1 chemin espace-temps

Nous considérons les sommets et les arêtes qui inclus dans une boite $\Lambda(l)$ de taille $2l \times h$. On étudie les chemin espace-tempss fermés dans la boîte formés par la percolation dynamique de paramètre p.

Définition 1. *Une arête-temps est un couple (e, t) où e est une arête de $\mathbb{E}$ et t un nombre réel.*

Nous définissons une relation d'équivalence de connexion sur l'espace $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ de la manière suivante : nous disons que les arêtes-temps (e, t) et (f, s) sont connectés si $e = f$ ou ($s = t$ et $e \sim f$). Nous notons $(e, t) \sim (f, s)$ si l'une des conditions est vérifiée. Un chemin espace-temps est une suite d'arête-temps $(e_i, t_i)_{i \geqslant 0}$ telle que pour tout $i \geqslant 0$, $(e_i, t_i) \sim (e_{i+1}, t_{i+1})$. Désormais, nous considérons les chemins espace-temps simple, i.e. si $e_k = e_{k+1}$ alors, $e_{k+2} \neq e_k$.

Nous considérons le processus de percolation dynamique à temps discret. L'espace des trajectoires Nous appelons un chemin espace-temps d'occurrence disjointe de longueur n avec m changement de temps s'il existe m indices $1 \leqslant k(1) < k(2) < \cdots < k(m) \leqslant n$ telles que :

- Les changements de temps arrivent aux instants $t_{k(1)}, \ldots, t_{k(m)}$, i.e.

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-1\} \qquad e_{k(i)} = e_{k(i)+1} \quad t_{k(i)+1} = \cdots = t_{k(i+1)}.$$

- les arêtes visitées à un temps donné sont 2 à 2 distinctes, i.e.

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j.$$

- les fermetures d'arêtes arrivent disjointement, i.e. pour tout $i, j \in \{1, \ldots, j\}$, $i < j$ tels que $e_i = e_j$, l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :
  - $j = i + 1$ et $i \in \{k(1), \ldots, k(m)\}$;
  - $t_i < t_j$ et il existe un instant $s \in]t_i, t_j[$ tel que e_j est ouverte à s ;
  - $t_j < t_i$ et il existe un instant $s \in]t_j, t_i[$ tel que e_j est ouverte à s ;

Proposition 1. *Soit $(e_1, t_1), \ldots, (e_N, t_N)$ un chemin espace-temps qui relie x à y, il existe une fonction $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ strictement croissante telle que $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ est un chemin espace-temps d'occurrence disjointe qui relie x à y.*

Démonstration. Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur la longueur N. Supposons que la proposition est vrai pour tout chemin de longueur inférieur à N. Nous considérons maintenant un chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_{N+1}, t_{N+1})$$

de longueur $N + 1$ qui relie x y. S'il existe une indice $i \leqslant N$ telle que $(e_i, t_i) = (e_{N+1}, t_{N+1})$ alors le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i)$$

est un chemin de longueur $i \leqslant N$ qui relie x à y. Par l'hypothèse de récurrence, nous avons un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. S'il existe une indice $1 \leqslant i \leqslant N$ telles que $e_i = e_{N+1}$, et e_{N+1} reste fermée entre t_i et t_{N+1}, nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_i, t_i), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

qui est de longueur inférieur à N. Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à ce chemin et nous obtenons le chemin extrait. Si aucun des cas précédents se présente, nous considérons le chemin $(e_1, t_1), \dots, (e_N, t_N)$ de longueur N et qui relie x à z. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction strictement croissante $\phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, N\}$ telle que le chemin extrait $\gamma(\phi) = (e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ est un chemin d'occurrence disjointe qui relie x à z.

Si ce chemin n'emprunte pas l'arête e_{N+1}, alors nous posons $\phi(n+1) = N+1$ et nous obtenons le chemin extrait souhaité.

