Các bộ tứ xoay vòng và cách sử dụng chúng

D. Rose - tháng 5 năm 2015

trừu tượng

Bài báo này giới thiệu cơ bản về việc sử dụng quaternion trong các ứng dụng quay 3D. Chúng tôi đưa ra một định nghĩa đơn giản về các quaternion và chỉ ra cách chuyển đổi qua lại giữa các quaternion, biểu diễn góc trục, góc Euler và ma trận quay. Chúng tôi cũng chỉ ra cách xoay các đối tượng về phía trước và phía sau bằng cách sử dụng các quaternion và cách nối một số hoạt động quay vào một quaternion duy nhất.

Giới thiệu

Nói một cách chính xác, một quaternion được đại diện bởi bốn phần tử:

$$\boldsymbol{q} = q_0 + \boldsymbol{i}\, q_1 + \boldsymbol{j}\, q_2 + \boldsymbol{k}\, q_3$$

(1)

trong đó q_0, q_1, q_2 và q_3 là các số thực, và $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ và $\boldsymbol{k}$ là các vectơ đơn vị ảo trực giao lẫn nhau. Số hạng q_0 được gọi là thành phần "thực", và ba số hạng còn lại là thành phần "ảo". Trong thực tế (và phần còn lại của bài báo này), ký hiệu tưởng tượng được ngụ ý và chỉ bốn hệ số được sử dụng để xác định một bậc bốn, như trong phương trình 2:

$$\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

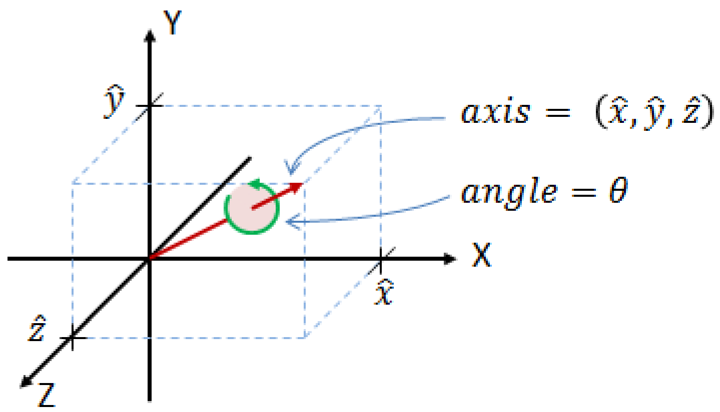
(2)

Quaternion là một chủ đề phức tạp. Tuy nhiên, trong bài báo này, chúng tôi sẽ giới hạn bản thân trong một tập con của các quaternion được gọi là ***quaternion quay*** . Các quaternion xoay là một cơ chế biểu diễn các phép quay trong ba chiều và có thể được sử dụng như một sự thay thế cho ma trận quay trong đồ họa 3D và các ứng dụng khác. Sử dụng chúng không yêu cầu hiểu biết về số phức.

Các quaternion quay có liên quan chặt chẽ với biểu diễn góc trục của chuyển động quay. Do đó, chúng tôi sẽ bắt đầu với giải thích về biểu diễn góc trục, và sau đó chỉ ra cách chuyển đổi thành một bậc bốn.

Biểu diễn trục-góc của các phép quay 3D

Theo định lý quay của Euler, bất kỳ phép quay 3D nào (hoặc chuỗi các phép quay) đều có thể được xác định bằng cách sử dụng hai tham số: một vectơ đơn vị xác định một trục quay; và một góc θ mô tả độ lớn của chuyển động quay quanh trục đó. Điều này được minh họa trong Hình 1:



Hình 1: Mọi phép quay 3D đều có thể được chỉ định bởi một trục quay và một góc quay quanh trục đó

Do đó, một phép quay theo góc trục có thể được biểu diễn bằng bốn số như trong phương trình 3:

$$(\theta, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \tag{3}$$

ở đâu:

$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ là một vectơ đơn vị xác định trục quay
θ là lượng quay xung quanh $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

Chuyển đổi Axis-Angle sang Quaternion

Một ***quaternion quay*** tương tự như biểu diễn góc trục. Nếu chúng ta biết các thành phần góc trục $(\theta, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, chúng ta có thể chuyển đổi thành quaternion q như sau:

$$\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{4a}$$

ở đâu:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4b}$$

$$q_1 = \hat{x}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4c}$$

$$q_2 = \hat{y}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(4ngày)

$$q_3 = \hat{z}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(4e)

Từ các phương trình này, chúng ta có thể thấy rằng số hạng thực của quaternion (q_0) hoàn toàn được xác định bởi góc quay, và ba số hạng ảo còn lại (q_1 , q_2 và q_3) chỉ là ba vectơ trục quay được chia tỷ lệ bởi một yếu tố chung. Một hệ quả của cách biểu diễn này là độ lớn của một tứ phương quay (nghĩa là tổng bình phương của cả bốn thành phần) luôn bằng một.

