

1 Les définitions

Nous considérons les sommets et les arêtes qui sont inclus dans une boîte $\Lambda(l)$. Nous étudions les chemins espace-temps fermés dans la boîte pour la percolation dynamique de paramètre p .

Les arêtes-temps. Une arête-temps est un couple (e, t) où e est une arête de \mathbb{E} et t un nombre réel.

La relation de connexion. Sur l'espace $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$, nous définissons la relation de connexion \sim de la manière suivante. Soient (e, t) et (f, s) deux arêtes-temps, nous disons qu'elles sont connectées, que nous notons $(e, t) \sim (f, s)$, si

$$(e = f \text{ et } s \neq t) \text{ ou } (s = t \text{ et } e, f \text{ ont une extrémité commune}).$$

Les chemins espace-temps. Un chemin espace-temps est une suite finie d'arêtes-temps $(e_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que, pour $1 \leq i \leq n-1$, (e_i, t_i) et (e_{i+1}, t_{i+1}) sont connectées consécutivement, i.e., notons $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$, alors

$$(e_i = e_{i+1} \text{ et } t_i \neq t_{i+1}) \text{ ou } (t_i = t_{i+1} \text{ et } y_i = x_{i+1}).$$

Nous définissons la longueur d'un chemin espace-temps comme le nombre d'arête-temps dans la suite. Soient x, y deux sommets dans $\Lambda(l)$, nous disons qu'un chemin espace-temps $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$ relie x à y si x est l'une extrémité de e_1 et y une extrémité de e_n .

Les changements de temps. Soit $(e_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$ un chemin espace-temps, nous disons que (e_i, t_i) est un changement de temps si $e_{i+1} = e_i$ et $t_{i+1} \neq t_i$ et dans ce cas nous disons que l'intervalle $[\min(t_i, t_{i+1}), \max(t_i, t_{i+1})]$ est un intervalle de changement de temps. Désormais, nous considérons les chemins espace-temps qui n'ont pas deux changements de temps consécutifs, i.e., si (e_k, t_k) est un changement de temps alors, $e_{k+2} \neq e_k$.

Les chemins d'occurrence disjointe. Nous considérons le processus de percolation dynamique à temps discret et ω une trajectoire. Un chemin espace-temps $(e_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dit fermé si, pour $1 \leq i \leq n$, l'arête e_i est fermée à l'instant t_i dans ω . Nous disons que ce chemin espace-temps fermé

est d'occurrence disjointe de longueur n avec m changements de temps s'il existe m indices $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(m) \leq n$ tels que :

- Les changements de temps arrivent aux instants $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$, i.e.,

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\} \quad e_{k(i)} = e_{k(i)+1} \text{ et } t_{k(i)} \neq t_{k(i)+1} \quad t_{k(i)+1} = \dots = t_{k(i+1)}.$$

- Les arêtes visitées à un instant donné sont 2 à 2 distinctes, i.e.,

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (i \neq j, t_i = t_j) \Rightarrow e_i \neq e_j.$$

- Les fermetures d'arêtes arrivent disjointement, i.e., pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$ et $e_i = e_j$, l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :

- ◊ $j = i + 1$ et $i \in \{k(1), \dots, k(m)\}$;
- ◊ $t_i < t_j$ et il existe un instant $s \in]t_i, t_j[$ tel que e_j est ouverte à l'instant s dans ω ;
- ◊ $t_j < t_i$ et il existe un instant $s \in]t_j, t_i[$ tel que e_j est ouverte à l'instant s dans ω ;

Les chemins impatients Un chemin espace-temps $(e_i, t_i)_{0 \leq i \leq n}$ est dit impatient si toute arête de changement de temps e_k est suivi par une arête e_{k+2} qui change son état à l'instant t_{k+2} dans ω , i.e.,

$$\forall k \in \{1, \dots, n-2\} \quad e_k = e_{k+1} \Rightarrow \omega(e_{k+2}, t_{k+2}) \neq \omega(e_{k+2}, t_{k+2} - 1)$$

2 L'extraction d'un chemin d'occurrence disjointe

Nous montrons que nous pouvons extraire un chemin d'occurrence disjointe depuis tout chemin espace-temps.

