1 Définitions de base

Nous considérons les sommets et les arêtes qui sont inclus dans une boite $\Lambda(l)$. Nous étudions les chemins espace-temps fermés dans la boîte pour la percolation dynamique de paramètre p.

Les arêtes-temps. Une arête-temps est un couple (e,t) où e est une arête de $\mathbb{E}$ et t un nombre réel.

La relation de connexion. Sur l'espace $\mathbb{E}\times\mathbb{R}$, nous définissons la relation de connexion $\sim$ de la manière suivante. Soient (e,t) et (f,s) deux arêtes-temps, nous disons qu'elles sont connectées, ce que nous notons $(e,t)\sim(f,s)$, si

$$(e = f \text{ et } s \neq t) \text{ ou } (s = t \text{ et } e, f \text{ ont une extrémité commune}).$$

Les chemins espace-temps. Un chemin espace-temps est une suite alternée finie et de sommets x_i et d'arêtes-temps (e_i,t_i),

$$x_1,(e_1,t_1),y_1,x_2,(e_2,t_2),y_2,\dots,x_n,(e_n,t_n),y_n$$

telle que, pour $1\leqslant i\leqslant n$, e_i est l'arête qui relie x_i à y_i et pour $1\leqslant i\leqslant n-1$, (e_i,t_i) et (e_{i+1},t_{i+1}) sont connectées de la manière suivante :

$$(e_i = e_{i+1} \text{ et } t_i \neq t_{i+1}) \text{ ou } (t_i = t_{i+1} \text{ et } y_i = x_{i+1}).$$

Nous définissons la longueur d'un chemin espace-temps comme le nombre de ses arêtes-temps. Pour simplifier les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons un chemin espace-temps seulement par la suite de ses arêtes-temps $(e_1,t_1),\dots,(e_n,t_n)$. Soient x,y deux sommets dans $\Lambda(l)$, nous disons qu'un chemin espace-temps $(e_1,t_1),\dots,(e_n,t_n)$ relie x à y si x est une extrémité de e_1 et y une extrémité de e_n.

Les changements de temps. Soit $(e_i,t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un chemin espace-temps, nous disons que (e_i,t_i) est un changement de temps si $e_{i+1}=e_i$ et $t_{i+1}\neq t_i$ et dans ce cas nous disons que l'intervalle $[\min(t_i,t_{i+1}),\max(t_i,t_{i+1})]$ est un intervalle de changement de temps.

2 Chemins d'occurrence disjointe

Les chemins d'occurrence disjointe. Nous considérons le processus de percolation dynamique à temps discret et ω une trajectoire. Un chemin espace-temps $(e_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est dit fermé si, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, l'arête e_i est fermée à l'instant t_i dans ω. Nous disons que ce chemin espace-temps fermé est d'occurrence disjointe de longueur n avec m changements de temps s'il existe m indices $1 \leqslant k(1) < k(2) < \cdots < k(m) \leqslant n$ tels que :

- Les changements de temps arrivent aux instants $t_{k(1)}, \ldots, t_{k(m)}$, i.e.,

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-1\} \quad e_{k(i)} = e_{k(i)+1}, \qquad t_{k(i)} \neq t_{k(i)+1}, \quad t_{k(i)+1} = \cdots = t_{k(i+1)}.$$

- Les arêtes visitées à un instant donné sont 2 à 2 distinctes, i.e.,

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad (i \neq j, t_i = t_j) \quad \Rightarrow \quad e_i \neq e_j.$$

- Les fermetures d'arêtes arrivent disjointement, i.e., pour tout i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $e_i = e_j$, l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :
  - ◇ $j = i + 1$ et $i \in \{k(1), \ldots, k(m)\}$;
  - ◇ $t_i < t_j$ et il existe un instant $s \in]t_i, t_j[$ tel que e_j est ouverte à l'instant s dans ω ;
  - ◇ $t_j < t_i$ et il existe un instant $s \in]t_j, t_i[$ tel que e_j est ouverte à l'instant s dans ω.

Les changements de temps simple Nous disons qu'un changement de temps est simple s'il n'est pas suivi d'un changement de temps sur la même arête. i.e., si (e_i, t_i) est une arête de changement de temps dans un chemin $(e_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors soit $i = n - 1$, soit $i < n - 1$ et $e_i \neq n_{i+2}$.

