

# 1 chemin espace-temps

Nous considérons les sommets et les arêtes qui inclus dans une boîte  $\Lambda(l)$  de taille  $2l \times h$ . On étudie les chemin espace-temps fermés dans la boîte formés par la percolation dynamique de paramètre  $p$ .

**Définition 1.** Une arête-temps est un couple  $(e, t)$  où  $e$  est une arête de  $\mathbb{E}$  et  $t$  un nombre réel.

Nous définissons une relation d'équivalence de connexion sur l'espace  $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$  de la manière suivante : nous disons que les arêtes-temps  $(e, t)$  et  $(f, s)$  sont connectés si  $e = f$  ou  $(s = t$  et  $e, f$  ont une extrémité commune). Nous notons  $(e, t) \sim (f, s)$  si l'une des conditions est vérifiée. Un chemin espace-temps est une suite d'arête-temps  $(e_i, t_i)_{i \geq 0}$  telle que pour tout  $i \geq 0$ ,  $(e_i, t_i) \sim (e_{i+1}, t_{i+1})$ . Nous définissons la longueur d'un chemin espace-temps comme le nombre d'arête-temps dans la suite. Nous disons que  $(e_i, t_i)$  est un changement de temps si  $e_{i+1} = e_i$  et  $t_{i+1} \neq t_i$  et nous appelons  $[t_i, t_{i+1}]$  si  $t_i < t_{i+1}$  ou  $[t_{i+1}, t_i]$  si  $t_i > t_{i+1}$  un intervalle de changement de temps. Désormais, nous considérons les chemins espace-temps avec les changements de temps simples, i.e. si  $(e_k, t_k)$  est un changement de temps alors,  $e_{k+2} \neq e_k$ .

Nous considérons le processus de percolation dynamique à temps discret et  $\omega$  une trajectoire. Un chemin espace-temps  $(e_i, t_i)_{0 \leq i \leq n}$  est dit fermé si pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_i$  est fermé à l'instant  $t_i$  dans  $\omega$ . Nous disons que ce chemin espace-temps fermé est d'occurrence disjointe de longueur  $n$  avec  $m$  changements de temps s'il existe  $m$  indices  $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(m) \leq n$  telles que :

- Les changements de temps arrivent aux instants  $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$ , i.e.

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\} \quad e_{k(i)} = e_{k(i)+1} \quad t_{k(i)+1} = \dots = t_{k(i+1)}.$$

- Les arêtes visitées à un instant donné sont 2 à 2 distinctes, i.e.

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (i \neq j, t_i = t_j) \Rightarrow e_i \neq e_j.$$

- Les fermetures d'arêtes arrivent disjointement, i.e, pour tout  $i, j \in \{1, \dots, j\}$ ,  $i < j$  tels que  $e_i = e_j$ , l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :

- $j = i + 1$  et  $i \in \{k(1), \dots, k(m)\}$  ;
- $t_i < t_j$  et il existe un instant  $s \in ]t_i, t_j[$  tel que  $e_j$  est ouverte à  $s$  dans  $\omega$  ;

- $t_j < t_i$  et il existe un instant  $s \in ]t_j, t_i[$  tel que  $e_j$  est ouverte à  $s$  dans  $\omega$  ;

Soit  $x, y$  deux sommets dans  $\Lambda(l)$ , nous disons qu'un chemin espace-temps  $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$  relie  $x$  à  $y$  si  $x$  est l'une extrémité de  $e_1$  et  $y$  une extrémité de  $e_n$ .

**Proposition 1.** *Soit  $(e_i, t_i)_{0 \leq i \leq N}$  un chemin espace-temps fermé qui relie  $x$  à  $y$  dans  $\omega$ , il existe une fonction  $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  strictement croissante telle que  $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$  est un chemin espace-temps fermé d'occurrence disjointe qui relie  $x$  à  $y$  dans  $\omega$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur la longueur  $N$ . Supposons que la proposition est vraie pour tout chemin de longueur inférieur à  $N$ . Considérons maintenant un chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_{N+1}, t_{N+1})$$

de longueur  $N + 1$  qui relie  $x$  à  $y$ . S'il existe un indice  $i \leq N$  tel que  $(e_i, t_i) = (e_{N+1}, t_{N+1})$ , alors le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i)$$

est un chemin de longueur  $i \leq N$  qui relie  $x$  à  $y$ . Par l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie  $x$  à  $y$ . S'il existe un indice  $1 \leq i \leq N$  tel que  $e_i = e_{N+1}$ , et  $e_{N+1}$  reste fermée entre  $t_i$  et  $t_{N+1}$ , nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