Considérons le cas où $\gamma(\phi)$ emprunte l'arête e_{N+1}. Supposons tout d'abord que $\gamma(\phi)$ passe par e_{N+1} avant et après t_{N+1}. Nous considérons t_- (resp. t_+) le dernier (resp. premier) instant strictement avant (resp. après) t_{N+1} où $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} et soit j_- (resp. j_+) l'unique indice telle que $t_{\phi(j_-)} = t_-$ (resp. $t_{\phi(j_+)} = t_+$) et $e_{\phi(j_-)} = e_{N+1}$ (resp. $e_{\phi(j_+)} = e_{N+1}$). Plus formellement, les indices j_-, j_+ sont définis par les conditions suivantes :

$$\begin{array}{lll} j_- < t_{N+1} & e_{j_-} = e_{N+1} & t_{j_-} = \max\left\{\, t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j < t_{N+1} \,\right\} \\ j_+ > t_{N+1} & e_{j_+} = e_{N+1} & t_{j_+} = \min\left\{\, t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j > t_{N+1} \,\right\} \end{array}$$

Comme $\gamma(\phi)$ est d'occurrence disjointe qui ne contient pas l'arête temps (e_{N+1}, t_{N+1}), et qu'aucun de ses changements de temps ne contient pas cette arête-temps, nécessairement, l'arête e_{N+1} doit s'ouvrir dans l'intervalle $]t_{j^-}, t_{j^+}[$.

Si l'arête e_{N+1} s'ouvre sur $]t_{j_-}, t_{N+1}[$ et sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$, nous ajoutons (e_{N+1}, t_{N+1}) à la fin de $\gamma(\phi)$ et nous obtenons le chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y.

Si l'arête reste fermée sur $]t_{j_-}, t_{N+1}[$, nécessairement, elle s'ouvre sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$. Nous considérons le chemin espace-temps

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(j_-)}, t_{\phi(j_-)}), (e_{N+1}, t_{N+1}).$$

Ce chemin est d'occurrence disjointe et il relie x à y. Le cas où e_{N+1} reste fermée sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$ se traite de manière similaire en remplaçant j_- par j_+.

Maintenant, nous supposons que $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement avant t_{N+1}, nous définissons j_- de la même façon que dans le cas précédent. Si e_{N+1} reste fermée entre $]t_{j_-}, t_{N+1}[$, nous considérons le chemin extrait

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(j_-)}, t_{\phi(j_-)}), (e_{N+1}, t_{N+1}).$$

Il est d'occurrence disjointe et il relie x à y. Si e_{N+1} s'ouvre entre t_{j_-} et t_{N+1}, alors le chemin $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)}), (e_{N+1}, t_{N+1})$ vérifie les conditions voulues.

Enfin, si $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement après t_{N+1}, nous définissons seulement j_+ et nous obtenons le chemin extrait voulu de la même manière que le cas précédent. □

Définition 2. *Un chemin espace-temps est dit impatient si toute arête de changement de temps e_k est suivi par une arête e_{k+2} qui change son état à l'instant t_{k+2}.*

Nous montrons tout chemin espace-temps admet une modification temporelle qui est impatiente. Plus formellement, nous introduisons l'algorithme de modification récursive suivante :

Algorithme 1. *soit $(e_1, t_1), \dots, (e_n, t_n)$ un chemin espace-temps, nous allons modifier la première arête e_1 du chemin, selon les cas suivants :*

- *si $e_2 \neq e_1$, alors nécessairement $t_1 = t_2$, et nous ne modifions pas (e_1, t_1) et nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_2, t_2), \dots, (e_n, t_n)$;*
- *si $t_1 < t_2$, soit τ_3 le dernier instant avant t_2 où e_3 se ferme. Si $t_1 \geqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$ et nous recommençons avec le chemin $(e_3, t_1), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$; sinon $t_1 < \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$ et nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \dots, (e_n, t_n)$;*

- *si $t_1 > t_2$, soit τ_3 le premier instant après t_2 où e_3 s'ouvre. Si $t_1 \leqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1,t_1),(e_2,t_2)$ par $(e_1,t_1),(e_3,t_1)$ et nous recommençons avec le chemin $(e_3,t_1),(e_3,t_3),\ldots,(e_n,t_n)$; sinon $t_1 > \tau_3$, nous remplaçons $(e_1,t_1),(e_2,t_2)$ par $(e_1,t_1),(e_2,\tau_3),(e_3,\tau_3)$ et nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3,\tau_3),(e_3,t_3),\ldots,(e_n,t_n)$.*

Nous remarquons que la longueur de chemin non modifié diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Par la définition d'un chemin impatient, nous avons directement la propriété suivante :

Proposition 2. *Soit $(e_1,t_1),\ldots,(e_n,t_n)$ un chemin espace-temps, sa modification obtenue selon l'algorithme précédent est impatient.*

Nous montrons maintenant qu'un chemin d'occurrence disjointe est toujours d'occurrence disjointe après la modification selon l'algorithme.

