Fundamentos de Estatística

Last updated: July 1, 2025

Contents

※ Modelos probabilísticos

1.1 Modelos probabilísticos

Algumas variáveis aleatórias adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos. Portanto, um estudo dessas variáveis é de grande importância para a construção de modelos probabilísticos para situações reais e a consequente estimação de seus parâmetros. Para algumas distribuições existem tabelas que facilitam o cálculo de probabilidades, em função de seus parâmetros.

Os modelos probabilísticos são construídos a partir de certas hipóteses ou conjeturas sobre o problema em questão e constituem-se de duas partes:

1. dos possíveis resultados e
2. de umacerta lei que nos diz quão provável é cada resultado (ou grupos de resultados).

1.1.1 Distribuição uniforme discreta

Definition 1.1. Seja X uma v.a. discreta, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. A v.a. discreta X tem distribuição uniforme se, e somente se,

$$P(X = x_i) = p(x) = p = \frac{1}{k}, \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \tag{1}$$

A experanção da v.a. X é dada por

$$E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \tag{2}$$

A variância da v.a. X é dada por

$$var(X) = \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2}{k} \right] \tag{3}$$

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(X) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{k} = \frac{n(x)}{k} \tag{4}$$

onde $n(x)$ é o número de $x_i < x$.

Construa o gráfico da função de probabilidade acumulada associado a equação (4).

Example 1.2. Considere o lançamento de um dado honesto. Seja X a v.a. que indica o número de pontos mostrado pelo dado quando ele é lançado. Temos a seguinte tabela

x	$p(x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
Total	1

Table 1: Tabela da distribuição da v.a. X

A experança da v.a. X é

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{6} x_i\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[1+2+3+4+5+6\right] \\
&= \frac{21}{6}
\end{aligned}
$$

A variância da v.a. X é

$$
\begin{aligned}
var(X) &= \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{6} x_i)^2}{6}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[((1)^2+(2)^2+\ldots+(6)^2) - \frac{(1+2+\ldots+6)^2}{6}\right] \qquad = \frac{35}{12}
\end{aligned}
$$

Construa o gráfico da função de probabilidade e o gráfico da função de distribuição da v.a. X.

1.1.2 Distribuição de Bernoulli

Muitos experimentos tem resultados que apresentam ou não determinada caracteristica. Por exemplo:

1. uma moeda é lançada: o resultado é cara, ou não(coroa).
2. um dado é lançado: ou ocorre face 5, ou não ocorre.
3. uma peça de roupa é escolhida ao acaso de um lote contendo 500 peças: essa peça é defeituosa ou não.
4. uma pessoa escolhida ao acaso dentre 1000: essa pessoa é ou não do sexo masculino.
5. uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade: essa pessoa é ou não a um projeto municipal.

Em todos esses casos, estamos interessados na ocorrência de sucesso ou fracasso.

Para cada um dos experimentos acima, podemos definir uma v.a. X, que assume apenas dois valores 1, se ocorrer sucesso, e 0, se ocorrer fracasso. Indicaremos por p a probabilidade de sucesso, isto é, $P(sucesso) = P(s) = p,\ 0 < p < 1$.

Definition 1.3. Uma variável aleatória X, que assume apenas os valores 0 e 1, com função de probabilidade $(x, p(x))$ tal que

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$
$$p(1) = P(X = 1) = p$$

é chamada variável aleatória de Bernoulli.

A experança da v.a. X é dada por

$$E(X) = p \tag{5}$$

A variância da v.a. X é dada por

$$var(X) = p - p^2 = p(1 - p) \tag{6}$$

A função de distribuição da v.a. X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1 - p, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ se } \geq 1 \end{cases}$$

Construa o gráfico da função de distribuição da v.a. discreta X acima.

Example 1.4. Considere o lançamento de um dado honesto. Considere o resultado onde ocorre a face 5.

Temos que

$$P(X = 1) = p = \frac{1}{6}$$

e

$$P(X = 0) = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

A experança da v.a. X é

$$E(X) = \frac{1}{6} \tag{7}$$

A variância da v.a. X é

$$var(X) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \tag{8}$$

Construa o gráfico da função de probabilidade e da função de probabilidade acumulada da v.a. X.

Example 1.5. Considere uma urna com 3 bolas brancas e 2 pretas. Suponha a extração aleatória de 2 balas com reposição.

Costrua a árvore de distribuição de probabilidade.

Qual a distribuição de probabilidade desse experimento onde X corresponde ao número de bolas pretas extraidas.

x	$p(x)$
0	$\frac{9}{25}$
1	$\frac{12}{25}$
2	$\frac{4}{25}$

Table 2: Distribuição de probabilidades de Bernoulli

Temos

1. $P(X = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
2. $P(X = 1) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{12}{25}$
3. $P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$

Considere agora a extração de 2 bolas na urna, mas sem reposição.

