1 chemin espace-temps

Nous considérons les sommets et les arêtes qui sont inclus dans une boite $\Lambda(l)$. Nous étudions les chemins espace-temps fermés dans la boîte pour la percolation dynamique de paramètre p.

Définition 1. *Une arête-temps est un couple (e,t) où e est une arête de $\mathbb{E}$ et t un nombre réel.*

Nous définissons une relation de connexion sur l'espace $\mathbb{E}\times\mathbb{R}$ de la manière suivante. Nous disons que les arêtes-temps (e,t) et (f,s) sont connectées, que nous notons $(e,t)\sim(f,s)$, si $e=f$ ou ($s=t$ et e,f ont une extrémité commune). Un chemin espace-temps est une suite d'arêtes-temps $(e_i,t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que pour tout $0\leqslant i\leqslant n$, $(e_i,t_i)\sim(e_{i+1},t_{i+1})$. Nous définissons la longueur d'un chemin espace-temps comme le nombre d'arête-temps dans la suite. Nous disons que (e_i,t_i) est un changement de temps si $e_{i+1}=e_i$ et $t_{i+1}\neq t_i$ et nous appelons $[t_i,t_{i+1}]$ si $t_i<t_{i+1}$ ou $[t_{i+1},t_i]$ si $t_i>t_{i+1}$ un intervalle de changement de temps. Désormais, nous considérons les chemins espace-temps avec les changements de temps simples, i.e., si (e_k,t_k) est un changement de temps alors, $e_{k+2}\neq e_k$.

Nous considérons le processus de percolation dynamique à temps discret et ω une trajectoire. Un chemin epsace-temps $(e_i,t_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est dit fermé si pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, e_i est fermé à l'instant t_i dans ω. Nous disons que ce chemin espace-temps fermé est d'occurrence disjointe de longueur n avec m changements de temps s'il existe m indices $1\leqslant k(1)<k(2)<\cdots<k(m)\leqslant n$ telles que :

- Les changements de temps arrivent aux instants $t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}$, i.e.

$$\forall i\in\{1,\dots,m-1\}\qquad e_{k(i)}=e_{k(i)+1}\quad t_{k(i)+1}=\cdots=t_{k(i+1)}.$$

- Les arêtes visitées à un instant donné sont 2 à 2 distinctes, i.e.

$$\forall i,j\in\{1,\dots,n\}\qquad (i\neq j,t_i=t_j)\Rightarrow e_i\neq e_j.$$

- Les fermetures d'arêtes arrivent disjointement, i.e, pour tout $i,j\in\{1,\dots,j\}$, $i<j$ tels que $e_i=e_j$, l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :
  - $j=i+1$ et $i\in\{k(1),\dots,k(m)\}$;
  - $t_i<t_j$ et il existe un instant $s\in]t_i,t_j[$ tel que e_j est ouverte à s dans ω ;

- $t_j < t_i$ et il existe un instant $s \in]t_j, t_i[$ tel que e_j est ouverte à s dans ω ;

Soit x, y deux sommets dans $\Lambda(l)$, nous disons qu'un chemin espace-temps $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$ relie x à y si x est l'une extrémité de e_1 et y une extrémité de e_n.

Proposition 1. *Soit $(e_i, t_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ un chemin espace-temps fermé qui relie x à y dans ω, il existe une fonction $\phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, N\}$ strictement croissante telle que $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ est un chemin espace-temps fermé d'occurrence disjointe qui relie x à y dans ω.*

Démonstration. Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur la longueur N. Supposons que la proposition est vraie pour tout chemin de longueur inférieur à N. Considérons maintenant un chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_{N+1}, t_{N+1})$$

de longueur $N+1$ qui relie x à y. S'il existe un indice $i \leqslant N$ tel que $(e_i, t_i) = (e_{N+1}, t_{N+1})$, alors le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i)$$

est un chemin de longueur $i \leqslant N$ qui relie x à y. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. S'il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant N$ tel que $e_i = e_{N+1}$, et e_{N+1} reste fermée entre t_i et t_{N+1}, nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

