

# 1 Introduction

## 1.1 Les notations générales

**Le réseau  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ .** Soit  $x, y$  deux points de  $\mathbb{Z}^d$ , nous disons que  $x, y$  sont voisins s'ils sont à distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble  $\mathbb{E}^d$  est l'ensemble des paires  $\{x, y\}$ , où  $x, y$  sont deux points voisins de  $\mathbb{Z}^d$ . Le réseau  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  est le graphe dont  $\mathbb{Z}^d$  est l'ensemble des sommets et  $\mathbb{E}^d$  est l'ensemble des arêtes. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ , nous disons que  $e = \langle x, y \rangle$  est incluse dans  $A$  si le segment ouvert  $]x, y[$  est inclus dans  $A$ .

**Les boîtes  $\Lambda(\ell, h)$ .** Nous notons  $\Lambda(\ell, h)$  le sous graphe de  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  à l'intérieur du rectangle  $[-\ell, \ell] \times [-h, h]$ . Nous notons aussi  $T(\ell, h)$  le bord supérieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , i.e. le segment  $[-\ell, \ell] \times (0, h)$ . Nous notons aussi  $B(\ell, h)$  le bord inférieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , i.e.  $[-\ell, \ell] \times (0, -h)$ . Les deux bords verticaux de la boîte  $\Lambda(\ell, h)$  sont notés  $V(\ell, h)$ .

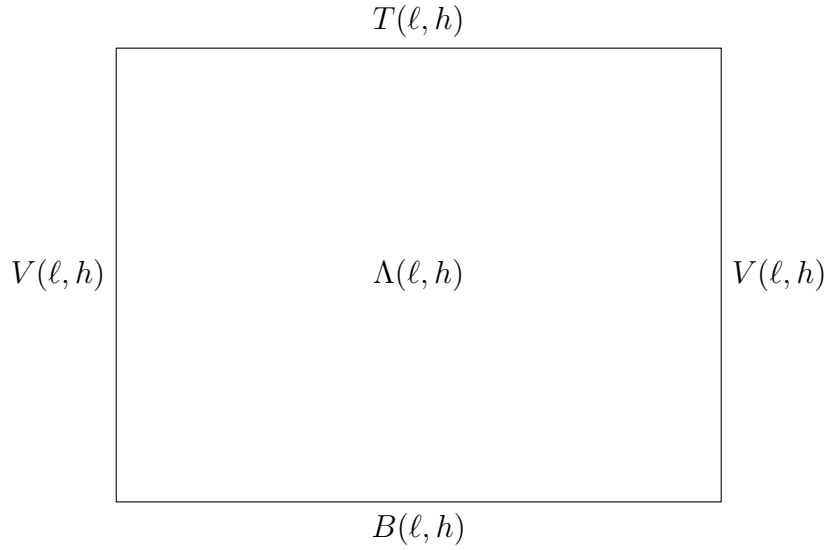


FIGURE 1 – La boîte  $\Lambda(\ell, h)$

**Les ensembles séparants.** Soient  $A, B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^d$ . Nous disons qu'un ensemble d'arêtes  $S \subset \mathbb{E}^d$  sépare  $A$  et  $B$  si aucune partie connexe du graphe  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d \setminus S)$  n'intersecte simultanément  $A$  et  $B$ . Un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour  $A$  et  $B$ . Nous disons que  $S$  est un ensemble séparant minimal pour  $A, B$  si aucun sous-ensemble strict de  $S$  ne sépare  $A$  et  $B$ .

**Les configurations.** L'espace des configurations est  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ . Une configuration générique est notée  $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^d\} \in \Omega$ . L'arête  $e$  est ouverte dans la configuration  $\omega$  si  $\omega(e) = 1$  et fermée si  $\omega(e) = 0$ . Soient  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d$  et  $\omega$  une configuration, la configuration  $\omega$  restreinte à  $A$ , notée  $\omega|_A$ , est la restriction de  $\omega$  aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans  $A$ . Soient  $e \in \mathbb{E}^d$  une arête et  $\omega \in \Omega$  une configuration, nous définissons les configurations  $\omega^e, \omega_e$  par :

$$\forall f \in \mathbb{E}^d \quad \omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases}, \quad \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}.$$

Les configurations  $\omega^e, \omega_e$  sont obtenues à partir de  $\omega$  en ouvrant ou fermant l'arête  $e$ .

