



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA INDUSTRIAL

FABRÍCIO ARAÚJO BARBOSA

**UMA NOVA ABORDAGEM DE MÉTODOS HEURÍSTICOS PARA O PROBLEMA DE
DIMENSIONAMENTO DE LOTES CAPACITADO COM RETORNO**

FORTALEZA

2025

FABRÍCIO ARAÚJO BARBOSA

UMA NOVA ABORDAGEM DE MÉTODOS HEURÍSTICOS PARA O PROBLEMA DE
DIMENSIONAMENTO DE LOTES CAPACITADO COM RETORNO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Matemática Industrial
do Centro de Ciências da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Matemática Industrial.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Ossian da
Cunha

FORTALEZA

2025

FABRÍCIO ARAÚJO BARBOSA

UMA NOVA ABORDAGEM DE MÉTODOS HEURÍSTICOS PARA O PROBLEMA DE
DIMENSIONAMENTO DE LOTES CAPACITADO COM RETORNO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Matemática Industrial
do Centro de Ciências da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Matemática Industrial.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jesus Ossian da Cunha (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Albert Einstein Fernandes Muritiba
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tibérius de Oliveira e Bonates
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Jesus Ossia da Cunha pela orientação e aprendizado em meu trabalho de conclusão de curso e durante as cadeiras do curso.

Aos meus pais por todo o apoio e tempo investido em mim, sem eles não seria possível dar os meus primeiros passos.

Ao meu irmão Lucas que demonstrou grande obstinação nos estudos e é para mim inspiração de dedicação.

Aos meus amigos, todos sem exceção, que moldaram minha personalidade e mantiveram meu alto-astral sempre nos melhores momentos.

Aos meus avôs que com fé e devoção abençoaram meu caminho e afastaram qualquer má intensão.

“O sonho é que leva a gente para frente. Se a gente for seguir a razão, fica aquietado, acomodado.”

(Ariano Suassuna)

RESUMO

O Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno (PDLCR) é uma extensão do problema clássico de planejamento da produção, incorporando restrições de capacidade e a possibilidade de reaproveitamento de itens por meio da remanufatura. Devido à sua elevada complexidade combinatória, o PDLCR requer abordagens heurísticas que ofereçam soluções viáveis e de boa qualidade em tempo computacional reduzido. Este trabalho propõe uma adaptação das matheurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*, com o uso de partições distintas para variáveis de produção e remanufatura. A proposta explora a variabilidade entre esses dois conjuntos de decisões ao longo do horizonte de planejamento e aplica uma ênfase estratégica nas variáveis de remanufatura, dada sua estrutura de custos mais vantajosa em relação à produção convencional. Os resultados indicam que a priorização das variáveis de remanufatura contribui para a obtenção de soluções com custo total inferior, além de reduzir o tempo de execução em diversas instâncias.

Palavras-chave: Dimensionamento de Lotes. Remanufatura. Relax-and-Fix. Fix-and-Optimize.

ABSTRACT

The Capacitated Lot Sizing Problem with Returns (CLSPR) is an extension of the classical production planning problem that incorporates capacity constraints and the reuse of returned items through remanufacturing. Due to its high combinatorial complexity, the CLSPR requires heuristic approaches capable of producing feasible and high-quality solutions within limited computational time. This work proposes an adaptation of the *Relax-and-Fix* and *Fix-and-Optimize* matheuristics, introducing distinct partitions for production and remanufacturing variables. The proposed approach explores the variability between these two sets of decisions over the planning horizon and strategically emphasizes remanufacturing decisions, based on their typically lower costs when compared to conventional production. The solutions were further improved using the *Fix-and-Optimize* heuristic, enabling local refinements. The results show that prioritizing remanufacturing variables leads to lower total costs and, in several cases, reduced execution time.

Keywords: Lot Sizing. Remanufacturing. Relax-and-Fix. Fix-and-Optimize.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração Algoritmo Relax-and-Fix	18
Figura 2 – Ilustração Algoritmo Fix-and-Optimize	19
Figura 3 – Comparação dos valores da função objetivo obtidos com a heurística RF para os grupos de instâncias	24
Figura 4 – Comparação dos tempos de execução obtidos com a heurística RF para os grupos de instâncias	24
Figura 5 – Comparação dos valores da função objetivo obtidos com a heurística FO para os grupos de instâncias	27
Figura 6 – Comparação dos tempos de execução obtidos com a heurística FO para os grupos de instâncias	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação de Médias Heurística RF	22
Tabela 2 – Resumo estatístico para a Heurística RF	23
Tabela 3 – Comparação de Médias Heurística FO	25
Tabela 4 – Frequência de ganhos/empates/perdas Heurística FO	26

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FO	<i>Fix and Optimize</i>
PDL	Problema de Dimensionamento de Lotes
PDLCR	Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno
RF	<i>Relax and Fix</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Caracterização do Problema	12
1.2	Objetivo do Trabalho	13
1.3	Organização do Artigo	14
2	O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES CAPACITADO COM RETORNO	15
2.1	Formulação Matemática para o PDLCR	15
3	HEURÍSTICAS RELAX-AND-FIX E FIX-AND-OPTIMIZE	17
3.1	Relax-and-Fix	17
3.2	Fix-and-Optimize	18
3.3	Motivação e aplicação Conjunta	19
4	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	20
4.1	Procedimento Experimental	20
4.2	Resultados Alcançados	22
4.2.1	<i>Relax and Fix</i>	22
4.2.2	<i>Fix and Optimize</i>	25
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	28
	REFERÊNCIAS	29

1 INTRODUÇÃO

O planejamento da produção é uma atividade estratégica para empresas industriais, permitindo a utilização eficiente dos recursos e a redução dos custos operacionais. Entre os problemas clássicos estudados nessa área está o **Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL)**, que busca determinar as quantidades ideais de produção em um horizonte de períodos para atender à demanda ao menor custo possível (GLOCK; GROSSE, 2014). No entanto, diversas variações do problema surgem da necessidade de representar condições reais mais complexas, como restrições de capacidade e a possibilidade de remanufatura de produtos.

Neste contexto, o **Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno (PDLCR)** emerge como uma versão mais sofisticada e realista do PDL. O PDLCR considera não apenas limitações de capacidade de produção em cada período, mas também o retorno de itens ao sistema produtivo, os quais podem ser remanufaturados e reutilizados para atender a futuras demandas (LI; CHEN, 2006; SANTOS, 2024). Essa adição confere ao problema características combinatórias ainda mais desafiadoras, aumentando sua complexidade computacional.