qui est de longueur inférieur à  $N$ . Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à ce chemin et nous obtenons un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie  $x$  à  $y$ . Si aucun des cas précédents a lieu, nous considérons le chemin  $(e_1, t_1), \dots, (e_N, t_N)$  de longueur  $N$  et qui relie  $x$  à  $z$ , où  $z$  est un voisin de  $y$ . Par l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction strictement croissante  $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  telle que le chemin extrait

$$\gamma(\phi) = (e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$$

est un chemin d'occurrence disjointe qui relie  $x$  à  $z$ . Si ce chemin n'emprunte pas l'arête  $e_{N+1}$ , alors nous posons  $\phi(n+1) = N+1$  et nous obtenons le chemin extrait souhaité. Considérons le cas où  $\gamma(\phi)$  emprunte l'arête  $e_{N+1}$ . Supposons tout d'abord que  $\gamma(\phi)$  passe par  $e_{N+1}$  avant et après  $t_{N+1}$ . Nous notons  $t_-$  (respectivement  $t_+$ ) le dernier (respectivement premier) instant

strictement avant (respectivement après)  $t_{N+1}$  où  $\gamma(\phi)$  visite  $e_{N+1}$  et soit  $j_-$  (respectivement  $j_+$ ) l'unique indice tel que  $t_{\phi(j_-)} = t_-$  et  $e_{\phi(j_-)} = e_{N+1}$  (respectivement  $t_{\phi(j_+)} = t_+$  et  $e_{\phi(j_+)} = e_{N+1}$ ). Plus formellement, les indices  $j_-, j_+$  sont définis par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} j_- < t_{N+1}, \quad e_{j_-} = e_{N+1}, \quad t_{j_-} = \max \{ t_j : 1 \leq j \leq N, e_j = e_{N+1}, t_j < t_{N+1} \}, \\ j_+ > t_{N+1}, \quad e_{j_+} = e_{N+1}, \quad t_{j_+} = \min \{ t_j : 1 \leq j \leq N, e_j = e_{N+1}, t_j > t_{N+1} \}. \end{aligned}$$

Comme le chemin  $\gamma(\phi)$  est d'occurrence disjointe et ne contient pas l'arête temps  $(e_{N+1}, t_{N+1})$ , et qu'aucun de ses arêtes-temps  $(e_i, t_i)$  de changements de temps n'est restée fermée entre  $t_i$  et  $t_{N+1}$ , nécessairement, l'arête  $e_{N+1}$  doit s'ouvrir sur  $]t_{j_-}, t_{N+1}[$  et sur  $]t_{N+1}, t_{j_+}[$ , nous ajoutons  $(e_{N+1}, t_{N+1})$  à la fin de  $\gamma(\phi)$  et nous obtenons le chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie  $x$  à  $y$ .

Maintenant, supposons que  $\gamma(\phi)$  visite  $e_{N+1}$  uniquement avant  $t_{N+1}$ . Nous définissons  $j_-$  de la même façon que dans le cas précédent. Nécessairement,  $e_{N+1}$  s'ouvre entre  $t_{j_-}$  et  $t_{N+1}$ , alors le chemin

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)}), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

vérifie les conditions voulues.

Enfin, si  $\gamma(\phi)$  visite  $e_{N+1}$  uniquement après  $t_{N+1}$ , nous définissons seulement  $j_+$  et nous obtenons le chemin extrait voulu de la même manière que le cas précédent.  $\square$

**Définition 2.** Un chemin espace-temps  $(e_i, t_i)_{0 \leq i \leq n}$  est dit *impatient* si toute arête de changement de temps  $e_k$  est suivi par une arête  $e_{k+2}$  qui change son état à l'instant  $t_{k+2}$  dans  $\omega$ , i.e.,

$$\forall k \in \{1, \dots, n-2\} \quad e_k = e_{k+1} \Rightarrow \omega(e_{k+2}, t_{k+2}) \neq \omega(e_{k+2}, t_{k+2}^-)$$

Nous allons montrer tout chemin espace-temps admet une modification temporelle qui est impatiente. Pour cela, nous introduisons l'algorithme de modification récursive suivante :

**Algorithme 1.** Soit  $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$  un chemin espace-temps. Nous allons modifier la première arête  $e_1$  du chemin, selon les cas suivants :

- Si  $e_2 \neq e_1$ , alors nécessairement  $t_1 = t_2$ , et nous ne modifions pas  $(e_1, t_1)$ . Nous recommençons l'algorithme avec le chemin  $(e_2, t_2), \dots, (e_n, t_n)$  ;
- Si  $t_1 < t_2$ , soit  $\tau_3$  le dernier instant avant  $t_2$  où  $e_3$  se ferme. Si  $t_1 \geq \tau_3$ , nous remplaçons  $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$  par  $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$  et nous recommençons

avec le chemin  $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$ . Si  $t_1 < \tau_3$ , nous remplaçons  $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$  par  $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$ . Nous recommençons l'algorithme avec le chemin  $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$ .