**Les chemins.** Soient  $x$  et  $y$  deux sommets dans  $\mathbb{Z}^d$ , un chemin entre  $x$  et  $y$  est une suite  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$  de sommets  $x_i$  et d'arêtes  $e_i$  distincts où  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = y$  et  $e_i$  est l'arête joignant  $x_i$  à  $x_{i+1}$ . Nous disons que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin ouvert dans la configuration  $\omega$ , noté  $x \xleftrightarrow{\omega} y$ , s'il existe un chemin qui relie  $x, y$  tel que toute arête de ce chemin est ouverte dans la configuration  $\omega$ . Nous notons aussi  $x \not\leftrightarrow y$  l'événement complémentaire. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\Lambda(l, h)$ , nous notons  $x \xleftrightarrow{A} y$  s'il existe un chemin ouvert entre  $x$  et  $y$  dont les arêtes sont incluses dans  $A$ .

Soient  $A, B$  deux sous-graphes de  $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ , nous disons que  $A$  est connecté à  $B$  dans la configuration  $\omega$ , que nous notons  $A \xleftrightarrow{\omega} B$ , s'il existe un chemin entre un sommet de  $A$  et un sommet de  $B$ . Dans ce mémoire, nous étudions en particulier les chemins entre un sommet de  $T(l, h)$  et un sommet de  $B(l, h)$ .

## 1.2 Le processus de percolation dynamique

Nous considérons le processus de percolation dynamique dans une boîte  $\Lambda$ . Plus précisément, il s'agit d'un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ . Nous partons d'une configuration initiale  $X_0$  et à chaque instant  $t$ , nous choisissons une suite indépendante d'arêtes  $(e_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  dont pour tout instant  $t$ , l'arête  $e_t$  suit la loi uniforme dans la boîte  $\Lambda$ . Pour chaque  $e_t$ , nous déterminons son état selon  $(b_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables de loi Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ . Nous écrivons

$$X_t(e) = \begin{cases} X_{t-1}(e) & \text{si } e \neq e_t \\ b_t & \text{si } e = e_t \end{cases}.$$

### 1.3 Les chemins espace-temps

Nous introduisons les chemins espace-temps définis avec un processus de percolation dynamique  $X$ . Un chemin espace-temps s'obtient en prolongeant un chemin dans le temps. Plus précisément, nous définissons une relation d'équivalence  $\xleftrightarrow{X}$  sur les couples  $(e, t) \in (\mathbb{E}^d, \mathbb{N})$  par, soient  $e = \langle a, b \rangle, f = \langle c, d \rangle \in \mathbb{E}^d$  deux arêtes, et  $s, t \geq 0$  deux instants,

$$\begin{aligned} (e, t) &\xleftrightarrow{X} (f, t) \text{ si } a \xleftrightarrow{X_t} c, X_t(e) = 1, X_t(f) = 1 \\ (e, s) &\xleftrightarrow{X} (e, t) \text{ si } \forall r \in [s \wedge t, s \vee t] \quad X_r(e) = 1. \end{aligned}$$

Nous généralisons ensuite cette relation d'équivalence sur les sommets de  $\mathbb{Z}^d$  par, soit  $x, y \in \mathbb{Z}^d, s, t \in \mathbb{N}$ ,

$$(x, s) \xleftrightarrow{X} (y, t) \text{ si } \exists e \text{ d'une extrémité } x, f \text{ d'une extrémité } y \quad (e, s) \xleftrightarrow{X} (f, t).$$

Nous disons qu'il existe un chemin espace-temps entre  $(x, s)$  et  $(y, t)$  si  $(x, s) \xleftrightarrow{X} (y, t)$ .

### 1.4 Les interfaces par un couplage

Nous introduisons un couplage qui nous permet de définir les interfaces entre le haut et le bas.