Vì các biểu diễn góc trục và biểu diễn quaternion chứa chính xác thông tin giống nhau, nên đặt câu hỏi tại sao chúng ta lại bận tâm với các quaternion ít trực quan hơn? Câu trả lời là để làm bất cứ điều gì hữu ích với đại lượng góc trục — chẳng hạn như xoay một tập hợp các điểm tạo nên một vật thể 3D nào đó — chúng ta phải thực hiện các phép toán lượng giác này. Thực hiện chúng trước thời hạn có nghĩa là hầu hết các phép toán bậc bốn có thể được thực hiện chỉ bằng phép nhân / chia và cộng / trừ, do đó tiết kiệm được các chu kỳ máy tính có giá trị.

Chuyển đổi Quaternion sang Axis-Angle

Cho quaternion ***q*** = (q_0 , q_1 , q_2 , q_3), chúng ta có thể chuyển đổi trở lại biểu diễn góc trục như sau. Đầu tiên, chúng tôi trích xuất góc quay từ q_0 :

$$\theta = 2\cos^{-1}(q_0)$$

(5)

Nếu θ không bằng 0, thì chúng ta có thể tìm véc tơ đơn vị trục quay như sau:

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \left(\frac{q_1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \frac{q_2}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \frac{q_3}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

(6)

Có một trường hợp đặc biệt mà phương trình (6) sẽ thất bại. Một quaternion có giá trị ***q*** = (1,0,0,0) được gọi là ***quaternion đồng nhất*** và sẽ không tạo ra phép quay. Trong trường hợp này, phương trình (5) sẽ tạo ra góc quay (θ) bằng 0, đó là điều chúng ta mong đợi. Tuy nhiên, vì trục quay là không xác định khi không có chuyển động quay, phương trình (6) sẽ tạo ra lỗi chia cho không. Do đó, bất kỳ triển khai phần mềm nào cũng nên kiểm tra xem q_0 có bằng 1,0 không và nếu có thì phải đặt $\theta = 0$ và ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) = (1, 0, 0).

Cần lưu ý rằng có một số cách để chuyển đổi từ một bậc bốn sang góc trục, vì vậy đừng quá lo lắng nếu các phương trình 5 và 6 không khớp với các nguồn khác.

Chuyển đổi Quaternion sang Ma trận xoay

Cho phép quay ***q*** = (q_0 , q_1 , q_2 , q_3), ma trận quay tương ứng là:

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

(7a)

Hoặc tương đương:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix}$$

(7b)

Cả hai phương pháp đều hoạt động đối với tất cả các quaternion quay đơn vị hợp lệ, bao gồm cả quaternion nhận dạng.

Chuyển đổi Ma trận xoay thành Quaternion

Cho ma trận xoay R:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

(số 8)

Chúng ta có thể tìm quaternion tương đương bằng hai bước.

Bước 1: Tìm độ lớn của từng thành phần quaternion. Điều này để lại dấu hiệu của từng thành phần không được xác định:

$$|q_0| = \sqrt{\frac{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}{4}}$$

(9a)

$$|q_1| = \sqrt{\frac{1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}}{4}}$$

(9b)

$$|q_2| = \sqrt{\frac{1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}}{4}}$$

(9c)

$$|q_3| = \sqrt{\frac{1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}}{4}}$$

(9ngày)

Bước 2: Để giải các dấu hiệu, hãy tìm số lớn nhất của q_0, q_1, q_2, q_3 và giả sử dấu của nó là số dương. Sau đó tính các thành phần còn lại như trong bảng dưới đây. Lấy độ lớn lớn nhất tránh chia cho các số nhỏ, điều này sẽ làm giảm độ chính xác của số.