Proposition 3. *Soit $\gamma = (e_1,t_1),\ldots,(e_n,t_n)$ un chemin espace-temps d'occurrence disjointe, nous modifions ce chemin selon algorithme 1. Le chemin obtenu est d'occurrence disjointe et impatient.*

Démonstration. Nous vérifions la condition de l'occurrence disjointe dans chaque étape de l'algorithme. Soit $(e_i,t_i),(e_{i+1},t_{i+1})$ le changement de temps qui est modifié après une itération, et supposons que le chemin visite e_i ou e_{i+2} plus qu'une fois. Nous pouvons aussi supposer que $t_i < t_{i+1}$ car le cas $t_i > t_{i+1}$ se traite de la même manière. Nous examinons les deux résultats de la modification : si nous obtenons $(e_i,t_i),(e_{i+2},t_i)$, il faut simplement vérifier qu'il existe un instant entre chaque visite de e_{i+2} et t_i tel que e_{i+2} est ouverte à cette instant. Or (e_{i+2},t_{i+2}) est dans γ qui est un chemin d'occurrence disjointe, e_{i+2} admet une ouverture entre les autres instants de visites et t_{i+2}. Vu que l'arête e_{i+2} est fermée entre t_i et t_{i+2}, de même pour t_i. Si nous avons $(e_i,t_i),(e_{i+1},\tau_{i+2}),(e_{i+2},\tau_{i+2})$ après la modification, nous devons vérifier la condition pour e_i et e_{i+2}. Nous rappelons que $e_{i+1} = e_i$ et τ_{i+2} le dernier instant avant t_{i+1} où e_{i+2} se ferme. Or e_i est fermée entre t_i et τ_{i+2} et e_{i+2} est fermée entre τ_{i+2} et t_{i+2}, nous avons le résultat voulu comme dans le premier cas. □

2 Décroissance exponentielle

Nous démontrons maintenant la décroissance exponentielle de la probabilité d'avoir un chemin espace-temps qui relie deux points de distance l. Nous notons $x \xleftrightarrow{s,t} y$ l'événement qu'il existe un chemin espace temps fermé qui relie x et y dans un intervalle de temps $[s,t]$. Avant d'énoncer l'estimation, nous montrons un lemme combinatoire :

Lemme 1. *Soit $S(n,m)$ l'ensemble de m-uplet d'entiers entre 1 et n croissant qui n'admet pas d'entiers consécutifs*

$$S(n,m) = \{ (u_1,\dots,u_m) \in \{1,\dots,n\}^m : \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant m-1, u_{i+1} > u_i + 1 \},$$

alors $|S(n,m)| = \binom{n-m+1}{m}$.

Démonstration. Nous considérons l'application suivante :

$$\Phi : (u_1,\dots,u_m) \to (u_1,\dots,u_i - i + 1,\dots,u_m - m + 1).$$

Il est facile de vérifier que Φ est une bijection entre $S(n,m)$ et l'ensemble de m-uplet strictement croissant entre 1 et $n-m+1$. Ce dernier est de cardinal $\binom{n-m+1}{m}$. □

Théorème 1. *Soit γ un chemin qui réalise $x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y$, et supposons que γ est d'occurrence disjointe et impatient. Nous avons :*

$$P\left(\begin{array}{c} x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ |\gamma| = n \end{array}\right) \leqslant C \exp\Big(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|} + \frac{n}{2}\ln(3-3p)\Big)$$

avec C une constante uniforme.

