球盒模型的一种解决方案*

朱春浩 (武汉船舶职业技术学院, 430050)

摘　要　本文用分组数 $M(n, r)$, 圆满地解决了球盒模型问题。

关键词　球盒模型　分组数 $M(n, r)$

1　引言

所谓球盒模型, 就是将 n 个球放到 m 个盒子里, 依据球和盒子是否有区别、是否允许空盒, 有 8 种状态。通过引入第二类斯特林(Stirling)数 $S(n,m)$、协同组合数 $C(m, n) = C_n^m$, 前六种状态得到圆满的解决。而球盒模型的最后两种状态, 令人遗憾的是仅用母函数 $G(x)$ 表出, 要展开母函数 $G(x)$, 得到相应的 x^n 项系数, 计算非常麻烦且容易出错。

状态	n 个球	m 个盒子	是否有空盒	方　案　计　数
1	有区别	有区别	有空盒	n^m
2	有区别	有区别	无空盒	$m!\ S(n,m)$ 若不考虑盒子区别时得 $S(n,m)$, 然后 m 个盒子进行排列
3	有区别	无区别	有空盒	$S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n,m), n \geq m$ $S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n,m), n \leq m$
4	有区别	无区别	无空盒	$S(n,m)$
5	无区别	有区别	有空盒	$C(n+m-1, n)$
6	无区别	有区别	无空盒	$C(m+(n-m)-1, n-m) = C(n-1, n-m) = C(n-1, m-1)$
7	无区别	无区别	有空盒	$G(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ 的 x^n 的系数
8	无区别	无区别	无空盒	$G(x) = \dfrac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ 的 x^m 的系数

因此, 有必要引入与第二类斯特林(Stirling)数 $S(n,m)$ 类似的分组数 $M(n, r)$, 简化这两种状态的计数。

2. 分组数

定义　将 n 个相同元素分成 $r(r \leq n)$ 个无序组(每组中至少有一个元素), 称作相同元素的分组问题, 简称分组问题。所有不同的分法方案总数称作分法种数, 记作 $M(n, r)$, 又称分组数 $M(n, r)$。

例如将十名战士(假设每个战士的军事素质是相同的)分成三个战斗小组, 则小组可能的分法如下表(见次页), 因而得知分组数 $M(10, 3) = 8$。

引理 1　(a) $M(n, 1) = 1$;　(b) $M(n, n) = 1$;　(c) $M(n+1, n) = 1$;
(d) $M(n, n+k) = 0$;　(e) $M(n, 2) = [n/2]$ $(n, k \in N, [x]$ 为取整函数)。

* 收稿日期: 2001—06—26。

分　法	一	二	三	四	五	六	七	八	方案
第一小组	1	1	1	1	2	2	2	3	战士人数
第二小组	1	2	3	4	2	3	4	3	
第三小组	8	7	6	5	6	5	4	4	

我们注意到: 单元素组的存在与否, 可以使分组问题得到简化! 例如: 其中含有一个单元素时的分法, 等同于撇开这一单元素组(单球盒), 而让其它 $n-1$ 个球, 分到另外 $r-1$ 个无序组的分法, 这思路可以推广到 t 个单元素组的情况。再如: 当每组内均多入一个元素(即至少有两个元素时), 其分法应该与每组都减去一个元素, 即 $n-r$ 个元素分成 r 个无序组的分法相等。

定义 2 在 n 个相同元素分成 r 个无序组问题里, 当要求其中有 $t(t<r)$ 个单元素组时, 我们将其分法种数记作 $E_t(t,r)$; 当没有单元素组存在时, 则将其分法种数记为 $F(n,r)$。

引理 2 $E_t(n,r)=M(n-t,r-t)$, $F(n,r)=M(n-r,r)$ $(0<t<r)$。

定理 1 分组数 $M(n,r)$ 满足下面的递推关系:

$$M(n,r)=M(n-r,r)+M(n-1,r-1)$$

证明 将个相同的球放到个无标志的盒子里, 不允许有空盒存在, 则所有不同放法的方案可分为两类情况:

(1) 盒内仅有一球时称为单球盒, 没单球盒存在时, 其方案数显然是 $F(n,r)=M(n-r,r)$;

(2) 至少有一个单球盒存在, 可以撇开这一单球盒, 讨论方案数得 $E_t=M(n-1,r-1)$;

根据排列组合的加法原理, 有 $M(n,r)=M(n-r,r)+M(n-1,r-1)$ 成立。(证毕)

令人惊异的是, 分组数 $M(n,r)$ 有着与 $S(n,m)$ 类似的性质和递推关系。

定理 2 将 n 个相同元素分成 r 个无序组, 其分法种数

$$M(n,r)=M(n-r,1)+M(n-r,2)+\cdots+M(n-r,r)=\sum_{i=1}^{r}M(n-r,i)$$

由引理之(d)知道: 当 $n-r<i$ 时, $M(n-r,i)=0$。

3. 球盒模型的圆满解决

有了定理 2, 就奠定了相同元素分组问题的分析基础。这时我们再回顾球盒模型, 已经顺利地解决第八种状态, 归结于分组数 $M(n,r)$ 的计算。那么第七种, 即 n 个无区别的小球放到 r 个无标志的盒子里, 允许空盒存在的状态, 又该如何解决呢?