- Si  $t_1 > t_2$ , soit  $\tau_3$  le premier instant après  $t_2$  où  $e_3$  s'ouvre. Si  $t_1 \leq \tau_3$ , nous remplaçons  $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$  par  $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$  et nous recommençons avec le chemin  $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$ . Si  $t_1 > \tau_3$ , nous remplaçons  $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$  par  $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$ . Nous recommençons l'algorithme avec le chemin  $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$ .

Nous remarquons que la longueur du chemin à modifier diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Au vu de la définition d'un chemin impatient, nous avons directement la propriété suivante :

**Proposition 2.** *Soit  $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$  un chemin espace-temps qui relie  $x$  à  $y$ , sa modification obtenue selon l'algorithme précédent est impatient qui relie  $x$  à  $y$  et les intervalles de changement de temps après modification sont inclus dans les intervalles initiaux.*

Nous montrons maintenant qu'un chemin d'occurrence disjointe est toujours d'occurrence disjointe après la modification selon l'algorithme.

**Proposition 3.** *Soit  $\gamma = (e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$  un chemin espace-temps d'occurrence disjointe, nous modifions ce chemin selon algorithme 1. Le chemin obtenu est d'occurrence disjointe et impatient.*

*Démonstration.* Nous vérifions que la condition de l'occurrence disjointe est conservée à chaque étape de l'algorithme. Soit  $(e_i, t_i), (e_{i+1}, t_{i+1})$  le changement de temps qui est modifié lors d'une itération, et supposons que le chemin visite  $e_i$  ou  $e_{i+2}$  plus qu'une fois. Supposons aussi que  $t_i < t_{i+1}$ . Nous examinons les deux résultats possibles de la modification. Si nous obtenons  $(e_i, t_i), (e_{i+2}, t_i)$ , nous devons vérifier qu'il existe un instant entre chaque visite de  $e_{i+2}$  et  $t_i$  tel que  $e_{i+2}$  est ouverte à cette instant. Or  $(e_{i+2}, t_{i+2})$  est dans  $\gamma$  qui est un chemin d'occurrence disjointe, donc  $e_{i+2}$  ouvre entre les autres instants de visites et  $t_{i+2}$ . Vu que l'arête  $e_{i+2}$  est fermée entre  $t_i$  et  $t_{i+2}$ , cette propriété est encore vraie pour  $t_i$ . Si nous avons  $(e_i, t_i), (e_{i+1}, \tau_{i+2}), (e_{i+2}, \tau_{i+2})$  après la modification, nous devons vérifier la condition pour  $e_i$  et  $e_{i+2}$ . Nous rappelons que  $e_{i+1} = e_i$  et  $\tau_{i+2}$  le dernier instant avant  $t_{i+1}$  où  $e_{i+2}$  se ferme. Or  $e_i$  est fermée entre  $t_i$  et  $\tau_{i+2}$ , donc  $e_i$  ouvre entre  $\tau_{i+2}$  et les autres instants de visites. De même,  $e_{i+2}$  ouvre entre  $\tau_{i+2}$  et les autres instants de visites car  $e_{i+2}$  est fermée entre  $\tau_{i+2}$  et  $t_{i+2}$ . Enfin, le cas où  $t_i > t_{i+1}$  se traite de la même manière.  $\square$

## 2 Décroissance exponentielle

Nous démontrons ici que la probabilité d'avoir un chemin espace-temps qui relie deux points décroît exponentiellement vite avec la distance entre les deux points. Nous notons

$$x \xleftrightarrow{s,t} y$$

l'événement : il existe un chemin espace temps fermé qui relie  $x$  et  $y$  dans l'intervalle de temps  $[s, t]$ . Nous commençons par un lemme combinatoire :

**Lemme 1.** *Soit  $S(n, m)$  l'ensemble de  $m$ -uplet d'entiers suivant :*

$$S(n, m) = \{ (u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, n\}^m : \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad u_{i+1} > u_i + 1 \}.$$

Alors

$$|S(n, m)| = \binom{n-m+1}{m}.$$

*Démonstration.* Nous considérons l'application

$$\Phi : (u_1, \dots, u_m) \rightarrow (u_1, \dots, u_i - i + 1, \dots, u_m - m + 1).$$

L'application  $\Phi$  est une bijection de  $S(n, m)$  sur l'ensemble de  $m$ -uplet strictement croissant entre 1 et  $n - m + 1$ , i.e.

$$\{ (u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, n - m + 1\}^m : \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad u_{i+1} > u_i \}.$$

Ce dernier est de cardinal  $\binom{n-m+1}{m}$ . □

Nous énonçons maintenant notre estimée centrale.