Désormais, nous considérons les chemins espace-temps qui n'ont que des changements de temps simples. En fait, tout chemin espace-temps peut être modifié en un chemin espace-temps qui n'a que des changements de temps simples. Nous exhibons un algorithme de modification.

Algorithme 1. *Soit* $(e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ *un chemin espace-temps. Nous allons remplacer récursivement les arêtes de changements de temps consécutifs par une seule arête. Nous commençons avec* (e_1, t_1) *et trois cas se présentent :*

- *Si* (e_1, t_1) *n'est pas une arête de changement de temps, nous ne modifions pas l'arête et nous continuons l'algorithme avec le sous chemin qui débute à partir de l'arête-temps* (e_2, t_2).
- *Si* (e_1, t_1) *est une arête de changement de temps mais* $e_3 \neq e_1$, *alors* (e_1, t_1) *est une arête de changement de temps simple. Nous ne modifions pas le chemin et nous recommençons l'algorithme avec le chemin* $(e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$.
- *Si* (e_1, t_1) *est une arête de changement de temps et* $e_3 = e_1$, (e_1, t_1) *n'est pas un changement de temps simple. Nous considérons l'indice* I *défini par*

$$I = \max \left\{ 1 < i \leqslant n : \quad \forall j \leqslant i \quad e_j = e_1 \right\}.$$

Si $t_1 \neq t_I$, *nous remplaçons* $(e_1, t_1), \ldots, (e_I, t_I)$ *par* $(e_1, t_1), (e_I, t_I)$ *et si* $t_1 = t_I$, *nous remplaçons* $(e_1, t_1), \ldots, (e_I, t_I)$ *par* (e_1, t_1). *Enfin, nous recommençons l'algorithme avec le chemin* $(e_{i+1}, t_{I+1}), \ldots, (e_n, t_n)$.

Nous remarquons d'abord que la longueur de chemin qui reste à modifier diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Nous remarquons aussi qu'un chemin d'occurrence disjointe n'a nécessairement que des changements de temps simples. Dans la suite, nous appliquons systématiquement l'algorithme précédent à tout chemin que nous considérons pour obtenir un chemin qui n'a que des changements de temps simples. Nous montrons dans la suite que, de tout chemin espace-temps, nous pouvons extraire un chemin d'occurrence disjointe.

Proposition 1. *Soit* $(e_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ *un chemin espace-temps fermé qui relie* x *à* y *dans* ω. *Il existe une fonction* $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ *strictement croissante telle que* $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ *est un chemin espace-temps fermé d'occurrence disjointe qui relie* x *à* y *dans* ω.

Démonstration. Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur la longueur N. Pour $N = 1$, il n'y a rien à montrer car tout chemin de longueur 1 est d'occurrence disjointe. Soit $N \leqslant 1$et supposons que la proposition est vraie pour tout chemin espace-temps de longueur inférieure ou égale à N. Considérons maintenant un chemin

$$(e_1, t_1), \ldots, (e_{N+1}, t_{N+1})$$

de longueur $N + 1$ qui relie x à y. S'il existe un indice $i \leqslant N$ tel que $(e_i, t_i) = (e_{N+1}, t_{N+1})$, alors le chemin

$$(e_1, t_1), \ldots, (e_i, t_i)$$

est un chemin de longueur $i \leqslant N$ qui relie x à y. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. Considérons le cas où il existe un indice $i \leqslant N$ tel que $e_i = e_{N+1}$, et e_{N+1} reste fermée entre $\min(t_i, t_{N+1})$ et $\max(t_i, t_{N+1})$. Si $i < N$, nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \ldots, (e_i, t_i), (e_{N+1}, t_{N+1}),$$

et si $i = N$, nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \ldots, (e_{N-1}, t_{N-1}), (e_{N+1}, t_{N+1}).$$