1.1 Caracterização do Problema

O PDLCR é classificado como um problema **NP-difícil** (WAGNER; WHITIN, 1958), o que implica que encontrar soluções ótimas para instâncias de grande porte se torna inviável por métodos exatos convencionais. A estrutura do problema envolve decisões integradas sobre produção, remanufatura, estoque e utilização da capacidade disponível, ao longo de um horizonte de planejamento, onde:

- Itens são produzidos ou remanufaturados para atender demandas conhecidas;
- Existe um limite de produção por período (capacidade de máquinas, mão de obra, matéria-prima);
- Itens retornados podem ser remanufaturados, sendo incorporados ao estoque de produção;
- Custos fixos de preparação, de produção/remanufatura e de estoque são considerados (CUNHA; MELO, 2016; PEREIRA *et al.*, 2022).

Devido à elevada complexidade envolvida, abordagens heurísticas se mostram alternativas práticas para a obtenção de soluções de boa qualidade em tempos computacionais aceitáveis. Entre as técnicas destacam-se as heurísticas, ou matheurísticas, **Relax and Fix (RF)**

e *Fix and Optimize* (FO), aplicadas com sucesso em problemas combinatórios (BOCTOR; POULIN, 2005; SANTOS, 2024).

1.2 Objetivo do Trabalho

Este trabalho adota uma abordagem computacional-experimental baseada na implementação e adaptação de heurísticas para o PDLCR. O principal foco está na análise comparativa de diferentes estratégias de particionamento das variáveis associadas à produção e à remanufatura, utilizando como base o trabalho proposto por Santos (2024).

O algoritmo desenvolvido neste estudo aborda a heurística *Relax-and-Fix* (RF) a qual é aplicada sobre a formulação padrão do PDLCR para geração de uma solução viável inicial. Essa heurística consiste em uma abordagem baseada em métodos exatos. Nessa heurística, o horizonte de tempo é dividido em três partições sequenciais, uma partição contendo variáveis com valores relaxados (valores reais não-negativos), uma partição com valores tratados como inteiros, e uma terceira partição com valores fixados em inteiros. Essa estratégia visa reduzir a complexidade computacional em cada etapa, ao mesmo tempo em que conduz a solução para um ponto viável no espaço de soluções inteiras. Ao longo de iterações essas partições mudam de tamanho e o processo encerra com todas as variáveis fixadas em valores inteiros obtidos em iterações anteriores, ou a indicação de que o problema é inviável.

De posse de uma solução viável inicial gerada pela heurística RF, essa solução é passada como entrada para a heurística FO que tenta melhorar a qualidade dessa solução inicial. Nessa heurística, o horizonte de tempo é dividido em duas partições sequenciais, uma partição contendo variáveis tratadas como valores inteiros, e outra partição com variáveis fixadas em valores inteiros obtidos em iterações anteriores. Ao longo das iterações, essas partições são percorridas e o processo finaliza com todas as variáveis fixadas em valores inteiros, ou a indicação de que o problema é inviável.

Diferentemente da abordagem original de (SANTOS, 2024), este trabalho introduz duas modificações no algoritmo. Enquanto a versão proposta por (SANTOS, 2024) utilizava um único critério de definição do particionamento das variáveis, de produção (manufatura) e de remanufatura, a implementação proposta neste trabalho utiliza um critério para definir as partições das variáveis associadas à manufatura e um outro critério para definir as partições das variáveis relacionadas à remanufatura. Assim, os blocos de variáveis de manufatura e remanufatura podem ter tamanhos e períodos diferentes de ativação, permitindo maior flexibilidade no processo

iterativo.

Durante as simulações, buscou-se manter o tamanho das partições e janelas da remanufatura superiores às da produção. Esta decisão foi motivada pelo fato de que os custos de remanufatura são, em geral, menores do que os custos de produção. Ao priorizar a resolução das variáveis relacionadas à remanufatura, espera-se obter soluções com custo total reduzido, uma vez que o modelo tenderá a utilizar a remanufatura sempre que possível.

Estas alterações têm como objetivo principal avaliar o impacto do particionamento diferenciado na qualidade das soluções obtidas e no tempo computacional necessário.

1.3 Organização do Artigo

No Capítulo 2, apresentamos o PDLCR em detalhes, destacando suas características principais, como a consideração simultânea de produção e remanufatura sob restrições de capacidade, e se discute sua formulação matemática padrão com todas as variáveis e restrições envolvidas. No Capítulo 3, introduzimos as duas heurísticas RF e FO, explicando suas estratégias de decomposição temporal e refinamento local. No Capítulo 4, apresentamos os testes computacionais realizados com diferentes instâncias de *benchmark*. São comparados os resultados obtidos pelas heurísticas proposta por (SANTOS, 2024) e a versão proposta nesse trabalho, com foco em três métricas: custo total da solução (função objetivo), tempo de execução e frequência de vitórias. Os resultados mostram que a priorização das variáveis de remanufatura proporciona ganhos significativos de desempenho. Por fim, no Capítulo 5, resumimos as contribuições do trabalho, destacando a eficácia da adaptação proposta e os resultados computacionais obtidos. Também são discutidas as limitações do estudo e sugeridas direções para pesquisas futuras.

2 O PROBLEMA DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES CAPACITADO COM RETORNO

O Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno (PDLCR)

estende o clássico Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL), incorporando restrições de capacidade de produção e a possibilidade de utilização de itens remanufaturados para atender às demandas futuras. No PDLCR, em cada período de planejamento, decisões devem ser tomadas sobre a quantidade de novos produtos a serem fabricados para atender demandas de cada período e a quantidade de itens devolvidos a serem remanufaturados, isso deve acontecer se respeitando um limite de capacidade (SANTOS, 2024).

2.1 Formulação Matemática para o PDLCR

Diferentes formulações para o PDLCR têm sido propostas na literatura (CUNHA; MELO, 2016). Nesse trabalho consideraremos a formulação definida como padrão para o PDLCR (SANTOS, 2024; CUNHA; MELO, 2016). A seguir definimos as componentes da formulação padrão do PDLCR, considerando como horizonte de planejamento o conjunto $T \in \{1, \dots, n\}$:

1. Variáveis

- $x_t \in \mathbb{Z}^+$, quantidade de itens produzidos por manufatura no período $t \in T$.
- $x_t^r \in \mathbb{Z}^+$, quantidade de itens produzidos por remanufatura no período $t \in T$.
- $s_t \in \mathbb{Z}^+$, quantidade do estoque de itens produzidos no final do período $t \in T$.
- $s_t^r \in \mathbb{Z}^+$, quantidade do estoque dos itens de retorno não remanufaturados até o final do período $t \in T$.
- $y_t = \begin{cases} 1, & \text{se existe produção por manufatura no período } t \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $y_{rt} = \begin{cases} 1, & \text{se existe produção por remanufatura no período } t \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. Constantes

- p_t , custo unitário de produção por manufatura no período $t \in T$.
- p_t^r , custo unitário de produção por remanufatura no período $t \in T$.
- h_t , custo unitário de estoque no período $t \in T$ dos itens produzidos.
- h_t^r , custo unitário de estoque no período $t \in T$ dos itens retornados que não foram remanufaturados.