Nous définissons le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$  par la formule suivante :

$$Y_t(e) = \begin{cases} X_t(e) & \text{si } e \neq e_t \\ 0 & \text{si } e = e_t \text{ et } b_t = 0 \\ 1 & \text{si } e = e_t, b_t = 1 \text{ et } T \xleftrightarrow{Y_{t-1}^{e_t}} B \\ 0 & \text{si } e = e_t, b_t = 1 \text{ et } T \xleftrightarrow{Y_{t-1}^{e_t}} B \end{cases}$$

Le processus  $Y$  est un processus de percolation dynamique conditionné par l'événement  $\{T \not\leftrightarrow B\}$ . Lorsque nous essayons de ouvrir une arête  $e$  fermée de la boîte  $\Lambda$  à un instant, nous vérifions d'abord si cette modification induit une connexion par une un chemin ouvert entre le haut et le bas dans le processus  $Y$ . Si c'est le cas,  $e$  reste fermée dans le processus  $Y$  mais s'ouvre dans le processus  $X$ . Or la fermeture d'une arête ne peut pas créer une connexion entre le haut et le bas dans le processus  $Y$ , Les deux processus  $X$  et  $Y$  se comportent identiquement lorsque nous essayons de fermer une arête. Nous proposons maintenant une définition de l'interface à partir du couplage précédent.

**Définition 1.** Soit  $X_t$  le processus de percolation dynamique et  $Y_t$  le processus de percolation dynamique conditionné par  $\{T \leftrightarrow B\}$ , l'interface à instant  $t$  entre  $T$  et  $B$  que nous notons  $\mathcal{I}_t$  est l'ensemble des arêtes de  $\Lambda$  qui sont différentes entre les configurations  $X_t$  et  $Y_t$ , i.e.

$$\mathcal{I}_t = \{e \in \Lambda \mid X_t(e) \neq Y_t(e)\}$$

Les arêtes de  $\mathcal{I}_t$  sont fermées dans la configuration  $Y_t$  mais ouvertes dans  $X_t$  car la configuration  $X_t$  domine stochastiquement  $Y_t$ . Nous définissons aussi  $\mathcal{P}_t$  l'ensemble des arêtes pivot dans  $\Lambda$  pour l'événement  $\{T \longleftrightarrow B\}$  dans le processus  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 2.** L'ensemble  $\mathcal{P}_t$  est l'ensemble des arêtes dans  $\Lambda$  dont ouverture induit l'événement  $\{T \longleftrightarrow B\}$  dans le processus  $Y_t$ , i.e.

$$\mathcal{P}_t = \{e \in \Lambda \mid T \xrightarrow{Y_t^e} B\}$$

## 2 La construction d'un chemin espace-temps

Nous allons énoncer une première proposition qui permet de construire un chemin espace temps dont nous avons besoin pour la suite de notre étude.

**Proposition 1.** Soient  $0 < s < t$  deux instants et  $e \in \mathcal{P}_t$  et  $f \in \mathcal{P}_s$ . Il existe un chemin espace-temps monotone en temps et fermé dans le processus  $Y$  qui relie  $(e, t)$  à  $(f, s)$ . De plus, si une arête  $e$  est visitée à deux instants différents  $u$  et  $v$ , il existe un instant  $w \in ]u, v[$  où  $e$  est ouverte à  $w$ .

*Démonstration.* Nous remarquons d'abord qu'à l'instant  $t$  donné, il existe un chemin fermé qui relie tous les arêtes pivot de cet instant. Nous considérons  $\theta(t)$  le dernier instant où il existe une arête de  $\mathcal{P}_t$  qui devient pivot, i.e.,

$$\theta(t) = \inf \left\{ r \leq t, \exists e_1 \in \mathcal{P}_t, e_1 \text{ devient pivot à l'instant } r, e_1 \text{ pivot sur } [r, t] \right\}.$$

Nous montrons que  $\theta(t) < t$ . En effet, si à l'instant  $t$ , il y a une arête qui se ferme, alors il n'y a pas d'arête pivot créé à l'instant  $t$ , donc les arêtes de  $\mathcal{P}_t$  sont aussi pivot à l'instant  $t - 1$ . Dans le cas contraire, si une arête s'ouvre à l'instant  $t$ . Nous considérons une arête  $\varepsilon$  de  $\mathcal{P}_{t-1}$ , il existe un chemin ouvert passant par  $\varepsilon$  qui relie le haut et le bas de  $\Lambda$  à l'instant  $t - 1$ . Or l'ouverture d'une arête quelconque ne modifie pas ce chemin ouvert,  $\varepsilon$  est toujours pivot à l'instant  $t$ . Nous avons donc trouvé une arête qui est devenue pivot avant l'instant  $t$ . D'où  $\theta(t) < t$ .