Proposition 1. *Soit $(e_i, t_i)_{0 \leq i \leq N}$ un chemin espace-temps fermé qui relie x à y dans ω . Il existe une fonction $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ strictement croissante telle que $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ est un chemin espace-temps fermé d'occurrence disjointe qui relie x à y dans ω .*

Démonstration. Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur la longueur N . Supposons que la proposition est vraie pour tout chemin de longueur inférieure à N . Considérons maintenant un chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_{N+1}, t_{N+1})$$

de longueur $N + 1$ qui relie x à y . S'il existe un indice $i \leq N$ tel que $(e_i, t_i) = (e_{N+1}, t_{N+1})$, alors le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i)$$

est un chemin de longueur $i \leq N$ qui relie x à y . Par l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y . S'il existe un indice $1 \leq i \leq N$ tel que $e_i = e_{N+1}$, et e_{N+1} reste fermée entre $\min(t_i, t_{N+1})$ et $\max(t_i, t_{N+1})$, nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

qui est de longueur inférieure à N . Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à ce chemin et nous obtenons un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y . Si aucun des cas précédents n'a lieu, nous considérons le chemin $(e_1, t_1), \dots, (e_N, t_N)$ de longueur N et qui relie x à z , où z est un voisin de y . Par l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction strictement croissante $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ telle que le chemin extrait

$$\gamma(\phi) = (e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$$

est un chemin d'occurrence disjointe qui relie x à z . Si ce chemin n'emprunte pas l'arête e_{N+1} , alors nous posons $\phi(n+1) = N+1$ et nous obtenons le chemin extrait souhaité. Considérons le cas où $\gamma(\phi)$ emprunte l'arête e_{N+1} . Supposons tout d'abord que $\gamma(\phi)$ passe par e_{N+1} avant et après t_{N+1} . Nous notons t_- (respectivement t_+) le dernier (respectivement premier) instant strictement avant (respectivement après) t_{N+1} où $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} et soit j_- (respectivement j_+) l'unique indice tel que $t_{\phi(j_-)} = t_-$ et $e_{\phi(j_-)} = e_{N+1}$ (respectivement $t_{\phi(j_+)} = t_+$ et $e_{\phi(j_+)} = e_{N+1}$). Plus formellement, les indices j_-, j_+ sont définis par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} j_- < t_{N+1}, \quad e_{j_-} = e_{N+1}, \quad t_{j_-} = \max \{ t_j : 1 \leq j \leq N, e_j = e_{N+1}, t_j < t_{N+1} \}, \\ j_+ > t_{N+1}, \quad e_{j_+} = e_{N+1}, \quad t_{j_+} = \min \{ t_j : 1 \leq j \leq N, e_j = e_{N+1}, t_j > t_{N+1} \}. \end{aligned}$$

Comme le chemin $\gamma(\phi)$ est d'occurrence disjointe et ne contient pas l'arête temps (e_{N+1}, t_{N+1}) , et qu'aucun de ses arêtes-temps (e_i, t_i) de changements de temps n'est restée fermée entre t_i et t_{N+1} , nécessairement, l'arête e_{N+1}

doit s'ouvrir sur $]t_{j_-}, t_{N+1}[$ et sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$, nous ajoutons (e_{N+1}, t_{N+1}) à la fin de $\gamma(\phi)$ et nous obtenons le chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y .

Supposons maintenant que $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement avant t_{N+1} . Nous définissons j_- de la même façon que dans le cas précédent. Nécessairement, e_{N+1} s'ouvre entre t_{j_-} et t_{N+1} , alors le chemin

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)}), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

vérifie les conditions voulues.