- f_t , custo associado a produção de itens por manufatura no período $t \in T$.
- f_t^r , custo associado a produção de itens por remanufatura no período $t \in T$.
- d_t , demanda do período $t \in T$ que deve ser atendida.
- r_t , quantidade de itens retornados no período $t \in T$, para serem remanufaturados.
- C , capacidade produtiva máxima de itens manufaturados e remanufaturados em cada período $t \in T$,

3. Formulação matemática

Usando as variáveis e constantes definidas acima temos a seguinte formulação matemática para o PDLCR.

$$\min \sum_{t \in T} (h_t s_t + p_t x_t + f_t y_t) + \sum_{t \in T} (h_t^r s_t^r + p_t^r x_t^r + f_t^r y_t^r) \quad (2.1)$$

$$s_{t-1} + x_t + x_t^r = d_t + s_t, \forall t \in T, \quad (2.2)$$

$$s_{t-1}^r + r_t = x_t^r + s_t^r, \forall t \in T, \quad (2.3)$$

$$x_t \leq \min \left\{ \sum_{j=t}^n d_j, C \right\} y_t, \forall t \in T, \quad (2.4)$$

$$x_t^r \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^t r_i, \sum_{j=t}^n d_j, C \right\} y_t^r, \forall t \in T, \quad (2.5)$$

$$x_t + x_t^r \leq C, \forall t \in T, \quad (2.6)$$

$$s_0 = s_n = s_0^r = 0, \quad (2.7)$$

$$x_t, x_t^r, s_t, s_t^r \geq 0, \forall t \in T, \quad (2.8)$$

$$y_t, y_t^r \in \{0, 1\}, \forall t \in T. \quad (2.9)$$

A função objetivo (2.1) consiste em minimizar os custos de manufatura/remanufatura, custos fixos de manufatura/remanufatura e custos de estoques. Os conjuntos de restrições (2.2) e (2.3) são restrições de equilíbrio para a manufatura e remanufatura. Os conjuntos de restrições (2.4) e (2.5) limitam os valores das variáveis x_t e x_t^r em cada período t . O conjunto de restrições (2.6) define um limite superior para produção em cada período t . O conjunto de restrições (2.7) define a situação de estoque inicial e final de manufatura/remanufatura. Os conjuntos de restrições (2.8) e (2.9) definem o domínio em que as variáveis estão definidas.

3 HEURÍSTICAS RELAX-AND-FIX E FIX-AND-OPTIMIZE

Para gerar soluções para o Problema de Dimensionamento de Lotes Capacitado com Retorno (PDLCR), que envolve decisões inteiras complexas ao longo de múltiplos períodos, optou-se por empregar duas heurísticas proposta na literatura de otimização: *Relax-and-Fix* (RF) e *Fix-and-Optimize* (FO). Ambas pertencem à classe de *matheurísticas*, isto é, estratégias que combinam modelagem matemática com heurísticas de busca para resolver problemas de difícil tratabilidade (SANTOS, 2024).

As heurísticas têm como base a decomposição do problema original em subproblemas menores, mais tratáveis computacionalmente, que são solucionados de forma iterativa. Estas heurísticas são particularmente eficazes para problemas com horizonte de tempo finito, como o (PDLCR), pois exploram a estrutura sequencial e acumulativa das decisões ao longo dos períodos (CUNHA; MELO, 2016).

3.1 Relax-and-Fix

A heurística *Relax-and-Fix* (RF) consiste em uma abordagem construtiva iterativa baseada na ideia de construir uma solução viável gradualmente, tratando pequenos conjuntos de variáveis como inteiras e relaxando as demais ao longo do horizonte de planejamento. Ao fazer isso, o problema original é decomposto em subproblemas menores, que podem ser resolvidos com maior eficiência. Seu objetivo é construir progressivamente uma solução viável, tratando diferentes subconjuntos de variáveis como inteiras, enquanto as demais permanecem relaxadas (SANTOS, 2024).

No contexto do PDLCR, essa abordagem se aproveita da estrutura temporal do modelo, dividindo o horizonte de planejamento em blocos. Em cada bloco, as variáveis relacionadas a decisões de produção ou remanufatura são resolvidas como inteiras, posteriormente fixadas, enquanto as variáveis futuras são relaxadas. Com isso, o modelo se torna parcialmente contínuo, e o resolvedor consegue explorar melhor a estrutura do problema (PEREIRA *et al.*, 2022).

A estrutura formal da RF, conforme apresentado por Santos (2024), se baseia na partição do conjunto de variáveis inteiras $S = \{1, 2, \dots, p\}$ em subconjuntos disjuntos S_1, S_2, \dots, S_p , tais que $S = \bigcup_{l=1}^p S_l$. Em cada iteração k , o subproblema considera:

- Variáveis de $\bigcup_{j < k} S_j$: fixadas nos valores inteiros encontrados anteriormente;
- Variáveis de S_k : tratadas como inteiras (binárias);

- Variáveis de $\bigcup_{j>k} S_j$: relaxadas (valores contínuos entre 0 e 1).

Essa lógica é aplicada tanto às variáveis de produção y_t quanto às de remanufatura y_{rt} ao longo dos períodos $t \in T$. À medida que o algoritmo avança, os blocos são resolvidos sequencialmente, e as decisões tomadas anteriormente são mantidas fixas. Assim, o modelo evolui com estabilidade, e a solução final é construída por agregação das decisões parciais. A Figura 1 ilustra as iterações da heurística RF; em branco, as variáveis relaxadas; em cinza, as variáveis tratadas como binárias; em preto, as variáveis fixadas em valores inteiros (SANTOS, 2024).