Si  $\theta(t) \leq s$ , le chemin  $(e, t), (e_1, t), (e_1, s)$  est un chemin espace-temps voulu. Sinon,  $\theta(t) > s$ , nous considérons l'arête-temps  $(e_1, \theta(t)) \in \mathcal{P}_{\theta(t)}$  qui est reliée à  $(e, t)$  par le chemin  $(e, t), (e_1, t), (e_1, \theta(t))$ . Nous devons maintenant

montrer le résultat voulu avec  $(e_1, \theta(t))$  à la place de  $(e, t)$ . Nous répétons le procédé précédent et nous construisons une suite décroissante d'instants  $(t, \theta(t), \theta(\theta(t)), \dots)$  et une suite d'arête  $(e, e_1, e_2, \dots)$ . Or tout instant de la suite est supérieur à  $s$ , la suite est forcément finie. Donc il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\theta^k(t) \leq s$ . Or pour tout  $0 \leq i < k$ , l'arête  $(e_i, \theta^i(t))$  est reliée à  $(e_{i+1}, \theta^{i+1}(t))$  par un chemin espace-temps fermé. Nous obtenons un chemin espace-temps fermé qui relie  $(e, t)$  à  $(e_k, \theta^k(t))$  en concaténant les bouts obtenus à chaque étape. Par construction, ce chemin est monotone en temps.

Pour obtenir le deuxième point nous faisons un procédé de modification par récurrence. Nous notons le chemin précédent par  $(e_i, \theta^i(t))_{0 \leq i \leq k}$  avec  $e_0 = e, t_0 = t$  et  $e_k = f, t_k = s$ . Nous commençons avec  $e_0$ . A l'étape  $e_i$ , nous distinguons différents cas :

- Si pour toute indice  $j$  telle que  $i < j \leq k$  nous avons  $e_j \neq e_i$ , nous passons  $e_i$  et nous recommençons la modification avec  $e_{i+1}$ .
- S'il existe  $i < j \leq k$  une indice telle que  $e_j = e_i$  mais  $e_i$  s'ouvre entre  $\theta^j(t)$  et  $\theta^i(t)$ , nous passons  $e_i$  et nous recommençons la modification avec  $e_{i+1}$ .
- S'il existe  $i < j \leq k$  une indice telle que  $e_j = e_i$  et que  $e_i$  reste fermée entre  $\theta^j(t)$  et  $\theta^i(t)$ , nous enlevons les arêtes entre  $i$  et  $j$  et nous relient directement  $e_i$  et  $e_j$  par un changement de temps et nous recommençons avec  $e_j$ .

Or la longueur du chemin diminue à chaque modification, ce procédé se termine. De plus, ce procédé ne modifie pas l'ordre de  $\theta^i$ , la monotonie est conservée.  $\square$

### 3 La comparaison entre deux processus

Nous étudions maintenant le chemin espace-temps dans les deux processus. En particulier, nous comparons les arêtes fermées du chemin.

Soit  $(e, t)$  une arête-temps fermée dans le processus  $Y$ . Dans le processus  $X$ , vu qu'il n'y a pas de conditionnement, elle peut être ouverte ou fermée à l'instant  $t$ . Si elle est ouverte, par la définition de l'interface,  $e \in \mathcal{I}_t$ . Dans le cas contraire, elle est fermée dans le processus de percolation standard, nous avons  $P(X_t(e) = 0) = 1 - p$ . Si  $e$  se ferme dans  $Y$  à un instant, elle se ferme aussi dans  $X$ . Par contre, si  $e$  est pivot dans  $Y$ , lors d'une arrivée du processus d'ouverture, elle s'ouvre dans  $X$  mais pas dans  $Y$ . Maintenant, regardons le chemin espace-temps obtenu dans la proposition 1. Or il existe des arêtes pivot dans le chemin, ce chemin n'est pas forcément fermé dans le processus  $X$ . Par contre, nous pouvons considérer le dernier instant de fermeture avant le passage sur une arête. Plus précisément, notons  $(e_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$

le chemin espace-temps. Nous considérons  $\tilde{t}_i$  le dernier instant d'arrivée du processus de fermeture de l'arête  $e_i$  avant  $t_i$ , i.e.