(a) 当 $r<n$ 时, 可根据空盒的存在及个数 $t(0<t<r)$ 共分为 r 种情况:

恰巧没有空盒时, 其放法方案数就是分组数 $M(n,r)$;

恰巧仅有一个空盒时, 等价于 n 个相同小球分成 $r-1$ 组, 其放法方案数为分组数 $M(n,r-1)$;

恰巧仅有二个空盒时, 等价于 n 个相同小球分成 $r-2$ 组, 其放法方案数为分组数 $M(n,r-2)$;

……………

恰巧仅有 t 个空盒时, 等价于 n 个相同小球分成 $r-1$ 组, 可撇开这 t 个空盒, 让 n 个球在其它 $r-t$ 个盒子作无空盒的放置, 其放法方案数为分组数 $M(n,r-t)$ $(0<t<r)$;

……………

恰巧有 $r-1$ 个空盒存在时, 即将 n 个相同小球全部放入剩下的那一个盒子里, 其放法方案数为分组数 $M(n,1)$。

根据加法原理, 并运用定理 2, 得到总方案数为

$$M(n,r)+M(n,r-1)+M(n,r-2)+\cdots+M(n,1)=\sum_{i=1}^{r}M(n,i)=M(n+r,r)$$

(b) 当 $r\geq n$ 时, 必有 $r-n$ 个空盒存在, 可置于一边不考虑, 仅是让 n 个小球在剩下的 n 个盒里作允许空盒的放法, 推理同上, 所以其放法方案数为

$$M(n,1)+M(n,2)+\cdots+M(n,n)=\sum_{i=1}^{r}M(n,i)=M(2n,n)$$

定理 3　n 个无区别的小球放到 r 个无标志的盒子里, 当允许空盒存在时, 其放法方案数等于分组从 1 到 r 的分组数之和, 即

$$M(n,1)+M(n,2)+\cdots+M(n,r)=\sum_{i=1}^{r}M(n,i)=M(n+r,r)\quad(n>r)$$

$$\text{或}M(n,1)+M(n,2)+\cdots+M(n,n)=\sum_{i=1}^{n}M(n,i)=M(2n,n)\quad(n\leq r)$$

这样, 我们可以改进球盒模型方案列表如下, 使之简单完美更科学化。

状态	个球	个盒	是否有空盒	方　案　计　数
7	无区别	无标志	有空盒	$M(n,1)+M(n,2)+\cdots+M(n,r)=\sum_{i=1}^{r}M(n,i)=M(n+r,r)\ (n>r)$ 或$M(n,1)+M(n,2)+\cdots+M(n,n)=\sum_{i=1}^{n}M(n,i)=M(2n,n)\ (n\leq r)$
8	无区别	无标志	无空盒	分组数$M(n,r)$

例 3　14 个相同小球通过 5 条无区别的管道, 其运行的可能方式有多少种?

解　这是一个允许空管存在的问题, 这 14 个球可以同走一条管道, 或分为两组、三组、四组、五组, 所以其可能的运行方式共有

$$M(14,1)+M(14,2)+\cdots+M(14,5)=\sum_{i=1}^{5}M(14,i)=M(19,5)=70(\text{种})。$$

参考文献

1　陈景润 . 组合数学简介 . 天津: 天津科学技术出版社, 1988 年 7 月

2　卢开澄 . 组合数学—算法与分析 . 北京: 清华大学出版社, 1983 年 9 月

【来信摘录】李天胜(安徽财贸学院) 编辑先生: 自订阅贵刊至今, 两年多来一直很欣赏贵刊贴近教学的办刊方针。我也不断地向我的同事推荐这本杂志(现在已有好几位教师都在订阅) , 希望贵刊越办越好。

桂曙光(淮南工院) 第一次在一位同仁家里看见贵刊, 非常高兴, 它为工科院校的数学教师开辟了一片教研园地, 是第一线教师的好帮手。

张加锋(浙大城市学院学生) 你们好! 我是浙江大学城院机械电子工程系机械设计制造及其自动化的一名大一学生, 刚接触"高等数学", 在课外自习时, 我在阅览室发现了贵刊, 其中的解题方法与技巧, 令我受益匪浅, 在此十分感谢。

佟震(学生) 我是一名学数学专业的大学生, 经老师推荐看过你们编的《高等数学研究》后, 获益匪浅。由于错过了订阅杂志的时间, 冒昧地给您写信想要邮购《高等数学研究》2001 年各和 2002 年度的四期, 希望能快些邮来。

高建军(临沂师院学生) 我是山西临沂师院的一名大三学生, …贵刊精辟透彻的论述和别具一格的观点, 引起了我极大的探索兴趣, 也引导我跨入了一个博大精深的数学世界, 此时我由衷地感谢贵刊对我的指导与影响。