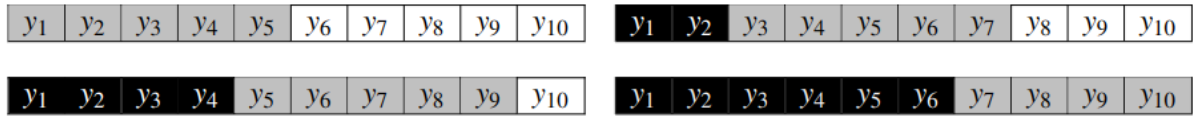


Figura 1 – Ilustração Algoritmo Relax-and-Fix

3.2 Fix-and-Optimize

Complementarmente, a heurística *Fix-and-Optimize* (FO) parte de uma solução inicial viável — por exemplo, gerada pelo método RF — e busca melhorá-la progressivamente. Ela adota uma abordagem que permite re-otimizações locais sem alterar a estrutura da solução como um todo, oferecendo maior flexibilidade para ajustes e melhorias. Para isso, um subconjunto de variáveis é selecionado e liberado para re-otimização, enquanto as demais permanecem fixadas (SANTOS, 2024). Aplicada ao PDLCR, a heurística FO permite revisitar decisões sobre produção e remanufatura em períodos específicos, levando em conta o efeito acumulado das demais variáveis. Isso resulta, geralmente, em melhorias na função objetivo e maior aproveitamento dos retornos (CUNHA; MELO, 2016; PEREIRA *et al.*, 2022).

Segundo (SANTOS, 2024), o algoritmo opera da seguinte forma:

- Geração de partições $S = \{1, 2, \dots, p\}$ a partir das variáveis y_t e y_{rt} ;
- Em cada iteração, seleciona-se uma partição S_k para otimização, mantendo os valores das demais fixos;
- Resolve-se o subproblema correspondente com variáveis livres em S_k ;
- Atualiza-se a solução corrente se houver melhoria;
- O processo é repetido até atingir o critério de parada

Diferentemente da RF, a FO permite re-otimizações sobrepostas e múltiplas pas-

sagens pelas partições, o que possibilita ajustes finos e evita o aprisionamento em soluções sub-ótimas causadas por más decisões iniciais. No trabalho de (CUNHA; MELO, 2016), essa técnica demonstrou bom desempenho na melhoria de soluções obtidas para o PDLCR, principalmente quando combinada com formulações fortalecidas com desigualdades válidas. A Figura 2 ilustra as iterações da heurística FO; em branco, as variáveis fixadas; em cinza, as variáveis escolhidas para otimização (SANTOS, 2024).

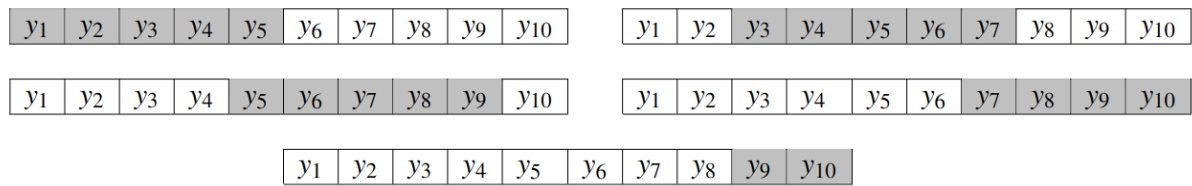


Figura 2 – Ilustração Algoritmo Fix-and-Optimize

3.3 Motivação e aplicação Conjunta

As heurísticas *Relax-and-Fix* (RF) e *Fix-and-Optimize* (FO) foram escolhidas neste trabalho por sua compatibilidade com o modelo do PDLCR. A heurística RF é utilizada como método construtivo, explorando a estrutura temporal do problema, fornecendo soluções viáveis de partida. Em seguida, a solução obtida é refinada com a aplicação da heurística FO, que explora vizinhanças locais para melhorar os resultados obtidos (SANTOS, 2024). A aplicação sequencial dessas heurísticas segue a lógica de construção progressiva e melhoria local.

Nesta abordagem híbrida, adota-se a estratégia de partições distintas para as variáveis de produção e remanufatura ao longo das fases RF e FO. Essa diferenciação permite priorizar decisões de remanufatura, que, em geral, apresentam custos fixos mais baixos, aumentando a eficiência econômica da solução. A combinação das heurísticas, aliada ao particionamento adaptado, demonstra ser uma alternativa eficaz para enfrentar os desafios estruturais do PDLCR.

4 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentamos resultados alcançados nos experimentos computacionais, tanto para a função objetivo quanto para o tempo de execução, com relação a proposta de melhorias das heurísticas aplicadas ao PDLCR, comparando os resultados dessa proposta com os resultados apresentados por (SANTOS, 2024). As instâncias de *benchmark* utilizadas, foram as mesmas utilizadas por (SANTOS, 2024):

- 108 instâncias, cada uma com 52 períodos de planejamento.
- 9 grupos de instâncias, cada um com 12 instâncias.
- d_t , seguindo uma distribuição normal com média igual a 100 unidades, para todo $t \in T$.
- r_t , seguindo uma distribuição normal com médias no conjunto $\{30, 50, 70\}$, para todo $t \in T$.
- $f_t, fr_t \in \{200, 500, 2.000\}, \forall t \in T$.
- p_t e pr_t consideradas igual a zero, para todo $t \in T$.
- $h_t, hr_t \in \{0.2, 0.5, 0.8\}, \forall t \in T$.
- $C = \alpha \times \text{avg}(d)$, para $\alpha \in [1.3, 1.8]$.

4.1 Procedimento Experimental

Todas as simulações foram realizadas em um ambiente computacional com as seguintes configurações: 8 Gb Memória RAM, Processador Intel(R) Core(TM) i5-3740 CPU @ 3.20GHz, *Quad Core*, Sistema Operacional Ubuntu GNU/Linux. Nos experimentos computacionais foram utilizados os resolvers do GUROBI Versão 10.0.0 (Gurobi Optimization, LLC, 2024), e como interface a linguagem de programação Python. O tempo limite para execução de cada instância foi definido como 3600 segundos. E apenas um dos núcleos lógicos do processador foi utilizado nos experimentos.

As instâncias foram divididas em conjuntos(grupos) de acordo com o custo fixo (*setup*) de manufatura e remanufatura, onde f^r é o valor do custo fixo de remanufatura e f é o valor do custo fixo de produção.

- *set01* : $f^r = 200, f = 200$
- *set02* : $f^r = 200, f = 500$
- *set03* : $f^r = 200, f = 2000$
- *set04* : $f^r = 500, f = 200$

- *set05* : $f^r = 500, f = 500$
- *set06* : $f^r = 500, f = 2000$
- *set07* : $f^r = 2000, f = 200$
- *set08* : $f^r = 2000, f = 500$
- *set09* : $f^r = 2000, f = 2000$

Nas Tabelas seguintes são apresentados os resultados obtidos utilizando a abordagem padrão das Heurísticas RF e FO apresentada em (SANTOS, 2024) e as modificações propostas nesse trabalho. A coluna Grupo denota o conjunto de instâncias, os indicativos *new* referem-se a nova configuração para as heurísticas e *old* referem-se a configuração proposta em (SANTOS, 2024). As colunas dif referem-se a subtração entre os valores referentes a função objetivo, ou os valores referentes ao tempo de execução. As colunas ganho, perda, empate referem-se respectivamente ao ganho, perda ou empate da comparação entre as configurações, em relação a função objetivo e a tempo de execução obtido por cada grupo.

