

1 Introduction

1.1 Les notations générales

Le réseau $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. Soit x, y deux points de \mathbb{Z}^d , nous disons que x, y sont voisins s'ils sont à distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble \mathbb{E}^d est l'ensemble des paires $\{x, y\}$, où x, y sont deux points voisins de \mathbb{Z}^d . Le réseau $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ est le graphe dont \mathbb{Z}^d est l'ensemble des sommets et \mathbb{E}^d est l'ensemble des arêtes. Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, nous disons que $e = \langle x, y \rangle$ est incluse dans A si le segment ouvert $]x, y[$ est inclus dans A .

Les boîtes $\Lambda(\ell, h)$. Nous notons $\Lambda(\ell, h)$ le sous graphe de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ à l'intérieur du rectangle $[-\ell, \ell] \times [-h, h]$. Nous notons aussi $T(\ell, h)$ le bord supérieur de $\Lambda(\ell, h)$, i.e. le segment $[-\ell, \ell] \times (0, h)$. Nous notons aussi $B(\ell, h)$ le bord inférieur de $\Lambda(\ell, h)$, i.e. $[-\ell, \ell] \times (0, -h)$. Les deux bords verticaux de la boîte $\Lambda(\ell, h)$ sont notés $V(\ell, h)$.

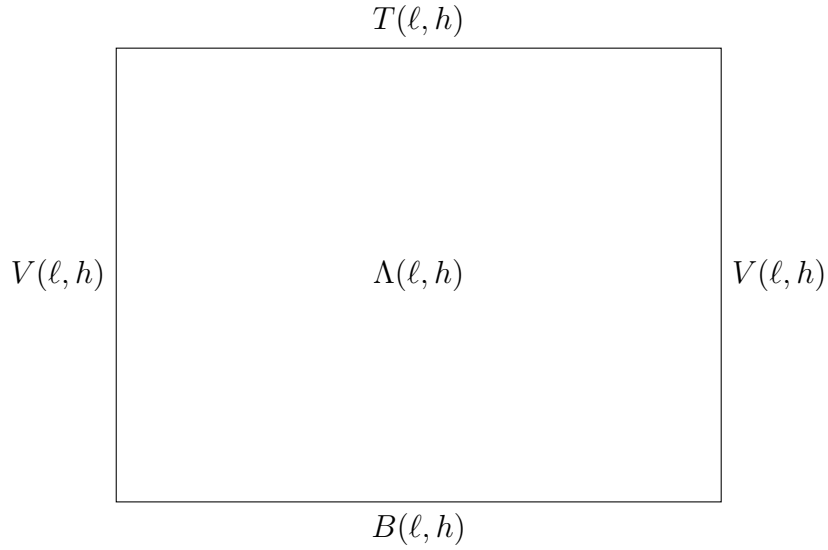


FIGURE 1 – La boîte $\Lambda(\ell, h)$

Les ensembles séparants. Soient A, B deux sous-ensembles de \mathbb{Z}^d . Nous disons qu'un ensemble d'arêtes $S \subset \mathbb{E}^d$ sépare A et B si aucune partie connexe du graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d \setminus S)$ n'intersecte simultanément A et B . Un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour A et B . Nous disons que S est un ensemble séparant minimal pour A, B si aucun sous-ensemble strict de S ne sépare A et B .

Les configurations. L'espace des configurations est $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. Une configuration générique est notée $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^d\} \in \Omega$. L'arête e est ouverte dans la configuration ω si $\omega(e) = 1$ et fermée si $\omega(e) = 0$. Soient A un sous-ensemble de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ et ω une configuration, la configuration ω restreinte à A , notée $\omega|_A$, est la restriction de ω aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans A . Soient $e \in \mathbb{E}^d$ une arête et $\omega \in \Omega$ une configuration, nous définissons les configurations ω^e, ω_e par :

$$\forall f \in \mathbb{E}^d \quad \omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases}, \quad \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}.$$

Les configurations ω^e, ω_e sont obtenues à partir de ω en ouvrant ou fermant l'arête e .

