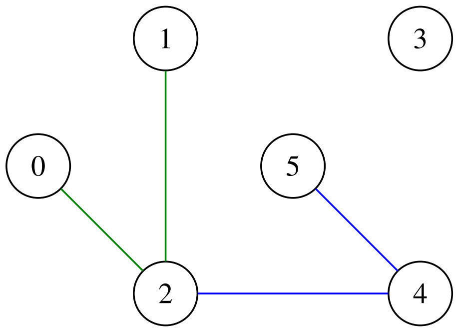

Figura 2: Uma solução para $k = 2$.

Neste trabalho propomos um modelo de programação inteira para a resolução de tal problema e também apresentamos os resultados de experimentos computacionais.

2. Formulação Matemática

Para a descrição do modelo, precisamos considerar o grafo estendido.

Definição 1 (Figueiredo [2020]) *Dado um GCA $G = (V, E, L, l)$, o grafo estendido é o GCA $G' = (V', E', L', l')$ onde $V' = V \cup \{s\}$, $E' = E \cup \{(s, v) : v \in V\}$, $L' = L \cup C$, sendo $C = \{c_v : v \in V\}$ um conjunto de cores distintas e com $C \cap L = \emptyset$, e l' é tal que* $l'(e) = \begin{cases} l(e), & e \in E \\ c_v, & e = (s, v), v \in V \end{cases}$

As figuras a seguir mostram o GCA estendido referente ao grafo da Figura 1 e a árvore nesse GCA correspondente à solução da Figura 2.

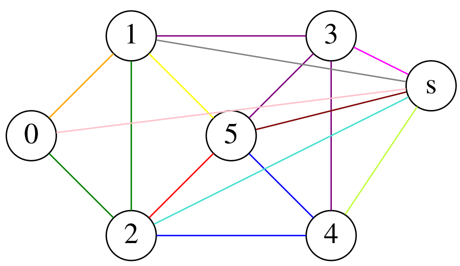

Figura 3: GCA estendido da Figura 1.

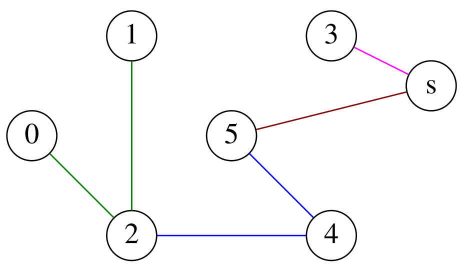

Figura 4: Solução da Figura 2 no GCA estendido.

Note que k-FGMR em (G, k) equivale a resolver o problema da árvore geradora minimamente rotulada no GCA estendido G', com uma restrição sobre o grau do vértice s para ser no máximo k. Essa ideia leva à seguinte formulação de programação inteira para o problema, onde usamos as seguintes variáveis:

- $x_{uv} \in \{0, 1\}$ recebe 1 se, e somente se, $uv \in E(G)$ é usada na solução.
- $z_l \in \{0, 1\}$ recebe 1 se, e somente se, a cor $l \in L \cup C$ é usada.
- $f_{ij} \geq 0$ é quantidade de fluxo de $i \in V(G')$ para $j \in V(G')$. Em especial, f_{sj} é a quantidade de fluxo da fonte s para o vértice j.

$$(Fluxo) \ \min \quad \sum_{l \in L} z_l \tag{1a}$$

$$\text{s.t.} \quad f_{sj} + \sum_{i:(i,j) \in E(G)} f_{ij} - \sum_{i:(i,j) \in E(G)} f_{ji} = 1 \qquad \forall j \in V(G), \tag{1b}$$

$$0 \leq f_{ij}, f_{ji} \leq M z_{l(ij)} \quad \forall\, (i, l) \in E(G), \tag{1c}$$

$$0 \leq f_{sj} \leq M z_{l(sj)} \quad \forall\, j \in V(G), \tag{1d}$$

$$\sum_{l \in C} z_l \leq k, \tag{1e}$$

$$z_l \in \{0, 1\} \qquad \forall\, l \in L \tag{1f}$$

Neste modelo, M é um termo grande, que não limita o valor do fluxo em uma aresta, caso sua cor seja escolhida. Neste trabalho, definimos $M = |V|$.