Conforme (SANTOS, 2024), os parâmetros utilizados para os testes computacionais foram definidos de forma unificada, sem distinção entre heurísticas ou entre variáveis de produção e remanufatura. Os valores adotados foram: tamanho da partição igual a 6 e número de variáveis fixadas por iteração igual a 3.

Neste trabalho, optou-se por uma configuração diferenciada, separando os parâmetros para cada heurística e para os tipos de variável, conforme descrito a seguir:

- **Relax-and-Fix (RF):**
 - Produção: partição de tamanho 5, com 2 variáveis fixadas por iteração;
 - Remanufatura: partição de tamanho 6, com 3 variáveis fixadas por iteração.
- **Fix-and-Optimize (FO):**
 - Produção: partição de tamanho 7, com 2 variáveis livres por iteração;
 - Remanufatura: partição de tamanho 8, com 3 variáveis livres por iteração.

O procedimento experimental foi conduzido com as seguintes etapas:

1. Implementação do algoritmo original proposto por (SANTOS, 2024), para fins de comparação base;
2. Desenvolvimento da versão modificada com partições separadas para manufatura e remanufatura;
3. Definição de diferentes tamanhos de partição para ambos os conjuntos de variáveis;
4. Aplicação das duas versões do algoritmo sobre instâncias de *benchmark* do PDLCR,

utilizando o solver GUROBI integrado via linguagem Python;

5. Registro dos resultados com base nos seguintes indicadores:

- Valor da função objetivo (custo total);
- Tempo de execução;
- Frequência de vitórias;
- Contagem de empates/perdas/ganhos;

4.2 Resultados Alcançados

Nessa seção serão apresentadas melhorias observadas na função objetivo e tempo de execução entre as formulações das heurísticas RF e FO após a execução das abordagens apresentadas nesse trabalho (*new*) e por (SANTOS, 2024) (*old*).

4.2.1 Relax and Fix

A Tabela 1 compara os valores médios da função objetivo e os tempos médios de execução obtidos com a heurística *Relax-and-Fix* (RF), para as configurações *new* e *old*. A nova proposta apresentou, em média, desempenho superior em todos os grupos de instâncias quanto à qualidade da solução, além de obter menor tempo médio de execução em sete dos nove grupos analisados, com destaque para os grupos *set07*, *set08* e *set09*. Observa-se, ainda, que nos cenários com maior custo fixo de remanufatura, há um aumento mais acentuado na função objetivo, evidenciando o impacto desse parâmetro sobre os resultados.

Grupo	Função Objetivo (média)				Tempo de Execução (média)			
	<i>new</i>	<i>old</i>	dif	dif%	<i>new</i>	<i>old</i>	dif	dif%
set01	11.470,92	11.488,26	-17,34	0,15	0,5533	0,5691	-0,0158	2,78
set02	20.176,08	20.230,61	-54,53	0,27	0,5775	0,5675	0,0100	-1,76
set03	45.564,73	45.585,09	-20,35	0,04	0,5241	0,5366	-0,0125	2,33
set04	16.006,57	16.253,65	-247,08	1,52	0,4716	0,4208	0,0508	-12,08
set05	25.705,74	26.004,67	-298,93	1,15	0,4658	0,4766	-0,0108	2,27
set06	50.107,55	50.279,02	-171,47	0,34	0,4500	0,4858	-0,0358	7,38
set07	33.143,00	34.034,21	-891,21	2,62	0,3250	0,3700	-0,0450	12,16
set08	45.297,65	46.394,15	-1.096,49	2,36	0,3483	0,3841	-0,0358	9,33
set09	80.478,55	81.858,53	-1.379,98	1,68	0,3754	0,4254	-0,0500	11,75

Tabela 1 – Comparação de Médias Heurística RF

A Tabela 2 apresenta a distribuição de empates, perdas e ganhos da nova proposta em comparação à configuração original proposta por Santos (2024), considerando os resultados

da função objetivo e do tempo de execução. Observa-se que a proposta *new* obteve desempenho superior em 72 das 108 instâncias (70%) no que se refere à função objetivo. Esse comportamento foi especialmente evidente nos conjuntos *set04*, *set05*, *set07*, *set08* e *set09*, cujos cenários simulam custos fixos de remanufatura (f^r) superiores aos custos fixos de produção (f). Nesses grupos, a proposta *new* apresentou melhores resultados na maioria das instâncias avaliadas. Em relação ao tempo de execução, a proposta *new* também obteve vantagem em 55 das 108 instâncias (aproximadamente 51%), com destaque para os grupos *set07*, *set08* e *set09*, nos quais obteve vitórias em mais de 66% das simulações. Tais resultados reforçam que a proposta *new* — especialmente a separação das partições entre variáveis de produção e remanufatura — favorece ganhos computacionais relevantes em contextos mais complexos.

Grupo	Função Objetivo				Tempo de Execução			
	ganho	empate	perda	ganho(%)	ganho	empate	perda	ganho(%)
set01	6	0	6	50,00	6	1	5	50,00
set02	6	2	4	50,00	3	2	7	25,00
set03	3	3	6	25,00	6	1	5	50,00
set04	9	0	3	75,00	2	1	9	16,67
set05	10	0	2	83,33	5	3	4	41,67
set06	8	1	3	66,67	8	1	3	66,67
set07	9	3	0	75,00	9	1	2	75,00
set08	10	1	1	83,33	8	2	2	66,67
set09	11	0	0	100,00	8	2	1	72,73

Tabela 2 – Resumo estatístico para a Heurística RF

A Figura 3 apresenta a comparação, por meio de boxplots, dos valores da função objetivo obtidos com a heurística *Relax-and-Fix* RF nas configurações *old* e *new*, para os nove grupos de instâncias. De modo geral, observa-se que a configuração *new* apresenta desempenho superior para os grupos 7, 8 e 9, nos quais os valores medianos e dispersão da função objetivo são visivelmente menores. Esses resultados reforçam a eficácia da configuração *new*, conforme verificado também nas médias e frequências de ganhos analisadas anteriormente.

A Figura 4 ilustra a dispersão dos tempos de execução obtidos com a heurística RF nas configurações *new* e *old*, para os nove grupos de instâncias. Visualmente, nota-se que a nova abordagem tende a apresentar menor variabilidade e menores valores máximos em grupos com altos custos de setup para as variáveis de remanufatura. A redução da dispersão indica que a abordagem proposta não apenas reduz o tempo médio, mas também torna o comportamento do algoritmo mais estável e previsível.