$$\tilde{t}_i = \sup \{t \leq t_i \mid e_t = e_i, b_t = 0\}$$

Nous allons distinguer trois cas. Dans le premier cas  $\tilde{t}_i \geq s$ , l'arête  $e_i$  est fermée à  $t_i$  car il y a une fermeture après l'instant  $s$ . Dans le deuxième cas  $\tilde{t}_i < s$  et  $e_i$  est fermé à l'instant  $s$  dans les deux processus. Dans le dernier cas,  $\tilde{t}_i < s$  et à l'instant  $s$ ,  $e_i$  est fermée dans  $Y$  mais ouverte dans  $X$ , nous remarquons que  $e_i \in \mathcal{I}_s$ . Nous en déduisons la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Soient  $s < t$  deux instants et  $\gamma$  un chemin espace-temps fermé entre  $s$  et  $t$  dans le processus conditionné  $Y$ , une arête  $e$  de  $\gamma$  vérifie une des trois propriétés suivantes :*

- (A)  $e \in \mathcal{I}_s$  ;
- (B)  $e$  est fermée à l'instant  $s$  dans le processus de percolation dynamique  $X$  ;
- (C) Il existe un instant  $r \in ]s, t]$  où il y a un instant d'arrivée du processus de fermeture.

## 4 Une inégalité de type BK

Nous allons obtenir une inégalité de type BK à l'aide du couplage. Nous reprenons les notations de la proposition 2 et nous notons  $\mathcal{E}$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}$  et  $\mathcal{D}$  les ensembles de configurations dans  $\Lambda$  entre  $s$  et  $t$  suivants,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma) &= \{ \gamma \text{ fermé entre } s \text{ et } t \text{ disjoint de } \mathcal{P}_s \cup \mathcal{I}_s \} \\ \tilde{\mathcal{E}}(\gamma) &= \{ \text{toute arête de } \gamma \text{ vérifie (B) ou (C)} \} \\ \mathcal{D} &= \{ T \not\leftrightarrow B \text{ entre } s \text{ et } t \} \end{aligned}$$

Nous montrons l'inégalité suivante :

**Proposition 3.**  $P(\mathcal{E} \cap \mathcal{D}) \leq P(\tilde{\mathcal{E}})P(\mathcal{D})$

*Démonstration.* Nous utilisons le couplage et nous considérons l'événement  $\mathcal{E}$  dans le processus  $Y$ . Or le processus  $Y$  est conditionné par  $\mathcal{D}$ , nous obtenons :

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{E} \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D})}.$$

Par la proposition 2, or les arêtes du chemin espace temps sont disjointes de  $\mathcal{P}_s$ , elles vérifient donc (B) ou (C). Donc l'événement  $\tilde{\mathcal{E}}$  est réalisé dans le processus  $X$ . Nous obtenons

$$P(\mathcal{E}|\mathcal{D}) \leq P(\tilde{\mathcal{E}}).$$

Enfin, nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux inégalités précédentes.  $\square$

Nous remarquons que cette inégalité permet de majorer l'intersection de deux événement par un produit de deux événement comme l'inégalité de BK. Mais la différence avec l'inégalité de BK est que l'un des deux événement à droite de l'inégalité est modifié selon le couplage.

## 5 La vitesse du déplacement

Nous présentons le problème central dans cette partie.