A configuração da urna na segunda extração depende do que aconteceu na primeira extração. Assim, o resultado da primeira extração condiciona as probabilidades da segunda extração.

Costrua a árvore de distribuição de probabilidade desse experimento.

Qual a distribuição de probabilidade desse experimento onde X corresponde ao número de bolas pretas extraidas.

x	$p(x)$
0	$\frac{6}{20}$
1	$\frac{12}{20}$
2	$\frac{2}{20}$

Table 3: Distribuição de probabilidade de Bernoulli

Temos

1. $P(X = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
2. $P(X = 1) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{12}{20}$

3. $P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

Quando o experimento é feito com reposição há independência entre os ensaios, pois os resultados de um ensaio não alteram as probabilidades de outros. Quando o experimento é feito sem reposição, não há independência entre os ensaios, pois os resultados de uma extração dependem do que ocorreu nas extrações anteriores.

1.1.3 Distribuição binomial

Suponha que um ensaio de Bernoulli seja repetido n vezes, e que as repetições sejam independentes. Uma amostra particular será constituída de uma sequência de sucessos e fracassos, ou, alternativamente, de uns e zeros.

Por exemplo, repetindo um ensaio de Bernoulli cinco vezes ($n = 5$), um resultado particular pode ser $FSSFS$ ou a quíntupla ordenada $(0, 1, 1, 0, 1)$. Usando a notação $P(S) = p$, a probabilidade de tal amostra será

$$(1 - p) \cdot p \cdot p(1 - p) \cdot p = p^3 \cdot (1 - p)^2$$

O número de sucessos nessa amostra é igual a 3, e o número de fracasso é igual a 2.

Um experimento é dito binomial, quando:

1. consiste em n ensaios;

2. cada ensaio tem apenas dois resultados de interesse: sim ou não;

3. os ensaios são independentes, com probabilidade p, onde $0 < p < 1$.

Considere agora as seguintes situações:

1. uma moeda é lançada 3 vezes: qual a probabilidade de se obter duas caras?

2. um dado é lançado 5 vezes: qual a probabilidade de se obter a face 5 no máximo 3 vezes?

3. 10 peças são extraidas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças: qual a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas?

4. 5 pessoas são escolhidas ao acaso entre 1000: qual é a probabilidade de que 2 sejam do sexo masculino?

5. sabe-se que 90% das pessoas de uma cidade são favoráveis a um projeto municipal. Escolhendo-se 100 pessoas ao acaso entre os moradores, qual é a probabilidade de que pelo menos 80 sejam favoráveis ao projeto?

Example 1.6. Seja a população de pessoas de um município em que 70% são favoráveis a um certo projeto municipal. Qual é a probabilidade de que, em uma amostra aleatória simples de 10 pessoas dessa populaçãoo, a maioria seja favorável ao projeto?

Temos um experimento binomial, com $n = 10$ e $p = 0,70$. Usando a tabela de distribuição binomial, podemos especificar a distribuição de X, que corresponde ao número de favoráveis na amostra. A probabilidade de ocorrer o evento a maioria da amostra ser favorável, corresponde, em termos de variável aleatória X, ao evento $X > 5$. A probabilidade deste evento será a soma dos resultados individuais, ou seja:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= P(6) + p(7) + p(8) + p(9) + p(10) \\ &= 0,2001 + 0,2668 + 0,2335 + 0,1211 + 0,0282 \\ &= 0,8497 \end{aligned}$$

Uma distribuição de probabilidades também pode ser apresentada sob forma gráfica, de maneira análoga às distribuições de frequências, substituindo o eixo das frequências por probabilidades. Elabore o gráfico da distribuição binomial do exemplo anterior.

Example 1.7. Seja x o número de pessoas favoráveis a um certo projeto municipal, em uma amostra aleatória simples de n pessoas, extraidas de uma população que a probabilidade de favoráveis é igual a p. Admitindo que o tamanho da população seja bastante superior ao tamanho da amostra, podemos supor que a variável aleatória X tenha distribuição binomial, com parâmetros n e p.

Para cada uma dessas pessoas consultadas a respeito do projeto, vamos representar por S a resposta sim(favorável) e por N a resposta não(contrária).

Elabore o diagrama de árvore com as possíveis combinações de resposta S e N, e as probabilidades, em uma amostra de $n = 3$ pessoas.