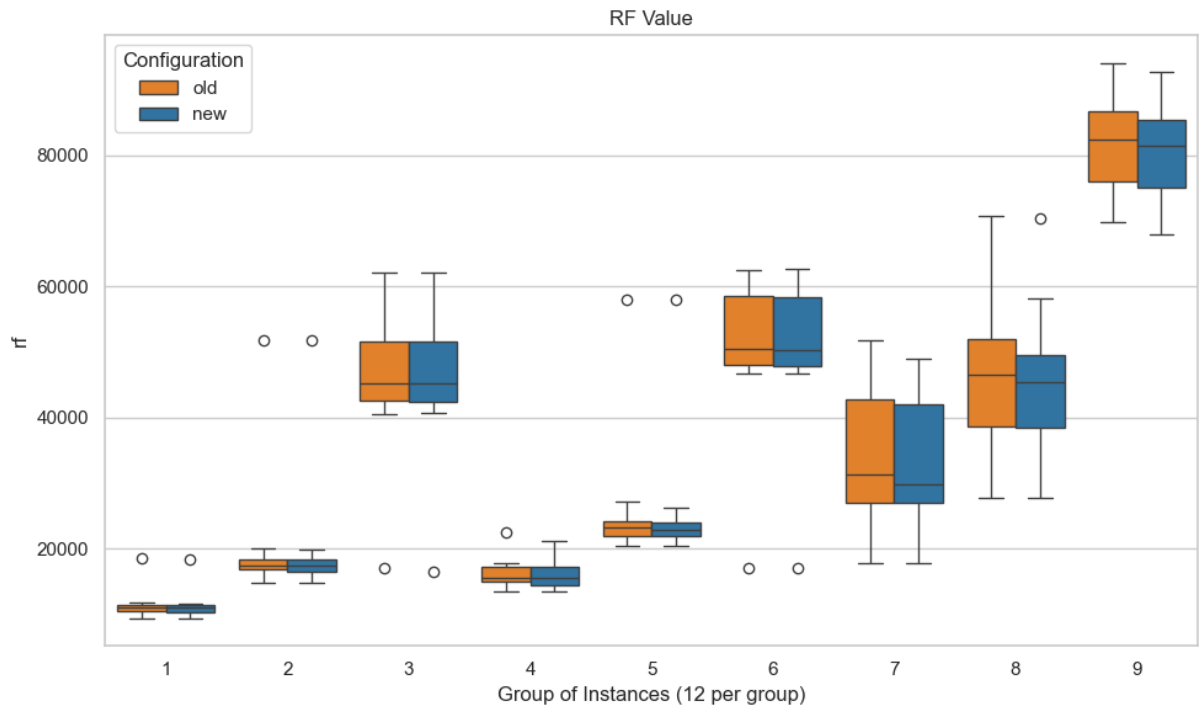


Figura 3 – Comparação dos valores da função objetivo obtidos com a heurística RF para os grupos de instâncias

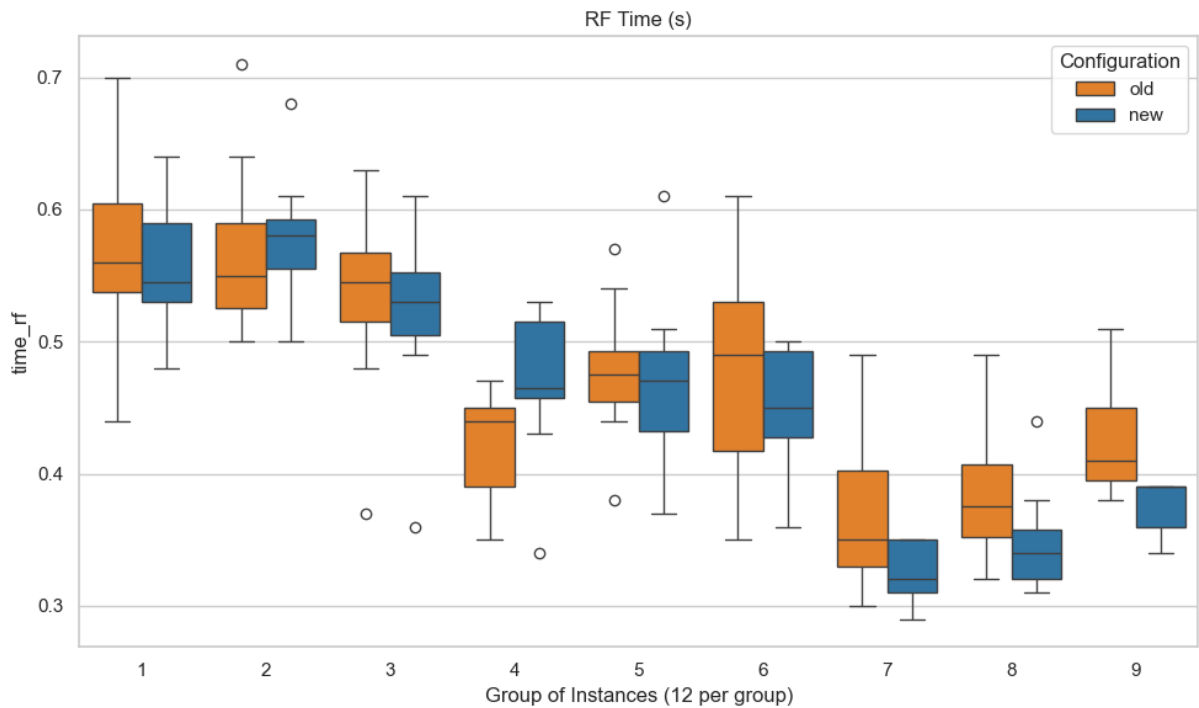


Figura 4 – Comparação dos tempos de execução obtidos com a heurística RF para os grupos de instâncias

4.2.2 *Fix and Optimize*

A Tabela 3 apresenta a comparação entre as médias da função objetivo e dos tempos de execução obtidos com a heurística *Fix-and-Optimize* (FO), aplicadas aos mesmos nove grupos de instâncias considerados anteriormente. Em termos de qualidade da solução, a configuração *new* manteve desempenho superior à configuração *old*, embora, diferentemente do observado com a heurística (RF), os ganhos obtidos tenham sido menos expressivos. Ainda assim, os resultados demonstram avanços consistentes em ambas as abordagens. Quanto ao tempo de execução, a nova configuração apresentou desempenho superior em todos os grupos de instâncias, com destaque para os conjuntos *set07*, *set08* e *set09*, nos quais a redução no tempo médio ultrapassou 0,09 segundos. Esses resultados reforçam a eficiência da configuração proposta, evidenciando sua capacidade de reduzir o tempo computacional de forma consistente.