Les deux chemins précédents sont de longueur inférieure ou égale à N. Nous appliquons l'hypothèse de récurrence et nous obtenons un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. Si aucun des cas précédents n'a lieu, nous considérons le chemin $(e_1, t_1), \ldots, (e_N, t_N)$ qui est de longueur N et qui relie x à z, où z est un voisin de y. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction strictement croissante $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ telle que le chemin extrait

$$\gamma(\phi) = (e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$$

est un chemin d'occurrence disjointe qui relie x à z. Si ce chemin n'emprunte pas l'arête e_{N+1}, alors nous posons $\phi(n+1) = N+1$ et nous obtenons le chemin extrait souhaité. Considérons le cas où $\gamma(\phi)$ emprunte l'arête e_{N+1}. Supposons tout d'abord que $\gamma(\phi)$ passe par e_{N+1} avant et après t_{N+1}. Nous notons t_- (respectivement t_+) le dernier (respectivement premier) instant strictement avant (respectivement après) t_{N+1} où $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} et soit j_- (respectivement j_+) l'unique indice tel que $t_{\phi(j_-)} = t_-$ et $e_{\phi(j_-)} = e_{N+1}$ (respectivement $t_{\phi(j_+)} = t_+$ et $e_{\phi(j_+)} = e_{N+1}$). Plus formellement, les indices j_-, j_+ sont définis par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} j_- < t_{N+1}, \quad e_{j_-} = e_{N+1},\, t_{j_-} = \max\left\{ t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j < t_{N+1} \right\}, \\ j_+ > t_{N+1}, \quad e_{j_+} = e_{N+1},\, t_{j_+} = \min\left\{ t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j > t_{N+1} \right\}. \end{aligned}$$

Comme le chemin $\gamma(\phi)$ est d'occurrence disjointe et ne contient pas l'arête-temps (e_{N+1}, t_{N+1}), et qu'aucune de ses arêtes-temps (e_i, t_i) de changements de temps n'est restée fermée entre t_i et t_{N+1}, nécessairement, l'arête e_{N+1} doit s'ouvrir durant les intervalles $]t_{j_-}, t_{N+1}[$ et $]t_{N+1}, t_{j_+}[$. Nous ajoutons (e_{N+1}, t_{N+1}) à la fin de $\gamma(\phi)$ et nous obtenons le chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. Supposons maintenant que $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement avant t_{N+1} et pas après t_{N+1}. Nous définissons j_- de la même façon que dans le cas précédent. Nécessairement, l'arête e_{N+1} s'ouvre entre t_{j_-} et t_{N+1}, donc le chemin

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)}), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

vérifie les conditions voulues. Enfin, si $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement après t_{N+1} et pas avant t_{N+1}, nous définissons seulement j_+ et nous obtenons le chemin extrait voulu de la même manière que dans le cas précédent. $\square$

3 Chemin impatients

Les chemins impatients. Un chemin espace-temps $(e_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est dit impatient si toute arête de changement de temps e_k est suivie par une arête e_{k+2} qui change son état à l'instant t_{k+2} dans ω, i.e.,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-2\} \qquad e_k = e_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \omega(e_{k+2}, t_{k+2}) \neq \omega(e_{k+2}, t_{k+2} - 1)$$

Nous allons montrer que tout chemin espace-temps admet une modification temporelle qui est impatiente. Pour cela, nous introduisons l'algorithme de modification récursive suivant :

Algorithme 2. *Soit $(e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ un chemin espace-temps. Nous allons modifier la première arête e_1 du chemin. Nous considérons les cas suivants :*

- *Si $e_2 \neq e_1$, alors nécessairement $t_1 = t_2$, et nous ne modifions pas (e_1, t_1). Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_2, t_2), \ldots, (e_n, t_n)$;*
- *Si $e_2 = e_1$ et $t_1 < t_2$, soit τ_3 le dernier instant avant t_2 où e_3 se ferme. Si $t_1 \geqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$. Si $t_1 < \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$.*
- *Si $e_2 = e_1$ et $t_1 > t_2$, soit τ_3 le premier instant après t_2 où e_3 s'ouvre. Si $t_1 \leqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$. Si $t_1 > \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$. Nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$.*

Nous remarquons que la longueur du chemin à modifier diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Le chemin obtenu à la fin de l'algorithme 2 est impatient, nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 2. *Soit γ un chemin espace-temps qui relie x à y. Sa modification Γ obtenue selon l'algorithme 2 est un chemin impatient qui relie x à y. De plus, les intervalles de changement de temps de Γ sont inclus dans les intervalles de changement de temps de γ.*

Nous montrons maintenant qu'un chemin d'occurrence disjointe est toujours d'occurrence disjointe après la modification selon l'algorithme.

