Contents

Ali hmede 0936081152

الوحدة الثانية : التوابع

دراسة تغيرات تابع:

١) إيجاد مجموعة التعريف
٢) إيجاد النهايات و إزالة حالات عدم التعيين وتحديد المقاربات في حال وجودها
٣) نوجد المشتق
٤) نعدم المشتق
٥) نوجد صور القيم التي تعدم المشتق
٦) جدول التغيرات
٧) الرسم
٨) المساحة

مجموعات التعريف (حسب نوع كل تابع)

١) التابع الصحيح هو التابع الذي لا يحوي جذر ولا كسر ومعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية $R =]-\infty, +\infty[$

مثال:

$$f(x) = x^2 - 5x + 3$$

$$D_f = R =]-\infty, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \sqrt{2}x$$

$$D_f = R =]-\infty, +\infty[$$

---

٢) التابع الكسري: معرف بما لا يعدم المقام ولا يحتاج دراسة إشارة ومجالاته دائما مفتوحة وله حالتين:

I. المقام درجة أولى: $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ينعدم المقام عندما $x=3$ ومنه:

$$D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$$

II. المقام درجة ثانية: $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ ينعدم المقام عندما: $x^2 - 9 = 0$

$$(x-3)(x+3) = 0 \to x = \pm 3$$

Ali hmede 0936081152

$$D_f =]-\infty,-3[\cup]-3,+3[\cup]+3,+\infty[$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0 \rightarrow \text{إما } x=2, \text{ أو } x=3$$

$$D_f =]-\infty,2[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0 \rightarrow \text{إما } x=0, \text{ أو } x=3$$

$$D_f =]-\infty,0[\cup]0,3[\cup]3,+\infty[$$

---

٣) التابع الجذري: معرف بأن يكون ما تحت الجذر موجب أو يساوي الصفر ومجاله مغلق عند القيمة التي تعدمه ويتاج دراسة إشارة وله حالتان:

١) ما تحته درجة أولى: $f(x)=\sqrt{3x-6}$

$$3x-6\geq 0 \rightarrow x\geq 2$$

x	-∞	٢	+∞
الجذر	-	٠	+

$$D_f =[2,+\infty[$$

$$f(x)=\sqrt{2-x}$$

$$2-x\geq 0 \rightarrow x\leq 2$$

x	-∞	٢	+∞
الجذر	+	٠	-

$$D_f =]-\infty,2]$$

٢) ما تحته درجة ثانية: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$$4-x^2=0$$

$$(2-x)(2+x)=0 \rightarrow \text{إما } x=2, \text{ أو } x=-2$$

Ali hmede 0936081152

x	-∞		-٢		٢		+∞
جذر		-	٠	+	٠	-	

$$D_f = [-2,2]$$

---

٤) التابع اللوغاريتمي ln: معرف بأن ما داخله دائما موجب ومجالاته دائما مفتوحة ويلزمه دراسة إشارة وله حالتين:

i. ما داخله درجة أولى: $f(x) = \ln(x-1)$

نعدم ما بداخله وندرس الإشارة $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

x	-∞		١		+∞
ln		-	٠	+	

$$D_f =]1, +\infty[$$

ii. ما داخله درجة ثانية: $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

X=±3

x	-∞		-٣		٣		+∞
ln		+	٠	-	٠	+	

$$D_f =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$$

---

٥) التابع الأسي e: معرف على مجموعة تعريف أسه

$$f(x) = e^x \rightarrow D_f = R$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \rightarrow D_f = R^*$$

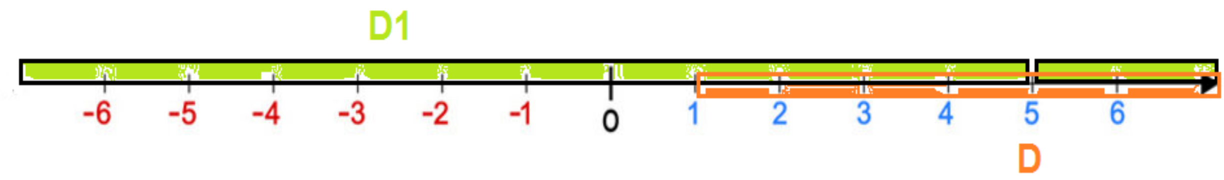
$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \rightarrow D_f = [0, +\infty[$$

٦) التوابع المركبة: هو نوع من اجتماع تابعين أو أكثر من التوابع السابقة.