If q_0 is largest:	If q_1 is largest:	If q_2 is largest:	If q_3 is largest:
$q_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4q_0}$	$q_0 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4q_1}$	$q_0 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4q_2}$	$q_0 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4q_3}$
$q_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4q_0}$	$q_2 = \frac{r_{12} + r_{21}}{4q_1}$	$q_1 = \frac{r_{12} + r_{21}}{4q_2}$	$q_1 = \frac{r_{13} + r_{31}}{4q_3}$
$q_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4q_0}$	$q_3 = \frac{r_{13} + r_{31}}{4q_1}$	$q_3 = \frac{r_{23} + r_{32}}{4q_2}$	$q_2 = \frac{r_{23} + r_{32}}{4q_3}$

Lý do dấu hiệu không rõ ràng là bất kỳ phép quay nào đã cho đều có hai biểu diễn bậc bốn có thể có. Nếu một số đã biết, thì số còn lại có thể được tìm thấy bằng cách lấy số âm của cả bốn số hạng. Điều này có tác dụng đảo ngược cả góc quay và trục quay. Vì vậy, đối với tất cả các quaternion quay, (q_0, q_1, q_2, q_3) và (- q_0, - q_1, - q_2, - q_3) tạo ra các phép quay giống hệt nhau. Để chuyển đổi từ ma trận xoay thành quaternion, chúng ta phải chọn tùy ý một trong hai câu trả lời có thể có như được mô tả trong bước 1 và 2.

Chuyển đổi Euler Angles sang Quaternion

Góc Euler là một chủ đề phức tạp, chủ yếu vì có hàng chục cách loại trừ lẫn nhau để xác định chúng. Các tác giả khác nhau có khả năng sử dụng các quy ước khác nhau, thường mà không nêu rõ các giả định cơ bản, điều này gây khó khăn cho việc kết hợp các phương trình và mã từ nhiều nguồn.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ sử dụng định nghĩa sau về góc Euler.

- Biến thể Tait-Bryan của Euler Angles
- Thứ tự xoay theo chiều dọc, xoay quanh các trục z, y và x tương ứng
- Xoay nội tại (các trục di chuyển theo mỗi vòng quay)

- Xoay đang hoạt động (còn được gọi là ngoại phạm) (điểm được xoay, không phải hệ tọa độ)
- Hệ tọa độ thuận tay phải với các phép quay thuận tay phải

Đây là quy ước chung và hầu hết mọi người đều thấy dễ hình dung nhất. Để thảo luận kỹ hơn về các góc Euler, hãy xem bài báo này .

Với định nghĩa trên, chúng ta có thể chuyển đổi từ góc Euler sang góc Quaternion như sau:

$$q_0 = c\left(\frac{u}{2}\right)c\left(\frac{v}{2}\right)c\left(\frac{w}{2}\right) + s\left(\frac{u}{2}\right)s\left(\frac{v}{2}\right)s\left(\frac{w}{2}\right)$$

(10a)

$$q_1 = s\left(\frac{u}{2}\right)c\left(\frac{v}{2}\right)c\left(\frac{w}{2}\right) - c\left(\frac{u}{2}\right)s\left(\frac{v}{2}\right)s\left(\frac{w}{2}\right)$$

(10b)

$$q_2 = c\left(\frac{u}{2}\right)s\left(\frac{v}{2}\right)c\left(\frac{w}{2}\right) + s\left(\frac{u}{2}\right)c\left(\frac{v}{2}\right)s\left(\frac{w}{2}\right)$$

(10c)

$$q_3 = c\left(\frac{u}{2}\right)c\left(\frac{v}{2}\right)s\left(\frac{w}{2}\right) - s\left(\frac{u}{2}\right)s\left(\frac{v}{2}\right)c\left(\frac{w}{2}\right)$$

(10ngày)

ở đâu:

u = góc cuộn

v = góc cao độ

w = góc hàm

c () = hàm cosin

s () = hàm sin

Phương trình 10a-d hoạt động với tất cả các giá trị của góc Euler, bao gồm điều kiện của khóa gimbal, trong đó góc sân bằng + 90 ° hoặc −90 °.