Proposition 3. *Soit γ un chemin espace-temps d'occurrence disjointe. Soit Γ le chemin obtenu en modifiant γ selon l'algorithme 2. Le chemin Γ est d'occurrence disjointe et impatient.*

Démonstration. Nous vérifions que la condition d'occurrence disjointe est conservée à chaque étape de l'algorithme. Soit $(e_i, t_i), (e_{i+1}, t_{i+1})$ le changement de temps qui est modifié lors d'une itération, et supposons que le chemin visite e_i ou e_{i+2} plus d'une fois. Supposons aussi que $t_i < t_{i+1}$. Nous examinons les deux résultats possibles de la modification. Si nous obtenons $(e_i, t_i), (e_{i+2}, t_i)$ après la modification, nous devons vérifier qu'il existe un instant entre chaque visite de e_{i+2} et t_i tel que e_{i+2} est ouverte à cet instant. Or (e_{i+2}, t_{i+2}) est dans γ qui est un chemin d'occurrence disjointe, donc l'arête e_{i+2} s'ouvre entre t_{i+2} et les autres instants de visites de e_{i+2}. Vu que l'arête e_{i+2} est fermée entre t_i et t_{i+2}, cette dernière propriété est encore vraie pour t_i. Si nous obtenons $(e_i, t_i), (e_{i+1}, \tau_{i+2}), (e_{i+2}, \tau_{i+2})$ après la modification, nous vérifions la condition pour e_i et e_{i+2}. Nous rappelons que $e_{i+1} = e_i$ et que τ_{i+2} est le dernier instant avant t_{i+1} où e_{i+2} se ferme. Or l'arête e_i est fermée entre t_i et τ_{i+2}, donc e_i s'ouvre entre τ_{i+2} et les autres instants de visites de e_i. De même, l'arête e_{i+2} s'ouvre entre τ_{i+2} et les autres instants de visites de e_{i+1} car e_{i+2} est fermée entre τ_{i+2} et t_{i+2}. Enfin, le cas où $t_i > t_{i+1}$ se traite de la même manière. □

4 La décroissance exponentielle

Nous démontrons ici que, pour p proche de 1, la probabilité d'avoir un chemin espace-temps fermé qui relie deux points décroît exponentiellement vite avec la distance entre les deux points. Pour $s < t$ et x, y dans $\Lambda(l)$, nous notons

$$x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y$$

l'événement : il existe un chemin espace-temps fermé qui relie x et y dans l'intervalle de temps $[s, t]$. Nous commençons par énoncer un lemme combinatoire.

Lemme 1. *Soit $S(n, m)$ l'ensemble des m-uplets d'entiers défini par :*

$$S(n, m) = \{ (u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, n\}^m : u_{i+1} > u_i + 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant m - 1 \}.$$

Alors

$$|S(n,m)| = \binom{n-m+1}{m}.$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\Phi : (u_1, \dots, u_m) \to (u_1, \dots, u_i - i + 1, \dots, u_m - m + 1).$$

L'application Φ est une bijection de $S(n,m)$ sur l'ensemble des m-uplets d'entiers strictement croissants entre 1 et $n-m+1$, i.e.,

$$\{(u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, n-m+1\}^m : u_{i+1} > u_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1\}.$$

Ce dernier ensemble est de cardinal $\binom{n-m+1}{m}$. □

Nous énonçons maintenant notre estimée centrale.

Proposition 4. *Soient x, y deux points fixés dans Λ. Alors, pour $p > \frac{2}{3}$,*

$$\forall s,t \in \mathbb{N}, \quad s < t, \quad \forall n \geqslant |x-y|_1,$$
$$P\begin{pmatrix} \text{il existe un chemin espace-temps } \gamma \\ \text{de longueur } n \text{ qui relie } x \text{ à } y \text{ entre } s \text{ et } t \end{pmatrix}$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\right).$$