Démonstration. Notons $(e_1,t_1),\dots,(e_n,t_n)$ les arêtes temps de γ, $k(1),\dots,k(m)$ les indices de changement de temps a lieu nous notons par convention $k(0) = 1$ et $k(m+1) = n$. Notons aussi pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$, $\mathcal{E}_i$ l'événement il existe n chemin fermé qui relie une extrémité de $e_{k(i)}$ à une extrémité de $e_{k(i+1)}$ à l'instant $t_{k(i+1)}$, $e_{k(i)}$ reste fermée entre $t_{k(i)}$ et $t_{k(i+1)}$ et $e_{k(i)+2}$ se ferme à l'instant $t_{k(i+1)}$. Nous factorisons la probabilité à l'aide de l'inégalité de BK :

$$P\left(\begin{array}{c} x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ |\gamma| = n \end{array}\right) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1=k(0)<\dots<k(m+1)=n} \sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} P(\mathcal{E}_0 \circ \dots \circ \mathcal{E}_m)$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1=k(0)<\dots<k(m+1)=n} \sum_{t_{k(1)},\dots,t_{k(m)}} \prod_{i=0}^{m} P(\mathcal{E}_i).$$

Nous calculons maintenant chaque terme $P(\mathcal{E}_i)$ en notant $e_{k(i)} = \langle x_i, y_i \rangle$.

$$P(\mathcal{E}_i) = P\left(\begin{array}{c} y_i \longleftrightarrow x_{i+1} \text{ à l'instant } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)} \text{ reste fermée entre } t_{k(i)} \text{ et } t_{k(i+1)} \\ e_{k(i)+2} \text{ change d'état à } t_{k(i+1)} \end{array}\right)$$

$$\leqslant (3-3p)^{k(i+1)-k(i)-1)}(1 - \frac{p}{|\Lambda|})^{|t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|}\frac{1}{|\Lambda|}$$

Nous appliquons la majoration dans la première probabilité et nous avons :

$$P\left(\begin{array}{c} x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ |\gamma| = n \end{array}\right) \leqslant \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1=k(0)<\cdots<k(m+1)=n} \sum_{t_{k(1)},\ldots,t_{k(m)}} (3-3p)^{n-m}(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_i^{m-1}|t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|}\frac{1}{|\Lambda|^m}$$

Calculons d'abord le terme qui contient les instants $t_{k(1)}, \ldots, t_{k(m)}$, en posant $\Delta_i = |t_{k(i+1)} - t_{k(i)}|$:

$$\sum_{t_{k(1)},\ldots,t_{k(m)}} (1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_i^m |t_{k(i+1)}-t_{k(i)}|} = 2^m(t-s) \sum_{\Delta_1,\ldots,\Delta_{m-1}} (1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_i},$$

nous pouvons échanger la somme et le produit et nous obtenons :

$$\sum_{\Delta_1,\ldots,\Delta_{m-1}} (1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\sum_{i=1}^{m-1}\Delta_i} = \prod_{i=1}^{m-1}(\sum_{\Delta_i=1}^{t-s}(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{\Delta_i}) = \prod_{i=1}^{m-1}\frac{1-(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}},$$

or $(1-x)^\alpha \geqslant 1-\alpha x$ pour tout $x > 0, \alpha > 0$, nous avons

$$\prod_{i=1}^{m-1}\frac{1-(1-\frac{p}{|\Lambda|})^{t-s}}{\frac{p}{|\Lambda|}} \leqslant (t-s)^{m-1}.$$

Nous avons donc

$$P\left(\begin{array}{c} x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ |\gamma| = n \end{array}\right) \leqslant \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1=k(0)<\cdots<k(m+1)=n} 2^m(3-3p)^{n-m}(t-s)^m\frac{1}{|\Lambda|^m}.$$

Or le nombre de $1 \leqslant k(1) < \cdots < k(m) \leqslant n$ est $\binom{n-m+1}{m}$ par lemme 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P\left(\begin{array}{c} x \overset{s,t}{\longleftrightarrow} y \text{ par } \gamma \\ |\gamma| = n \end{array}\right) &\leqslant \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-m+1}{m}2^m(3-3p)^{n-m}(t-s)^m\frac{1}{|\Lambda|^m} \\ &\leqslant (3-3p)^{n/2}\sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(2n)^m}{m!|\Lambda|^m}(t-s)^m \\ &\leqslant \exp\big(\frac{2n(t-s)}{|\Lambda|}+\frac{n}{2}\ln(3-3p)\big) \end{aligned}$$

$\square$