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-5} + x^2$$

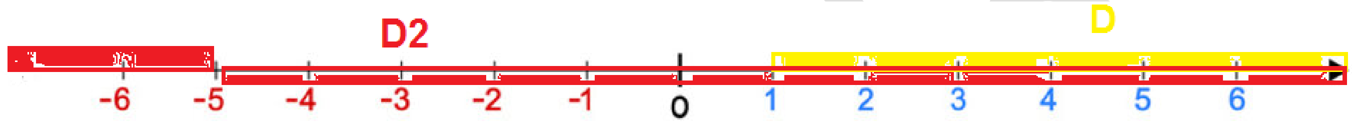
الجذر	الكسر
X=1 $D_1 = [1, +\infty[$	X=5 $D_2 =]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$

$$D_f = [1,5[\cup]5, +\infty[$$



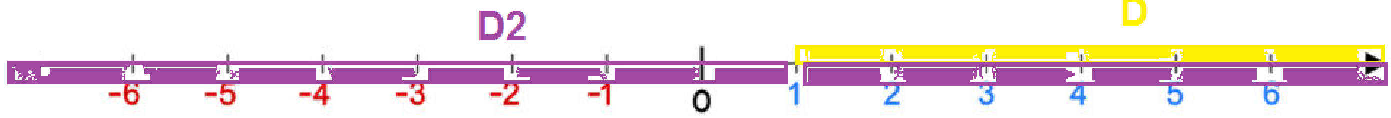
$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+5} + x^2$$

$$D_1 = [1,+\infty[\quad , \quad D_2 = R\backslash\{-5\} \rightarrow D_f = [1,+\infty[$$



$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-1} + x^2$$

$$D_1 = [1,+\infty[\ , \qquad D_2 = R \ \backslash\{1\} \rightarrow D_f =]1,+\infty[$$



مثال:

$$f(x) = \sqrt{16-x^2} - \frac{1}{x}$$

$$D_1 = R\backslash\{0\} =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

X	-∞	-٤		٤	+∞
جذر	-	٠	+	٠	-

$$D_2 = [-4,4]$$
$$D_F = [-4,0[\cup]0,4]$$

$$f(x) = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{4-x}$$

$$D_1 = R\backslash\{4\} =]-\infty,4[\cup]4,+\infty[$$

$$D_2 = R\backslash\{-3\} =]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$$

$$D_f =]-\infty,-3[\cup]-3,4[\cup]4,+\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x+1}$$

X=7

X	-∞	٧	+∞
جذر١	+	٠	-

X=-1

X	-∞	-١	+∞
جذر٢	-	٠	+

$$D_1 =]-\infty,7] \ , \ D\_2 = [-1,+\infty[\ , \rightarrow D_f = [-1,7]$$

Ali hmede 0936081152

النهايات وعدم التعيين:

١)التابع الصحيح: عند $\pm\infty$ نعوض بالحد المسيطر، أكبر أس

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)^3 = +\infty$$

$$f(1) = 1^3 - 1^2 + 5 = 5$$

٢)التابع الكسري: عند $\pm\infty$ نعوض بالحد المسيطر بالبسط على الحد المسيطر بالمقام

نختصر ثم نعوض: $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3x}{x} = 3$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3x^2}{x} = 3x = -\infty$$

٣)التابع الجذري: عند $\pm\infty$ جوابه $+\infty$ $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

عدم التعيين:

١	٢	٣	٤
$+\infty-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0.\infty$	$\frac{0}{0}$

- الحلات الثلاث الأولى يمكن إزالة حالات عدم التعيين فيها بطريقتين وحالة خاصة وطريقة داعمة.