Vale mencionar que Figueiredo [2020] propôs um modelo semelhante para o problema da floresta geradora k-rotulada, onde há uma "troca" da função objetivo pela restrição (1e), e vice-versa. Em outros termos, o somatório na função objetivo passa a ser em C, enquanto na restrição (1e) passa a ser em L.

3. Experimentos Computacionais

Devido a estrutura das restrições de fluxo formar uma matriz totalmente unimodular, o uso do método de decomposição de Benders se torna muito interessante na solução deste modelo. Sendo assim, serão comparados os tempos para solução do modelo (1a)-(1f) e de sua reformulação segundo Benders. Na implementação, a desigualdade (1e) foi substituída por uma igualdade. Tal substituição é possível pois, ao se obter uma floresta geradora com k' componentes e $k' < k$, é possível retirar arestas da floresta de forma a aumentar o número de componentes mantendo ou reduzindo o número de cores.

Para os testes computacionais, foram geradas instâncias, de modo similar ao empregado em [Figueiredo, 2020]. As instâncias têm como base GCAs gerados aleatoriamente a partir dos seguintes parâmetros: $|V| = n \in \{100, 150\}, |E| = \frac{n*(n-1)}{10}, |L| \in \{50, 75, 100\}$. O número de componentes da floresta desejada é $k \in \{1, 4, 8\}$. Para cada combinação $(n, |L|, k)$, foram geradas 10 instâncias, totalizando 180 instâncias.

Os experimentos foram executados numa máquina com processador i3-12100 e 16 GB de RAM com sistema operacional Ubuntu 22.04. Implementações foram feitas na linguagem Python com o CPLEX 22.1.1.0.

Para cada instância, obteve-se o tempo em segundos para a solução do modelo usando o CPLEX assim como o tempo de solução do mesmo modelo com a versão automatizada da decomposição de Benders desse solver. Além disso, foi estabelecido um limite de 30 minutos para a solução de cada instância. Cada linha da Tabela 1 registra o número de instâncias resolvidas sem o método de Benders, a média de tempo das instâncias resolvidas pelo modelo no tempo limite (Tempo Médio) e a média de tempo das 10 instâncias resolvidas com o Benders (Tempo Médio - Benders), para a mesma combinação $(n, |L|, k)$.

n	$\|L\|$	k	Instâncias Resolvidas	Tempo Médio	Tempo Médio - Benders
100	50	1	10	203.51	0.597
100	50	4	10	20.070	0.698
100	50	8	10	25.881	0.902
100	75	1	10	100.274	1.136
100	75	4	10	265.947	2.806
100	75	8	10	155.009	2.079
100	100	1	9	574.188	3.621
100	100	4	10	456.997	14.933
100	100	8	10	214.599	16.919
150	50	1	10	194.368	1.105
150	50	4	10	130.361	1.935
150	50	8	10	167.544	1.791
150	75	1	9	1031.684	2.072
150	75	4	7	635.746	14.006
150	75	8	9	389.660	2.822
150	100	1	3	1467.500	14.264
150	100	4	2	527.823	89.281
150	100	8	9	1072.125	7.821

Tabela 1: Médias de tempo obtidas na resolução do problema.

Em todas as instâncias, o tempo de solução com o método de Benders foi menor, sendo essa diferença bastante significativa, como pode ser notado na Tabela 1. Em particular, no caso $n = 100, |L| = 150, k = 4$, apenas 2 instâncias conseguiram ser resolvidas pelo modelo inteiro, enquanto foi possível resolver todas as instâncias em pouco tempo com a decomposição de Benders.

Agradecimentos

Esse trabalho foi parcialmente financiado por CNPQ (442977/2023-9, 404479/2023-5 e 312417/2022-5) e FUNCAP (PS1-0186-00155.01.00/21, PGP-0192-00040.01.00/22, ITR-0214-00096.01.00/23)

Referências

Cerulli, R., Fink, A., Gentili, M., e Raiconi, A. (2014). The k-labeled spanning forest problem. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 18:153 – 163. ISSN 1877-0428.

Chang, R.-S. e Leu, S.-J. (1997). The information processing letters 63 (1997) 277-282 minimum labeling spanning trees. *Information Processing Letters*, 63:277–282.

Figueiredo, P. J. (2020). O problema da floresta geradora k-rotulada. Master's thesis, Universidade Federal do Ceara.