**Théorème 1.** *Soient  $e \in \mathbb{E}^d$  une arête,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{N}$  un instant et  $0 \leq s \leq K \frac{l}{\ln l}$  un entier naturel. Soit  $d$  la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^d$  et nous supposons que*

$$d(e, \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \geq l.$$

*Il existe une constante  $c$  indépendant de  $l, t, s$  telle que la probabilité pour que  $e$  appartienne à  $\mathcal{I}_{t+s} \cup \mathcal{P}_{t+s}$  décroît exponentiellement vite avec la distance  $l$ , i.e.*

$$\exists c > 0, P(e \in \mathcal{P}_{t+s} \cup \mathcal{I}_{t+s} | d(e, \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \geq l) \leq \exp(-cl) \quad (1)$$

Pour montrer ce résultat, nous allons d'abord construire un chemin espace-temps selon la proposition 1 pour représenter le déplacement de l'interface. Ensuite, nous appliquons la proposition 3 pour obtenir l'événement  $\tilde{\mathcal{E}}$  dans le processus  $X$ . Enfin, nous estimons la probabilité de  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Nous calculons d'abord  $P(\tilde{\mathcal{E}})$ .

**Proposition 4.** *Soit  $\gamma$  un chemin espace-temps de longueur  $n$  avec  $m$  changement de temps entre  $s$  et  $t$ . Nous supposons qu'il existe une constante  $\kappa$  telle que  $t - s \leq \kappa|\lambda|$ , alors il existe une constante  $0 \leq \hat{p} < 1$  et une constante  $c(p) > 0$  qui tend vers  $+\infty$  quand  $p$  tend vers 1 telles que*

$$\forall p \geq \hat{p}, \quad P(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma)) \leq \exp(-c(p)(n - m)).$$

*Démonstration.* Nous fixons d'abord une arête  $e \in \Lambda$  et nous notons  $N_e$  le nombre d'arrivées de fermeture de l'arête  $e$ . Nous calculons la probabilité que  $e$  vérifie  $(B)$  ou  $(C)$ .

$$\begin{aligned} P(e \text{ vérifie } (B) \text{ ou } (C)) &\leq P(e \text{ fermé à l'instant } s) \\ &\quad + P(\exists r \in ]s, t], N_e(r) = N_e(r - 1) + 1) \end{aligned}$$

Or la loi de la configuration dans  $\Lambda$  à l'instant  $s$  est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$ , nous obtenons

$$P(e \text{ fermé à l'instant } s) = 1 - p.$$

Comme à chaque instant, nous choisissons une arête dans  $\Lambda$  uniformément et nous tirons l'état de cette arête selon la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , nous obtenons la deuxième probabilité

$$P(\exists r \in ]s, t], N_e(r) = N_e(r-1) + 1) \leq \frac{t-s}{|\Lambda|}(1-p) \leq \kappa(1-p).$$

Nous obtenons que pour une arête  $e$  fixée,

$$P(e \text{ vérifie } (B) \text{ ou } (C)) \leq (1 + \kappa)(1 - p).$$

Nous considérons maintenant chaque arête de  $\gamma$ . Elle contient au moins  $n - m$  déplacements en espace. Or  $(B)$  et  $(C)$  sont entièrement déterminés par le processus  $X$  et les arêtes ne restent pas fermées entre deux visites, nous obtenons

$$P(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma)) \leq (1 + \kappa)^{n-m}(1 - p)^{n-m} = \exp(\ln[(1 + \kappa)(1 - p)](n - m)).$$

Nous posons  $c(p) = -\ln[(1 + \kappa)(1 - p)]$ . Or  $\ln[(1 + \kappa)(1 - p)]$  tend vers  $-\infty$  quand  $p$  tend vers 1. Il existe une constante  $\hat{p} < 1$  telle que pour tout  $p \geq \hat{p}$ , nous avons  $c(p) > 0$ . Nous obtenons aussi  $\lim_{p \rightarrow 1} c(p) = +\infty$ .  $\square$

Nous montrons maintenant le résultat (1).