Grupo	Função Objetivo (média)				Tempo de Execução (média)			
	<i>new</i>	<i>old</i>	dif	dif%	<i>new</i>	<i>old</i>	dif	dif%
set01	11.404,82	11.451,26	-46.44	0,41	0.3825	0.4366	-0.0541	12,40
set02	20.123,38	20.178,29	-54.90	0,27	0.3833	0.4141	-0.0308	7,44
set03	45.155,88	45.192,36	-36.48	0,08	0.3775	0.3966	-0.0191	4,83
set04	15.562,85	15.587,88	-25.02	0,16	0.3191	0.3591	-0.0400	11,14
set05	25.317,45	25.484,16	-166.71	0,65	0.3183	0.3991	-0.0808	20,25
set06	49.801,10	49.995,50	-194.40	0,39	0.3100	0.3825	-0.0725	18,95
set07	28.918,60	29.025,75	-107.15	0,37	0.2541	0.3475	-0.0933	26,86
set08	40.594,72	40.932,69	-337.96	0,82	0.2416	0.3358	-0.0941	28,04
set09	77.451,14	79.116,57	-1665.42	2,11	0.2536	0.3472	-0.0936	26,96

Tabela 3 – Comparação de Médias Heurística FO

A Tabela 4 apresenta a distribuição de empates, derrotas e vitórias da nova formulação em comparação à formulação antiga, considerando os valores da função objetivo e os tempos de execução obtidos com a heurística *Fix-and-Optimize* (FO) nos nove grupos de instâncias. Verifica-se que a formulação *new* superou a *old* em 74 das 108 instâncias (72%) quanto à função objetivo, obtendo desempenho superior em praticamente todos os grupos, com exceção do conjunto *set04*. Nessa métrica, registraram-se apenas cinco empates. Em relação ao tempo de execução, a nova configuração obteve vantagem em 89 das 108 instâncias analisadas (82%), destacando-se nos grupos *set06*, *set07* e *set09*, nos quais obteve até 100% de vitórias. Tais resultados evidenciam a eficácia da estratégia de particionamento proposta, sobretudo na redução do tempo computacional da heurística FO.

Grupo	Função Objetivo				Tempo de Execução			
	ganho	empate	perda	ganho(%)	ganho	empate	perda	ganho(%)
set01	8	0	4	66,67	9	1	2	75,00
set02	7	1	4	58,33	10	1	1	83,33
set03	9	0	3	75,00	5	4	3	41,67
set04	4	0	8	33,33	11	0	1	91,67
set05	9	0	3	75,00	11	0	1	91,67
set06	11	0	1	91,67	12	0	0	100,00
set07	6	3	3	50,00	12	0	0	100,00
set08	9	1	2	75,00	10	1	1	83,33
set09	11	0	0	100,00	10	0	1	90,91

Tabela 4 – Frequência de ganhos/empates/perdas Heurística FO

A Figura 5 apresenta a comparação, por meio de boxplots, dos valores da função objetivo obtidos com a heurística *Fix-and-Optimize* FO nas configurações *old* e *new*, para os nove grupos de instâncias. De modo geral, observa-se que a configuração *new* apresenta desempenho superior na maioria dos grupos, com destaque para os grupos 7, 8 e 9, nos quais os valores medianos da função objetivo são visivelmente menores. Esses resultados reforçam a eficácia da configuração *new*, conforme verificado também nas médias e frequências de vitórias analisadas anteriormente.

A Figura 6 apresenta a dispersão dos tempos de execução obtidos com a heurística FO para as configurações *new* e *old*. Observa-se que a nova configuração resulta em valores médios e máximos inferiores em praticamente todos os grupos. No entanto, esse ganho de desempenho ocorre em troca de uma maior variabilidade entre as instâncias. Esse comportamento sugere que, embora mais eficiente, a nova configuração pode ser mais sensível às características específicas de cada instância, o que reforça a importância do uso de partições adaptadas ao tipo de variável.

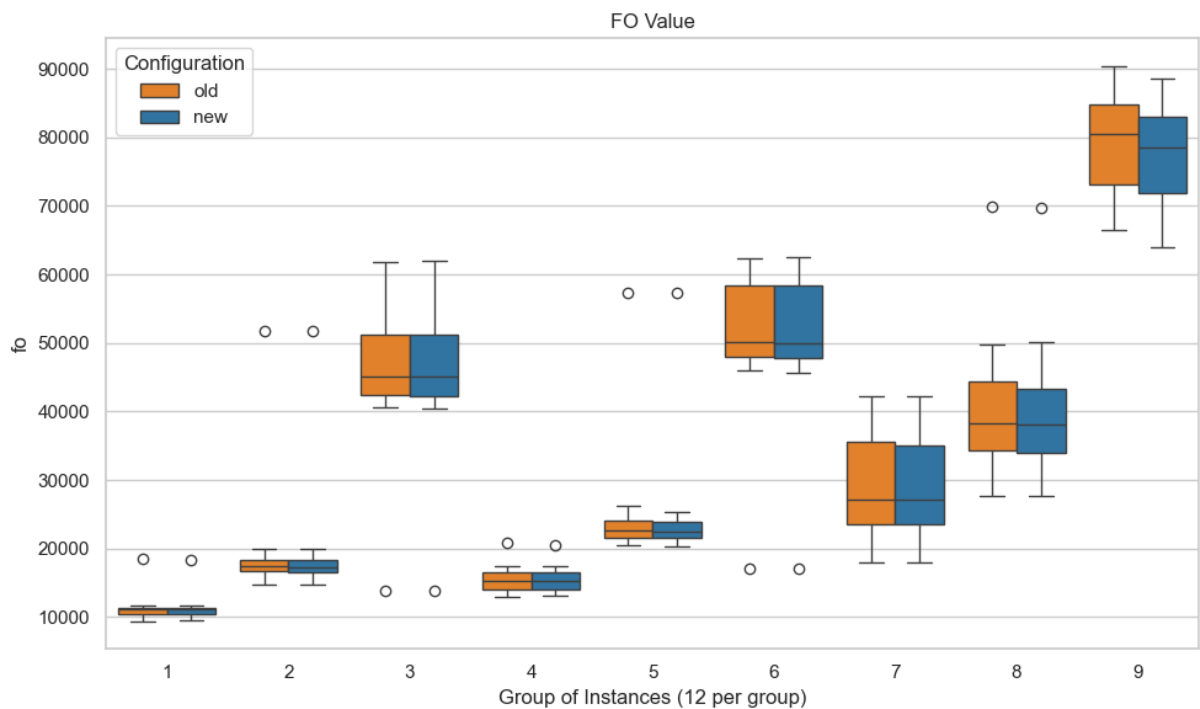


Figura 5 – Comparação dos valores da função objetivo obtidos com a heurística FO para os grupos de instâncias