No cálculo da probabilidade do evento $X = 1$, contamos três maneiras diferentes de aparecer uma resposta S nos n ensaios (SNN, NSN, NNS). Em geral, para se calcular a probabilidade do evento $X = x$ da distribuição binomial, onde x é um valor possível da variável aleatória X, precisamos calcular o número de maneiras em que podemos combina x respostas de S dentre as n respostas.

x	$p(x)$
0	$(1-p)^3$
1	$3 \cdot p \cdot (1-p)^2$
2	$3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$
3	p^3

Table 4: Distribuição de probabilidades binomial

Esse número é conhecido como coeficiente binominal, calculado pela seguinte expressão:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

onde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$ e, por convenção, $0! = 1$.

Considere X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p, onde $0 < p < 1$. A probabilidade de X assumir um certo valor x, pertecente ao conjunto $0, 1, 2, \ldots, n$, é dada pela expressão:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \tag{9}$$

Example 1.8. Seja a população de pessoas de um município em que 70% são favoráveis a um certo projeto municipal. Qual é a probabilidade de, em uma amostra aleatória simples, quatro pessoas desta população, encontramos exatamente três pessoas favoráveis ao projeto?

Seja X a variável aleatória de distribuição binomial com parâmetros $n = 4$ e $p = 0,7$. A probabilidade pedida é dada por:

$$p(3) = \binom{4}{3} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3) \tag{10}$$

$$= 0,4116 \tag{11}$$

Example 1.9. Considere o lançamento de uma moeda honesta 3 vezes, seja cara o sucesso(S) e coroa o fracasso(F), onde $P(S) = P(F) = \frac{1}{2}$. Estamos interessados na probabilidade do evento.

$$A = \{SSF, SFS, FSS\}$$

ou, em termos de notação 0-1, na probabilidade de

$$A = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$$

Temos

$$P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$$

e, devido a indepedência dos ensaios

$$P(SSF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(SFS) = P(FSS)$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

Se a probabilidade de sucesso for p, onde $0 < p < 1$, e $P(F) = 1 - p = q$, então

$$P(SSF) = p \cdot p \cdot q = p^2 \cdot q = P(SFS) = P(FSS)$$

de modo que

$$P(A) = p^2 \cdot q + p^2 \cdot q + p^2 \cdot q = 3 \cdot p^2 \cdot q$$

Nesse tipo de experimento estamos interessado apenas no número total de sucessos e não na ordem em que eles ocorrem. Temos a seguinte tabela para $n = 3$ lançamentos da moeda, com $P(S) = p$, e $P(F) = 1 - p = q$.

Construir o diagrama de árvores das probabilidade binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$.

Número de sucessos	Probabilidades	p = $\frac{1}{2}$
0	q^3	$\frac{1}{8}$
1	$3 \cdot p \cdot q^2$	$\frac{3}{8}$
2	$3 \cdot p^2 \cdot q$	$\frac{3}{8}$
3	p^3	$\frac{1}{8}$

Table 5: Probabilidade binomias para $n = 3$ e $P(S) = p$

Definiremos por X o número total de sucessos em n ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, $0 < p < 1$. Os possíveis valores de X são $0, 1, 2 \ldots, n$ e os pares $(x, p(x))$, em que $p(x) = P(X = x)$, constituem a chamada distribuição binomial.

No exemplo anterior temos $n = 3$ e $p = \frac{1}{2}$, onde a distribuição é dada na terceira linha da Tabela (5).

Construa o gráfico da função de probabilidade $p(x)$ do exemplo anterior.

Example 1.10. Considere 10 peças são extraidas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças. Qual a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas?

Teremos $n = 10$ ensaios, cada um com $P(S) = P(peas\ com\ defeito) = \frac{1}{10}$. Se X indicar o número de peças com defeitos na amostra, queremos calcular $P(X = 10) = b(10; 10, \frac{1}{10})$.

Pela equação (9) temos

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{0} \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \\ &= \frac{1}{(10)^{10}} \end{aligned}$$

A média de uma variável aleatória binomial, com parâmetros n e p é dada por

$$E(X) = n \cdot p \tag{12}$$

e a variância é dada por

$$var(X) = n \cdot p \cdot q \tag{13}$$

Para o exemplo anterior temos

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

e

$$var(X) = 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{10}$$

Definition 1.11. Denomina-se experimento de binomial ao experimento

1. que consiste em n ensaios de Bernoulli;
2. cujos ensaios são independentes;
3. para o qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é sempre igual a p, onde $0 < p < 1$.

Definition 1.12. A variável aleatória X, correspondente ao número de sucessos em um experimento binomial, tem distribuição binomial $b(n, p)$, com função de probabilidade

$$b(n; k, p) = P(X = k|n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$