qui est de longueur inférieur à N. Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à ce chemin et nous obtenons un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. Si aucun des cas précédents a lieu, nous considérons le chemin $(e_1, t_1), \dots, (e_N, t_N)$ de longueur N et qui relie x à z, où z est un voisin de y. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction strictement croissante $\phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, N\}$ telle que le chemin extrait

$$\gamma(\phi) = (e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$$

est un chemin d'occurrence disjointe qui relie x à z. Si ce chemin n'emprunte pas l'arête e_{N+1}, alors nous posons $\phi(n+1) = N+1$ et nous obtenons le chemin extrait souhaité. Considérons le cas où $\gamma(\phi)$ emprunte l'arête e_{N+1}. Supposons tout d'abord que $\gamma(\phi)$ passe par e_{N+1} avant et après t_{N+1}. Nous notons t_- (respectivement t_+) le dernier (respectivement premier) instant strictement avant (respectivement après) t_{N+1} où $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} et soit j_- (respectivement j_+) l'unique indice tel que $t_{\phi(j_-)} = t_-$ et $e_{\phi(j_-)} = e_{N+1}$ (respectivement $t_{\phi(j_+)} = t_+$ et $e_{\phi(j_+)} = e_{N+1}$). Plus formellement, les indices j_-, j_+ sont définis par les conditions suivantes :

$$j_- < t_{N+1}, \quad e_{j_-} = e_{N+1}, \quad t_{j_-} = \max\left\{\, t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j < t_{N+1} \,\right\},$$
$$j_+ > t_{N+1}, \quad e_{j_+} = e_{N+1}, \quad t_{j_+} = \min\left\{\, t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j > t_{N+1} \,\right\}.$$

Comme le chemin $\gamma(\phi)$ est d'occurrence disjointe et ne contient pas l'arête temps (e_{N+1}, t_{N+1}), et qu'aucun de ses arêtes-temps (e_i, t_i) de changements de temps n'est restée fermée entre t_i et t_{N+1}, nécessairement, l'arête e_{N+1} doit s'ouvrir sur $]t_{j_-}, t_{N+1}[$ et sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$, nous ajoutons (e_{N+1}, t_{N+1}) à la fin de $\gamma(\phi)$ et nous obtenons le chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y.

Maintenant, supposons que $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement avant t_{N+1}. Nous définissons j_- de la même façon que dans le cas précédent. Nécessairement, e_{N+1} s'ouvre entre t_{j_-} et t_{N+1}, alors le chemin

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)}), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

vérifie les conditions voulues.

Enfin, si $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement après t_{N+1}, nous définissons seulement j_+ et nous obtenons le chemin extrait voulu de la même manière que le cas précédent. □

Définition 2. *Un chemin espace-temps $(e_i, t_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est dit impatient si toute arête de changement de temps e_k est suivi par une arête e_{k+2} qui change son état à l'instant t_{k+2} dans ω, i.e.,*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-2\} \quad e_k = e_{k+1} \Rightarrow \omega(e_{k+2}, t_{k+2}) \neq \omega(e_{k+2}, t_{k+2}^-)$$

Nous allons montrer tout chemin espace-temps admet une modification temporelle qui est impatiente. Pour cela, nous introduisons l'algorithme de modification récursive suivante :

Algorithme 1. *Soit $(e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ un chemin espace-temps. Nous allons modifier la première arête e_1 du chemin, selon les cas suivants :*

- *Si $e_2 \neq e_1$, alors nécessairement $t_1 = t_2$, et nous ne modifions pas (e_1, t_1). Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_2, t_2), \ldots, (e_n, t_n)$;*
- *Si $t_1 < t_2$, soit τ_3 le dernier instant avant t_2 où e_3 se ferme. Si $t_1 \geqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$ et nous recommençons*

avec le chemin $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$*. Si* $t_1 < \tau_3$*, nous remplaçons* $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ *par* $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$*. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin* $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$*.*

- *Si* $t_1 > t_2$*, soit* τ_3 *le premier instant après* t_2 *où* e_3 *s'ouvre. Si* $t_1 \leqslant \tau_3$*, nous remplaçons* $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ *par* $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$ *et nous recommençons avec le chemin* $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$*. Si* $t_1 > \tau_3$*, nous remplaçons* $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ *par* $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$*. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin* $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$*.*

Nous remarquons que la longueur du chemin à modifier diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Au vu de la définition d'un chemin impatient, nous avons directement la propriété suivante :

Proposition 2. *Soit* $(e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ *un chemin espace-temps qui relie* x *à* y*, sa modification obtenue selon l'algorithme précédent est impatient qui relie* x *à* y *et les intervalles de changement de temps après modification sont inclus dans les intervalles initiaux.*

Nous montrons maintenant qu'un chemin d'occurrence disjointe est toujours d'occurrence disjointe après la modification selon l'algorithme.