Les chemins. Soient x et y deux sommets dans \mathbb{Z}^d , un chemin entre x et y est une suite $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$ de sommets x_i et d'arêtes e_i distincts où $x_0 = x$ et $x_{n+1} = y$ et e_i est l'arête joignant x_i à x_{i+1} . Nous disons que x et y sont reliés par un chemin ouvert dans la configuration ω , noté $x \xrightarrow{\omega} y$, s'il existe un chemin qui relie x, y tel que toute arête de ce chemin est ouverte dans la configuration ω . Nous notons aussi $x \not\xrightarrow{\omega} y$ l'événement complémentaire. Soit A un sous-ensemble de $\Lambda(l, h)$, nous notons $x \xrightarrow{A} y$ s'il existe un chemin ouvert entre x et y dont les arêtes sont incluses dans A .

Soient A, B deux sous-graphes de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, nous disons que A est connecté à B dans la configuration ω , que nous notons $A \xleftrightarrow{\omega} B$, s'il existe un chemin entre un sommet de A et un sommet de B . Dans ce mémoire, nous étudions en particulier les chemins entre un sommet de $T(l, h)$ et un sommet de $B(l, h)$.

La probabilité de percolation. Soit un réel $p \in [0, 1]$. Sur l'espace Ω , nous considérons la tribu cylindrique \mathcal{F} . Nous considérons la probabilité produit

$$P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes \mathbb{E}^d}.$$

Intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau \mathbb{Z}^d avec une probabilité $1-p$. Pour A un sous-ensemble de $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, $\Omega|_A$ est l'ensemble de configurations restreintes dans A .

1.2 Le processus de percolation dynamique

Nous considérons le processus de percolation dynamique dans une boîte Λ . Il s'agit d'une suite de triplet $(X_t, E_t, B_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dont $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus

à valeurs dans $\Omega_{|\Lambda}$, $(E_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite d'arêtes dans la boîte Λ et $(B_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$. Décrivons maintenant le dynamique du processus. La suite $(E_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite d'arêtes indépendantes dont chaque E_t suit la loi uniforme sur l'ensemble des arêtes à l'intérieur de Λ . La suite $(B_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite indépendante de variable de Bernoulli de paramètre p . Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ se définit par une récurrence sur t , plus précisément, nous partons d'une configuration initiale X_0 . A l'instant $t \geq 1$, nous changeons l'état de l'arête E_t en B_t , i.e.

$$X_t(e) = \begin{cases} X_{t-1}(e) & \text{si } e \neq E_t \\ B_t & \text{si } e = E_t \end{cases}.$$

La probabilité de percolation dynamique. Nous notons $\bar{\Omega} = \Omega_{|\Lambda}^{\mathbb{N}} \times \Lambda^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'espace de configuration de percolation dynamique et $\bar{\mathcal{F}}$ la filtration naturelle associée. Nous notons P_X la loi marginale du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dans le couple $(X_t, e_t, b_t)_{t \in \mathbb{N}}$.

1.3 Les chemins espace-temps

Nous introduisons les chemins espace-temps définis avec un processus de percolation dynamique X . Un chemin espace-temps s'obtient en prolongeant un chemin dans le temps. Plus précisément, nous définissons une relation d'équivalence \xleftrightarrow{X} sur les couples $(e, t) \in (\mathbb{E}^d, \mathbb{N})$ par, soient $e = \langle a, b \rangle, f = \langle c, d \rangle \in \mathbb{E}^d$ deux arêtes, et $s, t \geq 0$ deux instants,

$$\begin{aligned} (e, t) &\xleftrightarrow{X} (f, t) \text{ si } a \xleftrightarrow{X_t} c, X_t(e) = 1, X_t(f) = 1 \\ (e, s) &\xleftrightarrow{X} (e, t) \text{ si } \forall r \in [s \wedge t, s \vee t] \quad X_r(r) = 1. \end{aligned}$$

Nous généralisons ensuite cette relation d'équivalence sur les sommets de \mathbb{Z}^d par, soit $x, y \in \mathbb{Z}^d, s, t \in \mathbb{N}$,

$$(x, s) \xleftrightarrow{X} (y, t) \text{ si } \exists e \text{ d'une extrémité } x, f \text{ d'une extrémité } y \quad (e, s) \xleftrightarrow{X} (f, t).$$

Nous disons qu'il existe un chemin espace-temps entre (x, s) et (y, t) si $(x, s) \xleftrightarrow{X} (y, t)$.

