1 Space-time chemin

Définition 1. *Une arête-temps est un couple (e, t) où e est une arçete de $\mathbb{E}$ et t un nombre réel.*

Nous définissons une relation d'équivalence de connexion sur l'espace $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ de la manière suivante : nous disons que les arêtes-temps (e, t) et (f, s) sont connectés si $e = f$ ou ($s = t$ et $e \sim f$). Nous notons $(e, t) \sim (f, s)$ si l'une des conditions est vérifiée. Un space-time chemin est une suite d'arête-temps $(e_i, t_i)_{i \geqslant 0}$ telle que pour tout $i \geqslant 0$, $(e_i, t_i) \sim (e_{i+1}, t_{i+1})$. Désormais, nous considérons les space-time chemins simple, i.e. si $e_k = e_{k+1}$ alors, $e_{k+2} \neq e_k$.

Nous considérons le processus de percolation dynamique à temps discret. L'espace des trajectoires Nous appelons un space time chemin d'occurrence disjointe de longueur n avec m changement de temps s'il existe m indices $1 \leqslant k(1) < k(2) < \cdots < k(m) \leqslant n$ telles que :

- Les changements de temps arrivent aux instants $t_{k(1)}, \dots, t_{k(m)}$, i.e.

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\} \qquad e_{k(i)} = e_{k(i)+1} \quad t_{k(i)+1} = \cdots = t_{k(i+1)}.$$

- les arêtes visitées à un temps donné sont 2 à 2 distinctes, i.e.

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \qquad i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j.$$

- les fermetures d'arêtes arrivent disjointement, i.e. pour tout $i, j \in \{1, \dots, j\}$, $i < j$ tels que $e_i = e_j$, l'une des 3 conditions suivantes est vérifiée :
  - $j = i + 1$ et $i \in \{k(1), \dots, k(m)\}$;
  - $t_i < t_j$ et il existe un instant $s \in]t_i, t_j[$ tel que e_j est ouverte à s ;
  - $t_j < t_i$ et il existe un instant $s \in]t_j, t_i[$ tel que e_j est ouverte à s ;

Proposition 1. *Soit $(e_1, t_1), \dots, (e_N, t_N)$ un space time chemin qui relie x à y, il existe une fonction $\phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, N\}$ strictement croissante telle que $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \dots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ est un space time chemin d'occurrence disjointe qui relie x à y.*

Démonstration. Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur la longueur N. Supposons que la proposition est vrai pour tout chemin de longueur inférieur à N. Nous considérons maintenant un chemin

$$(e_1, t_1), \dots, (e_{N+1}, t_{N+1})$$

de longueur $N+1$ qui relie x y. S'il existe une indice $i \leqslant N$ telle que $(e_i, t_i) = (e_{N+1}, t_{N+1})$ alors le chemin

$$(e_1, t_1), \ldots, (e_i, t_i)$$

est un chemin de longueur $i \leqslant N$ qui relie x à y. Par l'hypothèse de récurrence, nous avons un chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y. S'il existe une indice $1 \leqslant i \leqslant N$ telles que $e_i = e_{N+1}$, et e_{N+1} reste fermée entre t_i et t_{N+1}, nous considérons le chemin

$$(e_1, t_1), \ldots, (e_i, t_i), (e_{N+1}, t_{N+1})$$

qui est de longueur inférieur à N. Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à ce chemin et nous obtenons le chemin extrait. Si aucun des cas précédents se présente, nous considérons le chemin $(e_1, t_1), \ldots, (e_N, t_N)$ de longueur N et qui relie x à z. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction strictement croissante $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, N\}$ telle que le chemin extrait $\gamma(\phi) = (e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)})$ est un chemin d'occurrence disjointe qui relie x à z.

Si ce chemin n'emprunte pas l'arête e_{N+1}, alors nous posons $\phi(n+1) = N+1$ et nous obtenons le chemin extrait souhaité.

Considérons le cas où $\gamma(\phi)$ emprunte l'arête e_{N+1}. Supposons tout d'abord que $\gamma(\phi)$ passe par e_{N+1} avant et après t_{N+1}. Nous considérons t_- (resp. t_+) le dernier (resp. premier) instant strictement avant (resp. après) t_{N+1} où $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} et soit j_- (resp. j_+) l'unique indice telle que $t_{\phi(j_-)} = t_-$ (resp. $t_{\phi(j_+)} = t_+$) et $e_{\phi(j_-)} = e_{N+1}$ (resp. $e_{\phi(j_+)} = e_{N+1}$). Plus formellement, les indices j_-, j_+ sont définis par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} j_- < t_{N+1} \quad & e_{j_-} = e_{N+1} \quad t_{j_-} = \max\left\{\, t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j < t_{N+1} \,\right\} \\ j_+ > t_{N+1} \quad & e_{j_+} = e_{N+1} \quad t_{j_+} = \min\left\{\, t_j : 1 \leqslant j \leqslant N, e_j = e_{N+1}, t_j > t_{N+1} \,\right\} \end{aligned}$$

Comme $\gamma(\phi)$ est d'occurrence disjointe qui ne contient pas l'arête temps (e_{N+1}, t_{N+1}), et qu'aucun de ses changements de temps ne contient pas cette arête-temps, nécessairement, l'arête e_{N+1} doit s'ouvrir dans l'intervalle $]t_{j^-}, t_{j^+}[$.

