

动态规划(下)

九章算法强化班 第6章



扫描二维码关注微信/微博
获取最新面试题及权威解答

微信: [ninechapter](#)

微博: <http://www.weibo.com/ninechapter>

知乎: <http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang>

官网: <http://www.jiuzhang.com>

I. 区间类DP

- I. Stone Game
- II. Burst Ballons
- III. Scramble String

II. 背包类DP

- I. BackPackI
- II. BackPackII
- III. K SUM
- IV. Minimum Adjustment Cost

区间类Dp

特点：

1. 求一段区间的解max/min/count
2. 转移方程通过区间更新
3. 从大到小的更新

Stone Game

<http://www.lintcode.com/en/problem/stone-game/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/stone-game/>

[3,4,5,6]

贪心反例:

[1,1,1,1]

- 死胡同: 容易想到的一个思路从小往大, 枚举第一次合并是在哪?
- 记忆化搜索的思路, 从大到小, 先考虑最后的0-n-1 合并的总花费
- State:
 - $dp[i][j]$ 表示把第i到第j个石子合并到一起的最小花费
- Function:
 - 预处理 $sum[i,j]$ 表示i到j所有石子价值和
 - $dp[i][j] = \min(dp[i][k] + dp[k+1][j] + sum[i,j])$ 对于所有k属于 $\{i,j\}$
- Intialize:
 - for each i
 - $dp[i][i] = 0$
- Answer:
 - $dp[0][n-1]$

Burst Ballons

<http://www.lintcode.com/en/problem/burst-balloons/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/burst-balloons/>

- 死胡同: 容易想到的一个思路从小往大, 枚举第一次在哪吹爆气球?
- 记忆化搜索的思路, 从大到小, 先考虑最后的0-n-1 合并的总价值
- State:
 - $dp[i][j]$ 表示把第i到第j个气球打爆的最大价值
- Function:
 - 对于所有k属于 $\{i, j\}$, 表示第k号气球最后打爆。
 - $midValue = arr[i-1] * arr[k] * arr[j+1]$;
 - $dp[i][j] = \max(dp[i][k-1] + dp[k+1][j] + midvalue)$
- Intialize:
 - for each i
 - $dp[i][i] = arr[i]$
- Answer:
 - $dp[0][n-1]$

Scramble String

<http://www.lintcode.com/en/problem/scramble-string/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/scramble-string/>
[\[abcd, dcab\]](#)

- 看 `f[great][rgreat]` 这个参考例子
- `f[gr|eat][rgreat] =`
 - `f[gr][rg] && f[eat][eat]`
 - `f[gr][at] && f[eat][rgr]`

- State:
 - $dp[x][y][k]$ 表示是从s1串x开始, s2串y开始, 他们后面k个字符组成的substr是Scramble String
- Function:
 - 对于所有i属于{1,k}
 - $s11 = s1.substring(0, i); s12 = s1.substring(i, s1.length());$
 - $s21 = s2.substring(0, i); s22 = s2.substring(i, s2.length());$
 - $s23 = s2.substring(0, s2.length() - i); s24 = s2.substring(s2.length() - i, s2.length());$
 - for $i = x \rightarrow x+k$
 - $dp[x][y][k] = (dp[x][y][i] \&\& dp[x+i][y+i][k-i]) \parallel dp[x][y+k-i][i] \&\& dp[x+i][y][k-i)$
- Intialize:
 - $dp[i][j][1] = s1[i]==s[j].$
- Answer:
 - $dp[0][0][len]$

区间DP

- coin in a line III
- stone game
- scramble string

- 这种题目共性就是区间最后求 $[0, n-1]$ 这样一个区间
- 逆向思维分析 从大到小就能迎刃而解

- 逆向=》分治类似

背包类Dp

特点：

1. 用值作为DP维度
2. Dp过程就是填写矩阵
3. 可以滚动数组优化

BackPack

<http://www.lintcode.com/en/problem/backpack/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/backpack/>