1.4 Les interfaces par un couplage

Nous introduisons un couplage qui nous permet de définir les interfaces entre le haut et le bas.

Nous définissons le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ par la formule suivante :

$$Y_t(e) = \begin{cases} X_t(e) & \text{si } e \neq E_t \\ 0 & \text{si } e = E_t \text{ et } B_t = 0 \\ 1 & \text{si } e = E_t, B_t = 1 \text{ et } T \xleftrightarrow{Y_{t-1}^{E_t}} B \\ 0 & \text{si } e = E_t, B_t = 1 \text{ et } T \xleftarrow{Y_{t-1}^{E_t}} B \end{cases}$$

Le processus Y est un processus de percolation dynamique conditionné par l'événement $\{T \not\longleftrightarrow B\}$. Lorsque nous essayons de ouvrir une arête e fermée de la boîte Λ à un instant, nous vérifions d'abord si cette modification induit une connexion par une un chemin ouvert entre le haut et le bas dans le processus Y . Si c'est le cas, e reste fermée dans le processus Y mais s'ouvre dans le processus X . Or la fermeture d'une arête ne peut pas créer une connexion entre le haut et le bas dans le processus Y , Les deux processus X et Y se comportent identiquement lorsque nous essayons de fermer une arête. Nous proposons maintenant une définition de l'interface à partir du couplage précédent.

Définition 1. Soit X_t le processus de percolation dynamique et Y_t le processus de percolation dynamique conditionné par $\{T \not\longleftrightarrow B\}$, l'interface à instant t entre T et B que nous notons \mathcal{I}_t est l'ensemble des arêtes de Λ qui sont différentes entre les configurations X_t et Y_t , i.e.

$$\mathcal{I}_t = \{e \in \Lambda \mid X_t(e) \neq Y_t(e)\}$$

Les arêtes de \mathcal{I}_t sont fermées dans la configuration Y_t mais ouvertes dans X_t car la configuration X_t domine stochastiquement Y_t . Nous définissons aussi \mathcal{P}_t l'ensemble des arêtes pivot dans Λ pour l'événement $\{T \longleftrightarrow B\}$ dans le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$.

Définition 2. L'ensemble \mathcal{P}_t est l'ensemble des arêtes dans Λ dont ouverture induit l'événement $\{T \longleftrightarrow B\}$ dans le processus Y_t , i.e.

$$\mathcal{P}_t = \{e \in \Lambda \mid T \xleftrightarrow{Y_t^e} B\}$$

2 La construction d'un chemin espace-temps

Nous allons énoncer une première proposition qui permet de construire un chemin espace temps dont nous avons besoin pour la suite de notre étude.

Proposition 1. Soient $0 < s < t$ deux instants et $e \in \mathcal{P}_t$ et $f \in \mathcal{P}_s$. Il existe un chemin espace-temps monotone en temps et fermé dans le processus Y

qui relie (e, t) à (f, s) . De plus, si une arête e est visitée à deux instants différents u et v , il existe un instant $w \in]u, v[$ où e est ouverte à w .