**Proposition 4.** *Soit  $x, y$  deux points dans  $\Lambda$  et  $s < t$  deux instants, alors :*

$$P \left( \begin{array}{c} \text{il existe un chemin } \gamma \text{ de longueur } n \\ \text{qui relie } x \text{ à } y \text{ entre } s \text{ et } t \end{array} \right) \leq \exp \left( \frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right)$$

.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{E}$  l'événement à estimer. Supposons que  $\mathcal{E}$  arrive et soit  $\gamma$  un chemin espace-temps qui le réalise. Par les propositions précédentes, nous pouvons supposer que  $\gamma$  est d'occurrence disjointe et impatient. Notons  $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$  les arêtes-temps de  $\gamma$ ,  $k(1), \dots, k(m)$  les indices où les changements de temps ont lieu nous notons par convention  $k(0) = 1$  et  $k(m+1) = n$ . Quitte à arrêter  $\gamma$  à l'instant où il visite  $y$ , nous pouvons supposer que  $\gamma$  ne se termine pas par un changement de temps, i.e.  $k(m) <$

$n - 1$ . Pour  $0 \leq i \leq m$ , nous notons  $\mathcal{E}_i$  l'événement : il existe un chemin fermé qui relie une extrémité de  $e_{k(i)}$  à une extrémité de  $e_{k(i+1)}$  à l'instant  $t_{k(i+1)}$ ,  $e_{k(i)}$  reste fermée entre  $t_{k(i)}$  et  $t_{k(i+1)}$  et  $e_{k(i)+2}$  se ferme à l'instant  $t_{k(i+1)}$ . Nous conditionnons  $\mathcal{E}$  selon le nombre et les instants de changement de temps puis nous factorisons la probabilité à l'aide de l'inégalité de BK :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) \leq n} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} P(\mathcal{E}_0 \circ \dots \circ \mathcal{E}_m) \\ &\leq \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1=k(0) < \dots < k(m+1)=n} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} \prod_{i=0}^m P(\mathcal{E}_i). \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant chaque terme  $P(\mathcal{E}_i)$ . Nous notons  $x_i, y_i$  les extrémités de l'arête  $e_{k(i)}$  dans l'ordre où elles sont traversées par  $\gamma$ .

$$P(\mathcal{E}_i) = P \left( \begin{array}{l} y_i \longleftrightarrow x_{i+1} \text{ à l'instant } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)} \text{ reste fermée entre } t_{k(i)} \text{ et } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)+2} \text{ change d'état à } t_{k(i+1)} \end{array} \right)$$

Pour réaliser  $y_i \longleftrightarrow x_{i+1}$  à l'instant  $t_{k(i+1)}$ , il existe un chemin fermé de longueur  $k(i+1) - k(i) - 1$  car  $e_{k(i)} = e_{k(i)+1}$ . La probabilité qu'il existe un tel chemin est majorée par  $(3 - 3p)^{k(i+1) - k(i) - 1}$ . Or à chaque instant  $t$ , nous choisissons une arête uniformément parmi toutes les arêtes de  $\Lambda(l)$  et nous déterminons le nouvel état de cette arête selon une loi de Bernoulli de paramètre 1, la probabilité que  $e_{k(i)}$  reste fermée entre  $t_{k(i)}$  et  $t_{k(i+1)}$  est donc  $(1 - \frac{p}{|\Lambda|})^{|t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|}$ . Enfin, la probabilité que  $e_{k(i)+2}$  change son état à l'instant  $t_{k(i+1)}$  est  $\frac{1}{|\Lambda|}$ . Nous obtenons :

$$P(\mathcal{E}_i) \leq (3 - 3p)^{k(i+1) - k(i) - 1} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{|t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \frac{1}{|\Lambda|}$$

Nous injectons les majorations précédentes dans la première probabilité et nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_0 \circ \dots \circ \mathcal{E}_m) &\leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) \leq n} \sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} \\ &\quad (3 - 3p)^{n-m} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^m |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \frac{1}{|\Lambda|^m} \end{aligned}$$