Enfin, si $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement après t_{N+1} , nous définissons seulement j_+ et nous obtenons le chemin extrait voulu de la même manière que le cas précédent. \square

3 Obtenir un chemin impatient

Nous allons montrer tout chemin espace-temps admet une modification temporelle qui est impatient. Pour cela, nous introduisons l'algorithme de modification récursive suivant :

Algorithme 1. *Soit $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$ un chemin espace-temps. Nous allons modifier la première arête e_1 du chemin, selon les cas suivants :*

- *Si $e_2 \neq e_1$, alors nécessairement $t_1 = t_2$, et nous ne modifions pas (e_1, t_1) . Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_2, t_2), \dots, (e_n, t_n)$;*
- *Si $t_1 < t_2$, soit τ_3 le dernier instant avant t_2 où e_3 se ferme. Si $t_1 \geq \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$. Nous recommençons avec le chemin $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$. Si $t_1 < \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$.*
- *Si $t_1 > t_2$, soit τ_3 le premier instant après t_2 où e_3 s'ouvre. Si $t_1 \leq \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$. Nous recommençons avec le chemin $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$. Si $t_1 > \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$.*

Nous remarquons que la longueur du chemin à modifier diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Au vu de la définition d'un chemin impatient, nous avons directement la propriété suivante :

Proposition 2. *Soit γ un chemin espace-temps qui relie x à y , sa modification obtenue selon l'algorithme précédent est impatient qui relie x à y et les intervalles de changement de temps après modification sont inclus dans les intervalles initiaux.*

Nous montrons maintenant qu'un chemin d'occurrence disjointe est toujours d'occurrence disjointe après la modification selon l'algorithme.

Proposition 3. *Soit γ un chemin espace-temps d'occurrence disjointe, nous modifions ce chemin selon algorithme 1. Le chemin obtenu est d'occurrence disjointe et impatient.*

Démonstration. Nous vérifions que la condition de l'occurrence disjointe est conservée à chaque étape de l'algorithme. Soit $(e_i, t_i), (e_{i+1}, t_{i+1})$ le changement de temps qui est modifié lors d'une itération, et supposons que le chemin visite e_i ou e_{i+2} plus d'une fois. Supposons aussi que $t_i < t_{i+1}$. Nous examinons les deux résultats possibles de la modification. Si nous obtenons $(e_i, t_i), (e_{i+2}, t_i)$, nous devons vérifier qu'il existe un instant entre chaque visite de e_{i+2} et t_i tel que e_{i+2} est ouverte à cet instant. Or (e_{i+2}, t_{i+2}) est dans γ qui est un chemin d'occurrence disjointe, donc e_{i+2} ouvre entre les autres instants de visites et t_{i+2} . Vu que l'arête e_{i+2} est fermée entre t_i et t_{i+2} , cette propriété est encore vraie pour t_i . Si nous avons $(e_i, t_i), (e_{i+1}, \tau_{i+2}), (e_{i+2}, \tau_{i+2})$ après la modification, nous vérifions la condition pour e_i et e_{i+2} . Nous rappelons que $e_{i+1} = e_i$ et τ_{i+2} est le dernier instant avant t_{i+1} où e_{i+2} se ferme. Or e_i est fermée entre t_i et τ_{i+2} , donc e_i ouvre entre τ_{i+2} et les autres instants de visites. De même, e_{i+2} ouvre entre τ_{i+2} et les autres instants de visites car e_{i+2} est fermée entre τ_{i+2} et t_{i+2} . Enfin, le cas où $t_i > t_{i+1}$ se traite de la même manière. \square

4 La décroissance exponentielle

Nous démontrons ici que la probabilité d'avoir un chemin espace-temps qui relie deux points décroît exponentiellement vite avec la distance entre les deux points. Nous notons

$$x \xleftrightarrow{s,t} y$$

l'événement : il existe un chemin espace temps fermé qui relie x et y dans l'intervalle de temps $[s, t]$. Nous commençons par énoncer un lemme combinatoire :

Lemme 1. Soit $S(n, m)$ l'ensemble de m -uplet d'entiers suivant :

$$S(n, m) = \{ (u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, n\}^m : \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad u_{i+1} > u_i + 1 \}.$$

Alors

$$|S(n, m)| = \binom{n-m+1}{m}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\Phi : (u_1, \dots, u_m) \rightarrow (u_1, \dots, u_i - i + 1, \dots, u_m - m + 1).$$

L'application Φ est une bijection de $S(n, m)$ sur l'ensemble de m -uplet d'entiers strictement croissant entre 1 et $n - m + 1$, i.e.,

$$\{ (u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, n - m + 1\}^m : \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad u_{i+1} > u_i \}.$$

Ce dernier est de cardinal $\binom{n-m+1}{m}$. □

Nous énonçons maintenant notre estimée centrale.