*Démonstration.* Nous considérons d'abord le cas  $e \in \mathcal{P}_{t+s}$  et est de distance au moins  $l$  avec  $\mathcal{P}_t$ . D'après la proposition 1, il existe un chemin espace-temps  $\rho$  qui relie  $e$  à une arête de  $\mathcal{P}_t$ . Nous notons  $\rho = (e_i, t_i)_{1 \leq i \leq N}$  avec  $e_1 = e, t_1 = t + s$  et  $e_N \in \mathcal{P}_t, t_N = t$ . Ce chemin est de projection en espace au moins  $l$  car  $d(e, \mathcal{P}_t) \geq l$ . Nous notons  $(e_n, t_n)$  la première arête de  $\rho$  qui sort de la boule  $B(e, l/2)$  de ce chemin, i.e.

$$n = \sup \{k > 1, \forall 1 < i < k, e_i \in B(e, l/2)\}.$$

Nous notons  $\gamma$  le bout de  $\rho$  entre  $(e_1, t_1)$  et  $(e_n, t_n)$ . Nous écrivons donc

$$P(e \in \mathcal{P}_{t+s} | e \notin \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \leq \sum_{\gamma} P(e \xrightarrow{\gamma \text{ fermé}} \partial B(e, l/2)).$$

Nous fixons d'abord la longueur du chemin  $n$  et le nombre de changement de temps  $m$ . La proposition 2 et 3 nous permet de majorer chaque terme de la somme par  $P(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma))$  et d'après la proposition 4 nous avons qu'il existe  $\tilde{p}$  indépendant de  $\gamma$  et  $c(p)$  telles que

$$P(e \in \mathcal{P}_{t+s} | e \notin \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \leq \sum_{n, m, \gamma} \exp(-c(p)(n - m)).$$



Il nous faut maintenant compter le nombre de chemin  $\gamma$  de longueur  $n$  avec  $m$  changements de temps entre  $t$  et  $t + s$ . Or le chemin est monotone, il y a  $\binom{s}{m}$  choix pour les instants du chemin. Or  $\gamma$  est à l'intérieur de  $B(e, l/2)$ , il y a au plus  $l^{md}$  choix pour les arêtes de changement de temps. Le nombre de  $\gamma$  est donc majoré par

$$\binom{s}{m} l^{md} (2d - 1)^{n-m} \leq (sl^d)^m (2d - 1)^{n-m}.$$

Or  $m \leq s$  et  $n \geq l/2$ , nous obtenons donc une majoration de la probabilité suivante

$$\begin{aligned} P(e \in \mathcal{P}_{t+s} | e \notin \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) &\leq \sum_{n \geq l/2} s(sl^d)^s \exp(-c(p)(n-s)) \\ &\leq \sum_{n \geq l/2} \exp(\ln s + s \ln s + sd \ln l + sc(p) - c(p)n) \\ &\leq \exp(\ln s + s \ln s + sd \ln l + sc(p) - c(p)\frac{l}{3}). \end{aligned}$$

Or il existe une constante  $K$  telle que  $s \leq K(\frac{l}{\ln l})$ , nous pouvons majorer  $\ln s + s \ln s + sd \ln l + sc(p)$  par  $3Kl + Kc(p)\frac{l}{\ln l}$ . Or  $c(p)$  tend vers  $+\infty$  quand  $p$  tend vers 1, donc pour  $l$  assez grand et  $p > \tilde{p}$ , nous avons

$$P(e \in \mathcal{P}_{t+s} | e \notin \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \leq \exp(-c(p)l).$$

Le cas où  $e \in \mathcal{I}_{t+s}$  se déduit facilement du cas  $e \in \mathcal{P}_{t+s}$ . En effet, pour avoir une interface contenant l'arête  $e$  à l'instant  $t + s$ , il faut que l'arête  $e$  devienne pivot avant cette instant. Sinon, elle se comporte identiquement dans les deux processus  $X$  et  $Y$ . Donc nous avons l'inclusion des événements

$$\{e \in \mathcal{I}_{t+s}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l\} \subset \bigcup_{0 < r < s} \{e \in \mathcal{P}_{t+r}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l\}.$$

Or  $s$  est majoré par  $K\frac{l}{\ln l}$ , nous avons la majoration de la probabilité

$$\begin{aligned} P(e \in \mathcal{I}_{t+s}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l) &\leq \sum_{0 < r < s} P(e \in \mathcal{P}_{t+r}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l) \\ &\leq K\frac{l}{\ln l} \exp(-c(p)l) \leq \exp(-c'(p)l) \end{aligned}$$

pour une autre constante  $c'(p)$ .  $\square$