Calculons d'abord la somme sur les instants  $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$ , nous posons  $\Delta_i = |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|$ . Si  $m$  et les indices  $k(1), \dots, k(m)$  sont fixés, la suite

$t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$  est déterminée par la donnée de  $t_{k(1)}$ , les valeurs de  $\Delta_1, \dots, \Delta_{m-1}$  et les signes de  $t_{k(i+1)} - t_{k(i)}$ , d'où :

$$\sum_{t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^m |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} = 2^{m-1} (t-s) \sum_{1 \leq \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1} \leq t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_1 + \dots + \Delta_{m-1}}.$$

Nous échangeons la somme et le produit et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1} \leq t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^{m-1} \Delta_i} &= \prod_{i=1}^{m-1} \left( \sum_{\Delta_i=1}^{t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right) \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leq \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}}. \end{aligned}$$

Comme  $(1-x)^\alpha \geq 1 - \alpha x$  pour  $0 < x < 1$  et  $\alpha \geq 0$ , nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leq (t-s)^{m-1}.$$

Nous avons donc

$$P(\mathcal{E}) \leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \sum_{1 \leq k(1) < \dots < k(m) < n} 2^{m-1} (3-3p)^{n-m} (t-s)^m \frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Or le nombre de  $1 \leq k(1) < \dots < k(m) \leq n$  est  $\binom{n-m+1}{m}$  par lemme 1, donc :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &\leq \sum_{0 \leq m \leq \frac{n}{2}} \binom{n-m+1}{m} 2^{m-1} (3-3p)^{n-m} (t-s)^m \frac{1}{|\Lambda|^m} \\ &\leq (3-3p)^{n/2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(2n)^m}{m! |\Lambda|^m} (t-s)^m \\ &\leq \exp\left(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2} \ln(3-3p)\right). \end{aligned}$$

□

Enfin, utilisons la proposition précédente pour obtenir la décroissance en vitesse exponentielle de la probabilité d'avoir un chemin espace temps qui relie deux points de distance  $l$ .

**Théorème 1.** Soit  $x, y$  deux points de distance  $l$  et  $t$  un instant. Alors

$$P(x \xleftrightarrow{0,t} y) \leq \exp(-C(p)l)$$

pour tout  $p > \tilde{p}$  où  $\tilde{p}$  une constante arbitraire. De plus,  $C(p)$  est une constante positive qui tend vers infini quand  $p$  tends vers 1.

*Démonstration.* Remarquons d'abord qu'un chemin espace-temps qui relie  $x, y$  est nécessairement de longueur supérieure à  $l$ . De plus nous pouvons extraire un chemin d'occurrence disjointe et impatient à partir de ce chemin qui relie aussi  $x, y$  entre 0 et  $t$ . Or la probabilité qu'un chemin qui vit un temps  $t$  est bornée par  $\exp(-c(p)t)$ , nous pouvons considérer le cas où  $t \leq \kappa l \leq \kappa |\Lambda|$  avec  $\kappa$  une constante arbitraire strictement positive. Nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} P(x \xleftrightarrow{0,t} y) &= P \left( \begin{array}{c} x \xleftrightarrow{0,t} y \text{ par } \gamma \\ \gamma \text{ d'occurrence disjointe et impatient} \\ t \leq \kappa l \end{array} \right) + \exp(-c(p)\kappa l) \\ &\leq \sum_{n \geq l} P \left( \begin{array}{c} x \xleftrightarrow{0,t} y \text{ par } \gamma \\ \gamma \text{ d'occurrence disjointe et impatient} \\ |\gamma| = n, t \leq \kappa l \end{array} \right) + \exp(-c(p)\kappa l) \\ &\leq \sum_{n \geq l} \exp \left( 2n\kappa + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right) + \exp(-c(p)\kappa l). \end{aligned}$$

Nous posons  $\tilde{p}$  telle que  $\kappa + \frac{\ln(3-3\tilde{p})}{2} = 0$ . Nous avons donc pour tout  $p > \tilde{p}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq l} \exp \left( 2n\kappa + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right) + \exp(-c(p)\kappa l) \\ \leq \frac{\exp(l(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2}))}{1 - \exp(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2})} + \exp(-c(p)\kappa l) \leq \exp(-C(p)l) \end{aligned}$$

où nous posons

$$C(p) = \frac{\min(c(p), -\kappa - \frac{\ln(3-3p)}{2})}{2}$$

qui tend vers infini quand  $p$  tend vers 1. □