Proposition 4. Soit x, y deux points dans Λ et $s < t$ deux instants, alors :

$$P \left(\begin{array}{c} \text{il existe un chemin } \gamma \text{ de longueur} \\ n \text{ qui relie } x \text{ à } y \text{ entre } s \text{ et } t \end{array} \right) \leq \exp \left(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right).$$

Démonstration. Notons \mathcal{E} l'événement à estimer. Supposons que \mathcal{E} arrive et soit γ un chemin espace-temps qui le réalise. Par les propositions précédentes, nous pouvons supposer que γ est d'occurrence disjointe et impatient. Notons $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$ les arêtes-temps de γ , $k(1), \dots, k(m)$ les indices où les changements de temps ont lieu dans γ . Par convention, nous posons $k(0) = 1$ et $k(m+1) = n$. Quitte à arrêter γ à l'instant où il visite y , nous pouvons supposer que γ ne se termine pas par un changement de temps, i.e. $k(m) < n - 1$. Pour $0 \leq i \leq m$, nous notons \mathcal{E}_i l'événement : il existe un chemin fermé qui relie une extrémité de $e_{k(i)}$ à une extrémité de $e_{k(i+1)}$ à l'instant $t_{k(i+1)}$, $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ et $e_{k(i)+2}$ se ferme à l'instant $t_{k(i+1)}$. Nous conditionnons \mathcal{E} selon le nombre et les instants de changement de temps, puis nous factorisons la probabilité à l'aide de l'inégalité de BK :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) \leq n} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} P(\mathcal{E}_0 \circ \dots \circ \mathcal{E}_m) \\ &\leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) \leq n} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} \prod_{i=0}^m P(\mathcal{E}_i). \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant chaque terme $P(\mathcal{E}_i)$. Nous notons x_i, y_i les extrémités de l'arête $e_{k(i)}$ dans l'ordre où elles sont traversées par γ . Nous pouvons réécrire la probabilité :

$$P(\mathcal{E}_i) = P \left(\begin{array}{l} y_i \longleftrightarrow x_{i+1} \text{ à l'instant } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)} \text{ reste fermée entre } t_{k(i)} \text{ et } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)+2} \text{ change d'état à } t_{k(i+1)} \end{array} \right)$$

Pour réaliser $y_i \longleftrightarrow x_{i+1}$ à l'instant $t_{k(i+1)}$, il existe un chemin fermé de longueur $k(i+1) - k(i) - 1$ car $e_{k(i)} = e_{k(i)+1}$. La probabilité qu'il existe un tel chemin est majorée par $(3 - 3p)^{k(i+1) - k(i) - 1}$. Or à chaque instant t , nous choisissons une arête uniformément parmi toutes les arêtes de $\Lambda(l)$ et nous déterminons le nouvel état de cette arête selon une loi de Bernoulli de paramètre 1, la probabilité que $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ est donc $(1 - \frac{p}{|\Lambda|})^{|t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|}$. Enfin, la probabilité que $e_{k(i)+2}$ change son état à l'instant $t_{k(i+1)}$ est $\frac{1}{|\Lambda|}$. Nous obtenons :

$$P(\mathcal{E}_i) \leq (3 - 3p)^{k(i+1) - k(i) - 1} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{|t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \frac{1}{|\Lambda|}$$