Démonstration. Nous remarquons d'abord qu'à l'instant t donné, il existe un chemin fermé qui relie tous les arêtes pivot de cet instant. Nous considérons $\theta(t)$ le dernier instant où il existe une arête de \mathcal{P}_t qui devient pivot, i.e.,

$$\theta(t) = \inf \{ r \leq t, \exists e_1 \in \mathcal{P}_t, e_1 \text{ devient pivot à l'instant } r, e_1 \text{ pivot sur } [r, t] \}.$$

Nous montrons que $\theta(t) < t$. En effet, si à l'instant t , il y a une arête qui se ferme, alors il n'y a pas d'arête pivot créé à l'instant t , donc les arêtes de \mathcal{P}_t sont aussi pivot à l'instant $t - 1$. Dans le cas contraire, si une arête s'ouvre à l'instant t . Nous considérons une arête ε de \mathcal{P}_{t-1} , il existe un chemin ouvert passant par ε qui relie le haut et le bas de Λ à l'instant $t - 1$. Or l'ouverture d'une arête quelconque ne modifie pas ce chemin ouvert, ε est toujours pivot à l'instant t . Nous avons donc trouvé une arête qui est devenue pivot avant l'instant t . D'où $\theta(t) < t$.

Si $\theta(t) \leq s$, le chemin $(e, t), (e_1, t), (e_1, s)$ est un chemin espace-temps voulu. Sinon, $\theta(t) > s$, nous considérons l'arête-temps $(e_1, \theta(t)) \in \mathcal{P}_{\theta(t)}$ qui est reliée à (e, t) par le chemin $(e, t), (e_1, t), (e_1, \theta(t))$. Nous devons maintenant montrer le résultat voulu avec $(e_1, \theta(t))$ à la place de (e, t) . Nous répétons le procédé précédent et nous construisons une suite décroissante d'instants $(t, \theta(t), \theta(\theta(t)), \dots)$ et une suite d'arête (e, e_1, e_2, \dots) . Or tout instant de la suite est supérieur à s , la suite est forcément finie. Donc il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta^k(t) \leq s$. Or pour tout $0 \leq i < k$, l'arête $(e_i, \theta^i(t))$ est reliée à $(e_{i+1}, \theta^{i+1}(t))$ par un chemin espace-temps fermé. Nous obtenons un chemin espace-temps fermé qui relie (e, t) à $(e_k, \theta^k(t))$ en concaténant les bouts obtenus à chaque étape. Par construction, ce chemin est monotone en temps.

Pour obtenir le deuxième point nous faisons une procédure de modification par récurrence. Nous notons le chemin précédent par $(e_i, \theta^i(t))_{0 \leq i \leq k}$ avec $e_0 = e, t_0 = t$ et $e_k = f, t_k = s$. Nous commençons avec e_0 . A l'étape e_i , nous distinguons différents cas :

- Si pour toute indice j telle que $i < j \leq k$ nous avons $e_j \neq e_i$, nous passons e_i et nous recommençons la modification avec e_{i+1} .
- S'il existe $i < j \leq k$ une indice telle que $e_j = e_i$ mais e_i s'ouvre entre $\theta^j(t)$ et $\theta^i(t)$, nous passons e_i et nous recommençons la modification avec e_{i+1} .
- S'il existe $i < j \leq k$ une indice telle que $e_j = e_i$ et que e_i reste fermée entre $\theta^j(t)$ et $\theta^i(t)$, nous enlevons les arêtes entre i et j et nous relierons directement e_i et e_j par un changement de temps et nous recommençons avec e_j .

Or la longueur du chemin diminue à chaque modification, ce procédure se termine. De plus, ce procédure ne modifie pas l'ordre de θ^i , la monotonie est conservée. \square

3 La comparaison entre deux processus

Nous étudions maintenant le chemin espace-temps dans les deux processus. En particulier, nous comparons les arêtes fermées du chemin.