Démonstration. Fixons $s, t \in \mathbb{N}$ avec $s < t$ et $n \geqslant |x-y|_1$ et notons $\mathcal{E}$ l'événement à estimer. Supposons que $\mathcal{E}$ arrive et soit

$$\gamma = x_1, (e_1, t_1), y_1, x_2, (e_2, t_2), \dots, x_n, (e_n, t_n), y_n$$

un chemin espace-temps qui le réalise. Par les propositions 1 et 3, nous pouvons supposer que γ est d'occurrence disjointe et impatient. Notons

$$k(1), \dots, k(m)$$

les indices où les changements de temps ont lieu dans γ. Par définition, nous avons $t_{k(i)+1} = t_{k(i+1)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Par convention, nous posons $k(0) = 1$ et $k(m+1) = n$. Quitte à arrêter γ à l'instant où il visite y pour la première fois, nous pouvons supposer que γ ne se termine pas par un changement de temps, de sorte que $k(m) < n-1$. Pour $0 \leqslant i \leqslant m$, nous notons $\mathcal{E}_i$ l'événement : il existe un chemin fermé qui relie $y_{k(i)}$ à $x_{k(i+1)}$ à l'instant

$t_{k(i+1)}$, l'arête $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ et $e_{k(i)+2}$ se ferme à l'instant $t_{k(i+1)}$. Nous conditionnons $\mathcal{E}$ selon le nombre et les instants de changements de temps, puis nous factorisons la probabilité à l'aide de l'inégalité de BK :

$$P(\mathcal{E}) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n/2} \sum_{1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) \leqslant n} \sum_{t_{k(1)}, \ldots, t_{k(m)}} P(\mathcal{E}_0 \circ \cdots \circ \mathcal{E}_m)$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant n/2} \sum_{1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) \leqslant n} \sum_{t_{k(1)}, \ldots, t_{k(m)}} \prod_{i=0}^{m} P(\mathcal{E}_i).$$

Nous étudions maintenant chaque terme $P(\mathcal{E}_i)$. Nous avons :

$$P(\mathcal{E}_i) = P\left(\begin{array}{c} y_i \overset{\text{fermé}}{\longleftrightarrow} x_{i+1} \text{ à l'instant } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)} \text{ reste fermée entre } t_{k(i)} \text{ et } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)+2} \text{ change d'état à } t_{k(i+1)} \end{array} \right)$$

L'événement $y_{k(i)} \overset{\text{fermé}}{\longleftrightarrow} x_{k(i+1)}$ à l'instant $t_{k(i+1)}$ entraîne l'existence d'un chemin fermé de longueur $k(i+1) - k(i) - 1$ (qui n'emprunte pas $e_{k(i)}$). La probabilité qu'il existe un tel chemin est majorée par $(3-3p)^{k(i+1)-k(i)-1}$. De plus, à chaque instant t, nous choisissons une arête uniformément parmi toutes les arêtes de $\Lambda(l)$ et nous déterminons le nouvel état de cette arête selon une loi de Bernoulli de paramètre p, la probabilité que $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ est donc

$$\left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{|t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|}.$$

Enfin, la probabilité que $e_{k(i)+2}$ change son état à l'instant $t_{k(i+1)}$ est majorée par $\frac{1}{|\Lambda|}$. Nous obtenons

$$P(\mathcal{E}_i) \leqslant (3-3p)^{k(i+1)-k(i)-1} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{|t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \frac{1}{|\Lambda|}.$$

Nous injectons cette majoration dans la somme précédente et nous obtenons

$$P(\mathcal{E}) \leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant n/2} \sum_{1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) \leqslant n} \sum_{t_{k(1)}, \ldots, t_{k(m)}}$$

$$(3-3p)^{n-m} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^{m} |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} \frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Calculons d'abord la somme sur les instants $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$. Posons

$$\forall i \in \{0, \dots, m\} \quad \Delta_i = |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|.$$

Si m et les indices $k(1), \dots, k(m)$ sont fixés, la suite $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$ est déterminée par les valeurs $\Delta_0, \dots, \Delta_{m-1}$ et les signes des différences $t_{k(i+1)} - t_{k(i)}$, d'où

$$\sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\sum_{i=1}^{m} |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|} = 2^m (t-s) \sum_{1 \leqslant \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1} \leqslant t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_1 + \cdots + \Delta_{m-1}}.$$