Nous injectons cette majoration dans la somme précédente et nous obtenons :

$$P(\mathcal{E}_0 \circ \dots \circ \mathcal{E}_m) \leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) < n} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} (3 - 3p)^{n-m} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^m |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Calculons d'abord la somme sur les instants $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$, nous posons $\Delta_i = |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|$. Si m et les indices $k(1), \dots, k(m)$ sont fixés, la suite $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$ est déterminée par la donnée de $t_{k(1)}$, les valeurs $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$ et les signes des différences $t_{k(i+1)} - t_{k(i)}$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} (1 - \frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_{i=1}^m |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \\ = 2^{m-1} (t - s) \sum_{1 \leq \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1} \leq t-s} (1 - \frac{p}{|\Lambda|})^{\Delta_1 + \dots + \Delta_{m-1}}. \end{aligned}$$

Nous échangeons la somme et le produit et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1} \leq t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^{m-1} \Delta_i} &= \prod_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{\Delta_i=1}^{t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right) \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leq \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}}. \end{aligned}$$

Comme $(1-x)^\alpha \geq 1 - \alpha x$ pour $0 < x < 1$ et $\alpha \geq 0$, nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leq (t-s)^{m-1}.$$

Nous avons donc

$$P(\mathcal{E}) \leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) < n} 2^{m-1} (3-3p)^{n-m} (t-s)^m \frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Or le nombre de termes dans la seconde somme est $\binom{n-m+1}{m}$ d'après le lemme 1, donc :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &\leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \binom{n-m+1}{m} 2^{m-1} (3-3p)^{n-m} (t-s)^m \frac{1}{|\Lambda|^m} \\ &\leq (3-3p)^{n/2} \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \frac{(2n)^m}{m! |\Lambda|^m} (t-s)^m \\ &\leq \exp \left(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right). \end{aligned}$$

□

Enfin, utilisons la proposition précédente pour obtenir la décroissance en vitesse exponentielle de la probabilité d'avoir un chemin espace-temps qui relie deux points de distance l .

Théorème 1. *Soit x, y deux points de distance l et t un instant. Alors*

$$P(x \xrightarrow{0,t} y) \leq \exp(-c(p)l)$$

pour tout $p > \tilde{p}$ où \tilde{p} une constante strictement inférieure à 1. De plus, $c(p)$ est une constante positive qui tend vers infini quand p tends vers 1.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'un chemin espace-temps qui relie x, y est nécessairement de longueur supérieure à l . De plus nous pouvons extraire un chemin d'occurrence disjointe et impatient à partir de ce chemin. Le chemin extrait obtenu relie aussi x et y entre 0 et t . Or la probabilité qu'un chemin qui vit un temps t est bornée par $\exp(-c'(p)t)$, nous pouvons considérer le cas où $t \leq \kappa l \leq \kappa|\Lambda|$ avec κ une constante arbitraire strictement positive. Nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} P(x \xrightarrow{0,t} y) &= P \left(\begin{array}{c} x \xrightarrow{0,t} y \text{ par } \gamma \\ \gamma \text{ d'occurrence disjointe et impatient} \\ t \leq \kappa l \end{array} \right) + \exp(-c'(p)\kappa l) \\ &\leq \sum_{n \geq l} P \left(\begin{array}{c} x \xrightarrow{0,t} y \text{ par } \gamma \\ \gamma \text{ d'occurrence disjointe et impatient} \\ |\gamma| = n, t \leq \kappa l \end{array} \right) + \exp(-c'(p)\kappa l) \\ &\leq \sum_{n \geq l} \exp \left(2n\kappa + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right) + \exp(-c'(p)\kappa l). \end{aligned}$$

Nous posons \tilde{p} telle que $\kappa + \frac{\ln(3-3\tilde{p})}{2} = 0$. Nous avons donc pour tout $p > \tilde{p}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq l} \exp \left(2n\kappa + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right) + \exp(-c'(p)\kappa l) \\ \leq \frac{\exp(l(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2}))}{1 - \exp(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2})} + \exp(-c'(p)\kappa l) \leq \exp(-c(p)l) \end{aligned}$$

où nous posons

$$C(p) = \frac{\min(c'(p), -\kappa - \frac{\ln(3-3p)}{2})}{2}$$

qui tend vers infini quand p tend vers 1. □