١)إخراج عامل مشترك

للحفظ:حالات عادية

$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$	$\text{عدد}.0 = 0$
$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$	$\text{عدد}.\infty = \infty$
$\frac{0}{\text{عدد}} = 0$	$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

٢)الضرب بالمرافق والقسمة عليه

١)إخراج عامل مشترك: $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}-2x$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ حالة عدم تعيين:

أولاً: نعالج الجذر بثلاث خطوات:

١)نخرج x^2 عامل مشترك تحت الجذر حتى لو مانها موجودة

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-2x$$

٢)نفصل الجذور $f(x)=\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-2x$

٣)نجذر حسب الخاصة: $\sqrt{x^2}\begin{cases} x & \text{عند } +\infty \\ -x & \text{عند } -\infty \end{cases}$

$$f(x)=x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x$$

نتابع حل بإخراج عامل مشترك $f(x)=x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-2)=-\infty$$

$f(x)=3x+\sqrt{-x-5}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+\infty$ حالة عدم تعيين، نغير شكل التابع

$$f(x)=3x+\sqrt{x^2\left(\frac{-1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=3x+\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{-1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$=3x-x\sqrt{\left(\frac{-1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$f(x)=x\left(3-1\sqrt{\left(\frac{-1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

٢)الضرب بالمرافق و القسمة عليه: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$f(x)=\sqrt{x^2-3}-x$ عند $+\infty$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3}+x\right)}{\sqrt{x^2-3}+x}$$

$$=\frac{(x^2-3)-x^2}{\sqrt{x^2-3}+x}=\frac{-3}{\sqrt{x^2-3}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-3}{+\infty}=0$$

$f(x)=\sqrt{4x^2+5}-2x$ عند $+\infty$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}$$

$$f(x)=\frac{(4x^2+5)-(4x^2)}{\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}$$

$$f(x)=\frac{5}{\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}=\frac{5}{+\infty}=0$$

الحالة الخاصة: $f(x)=3x-\sqrt{9x^2-5x+1}$ عند $+\infty$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$

$$f(x)=\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2-5x+1}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2-5x+1}\right)}{\left(3x+\sqrt{9x^2-5x+1}\right)}$$

$$f(x)=\frac{5x-1}{\left(3x+\sqrt{9x^2-5x+1}\right)}$$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$

نتابع بإخراج عامل مشترك بسط ومقام

$$f(x)=\frac{5x-1}{\left(3x+x^2\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \quad \to f(x)=\frac{5x-1}{3x+x\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{x(5-\frac{1}{x})}{x(3+\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}})} \quad \to =\frac{5-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{6}$$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-x$ عند $+\infty$

حالة عدم تعيين
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2-4x+5}-x)(\sqrt{x^2-4x+5}+x)}{\sqrt{x^2-4x+5}+x}$$

$$f(x)=\frac{x^2-4x+5-x^2}{\sqrt{x^2-4x+5}+x}=\frac{-4x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}+x}$$

حالة عدم تعيين
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$f(x)=\frac{-4x+5}{\sqrt{x^2-4x+5}+x}$$

$$=\frac{-4x+5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x}=\frac{-4x+5}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}$$

$$=\frac{-4x+5}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\frac{x\left(-4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-4}{1+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

الحالة الرابعة: $\frac{0}{0}$ يوجد خمس طرق لإزالتها:

١)المطابقات

٢)قواعد sin و tan

٣) قوانين sin و cos

٤)الضرب بالمرافق

٥)عامل مشترك حسب العامل

١)المطابقات: في حالة $\frac{0}{0}$ يجب دائما أختصار عامل من البسط مع عامل من المقام ثم نعوض:

$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$ عند ١

$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{1-2}=-1$$

$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-5x+6}$ عند ٢

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{8-8}{4-10+6}=\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{x(x^2-4)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-3)(x-2)}$$

$$f(x)=\frac{x(x+2)}{(x-3)}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{2(4)}{2-3}=\frac{8}{-1}=-8$$

تذكر:

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

٢)قواعد sin و tan :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

الفكرة:أمثال x بالبسط على أمثال x بالمقام

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

$$f(x)=\frac{3x+\sin 2x}{x-3\tan x}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0-0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$f(x)=\frac{x\left(3+\frac{\sin 2x}{x}\right)}{x\left(1-3\frac{\tan x}{x}\right)}=\frac{3+\frac{\sin 2x}{x}}{1-3\frac{\tan x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3+2}{1-3}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^2-x}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}$$

$$f(x)=\frac{x(\frac{\sin x}{x})}{x(x-1)}=\frac{(\frac{\sin x}{x})}{(x-1)}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{-1}=-1$$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^3-x^2}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}\Leftarrow f(x)=\frac{x^2(\frac{\sin^2 x}{x^2})}{x^2(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{x-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

٣)قوانين cos و sin (دساتير التحويل) مؤجل.

٤)الضرب بالرافق:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-3x}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{0}{0}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x^2-3x)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x+1-4}{(x^2-3x)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$f(x)=\frac{x-3}{x(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{x\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

Ali hmede 0936081152

$$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to10} f(x) = \frac{3-3}{10-10} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}$$

$$f(x) = \frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+3}$$

$$\lim_{x\to10} f(x) = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

المقاربات:

١) الأفقي: شرطه $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ y=a مقارب أفقي يوازي محور الفواصل وله وضع نسبي ندرسه من خلال $h(x) = f(x) - y_\Delta$

٢) الشاقولي: شرطه $\lim_{x \underset{<,>}{\to} a} f(x) = \infty$ x=a مقارب شاقولي يوازي محور التراتيب ووضعه النسبي الخط C على يمينه للقيم الأكبر وعلى يساره للقيم الأصغر

٣) المقارب المائل: شكله $y = ax + b$

مثال: $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ أوجد مجموعة التعريف والنهاية وحدد المقاربات

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

Y=3 مقارب أفقي يوازي محور الفواصل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3x}{x} = 3$

X=1 مقارب شاقولي يوازي محور التراتيب والمنحني على يساره $\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$

X=1 مقارب شاقولي يوازي محور التراتيب والمنحني على يمينه $\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Y=3 مقارب أفقي يوازي محور الفواصل $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3x}{x} = 3$

دراسة وضع المقارب الأفقي y=3

$$h(x)=f(x)-y_{\Delta}=\frac{3x}{x-1}-3=\frac{3x-3x+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}$$

$$h(x)=0\Rightarrow\frac{3}{x-1}=0\Rightarrow 3\neq 0$$

X	$-\infty$	١	$+\infty$
H(x)	-	‖	+
وضع نسبي	c تحت Δ	‖	فوق Δ C

$$f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$$

$$(x^2-1)=0\Rightarrow(x-1)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$$

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

Y=0 مقارب أفقي منطبق على محور الفواصل $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{3x}{x^2}=\frac{3}{x}=\frac{3}{-\infty}=0$

X=-1 مقارب شاقولي يوازي التراتيب والمنحني على يساره $\lim_{x\underset{<}{\to}-1}f(x)=\frac{3(-1)}{1-1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$

X=-1 مقارب شاقولي يوازي التراتيب والمنحني على يمينه $\lim_{x\underset{>}{\to}-1}f(x)=\frac{3(-1)}{1-1}=\frac{-3}{0}=+\infty$

X=1 مقارب شاقولي يوازي التراتيب والمنحني على يساره $\lim_{x\underset{<}{\to}1}f(x)=\frac{3(1)}{1-1}=\frac{3}{0}=-\infty$