Soit (e, t) une arête-temps fermée dans le processus Y . Dans le processus X , vu qu'il n'y a pas de conditionnement, elle peut être ouverte ou fermée à l'instant t . Si elle est ouverte, par la définition de l'interface, $e \in \mathcal{I}_t$. Dans le cas contraire, elle est fermée dans le processus de percolation standard, nous avons $P(X_t(e) = 0) = 1 - p$. Si e se ferme dans Y à un instant, elle se ferme aussi dans X . Par contre, si e est pivot dans Y , lors d'une arrivée du processus d'ouverture, elle s'ouvre dans X mais pas dans Y . Maintenant, regardons le chemin espace-temps obtenu dans la proposition 1. Or il existe des arêtes pivot dans le chemin, ce chemin n'est pas forcément fermé dans le processus X . Par contre, nous pouvons considérer le dernier instant de fermeture avant le passage sur une arête. Plus précisément, notons $(e_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$ le chemin espace-temps. Nous considérons \tilde{t}_i le dernier instant d'arrivée du processus de fermeture de l'arête e_i avant t_i , i.e.

$$\tilde{t}_i = \sup \{t \leq t_i \mid E_t = e_i, B_t = 0\}$$

Nous allons distinguer trois cas. Dans le premier cas $\tilde{t}_i \geq s$, l'arête e_i est fermée à t_i car il y a une fermeture après l'instant s . Dans le deuxième cas $\tilde{t}_i < s$ et e_i est fermé à l'instant s dans les deux processus. Dans le dernier cas, $\tilde{t}_i < s$ et à l'instant s , e_i est fermée dans Y mais ouverte dans X , nous remarquons que $e_i \in \mathcal{I}_s$. Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient $s < t$ deux instants et γ un chemin espace-temps fermé entre s et t dans le processus conditionné Y , une arête e de γ vérifie une des trois propriétés suivantes :*

- (A) $e \in \mathcal{I}_s$;
- (B) e est fermée à l'instant s dans le processus de percolation dynamique X ;
- (C) Il existe un instant $r \in]s, t]$ où il y a un instant d'arrivée du processus de fermeture, i.e. il existe un instant r tel que $E_r = e$ et $B_r = 0$.

4 Une inégalité de type BK

Nous allons obtenir une inégalité qui nous permet de comparer un chemin espace temps dans les deux configuration. Nous reprenons les notation de la proposition 2 et pour un chemin espace-temps γ fixé nous notons $\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}$ et \mathcal{D} les ensembles de configurations dans Λ entre s et t suivants,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\gamma) &= \{ \gamma \text{ fermé sur l'intervalle de temps } [s, t] \text{ et disjoint de } \mathcal{P}_s \cup \mathcal{I}_s \text{ à l'instant } s \} \\ \tilde{\mathcal{E}}(\gamma) &= \{ \text{toute arête de } \gamma \text{ vérifie (B) ou (C)} \} \\ \mathcal{D} &= \{ T \not\leftrightarrow B \text{ entre } s \text{ et } t \text{ dans le processus } X \}\end{aligned}$$

Nous montrons l'inégalité suivante :

Proposition 3. $P_X(\mathcal{E} \cap \mathcal{D}) \leq P_X(\tilde{\mathcal{E}})P_X(\mathcal{D})$

Démonstration. Nous utilisons le couplage et nous considérons l'événement \mathcal{E} . Or le processus Y est le processus X conditionné par \mathcal{D} , nous obtenons :

$$P_Y(\mathcal{E}) = P_X(\mathcal{E}|\mathcal{D}) = \frac{P_X(\mathcal{E} \cap \mathcal{D})}{P_X(\mathcal{D})}.$$

Par la proposition 2, or les arêtes du chemin espace temps sont disjointes de \mathcal{P}_s , elles vérifient donc (B) ou (C). Donc l'événement $\tilde{\mathcal{E}}$ est réalisé dans le processus X . Nous obtenons

$$P_Y(\mathcal{E}) \leq P_X(\tilde{\mathcal{E}}).$$

Enfin, nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux inégalités précédentes. \square

Nous remarquons que cette inégalité permet de majorer l'intersection de deux événement par un produit de deux événement comme l'inégalité de BK. Mais la différence avec l'inégalité de BK est que l'un des deux événement à droite de l'inégalité est modifié selon le couplage.

5 La vitesse du déplacement

Nous présentons le problème central dans cette partie.