Chuyển đổi Quaternion sang Angles Euler

Các phương trình từ 11a đến 11c chỉ ra cách chuyển đổi từ quaternion sang góc Euler:

$$roll = u = \tan^{-1}\left(\frac{2(q_0q_1 + q_2q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right) = \mathrm{atan2}[2(q_0q_1 + q_2q_3),\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2]$$

(11a)

$$pitch = v = \sin^{-1}\big(2(q_0q_2 - q_1q_3)\big) \qquad = \text{asin}\,[2(q_0q_2 - q_1q_3)]$$

(11b)

$$yaw = w = \tan^{-1}\left(\frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right) = \text{atan2}[2(q_0q_3 + q_1q_2),\ q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\,]$$

(11c)

Khóa gimbal

Phương trình 11a đến 11c là giải pháp chung để rút ra góc Euler từ một bậc bốn. Nhưng trong trường hợp đặc biệt khi góc cao độ là + 90 ° hoặc −90 °, các đối số cho 11a và 11c đều sẽ bằng 0, trong đó hàm atan2 () là không xác định.

Đây là "khóa gimbal" đáng sợ. Điều này xảy ra bởi vì, ở góc nghiêng + 90 ° và −90 °, trục quay và trục quay thẳng hàng với nhau trong hệ tọa độ thế giới, và do đó tạo ra cùng một hiệu ứng. Điều này có nghĩa là không có giải pháp duy nhất: bất kỳ hướng nào có thể được mô tả bằng cách sử dụng vô số kết hợp góc nghiêng và góc cuộn.

Để xử lý điều kiện khóa gimbal, trước tiên chúng ta phải sử dụng phương trình 11b để xác định xem góc sân là + π / 2 hay −π / 2 radian. Sau đó, chúng tôi đặt cuộn hoặc yaw thành 0 và giải quyết vấn đề còn lại như sau:

$If\ pitch = +\frac{\pi}{2}$ (radians)	$If\ pitch = -\frac{\pi}{2}$ (radians)
$roll = 0$ $yaw = -2atan2(q_1, q_0)$	$roll = 0$ $yaw = 2atan2(q_1, q_0)$

Lưu ý rằng trong khi các góc Euler dễ bị khóa gimbal, các quaternion và ma trận quay thì không.

Xoay một điểm bằng Quaternion

Phần này định nghĩa phép nhân và nghịch đảo quaternion, đồng thời chỉ ra cách chúng được sử dụng để thực hiện một phép quay.

Phép nhân bậc bốn

Sản ***phẩm*** của hai quaternion:

t = ***rs***

$$(t_0, t_1, t_2, t_3) = (r_0, r_1, r_2, r_3)(s_0, s_1, s_2, s_3)$$

Được định nghĩa là:

(12a)
$$t_0 = (r_0 s_0 - r_1 s_1 - r_2 s_2 - r_3 s_3)$$

(12b)
$$t_1 = (r_0 s_1 + r_1 s_0 - r_2 s_3 + r_3 s_2)$$

(12c)
$$t_2 = (r_0 s_2 + r_1 s_3 + r_2 s_0 - r_3 s_1)$$

(12ngày)
$$t_3 = (r_0 s_3 - r_1 s_2 + r_2 s_1 + r_3 s_0)$$

Phép nhân bậc bốn có tính chất kết hợp, nhưng (trừ một số trường hợp đặc biệt) không có tính chất giao hoán. Do đó nếu ***a*** , ***b*** và ***c*** là quaternion thì:

$$(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$$
$$\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$$

Đảo ngược Quaternion

Nghịch ***đảo*** của một quaternion thu được bằng cách phủ định các thành phần ảo:

(13)
$$\boldsymbol{q}^{-1} = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$$

Xoay Quaternion

Chúng ta có thể xoay một điểm (*x*, *y*, *z*) bởi quaternion ***q*** bằng cách sử dụng ba bước sau:

<u>Bước 1:</u> Chuyển điểm được quay thành một quaternion bằng cách gán tọa độ của điểm làm thành phần ảo của quaternion và đặt thành phần thực của quaternion bằng 0. Nếu (*x*, *y*, *z*) là điểm được quay, thì nó được chuyển đổi thành bậc bốn như sau:

(14)
$$\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (0, x, y, z)$$

<u>Bước 2:</u> Thực hiện động tác xoay. Phép quay bậc ba cần hai phép nhân.