X=1 مقارب شاقولي يوازي التراتيب والمنحني على يمينه $\lim_{x\underset{>}{\to}1}f(x)=\frac{3}{1-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

Y=0 مقارب أفقي منطبق على محور الفواصل $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3x}{x^2}=\frac{3}{x}=\frac{3}{+\infty}=0$

ندرس الوضع النسبي $h(x)=\frac{3x}{x^2-1}\Rightarrow h(x)=0\Rightarrow x=0$

X	$-\infty$	-١		٠		١	$+\infty$
H (x)	-	‖	+	٠	-	‖	+
وضع نسبي	تحت		فوق		تحت		فوق

عندما h(x)=0 يعني $f(x)-y_{\Delta}=0$ ومن $f(x)=y_{\Delta}$ وبالتالي هي نقطة تقاطع بين الخط البياني للتابع والمستقيم Δ

Ali hmede 0936081152

المقارب المائل:

1. إثبات: ١) نحسب $g(x) = f(x) - y_\Delta$

٢) يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

٣) دراسة وضع نسبي

١	$D_f = D_g$	٢	g(x)=0

مثال: $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-3}$ $\Delta: y = x - 2$

أثبت أن y مقارب في جوار $\pm\infty$ وادرس الوضع النسبي

$$g(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{x^2-5x+7}{x-3} - (x-2)$$

إما توحيد مقامات أو قسمة إقليدية للكسر لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 7 & x-3 \\ \hline -x^2 \pm 3x & x-2 \\ \hline -2x + 7 & \\ -2x - 6 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$g(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3} - (x-2)$$

إذا هو مقارب مائل $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

- دراسة الوضع النسبي:

$$1)\ D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$2)\ g(x) = 0, \Rightarrow 1 \neq 0$$

x	$-\infty$	٣	$+\infty$
$g(x)$	-	||	+
وضع نسبي	c تحت Δ	|	C فوق Δ

$f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x+1}$ $y_\Delta = x + 2$

الحل: $g(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{x^2+3x-5}{x+1} - (x+2)$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x - 5 & X+1 \\ \hline -x^2 \pm x & X+2 \\ \hline +2x - 5 & \\ -2x \pm 2 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

$$g(x) = x + 2 + \frac{3}{x+1} - (x+2) = \frac{-3}{x+1}$$

إذا هو مقارب مائل $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \frac{-3}{\infty} = 0$

ندرس الوضع النسبي

$$1)\ D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$2)\ g(x) \neq 0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	||	$-$	
وضع نسبي		Δ فوق c	|	Δ تحت C	

$\Delta: y = x$ $\quad f(x) = \sqrt{x^2-4}$

أثبت أنه مقارب وادرس وضعه النسبي $g(x) = \sqrt{x^2-4} - x$

حالة عدم تعيين $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)} = \frac{x^2-4-x^2}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)} = \frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{-4}{\infty} = 0$$

إذا $g(x)$ مقارب مائل و $D_f = D_g$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

X	$-\infty$		-٢		٢		$+\infty$
الجذر		+	.	---	.	+	

$$D_g =]-\infty, -2] \cup [+2, +\infty[$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = x \Rightarrow x^2 - 4 = x^2 \Rightarrow -4 = 0$$

مستحيلة الحل

X	$-\infty$		-٢		٢		$+\infty$
$g(x)$		+		×		+	
وضع نسبي		Δ فوق C				Δ فوق C	

٢)إيجاد: ①عامة ②كسر ③جذر

إيجاد المقارب المائل بالطريقة العامة:

المقارب من الشكل $\boldsymbol{y = ax + b}$

$a = \dfrac{f(x)}{x}$	$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$

$$f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x+1}$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+3x-5}{x^2+x}=\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-5}{x+1}-x\right)=\frac{x^2+3x-5-x^2-x}{x+1}=\frac{2x-5}{x+1}$$