Proposition 3. *Soit* $\gamma = (e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ *un chemin espace-temps d'occurrence disjointe, nous modifions ce chemin selon algorithme 1. Le chemin obtenu est d'occurrence disjointe et impatient.*

Démonstration. Nous vérifions que la condition de l'occurrence disjointe est conservée à chaque étape de l'algorithme. Soit $(e_i, t_i), (e_{i+1}, t_{i+1})$ le changement de temps qui est modifié lors d'une itération, et supposons que le chemin visite e_i ou e_{i+2} plus qu'une fois. Supposons aussi que $t_i < t_{i+1}$. Nous examinons les deux résultats possibles de la modification. Si nous obtenons $(e_i, t_i), (e_{i+2}, t_i)$, nous devons vérifier qu'il existe un instant entre chaque visite de e_{i+2} et t_i tel que e_{i+2} est ouverte à cette instant. Or (e_{i+2}, t_{i+2}) est dans γ qui est un chemin d'occurrence disjointe, donc e_{i+2} ouvre entre les autres instants de visites et t_{i+2}. Vu que l'arête e_{i+2} est fermée entre t_i et t_{i+2}, cette propriété est encore vraie pour t_i. Si nous avons $(e_i, t_i), (e_{i+1}, \tau_{i+2}), (e_{i+2}, \tau_{i+2})$ après la modification, nous devons vérifier la condition pour e_i et e_{i+2}. Nous rappelons que $e_{i+1} = e_i$ et τ_{i+2} le dernier instant avant t_{i+1} où e_{i+2} se ferme. Or e_i est fermée entre t_i et τ_{i+2}, donc e_i ouvre entre τ_{i+2} et les autres instants de visites. De même, e_{i+2} ouvre entre τ_{i+2} et les autres instants de visites car e_{i+2} est fermée entre τ_{i+2} et t_{i+2}. Enfin, le cas où $t_i > t_{i+1}$ se traite de la même manière. □

2 Décroissance exponentielle

Nous démontrons ici que la probabilité d'avoir un chemin espace-temps qui relie deux points décroît exponentiellement vite avec la distance entre les deux points. Nous notons

$$x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y$$

l'événement : il existe un chemin espace temps fermé qui relie x et y dans l'intervalle de temps $[s,t]$. Nous commençons par un lemme combinatoire :

Lemme 1. *Soit $S(n,m)$ l'ensemble de m-uplet d'entiers suivant :*

$$S(n,m) = \{\, (u_1,\ldots,u_m) \in \{1,\ldots,n\}^m : \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant m-1 \quad u_{i+1} > u_i + 1 \,\}.$$

Alors

$$|S(n,m)| = \binom{n-m+1}{m}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\Phi : (u_1,\ldots,u_m) \to (u_1,\ldots,u_i - i + 1,\ldots,u_m - m + 1).$$

L'application Φ est une bijection de $S(n,m)$ sur l'ensemble de m-uplet strictement croissant entre 1 et $n-m+1$, i.e.

$$\big\{(u_1,\ldots,u_m) \in \{1,\ldots,n-m+1\}^m : \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant m-1 \quad u_{i+1} > u_i\big\}.$$

Ce dernier est de cardinal $\binom{n-m+1}{m}$. $\square$

Nous énonçons maintenant notre estimée centrale.

Proposition 4. *Soit x, y deux points dans Λ et $s < t$ deux instants, alors :*

$$P\left(\begin{array}{c} \textit{il existe un chemin } \gamma \textit{ de longueur } n \\ \textit{qui relie } x \textit{ à } y \textit{ entre } s \textit{ et } t \end{array}\right) \leqslant \exp\left(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\right)$$

.