Théorème 1. Soient $e \in \mathbb{E}^d$ une arête, $l \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$ un instant et $0 \leq s \leq K \frac{l}{\ln l}$ un entier naturel. Soit d la distance euclidienne dans \mathbb{R}^d et nous supposons que

$$d(e, \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \geq l.$$

Il existe une constante c indépendant de l, t, s telle que la probabilité pour que e appartienne à $\mathcal{I}_{t+s} \cup \mathcal{P}_{t+s}$ décroît exponentiellement vite avec la distance l , i.e.

$$\exists c > 0, P_Y(e \in \mathcal{P}_{t+s} \cup \mathcal{I}_{t+s} | d(e, \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \geq l) \leq \exp(-cl) \quad (1)$$

Pour montrer ce résultat, nous allons d'abord construire un chemin espace-temps selon la proposition 1 pour représenter le déplacement de l'interface. Ensuite, pour un chemin γ fixé, nous appliquons la proposition 3 pour obtenir l'événement $\mathcal{E}(\gamma)$ dans le processus X . Enfin, nous estimons la probabilité de $\mathcal{E}(\gamma)$ et nous sommes sur les γ possibles. Nous calculons maintenant $P_X(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma))$.

Proposition 4. *Soit γ un chemin espace-temps de longueur n avec m changements de temps entre s et t . Nous supposons qu'il existe une constante κ telle que $t - s \leq \kappa|\Lambda|$, alors il existe une constante $0 \leq \hat{p} < 1$ et une constante $c(p) > 0$ qui tend vers $+\infty$ quand p tend vers 1 telles que*

$$\forall p \geq \hat{p}, \quad P_X(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma)) \leq \exp(-c(p)(n - m)).$$

Démonstration. Nous fixons d'abord une arête $e \in \Lambda$. Nous calculons la probabilité que e vérifie (B) ou (C).

$$P_X(e \text{ vérifie (B) ou (C)}) \leq P_X(e \text{ fermé à l'instant } s) + P_X(\exists r \in]s, t], E_r = e, B_r = 0)$$

Or la loi de la configuration X_s dans Λ à l'instant s est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre p , nous obtenons

$$P_X(e \text{ fermée à l'instant } s) = 1 - p.$$

Comme à chaque instant, nous choisissons une arête dans Λ uniformément et nous tirons l'état de cette arête selon la loi de Bernoulli de paramètre p , nous obtenons la deuxième probabilité

$$P_X(\exists r \in]s, t], E_r = e, B_r = 0) \leq \frac{t - s}{|\Lambda|}(1 - p) \leq \kappa(1 - p).$$

Nous obtenons que pour une arête e fixée,

$$P_X(e \text{ vérifie (B) ou (C)}) \leq (1 + \kappa)(1 - p).$$

Nous considérons maintenant chaque arête de γ . Elle contient au moins $n - m$ déplacements en espace. Or (B) et (C) sont entièrement déterminés par le

processus X et les arêtes ne restent pas fermées entre deux visites, nous obtenons

$$P_X(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma)) \leq (1 + \kappa)^{n-m} (1 - p)^{n-m} = \exp(\ln[(1 + \kappa)(1 - p)](n - m)).$$

Nous posons $c(p) = -\ln[(1 + \kappa)(1 - p)]$. Or $\ln[(1 + \kappa)(1 - p)]$ tend vers $-\infty$ quand p tend vers 1. Il existe une constante $\hat{p} < 1$ telle que pour tout $p \geq \hat{p}$, nous avons $c(p) > 0$. Nous obtenons aussi $\lim_{p \rightarrow 1} c(p) = +\infty$. \square

Nous montrons maintenant le théorème 1.