Si l'arête e_{N+1} s'ouvre sur $]t_{j_-}, t_{N+1}[$ et sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$, nous ajoutons (e_{N+1}, t_{N+1}) à la fin de $\gamma(\phi)$ et nous obtenons le chemin extrait d'occurrence disjointe qui relie x à y.

Si l'arête reste fermée sur $]t_{j_-}, t_{N+1}[$, nécessairement, elle s'ouvre sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$. Nous considérons le space-time chemin

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(j_-)}, t_{\phi(j_-)}), (e_{N+1}, t_{N+1}).$$

Ce chemin est d'occurrence disjointe et il relie x à y. Le cas où e_{N+1} reste fermée sur $]t_{N+1}, t_{j_+}[$ se traite de manière similaire en remplaçant j_- par j_+.

Maintenant, nous supposons que $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement avant t_{N+1}, nous définissons j_- de la même façon que dans le cas précédent. Si e_{N+1} reste fermée entre $]t_{j_-}, t_{N+1}[$, nous considérons le chemin extrait

$$(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(j_-)}, t_{\phi(j_-)}), (e_{N+1}, t_{N+1}).$$

Il est d'occurrence disjointe et il relie x à y. Si e_{N+1} s'ouvre entre t_{j_-} et t_{N+1}, alors le chemin $(e_{\phi(1)}, t_{\phi(1)}), \ldots, (e_{\phi(n)}, t_{\phi(n)}), (e_{N+1}, t_{N+1})$ vérifie les conditions voulues.

Enfin, si $\gamma(\phi)$ visite e_{N+1} uniquement après t_{N+1}, nous définissons seulement j_+ et nous obtenons le chemin extrait voulu de la même manière que le cas précédent. $\square$

Définition 2. *Un space-time chemin est dit impatient si toute arête de changement de temps e_k est suivi par une arête e_{k+2} qui change son état à l'instant t_{k+2}.*

Nous montrons tout space time chemin admet une modification temporelle qui est impatiente. Plus formellement, nous introduisons l'algorithme de modification récursive suivante :

Algorithme 1. *soit $(e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ un space time chemin, nous allons modifier la première arête e_1 du chemin, selon les cas suivants :*

- *si $e_2 \neq e_1$, alors nécessairement $t_1 = t_2$, et nous ne modifions pas (e_1, t_1) et nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_2, t_2), \ldots, (e_n, t_n)$;*
- *si $t_1 < t_2$, soit τ_3 le dernier instant avant t_2 où e_3 se ferme. Si $t_1 \geqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$; sinon $t_1 < \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$ et nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$;*
- *si $t_1 > t_2$, soit τ_3 le premier instant après t_2 où e_3 s'ouvre. Si $t_1 \leqslant \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_3, t_1)$; sinon $t_1 > \tau_3$, nous remplaçons $(e_1, t_1), (e_2, t_2)$ par $(e_1, t_1), (e_2, \tau_3), (e_3, \tau_3)$ et nous recommençons l'algorithme avec le chemin $(e_3, \tau_3), (e_3, t_3), \ldots, (e_n, t_n)$.*

Nous remarquons que la longueur de chemin non modifié diminue après chaque itération, donc l'algorithme se termine. Par la définition d'un chemin impatient, nous avons directement la propriété suivante :

Proposition 2. *Soit $(e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ un space time chemin, sa modification obtenue selon l'algorithme précédent est impatient.*

Nous montrons maintenant qu'un chemin d'occurrence disjointe est toujours d'occurrence disjointe après la modification selon l'algorithme.

Proposition 3. *Soit* $\gamma = (e_1, t_1), \ldots, (e_n, t_n)$ *un space time chemin d'occurrence disjointe, nous modifions ce chemin selon algorithme 1. Le chemin obtenu est d'occurrence disjointe et impatient.*

Démonstration. Considérons le cas où γ admet m changements de temps. Notons γ' le chemin obtenu après la modification et $(e_{k(1)}, t_{k(1)}), \ldots, (e_{k(m)}, t_{k(m)})$ les arêtes-temps où un changement de temps arrive et nous posons $k(0) = 0, k(m+1) = n$. Notons γ_j le chemin $(e_{k(j)+1}, t_{k(j)+1}), \ldots, (e_{k(j+1)}, t_{k(j+1)})$ et γ'_j la modification de γ_j. Or γ est un chemin d'occurrence disjointe, pour tout $0 \leqslant j \leqslant m$, les γ_j sont disjoints. Remarquons que pour toute arête $e_i \in \gamma_j$ modifiée par l'algorithme 1, nous ajoutons seulement un instant t'_i où e_i est restée fermée entre t'_i et t_i. La condition d'occurrence disjointe est toujours respectée, i.e. pour toute indice $r \neq q$ telle que $e_r = e_q$, il existe un instant s entre t_r, t_q tel que e_r est ouverte à l'instant s. D'où le résultat. □