Démonstration. Notons $\mathcal{E}$ l'événement à estimer. Supposons que $\mathcal{E}$ arrive et soit γ un chemin espace-temps qui le réalise. Par les propositions précédentes, nous pouvons supposer que γ est d'occurrence disjointe et impatient. Notons $(e_1,t_1),\ldots,(e_n,t_n)$ les arêtes-temps de γ, $k(1),\ldots,k(m)$ les indices où les changements de temps ont lieu nous notons par convention $k(0) = 1$ et $k(m+1) = n$. Quitte à arrêter γ à l'instant où il visite y, nous pouvons supposer que γ ne se termine pas par un changement de temps, i.e. $k(m) <$

$n-1$. Pour $0 \leqslant i \leqslant m$, nous notons $\mathcal{E}_i$ l'événement : il existe un chemin fermé qui relie une extrémité de $e_{k(i)}$ à une extrémité de $e_{k(i+1)}$ à l'instant $t_{k(i+1)}$, $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ et $e_{k(i)+2}$ se ferme à l'instant $t_{k(i+1)}$. Nous conditionnons $\mathcal{E}$ selon le nombre et les instants de changement de temps puis nous factorisons la probabilité à l'aide de l'inégalité de BK :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= \sum_{0 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}} \ \sum_{1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) \leqslant n} \ \sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} P(\mathcal{E}_0 \circ \cdots \circ \mathcal{E}_m) \\ &\leqslant \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \ \sum_{1=k(0)<\cdots<k(m+1)=n} \ \sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} \prod_{i=0}^{m} P(\mathcal{E}_i). \end{aligned}$$

Nous étudions maintenant chaque terme $P(\mathcal{E}_i)$. Nous notons x_i, y_i les extrémités de l'arête $e_{k(i)}$ dans l'ordre où elles sont traversées par γ.

$$P(\mathcal{E}_i) = P\begin{pmatrix} y_i \longleftrightarrow x_{i+1} \text{ à l'instant } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)} \text{ reste fermée entre } t_{k(i)} \text{ et } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)+2} \text{ change d'état à } t_{k(i+1)} \end{pmatrix}$$

Pour réaliser $y_i \longleftrightarrow x_{i+1}$ à l'instant $t_{k(i+1)}$, il existe un chemin fermé de longueur $k(i+1)-k(i)-1$ car $e_{k(i)} = e_{k(i)+1}$. La probabilité qu'il existe un tel chemin est majorée par $(3-3p)^{k(i+1)-k(i)-1}$. Or à chaque instant t, nous choisissons une arête uniformément parmi toutes les arêtes de $\Lambda(l)$ et nous déterminons le nouvel état de cette arête selon une loi de Bernoulli de paramètre 1, la probabilité que $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ est donc $(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{|t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|}$. Enfin, la probabilité que $e_{k(i)+2}$ change son état à l'instant $t_{k(i+1)}$ est $\frac{1}{|\Lambda|}$. Nous obtenons :

$$P(\mathcal{E}_i) \leqslant (3-3p)^{k(i+1)-k(i)-1}(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{|t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|}\frac{1}{|\Lambda|}$$

Nous injectons les majorations précédentes dans la première probabilité et nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}_0 \circ \cdots \circ \mathcal{E}_m) \leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}} \ \sum_{1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) < n} \ \sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} \\ (3-3p)^{n-m}(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_{i=1}^{m}|t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|}\frac{1}{|\Lambda|^m} \end{aligned}$$

Calculons d'abord la somme sur les instants $t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}$, nous posons $\Delta_i = |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|$. Si m et les indices $k(1),\dots,k(m)$ sont fixés, la suite

$t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}$ est déterminée par la donnée de $t_{k(1)}$, les valeurs de $\Delta_1,\dots,\Delta_{m-1}$ et les signes de $t_{k(i+1)}-t_{k(i)}$, d'où :

$$\sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} (1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_{i=1}^{m}|t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|} = 2^{m-1}(t-s) \sum_{1\leqslant\Delta_1,\dots,\Delta_{m-1}\leqslant t-s} (1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\Delta_1+\cdots+\Delta_{m-1}}.$$