$y=x+2$ ومنه $b=\frac{2x}{x}=2$

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+1}$$

أوجد معادلة المقارب المائل في جوار ال $+\infty$

$$y=ax+b$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x+1}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1-x^2}{\sqrt{x^2-5x+1}+x}=\frac{-5x+1}{\sqrt{x^2-5x+1}+x}=\frac{x\left(-5+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{-5}{2}$$

$$y=x-\frac{5}{2}$$

○ **بدون طريقة عامة :**

الكسر $f(x)=\frac{x^2+3x-5}{x+1}$ نقسم قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x-5 & X+1 \\ \hline -x^2 \pm x & X+2 \\ +2x-5 & \\ \pm 2x \pm 2 & \\ -7 & \end{array}$$

$$f(x) = x+2+\frac{-7}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-7}{x+1}\right) = 0$$

بما أن $\lim \square = 0$ فإن $y = x+2$ مقارب مائل

$$f(x)=\sqrt{x^2-5x+1}$$

الإتمام الى مربع كامل ،نضيف ونطرح مربع نصف أمثال المجهول من الدرجة الأولى

$$x^2-5x+1 = x^2-5x+1+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+1 = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$$

$$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}$$

إما عند $+\infty$	$\to \Delta_1 : y = x-\frac{5}{2}$
أو عند $-\infty$	$\to \Delta_2 : y = -x+\frac{5}{2}$

نتأكد من Δ_1 $\quad g(x) = f(x) -$

$$y_\Delta = \sqrt{x^2-5x+1}-\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

حالة عدم تعيين $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) =$

$+\infty-\infty$

$$g(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+1}-\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2-5x+1}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x+1}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{x^2-5x+1-x^2+5x-\frac{25}{4}}{\left(\sqrt{x^2-5x+1}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)} = \frac{\frac{21}{4}}{\left(\sqrt{x^2-5x+1}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)}$$

إذا هو مقارب مائل $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ندرس وضعه النسبي

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$ معرف على R

أوجد معادلة كل مقارب مائل في جوار ∞+ و ∞-

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$ بالإتمام الى مربع كامل

$$x^2 - 3x + 7 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}$$

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$\to \Delta_1 : y = x - \frac{3}{2}$	إما عند ∞+
$\to \Delta_2 : y = -x + \frac{3}{2}$	أو عند ∞-

نتأكد من $\Delta 1$ $\quad g(x) = f(x) - y_{\Delta}$

$$= \sqrt{x^2 - 3x + 7} - \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

حالة عدم تعيين $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x + 7} - \left(x - \frac{3}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \left(x - \frac{3}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 7 - x^2 + 3x - \frac{9}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{19}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

إذا هو مقارب مائل $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$D_f = R \qquad g(x) = 0 \Rightarrow \frac{19}{4} \neq 0$

X	∞- $\qquad\qquad$ ∞+
g (x)	+
وضع نسبي	C فوق Δ

مبرهنة الإحاطة والحصر(المقارنة)

١)الإحاطة: نعلم أن

$-1 \leq \cos x \leq 1$	$-1 \leq \sin x \leq 1$

نستخدم مبرهنة الإحاطة في حال ظهر ضمن النسبة sin أو cos عند ∞

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ عند ال ∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sin \infty}{\infty}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

نطبق مبرهنة الإحاطة $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f(x) = \frac{3x - 2\sin x}{x+1}$ عند ∞+

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty - 2\sin(\infty)}{\infty}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$2 \geq -2\sin x \geq -2$$

$$3x + 2 \geq 3x - 2\sin x \geq -2 + 3x$$

$$\frac{3x+2}{x+1} \geq f(x) \geq \frac{-2+3x}{x+1}$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+2}{x+1}\right) = 3$	$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2+3x}{x+1}\right) = 3$

حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

عند $+\infty$ $f(x)=\frac{3x}{x-\sin x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty-\sin(+\infty)}$$

$$-1\le \sin x\le 1$$

$$1\ge -\sin x\ge -1$$

$$x+1\ge x-\sin x\ge x-1$$

$$\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x-\sin x}\le\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{3x}{x+1}\le f(x)\le\frac{3x}{x-1}$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x+1}\right)=3$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right)=3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

٢)مبر هنة القيمة المطلقة:

$$|f(x)-l|\le g(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty} f(x)=l$$

$$|f(x)-5|\le\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

$$|f(x)+3|\le\frac{1}{x.\sin x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{+\infty.\sin(\infty)}$$

$$-1\le\sin x\le 1$$

$$-x\le x\sin x\le x$$

$$-\frac{1}{x}\ge\frac{1}{x\sin x}\ge\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\le\frac{1}{x\sin x}\le-\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$	$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

---

٣)الإحاطة من طرف واحد:

$g(x)>f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	$g(x)<f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x0=-\infty$

$f(x)>x^2+\sin x$ عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty+\sin(\infty)$$

$$-1\le \sin x\le 1$$

$$-1+x^2\le x^2+\sin x\le 1+x^2$$

$$-1+x^2\le g(x)\le 1+x^2$$

$\lim_{x\to+\infty}(-1+x^2)=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

الاستمرار وحل المعادلات: شرط الاستمرار $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x)=f(a)=\lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$

حل المعادلات:

$f(x)=0$ عدد حلول هذه المعادلة نعلمه من جدول التغيرات،حيث ندرس تغيرات التابع ومن الجدول ندرس وجود الحلول ضمن مجال $]a,b[$ يوجد حل للمعادلة $f(x)=0$ إذا تحقق الشرط: $f(a).f(b)<0$

وهذا الشرط غير كافي لوحدانية الحل إنما هو فقط لإثبات وجود حل،ولكن وحدانية الحل نأخذها من جدول التغيرات.

$f(x)=m$ لا يوجد لها شرط وإنما نأخذها من جدول التغيرات.

$$f(x)=x^3-12x+3$$

ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

$$D_f=]-\infty.+\infty[$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$f'(x)=3x^2-12$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-12=0$$

$$3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f(-2) = -8 + 24 + 3 = 19$$

$$f(2) = 8 - 24 + 3 = -13$$

X	-∞		-٢		٢		+∞
f'(x)		+	٠	-	٠	+	
f(x)	-∞	↗	١٩	↘	-١٣	↗	+∞

عدد الحلول:

- على المجال $]-\infty,-2[$ التابع متزايد تماما والمعادلة لها حل وحيد على هذا المجال .
- على المجال $]-2,+2[$ التابع متناقص تماما والمعادلة لها حل وحيد على هذا المجال .
- على المجال $]+2,+\infty[$ التابع متزايد تماما والمعادلة لها حل وحيد على هذا المجال .

نستنتج أن للمعادلة ثلاثة حلول على R .

*نثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل ضمن المجال $[-2,+2]$

$$f(-2) = 19 \ , \quad f(2) = -13 \Rightarrow f(-2).f(2) < 0$$

المعادلة لها حل ضمن هذا المجال

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

أوجد عدد الحلول للمعادلة $f(x) = 0$

$$D_f = R =]-\infty,+\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

X	-∞		-١		١		+∞
f'(x)		+	٠	-	٠	+	
f(x)	-∞	↗	٣	↘	-١	↗	+∞

Ali hmede 0936081152

عدد الحلول:

- على المجال $]-\infty,-1[$ التابع متزايد تماما والمعادلة لها حل وحيد على هذا المجال .
- على المجال $]-1,+1[$ التابع متناقص تماما والمعادلة لها حل وحيد على هذا المجال .
- على المجال $]+1,+\infty[$ التابع متزايد تماما والمعادلة لها حل وحيد على هذا المجال .

نستنتج أن للمعادلة ثلاثة حلول على R .

انتهى

Ali hmede 0936081152