

1 Le modèle

Nous notons $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus de percolation dynamique sur le réseau $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ et nous considérons la restriction de X dans une boîte finie Λ . Nous définissons la suite $(\tau_i)_{i \geq 0}$ des instants de changement dans une boîte finie $\Lambda(\ell, h)$, en posant $\tau_0 = 0$ et pour tout $i \geq 0$,

$$\tau_{i+1} = \inf \{ t > \tau_i : X_t|_{\Lambda(\ell, h)} \neq X_{\tau_i}|_{\Lambda(\ell, h)} \}.$$

Pour tout $i \geq 1$, il existe une unique arête e_i incluse dans $\Lambda(\ell, h)$ telle que $X_{\tau_i}(e_i) \neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$. Nous appelons la suite $(e_i)_{i \geq 1}$ la suite des arêtes modifiées. Nous notons $\{T \longleftrightarrow B\}$ l'événement il existe un chemin ouvert entre le haut et le bas de la boîte Λ et nous allons coupler $(Y_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. D'abord nous posons $Y_0 = X_0$ et X_0 une configuration qui vérifie $\{T \nleftrightarrow B\}$. Ensuite, soit $i \geq 0$, pour tout $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$, nous posons $Y_s = Y_{\tau_i}$, et $Y_{\tau_{i+1}}(e) = Y_{\tau_i}(e)$ si $e \neq e_{i+1}$, et nous déterminons $Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})$ en fonction de $X_{\tau_{i+1}}$ via la formule suivante :

$$Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 0 \\ 1 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \nleftrightarrow B \text{ dans } (Y_{\tau_i})^{e_{i+1}} \\ 0 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \longleftrightarrow B \text{ dans } (Y_{\tau_i})^{e_{i+1}} \end{cases}.$$

Le processus Y est le processus de percolation dynamique conditionné à rester dans l'ensemble $\{T \nleftrightarrow B\}$. Nous pouvons définir l'interface à l'aide de ce couplage.

Définition 1. Soit $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ un couplage défini précédemment, nous définissons l'interface dans $\Lambda(\ell, h)$ au temps t , que nous notons $\mathcal{I}_t(\ell, h)$, comme l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans X_t et fermées dans Y_t :

$$\mathcal{I}_t(\ell, h) = \{ e \in \mathbb{E}^2 : X_t(e) = 1, Y_t(e) = 0 \}.$$

Nous notons \mathcal{P}_t l'ensemble des arêtes pivot pour l'événement $\{T \longleftrightarrow B\}$ dans Y à l'instant t .

2 La construction d'un chemin espace-temps

Nous allons énoncer une première proposition qui permet de construire un chemin espace temps dont nous avons besoin pour l'estimée.

Proposition 1. Soit $0 < s < t$ deux instants et $e \in \mathcal{P}_t$ et $f \in \mathcal{P}_s$. Il existe un chemin espace-temps fermé dans le processus Y qui relie (e, t) à (f, s) .

Démonstration. Nous remarquons d'abord qu'à l'instant t donné, il existe un chemin fermé qui relie tous les arêtes pivot de cet instant. Nous considérons $\theta(t)$ le dernier instant où il existe une arête de \mathcal{P}_t qui devient pivot, i.e.,

$$\theta(t) = \sup \{ r \leq t, \exists e_1 \in \mathcal{P}_t, e_1 \text{ devient pivot à l'instant } r, e_1 \text{ pivot sur } [r, t] \}.$$

Nous montrons que $\theta(t) < t$. En effet, si à l'instant t , il y a une arête qui se ferme, alors il n'y a pas d'arête pivot créé à l'instant t , donc les arêtes de \mathcal{P}_t sont aussi pivot à l'instant $t - 1$. Dans le cas contraire, si une arête s'ouvre à l'instant t . Nous considérons une arête ϵ de \mathcal{P}_{t-1} , il existe un chemin ouvert passant par ϵ qui relie le haut et le bas à l'instant $t - 1$. Or une ouverture d'une arête quelconque ne modifie pas ce chemin ouvert, ϵ est toujours pivot à l'instant t . Donc ϵ est devenu pivot avant l'instant t . D'où $\theta(t) < t$. Si $\theta(t) \leq s$, le chemin $(e, t), (e_1, t), (e_1, s)$ est un chemin espace-temps voulu. Sinon, $\theta(t) > s$, nous considérons l'arête-temps $(e_1, \theta(t)) \in \mathcal{P}_{\theta(t)}$ qui est reliée à (e, t) par le chemin $(e, t), (e_1, t), (e_1, \theta(t))$. Nous devons maintenant montrer le résultat voulu avec $(e_1, \theta(t))$ à la place de (e, t) . Nous répétons le procédé précédent et nous construisons une suite décroissante d'instants $(t, \theta(t), \theta(\theta(t)), \dots)$ et une suite d'arête (e, e_1, e_2, \dots) . Or tout instant de la suite est supérieur à s , la suite est forcément finie. Donc il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta^k(t) \leq s$. Or pour tout $0 \leq i < k$, l'arête $(e_i, \theta^i(t))$ est reliée à $(e_{i+1}, \theta^{i+1}(t))$ par un chemin espace-temps fermé. Nous obtenons un chemin espace-temps fermé qui relie (e, t) à $(e_k, \theta^k(t))$. Or $\theta^k(t) \leq s$ et e_k est pivot entre $\theta^k(t)$ et s . Nous obtenons un chemin voulu. \square

3 La comparaison entre deux processus

Nous étudions maintenant le chemin espace-temps dans les deux processus, en particulier, nous comparons les arêtes fermées du chemin et nous allons obtenir une inégalité de type BK à l'aide du couplage.

Soit (e, t) une arête-temps fermée dans le processus Y . Dans le processus X , vu qu'il n'y a pas de conditionnement, elle peut être ouverte ou fermée à l'instant t . Si elle est ouverte, par la définition de l'interface, $e \in \mathcal{P}_t$. Dans le cas contraire, elle est fermée dans le processus de percolation standard, nous avons $P(X_t(e) = 0) = 1 - p$. Si e se ferme dans Y à un instant, elle se ferme aussi dans X . Par contre, si e est pivot dans Y , lors d'une arrivée du processus d'ouverture, elle s'ouvre dans X mais pas dans Y . Maintenant, regardons le chemin espace-temps obtenu dans la proposition 1. Or il existe des arêtes pivot dans le chemin, ce chemin n'est pas forcément fermé dans le processus X . Par contre, nous pouvons considérer le dernier instant de fermeture avant le passage sur une arête. Plus précisément, notons $(e_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$

le chemin espace-temps. Nous considérons \tilde{t}_i le dernier instant d'arrivée du processus de fermeture de l'arête e_i avant t_i . (*notation ?*) Nous allons distinguer trois cas. Dans le premier cas $\tilde{t}_i \geq s$, l'arête e_i est fermée à t_i car il y a une fermeture après l'instant s . Dans le deuxième cas $\tilde{t}_i < s$ et e_i est fermé à l'instant s dans les deux processus. Dans le dernier cas, $\tilde{t}_i < s$ et à l'instant s , e_i est fermée dans Y mais ouverte dans X , nous remarquons que $e_i \in \mathcal{I}_s$. Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient $s < t$ deux instants et γ un chemin espace-temps fermé entre s et t dans le processus conditionné Y , une arête e de γ vérifie une des trois propriétés suivantes :*

- $e \in \mathcal{I}_s$;
- e est fermée à l'instant s dans le processus de percolation dynamique X ;
- Il existe un instant $r \in]s, t]$ où il y a un instant d'arrivée du processus de fermeture.

4 Une inégalité de type BK