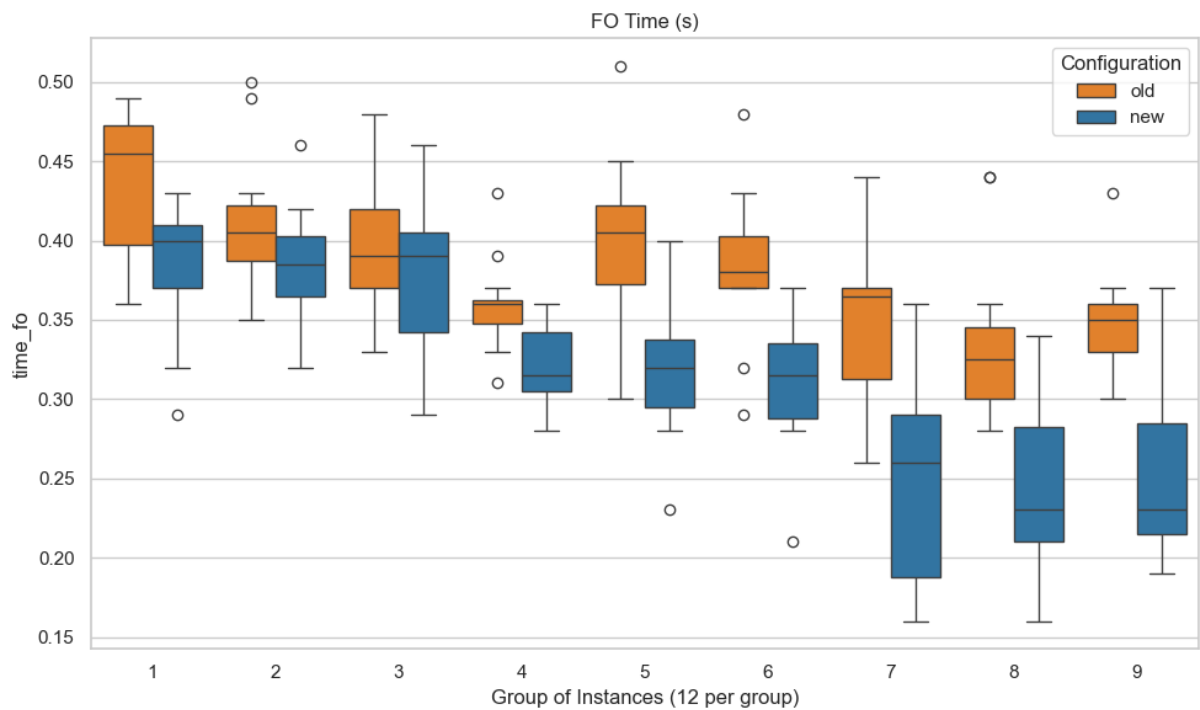


Figura 6 – Comparação dos tempos de execução obtidos com a heurística FO para os grupos de instâncias

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi realizado o estudo e a adaptação de heurísticas para o (PDLCR), com foco nas heurísticas (RF) e (FO), onde parâmetros foram modificados para permitir que partições distintas em relação a variáveis de manufatura e remanufatura fossem consideradas.

A motivação central para essa modificação decorreu da observação de que os custos associados à remanufatura são, geralmente, inferiores aos custos de manufatura, o que justifica uma priorização estratégica dessas decisões no processo de resolução heurística.

Os resultados computacionais evidenciaram que a estratégia proposta apresentou desempenho superior, em termos de custo total, em comparação às versões proposta por (SANTOS, 2024). Em diversas instâncias, também foi observada uma redução significativa no tempo de execução, o que demonstra o potencial prático da abordagem modificada.

Além disso, o uso de partições separadas para decisões de manufatura e remanufatura permitiu maior flexibilidade e controle sobre o comportamento do algoritmo. Essa diferenciação, aliada à adaptação no tamanho das janelas, contribuiu para uma maior eficiência na exploração do espaço de soluções viáveis.

Embora os resultados obtidos tenham sido satisfatórios, algumas limitações devem ser reconhecidas. A análise foi restrita a instâncias de porte moderado, com horizonte de planejamento unificado e parâmetros controlados. Ademais, a estratégia de particionamento foi pré-definida, sem mecanismos de ajuste dinâmico durante a execução do algoritmo. Outra limitação refere-se ao uso de uma única formulação (modelo padrão). Estratégias mais diversificadas, com uso de modelos alternativos ou híbridos, poderiam ampliar a generalização dos resultados observados.

Como continuidade desta pesquisa, sugerem-se os seguintes desdobramentos:

- Investigar o uso de particionamento adaptativo, com ajuste dinâmico das janelas de decisão baseado em indicadores de desempenho parciais;
- Explorar formulações alternativas do PDLCR, como modelos baseados em caminhos mínimos ou em fluxos multicommodity;
- Combinar as heurísticas RF e FO com métodos de relaxação Lagrangiana e geração de cortes válidos.

Esses avanços podem contribuir para o aprimoramento de soluções heurísticas aplicadas ao PDLCR e a outros problemas complexos da área de planejamento da produção e logística reversa.

REFERÊNCIAS

- BOCTOR, F.; POULIN, P. Heuristics for the n-product, m-stage, economic lot sizing and scheduling problem with dynamic demand. **International Journal of Production Research**, 2005.
- CUNHA, J. O. d.; MELO, R. A. d. Effective matheuristics for the multi-item capacitated lot-sizing problem with remanufacturing. **European Journal of Operational Research**, 2016.
- GLOCK, C.; GROSSE, E. The lot sizing problem: A tertiary study. **European Journal of Operational Research**, 2014.
- Gurobi Optimization, LLC. **Gurobi Optimizer Reference Manual**. 2024. Disponível em: <<https://www.gurobi.com>>.
- LI, Y.; CHEN, J. Uncapacitated production planning with multiple product types, returned product remanufacturing, and demand substitution. **OR Spectrum**, 2006.
- PEREIRA, M.; CUNHA, J. O.; PRATA, B. d. A. Formulações para o problema de dimensionamento de lotes capacitado com retorno. In: **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. [S.l.: s.n.], 2022.
- SANTOS, M. P. **Formulações e métodos heurísticos para o problema de dimensionamento de lotes com retorno**. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Métodos Quantitativos) — Departamento de Estatística e Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2024.
- WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. **Management Science**, 1958.