Nous échangeons la somme et le produit et nous obtenons

$$\sum_{1 \leqslant \Delta_1, \dots, \Delta_{m-1} \leqslant t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_1 + \cdots + \Delta_{m-1}} = \prod_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{\Delta_i = 1}^{t-s} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{\Delta_i} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right) \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leqslant \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}}.$$

Comme $(1-x)^\alpha \geqslant 1 - \alpha x$ pour $0 < x < 1$ et $\alpha \geqslant 1$, nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{|\Lambda|}\right)^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leqslant (t-s)^{m-1}.$$

Nous avons donc

$$P(\mathcal{E}) \leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant n/2} \sum_{1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) < n} 2^m (3 - 3p)^{n-m} (t-s)^m \frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Or, d'après le lemme 1, le nombre de termes dans la seconde somme est $\binom{n-m+1}{m}$, donc pour $p > \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &\leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}} \binom{n-m+1}{m} 2^m (3-3p)^{n-m} (t-s)^m \frac{1}{|\Lambda|^m} \\ &\leqslant (3-3p)^{n/2} \sum_{0 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}} \frac{(2n)^m}{m! |\Lambda|^m} (t-s)^m \\ &\leqslant \exp\left(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2} \ln(3-3p) \right). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi l'inégalité voulue. $\square$

Nous montrons maintenant un estimée sur le comportement temporel d'un chemin espace-temps. Nous disons qu'un chemin $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$ a un temps de vie plus grand que $T \geqslant 0$ si

$$\max(t_1, t_n) - \min(t_1, t_n) \geqslant T.$$

Enfin, nous utilisons la proposition précédente pour montrer que de la probabilité d'avoir un chemin espace-temps qui relie deux points à distance l décroit exponentiellement avec l.

Théorème 1. *Il existe $\tilde{p} < 1$ tel que*

$$\forall p > \tilde{p},\ \exists c(p) > 0,\ \forall x, y \in \Lambda,\ \forall t \geqslant 0 \quad P(x \xleftrightarrow{0,t} y) \leqslant \exp\big(-c(p)|x-y|_1\big).$$

De plus, la constante $c(p)$ tend vers infini quand p tend vers 1.

Démonstration. Notons $l = |x-y|_1$. Remarquons d'abord qu'un chemin espace-temps qui relie x à y est nécessairement de longueur supérieure à l. De plus, par les propositions 1 et 3, nous pouvons extraire d'un tel chemin un chemin d'occurrence disjointe et impatient qui relie x à y entre 0 et t. Or la probabilité qu'un chemin vive un temps t est bornée par $\exp(-c'(p)t)$, nous pouvons considérer le cas où $t \leqslant \kappa l \leqslant \kappa|\Lambda|$ avec κ une constante arbitraire strictement positive. Nous avons l'inégalité

$$\begin{aligned}
P(x \xleftrightarrow{0,t} y) &= P\begin{pmatrix}\text{il existe } \gamma \text{ d'occurrence disjointe et} \\ \text{impatient qui relie } x \text{ à } y \text{ entre } 0 \text{ et } \kappa l\end{pmatrix} + \exp(-c'(p)\kappa l) \\
&\leqslant \sum_{n \geqslant l} P\begin{pmatrix}\text{il existe } \gamma \text{ d'occurrence disjointe} \\ \text{et impatient qui relie } x \text{ à } y \text{ de} \\ \text{longueur } n \text{ entre } 0 \text{ et } \kappa l\end{pmatrix} + \exp(-c'(p)\kappa l) \\
&\leqslant \sum_{n \geqslant l} \exp\Big(2n\kappa + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\Big) + \exp(-c'(p)\kappa l).
\end{aligned}$$

Nous choisissons $\tilde{p}$ tel que

$$\kappa + \frac{\ln(3-3\tilde{p})}{2} = 0.$$

Nous avons donc, pour tout $p > \tilde{p}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \geqslant l} \exp\big(2n\kappa + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\big) + \exp(-c'(p)\kappa l) \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{\exp(l(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2}))}{1 - \exp(\kappa + \frac{\ln(3-3p)}{2})} + \exp(-c'(p)\kappa l) \leqslant \exp(-c(p)l)
\end{aligned}$$

où nous posons

$$C(p) = \frac{\min(c'(p), -\kappa - \frac{\ln(3-3p)}{2})}{2}$$

qui tend vers infini quand p tend vers 1. $\square$