- State:
 - $f[i][S]$ “前*i*”个物品，取出一些能否组成和为*S*

	体积0	体积1	体积2	体积3	体积4	体积5	体积6	体积7	体积8	体积9	体积10	体积11
前0个物品	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
前1个物品	0	0										
前2个物品	0	0										
前3个物品	0	0										

- State:
 - $f[i][S]$ “前” i 个物品，取出一些能否组成和为 S
- Function:
 - $a[i-1]$ 是第 i 个物品下标是 $i-1$
 - $f[i][S] = f[i-1][S - a[i-1]]$ or $f[i-1][S]$
- Initialize:
 - $f[i][0] = \text{true}$; $f[0][1..\text{target}] = \text{false}$
- Answer:
 - 检查所有的 $f[n][j]$
- $O(n*S)$ ，滚动数组优化

BackPack 马甲题型 变1

把一个 $[1, 24, 5, 6]$ 数组尽量平分。

BackPack 马甲题型 变2

硬币凑整

给1, 2, 5, 10硬币无数多个, 请问凑80元的方案总数

<http://www.lintcode.com/en/problem/backpack-iv/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/backpack-iv/>

BackPack 马甲题型 变2

第 i 个物品放多少个？

- State:
 - $f[i][S]$ “前*i*”个物品，取出一些能否组成和为*S*

	体积0	体积1	体积2	体积3	体积4	体积5	体积6	体积7	体积8	体积9	体积10	体积11
前0个物品	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
前1个物品	0	0										
前2个物品	0	0										
前3个物品	0	0										

- State:
 - $f[i][S]$ “前” i 个物品, 取出一些能否组成和为 S
- Function:
 - $a[i-1]$ 是第 i 个物品下标是 $i-1$
 - k 是第 i 个物品选取的次数
 - $f[i][S] = f[i-1][S - k*a[i-1]]$ or $f[i-1][S]$
- Initialize:
 - $f[i][0] = \text{true}$; $f[0][1..\text{target}] = \text{false}$
- Answer:
 - 答案是 $f[n][S]$

Backpack II

<http://www.lintcode.com/en/problem/backpack-ii/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/backpack-ii/>

贪心反例:
背包容量 = 9
A=[4,5,7]
V=[3,4,6]

- 状态 State
 - $f[i][j]$ 表示前 i 个物品当中选一些物品组成容量为 j 的最大价值
- 方程 Function
 - $f[i][j] = \max(f[i-1][j], f[i-1][j-A[i-1]] + V[i-1]);$
- 初始化 Initialization
 - $f[0][0]=0;$
- 答案 Answer
 - $f[n][s]$
- $O(n*s)$

K Sum

<http://www.lintcode.com/en/problem/k-sum/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/k-sum/>

K Sum

- n个数, 取k个数, 组成和为target
- State:
 - $f[i][j][t]$ 前i个数取j个数出来能否和为t
- Function:
 - $f[i][j][t] = f[i-1][j-1][t-a[i-1]] + f[i-1][j][t]$
- Initialization
 - $f[i][0][0] = 1$
- Answer
 - $f[n][k][target]$

Minimum Adjustment Cost

<http://www.lintcode.com/en/problem/minimum-adjustment-cost/>

- State:
 - $f[i][v]$ 前 i 个数, 第 i 个数调整为 v , 满足相邻两数 $\leq \text{target}$, 所需要的最小代价
- Function:
 - $f[i][v] = \min(f[i-1][v'] + |A[i]-v|, |v-v'| \leq \text{target})$
- Answer:
 - $f[n][a[n]-\text{target} \sim a[n]+\text{target}]$
- $O(n * A * T)$

- 区间类DP问题
 - 从大到小去思考
 - 主要是通过记忆化来直观理解DP的思路
- 背包DP问题
 - 用值作为DP维度
 - Dp过程就是填写矩阵
 - 可以滚动数组优化

- **Backpack II**
 - 有价值的背包题目才有价值
- **Stone-Game**
 - 区间类DP的入门题

我可是不到最后
不轻言放弃的男人三井寿!



Thank You