Nous échangeons la somme et le produit et nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant\Delta_1,\dots,\Delta_{m-1}\leqslant t-s} (1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_i} &= \prod_{i=1}^{m-1}\left(\sum_{\Delta_i=1}^{t-s}\left(1-\frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_i}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{m-1}\left(1-\frac{p}{|\Lambda|}\right)\frac{1-(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leqslant \prod_{i=1}^{m-1}\frac{1-(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}}.\end{aligned}$$

Comme $(1-x)^\alpha \geqslant 1-\alpha x$ pour $0<x<1$ et $\alpha\geqslant 0$, nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1}\frac{1-(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leqslant (t-s)^{m-1}.$$

Nous avons donc

$$P(\mathcal{E}) \leqslant \sum_{0\leqslant m\leqslant\frac{n}{2}}\ \sum_{1\leqslant k(1)<\cdots<k(m)<n} 2^{m-1}(3-3p)^{n-m}(t-s)^m\frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Or le nombre de $1\leqslant k(1)<\cdots<k(m)\leqslant n$ est $\binom{n-m+1}{m}$ par lemme 1, donc :

$$\begin{aligned}P(\mathcal{E}) &\leqslant \sum_{0\leqslant m\leqslant\frac{n}{2}}\binom{n-m+1}{m}2^{m-1}(3-3p)^{n-m}(t-s)^m\frac{1}{|\Lambda|^m}\\ &\leqslant (3-3p)^{n/2}\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(2n)^m}{m!|\Lambda|^m}(t-s)^m\\ &\leqslant \exp\big(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|}+\frac{n}{2}\ln(3-3p)\big).\end{aligned}$$

□

Enfin, utilisons la proposition précédente pour obtenir la décroissance en vitesse exponentielle de la probabilité d'avoir un chemin espace temps qui relie deux points de distance l.

Théorème 1. *Soit x, y deux points de distance l et t un instant. Alors*

$$P(x \overset{0,t}{\longleftrightarrow} y) \leqslant \exp\big(-C(p)l\big)$$

pour tout $p > \tilde{p}$ où $\tilde{p}$ une constante arbitraire. De plus, $C(p)$ est une constante positive qui tend vers infini quand p tends vers 1.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'un chemin espace-temps qui relie x, y est nécessairement de longueur supérieure à l. De plus nous pouvons extraire un chemin d'occurrence disjointe et impatient à partir de ce chemin qui relie aussi et x, y entre 0 et t. Or la probabilité qu'un chemin qui vit un temps t est bornée par $\exp(-c(p)t)$, nous pouvons considérer le cas où $t \leqslant \kappa l \leqslant \kappa|\Lambda|$ avec κ une constante arbitraire strictement positive. Nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
P(x \overset{0,t}{\longleftrightarrow} y) &= P\begin{pmatrix} x \overset{0,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ \gamma \text{ d'occurrence disjointe et impatient} \\ t \leqslant \kappa l \end{pmatrix} + \exp(-c(p)\kappa l) \\
&\leqslant \sum_{n \geqslant l} P\begin{pmatrix} x \overset{0,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ \gamma \text{ d'occurrence disjointe et impatient} \\ |\gamma| = n, t \leqslant \kappa l \end{pmatrix} + + \exp(-c(p)\kappa l) \\
&\leqslant \sum_{n \geqslant l} \exp\Big(2n\kappa + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\Big) + \exp(-c(p)\kappa l).
\end{aligned}$$

Nous posons $\tilde{p}$ telle que $\kappa + \frac{\ln(3-3\tilde{p})}{2} = 0$. Nous avons donc pour tout $p > \tilde{p}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geqslant l} \exp\Big(2n\kappa + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\Big) + \exp(-c(p)\kappa l) \\
&\qquad \leqslant \frac{\exp(l(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2}))}{1 - \exp(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2})} + \exp(-c(p)\kappa l) \leqslant \exp(-C(p)l)
\end{aligned}$$

où nous posons

$$C(p) = \frac{\min(c(p), -\kappa - \frac{\ln(3-3p)}{2})}{2}$$

qui tend vers infini quand p tend vers 1. $\square$