(15a)
Đối với vòng quay hoạt động: $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{pq}$

(15b)
Đối với quay thụ động: $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{qpq}^{-1}$

ở đâu:

p chứa điểm được xoay (xem bước 1)

q là một quaternion quay

q $^{-1}$ là nghịch đảo của ***q***

p *'* chứa tọa độ của điểm được quay

Phép quay chủ động là khi điểm được quay đối với hệ tọa độ và phép quay bị động là khi hệ tọa độ được quay đối với điểm. Hai chuyển động quay ngược chiều nhau.

Lưu ý rằng vì phép nhân bậc ba là phép kết hợp, nên không thành vấn đề nếu chúng ta thực hiện các phép nhân theo thứ tự $(qp)q^{-1}$ hoặc $q(pq^{-1})$.

Bước 3: Trích xuất các tọa độ đã xoay từ ***p*** *'* :

$$p' = (0, x', y', z') \tag{16}$$

Quaternion p *'* được quay sẽ có bốn phần tử giống như bất kỳ quaternion nào. Tuy nhiên, phần tử thực sẽ luôn bằng 0. Do đó, tọa độ 3D của điểm quay (x' , y' , z') chỉ là thành phần ảo của ***p'*** .

Thuộc tính của Quaternion

Sau đây là một số đặc tính hữu ích của quaternion. Cho đến nay, bài báo này chỉ thảo luận về các quaternion quay. Tuy nhiên, các quaternion quay chỉ là một tập con của tất cả các quaternion có thể có, cũng giống như ma trận quay là một tập con của tất cả các ma trận 3x3 có thể có. Các thuộc tính sau đây áp dụng cho tất cả các quaternion trừ khi có quy định khác.

1. Chiều dài (độ lớn) của một quaternion là $|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$
2. Một quaternion là một quaternion "đơn vị" nếu $|q| = 1$.
3. Tất cả các quaternion quay phải là quaternion đơn vị.
4. Quaternion ***q*** = (1, 0, 0, 0) là ***quaternion đồng nhất*** . Nó đại diện cho không quay. Nếu ***q*** là một quaternion tùy ý và ***i*** là quaternion đồng nhất, thì ***qi*** = ***iq*** = ***q*** .
5. Liên ***hợp*** của một bậc bốn là $q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$
6. Nghịch đảo của một quaternion là $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$. Tích của một quaternion và nghịch đảo của nó là quaternion đồng nhất: $qq^{-1} = q^{-1}q$ = (1, 0, 0, 0). Lưu ý rằng đối với trường hợp đặc biệt này, phép nhân quaternion là giao hoán.
7. Đối với các quaternion quay, nghịch đảo bằng liên hợp. Vì vậy, đối với các quaternion quay, $q^{-1} = q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$.

8. Đảo ngược hoặc liên hợp một quaternion quay có tác dụng đảo ngược trục quay, điều này điều chỉnh để nó quay theo hướng ngược lại với hướng ban đầu. Nghĩa là, nếu một điểm được xoay đến một vị trí mới bằng cách sử dụng $\boldsymbol{q}$, thì việc quay nó một lần nữa bằng cách sử dụng $\boldsymbol{q}^{-1}$ hoặc $\boldsymbol{q}^{*}$ sẽ đưa nó trở lại vị trí ban đầu.
9. Bất kỳ phép quay nào đã cho đều có hai biểu diễn bậc bốn có thể có. Nếu một số đã biết, thì số còn lại có thể được tìm thấy bằng cách lấy số âm của cả bốn số hạng. Điều này có tác dụng đảo ngược cả góc quay và trục quay. Vì vậy, nếu $\boldsymbol{q}$ là một quaternion quay, thì $\boldsymbol{q}$ và - $\boldsymbol{q}$ sẽ tạo ra cùng một phép quay.
10. Một phép quay $\boldsymbol{q}_a$ sau đó là một phép quay $\boldsymbol{q}_b$ có thể được kết hợp thành một phép quay $\boldsymbol{q}_c = \boldsymbol{q}_b \boldsymbol{q}_a$. Điều này có thể được mở rộng đến một số lần quay tùy ý. Lưu ý rằng thứ tự quan trọng (vì phép nhân bậc bốn không có tính chất giao hoán).
11. Phép nhân bậc bốn có tính chất kết hợp: $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$
12. Phép nhân số bậc bốn không giao hoán: $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$

Các trang liên quan