Démonstration. Nous considérons d'abord le cas $e \in \mathcal{P}_{t+s}$ et est de distance au moins l avec \mathcal{P}_t . D'après la proposition 1, il existe un chemin espace-temps ρ qui relie e à une arête de \mathcal{P}_t . Nous notons $\rho = (e_i, t_i)_{1 \leq i \leq N}$ avec $e_1 = e, t_1 = t + s$ et $e_N \in \mathcal{P}_t, t_N = t$. Ce chemin est de projection en espace au moins l car $d(e, \mathcal{P}_t) \geq l$. Nous notons (e_n, t_n) la première arête de ρ qui sort de la boule $B(e, l/2)$ de ce chemin, i.e.

$$n = \sup \{k > 1, \forall 1 < i < k, e_i \in B(e, l/2)\}.$$

Nous notons γ le bout de ρ entre (e_1, t_1) et (e_n, t_n) . Nous écrivons donc

$$P_Y(e \in \mathcal{P}_{t+s} | d(e, \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \geq l) \leq \sum_{\gamma} P_Y(e \xrightarrow{\gamma \text{ fermé}} \partial B(e, l/2)).$$

Nous fixons d'abord la longueur du chemin n et le nombre de changement de temps m . La proposition 2 et 3 nous permet de majorer chaque terme de la somme par $P_X(\tilde{\mathcal{E}}(\gamma))$ et d'après la proposition 4 nous avons qu'il existe \tilde{p} indépendant de γ et $c(p)$ telles que

$$P_Y(e \in \mathcal{P}_{t+s} | d(e, \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \geq l) \leq \sum_{n, m} \sum_{|\gamma|=n, m \text{ changements de temps}} \exp(-c(p)(n - m)).$$

Il nous faut maintenant compter le nombre de chemin γ de longueur n avec m changements de temps entre t et $t + s$. Or le chemin est monotone, il y a $\binom{s}{m}$ choix pour les instants du chemin. Or γ est à l'intérieur de $B(e, l/2)$, il y a au plus l^{md} choix pour les arêtes de changement de temps. Le nombre de γ est donc majoré par

$$\binom{s}{m} l^{md} (2d - 1)^{n-m} \leq (sl^d)^m (2d - 1)^{n-m}.$$

Or $m \leq s$ et $n \geq l/2$, nous obtenons donc une majoration de la probabilité suivante

$$\begin{aligned} P(e \in \mathcal{P}_{t+s} | e \notin \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) &\leq \sum_{n \geq l/2} s(sl^d)^s \exp(-c(p)(n-s)) \\ &\leq \sum_{n \geq l/2} \exp(\ln s + s \ln s + sd \ln l + sc(p) - c(p)n) \\ &\leq \exp(\ln s + s \ln s + sd \ln l + sc(p) - c(p)\frac{l}{3}). \end{aligned}$$

Or il existe une constante K telle que $s \leq K(\frac{l}{\ln l})$, nous pouvons majorer $\ln s + s \ln s + sd \ln l + sc(p)$ par $3Kl + Kc(p)\frac{l}{\ln l}$. Or $c(p)$ tend vers $+\infty$ quand p tend vers 1, donc pour l assez grand et $p > \tilde{p}$, nous avons

$$P(e \in \mathcal{P}_{t+s} | e \notin \mathcal{P}_t \cup \mathcal{I}_t) \leq \exp(-c(p)l).$$

Le cas où $e \in \mathcal{I}_{t+s}$ se déduit facilement du cas $e \in \mathcal{P}_{t+s}$. En effet, pour avoir une interface contenant l'arête e à l'instant $t+s$, il faut que l'arête e devienne pivot avant cet instant. Sinon, elle se comporte identiquement dans les deux processus X et Y . Donc nous avons l'inclusion des événements

$$\{e \in \mathcal{I}_{t+s}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l\} \subset \bigcup_{0 < r < s} \{e \in \mathcal{P}_{t+r}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l\}.$$

Or s est majoré par $K\frac{l}{\ln l}$, nous avons la majoration de la probabilité

$$\begin{aligned} P(e \in \mathcal{I}_{t+s}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l) &\leq \sum_{0 < r < s} P(e \in \mathcal{P}_{t+r}, d(e, \mathcal{I}_t \cup \mathcal{P}_t) \geq l) \\ &\leq K\frac{l}{\ln l} \exp(-c(p)l) \leq \exp(-c'(p)l) \end{aligned}$$

pour une autre constante $c'(p)$. □