1 Le modèle

Nous notons $(X_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de percolation dynamique sur le réseau $(\mathbb{Z}^d,\mathbb{E}^d)$ et nous considérons la restriction de X dans une boîte finie Λ. Nous définissons la suite $(\tau_i)_{i\geqslant 0}$ des instants de changement dans une boîte finie $\Lambda(\ell,h)$, en posant $\tau_0=0$ et pour tout $i\geqslant 0$,

$$\tau_{i+1} \;=\; \inf\,\big\{\, t>\tau_i : X_t\,|_{\Lambda(\ell,h)}\neq X_{\tau_i}\,|_{\Lambda(\ell,h)}\,\big\}.$$

Pour tout $i\geqslant 1$, il existe une unique arête e_i incluse dans $\Lambda(\ell,h)$ telle que $X_{\tau_i}(e_i)\neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$. Nous appelons la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ la suite des arêtes modifiées. Nous notons $\{T\longleftrightarrow B\}$ l'événement il existe un chemin ouvert entre le haut et le bas de la boîte Λ et nous allons coupler $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$. D'abord nous posons $Y_0=X_0$ et X_0 une configuration qui vérifie $\{T\not\longleftrightarrow B\}$. Ensuite, soit $i\geqslant 0$, pour tout $s\in[\tau_i,\tau_{i+1}[$, nous posons $Y_s=Y_{\tau_i}$, et $Y_{\tau_{i+1}}(e)=Y_{\tau_i}(e)$ si $e\neq e_{i+1}$, et nous déterminons $Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})$ en fonction de $X_{\tau_{i+1}}$ via la formule suivante :

$$Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})=\begin{cases} 0 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})=0\\ 1 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})=1, T\not\longleftrightarrow B \text{ dans } (Y_{\tau_i})^{e_{i+1}}\\ 0 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})=1, T\longleftrightarrow B \text{ dans } (Y_{\tau_i})^{e_{i+1}}\end{cases}.$$

Le processus Y est le processus de percolation dynamique conditionné à rester dans l'ensemble $\{T\not\longleftrightarrow B\}$. Nous pouvons définir l'interface à l'aide de ce couplage.

Définition 1. *Soit $(X_t,Y_t)_{t\geqslant 0}$ un couplage défini précédemment, nous définissons l'interface dans $\Lambda(\ell,h)$ au temps t, que nous notons $\mathcal{I}_t(\ell,h)$, comme l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans X_t et fermées dans Y_t :*

$$\mathcal{I}_t(\ell,h) \;=\; \big\{\, e\in\mathbb{E}^2 : X_t(e)=1, Y_t(e)=0\,\big\}.$$

Nous notons $\mathcal{P}_t$ l'ensemble des arêtes pivot pour l'événement $\{T\longleftrightarrow B\}$ dans Y.

2 La construction d'un chemin espace-temps

Nous allons énoncer une première proposition qui permet de construire un chemin espace temps dont nous avons besoin pour l'estimée.

Proposition 1. *Soit $0<s<t$ deux instants et $e\in\mathcal{P}_t$ et $f\in\mathcal{P}_s$. Il existe un chemin espace-temps fermé dans le processus Y qui relie (e,t) à (f,s).*

Démonstration. Nous remarquons d'abord qu'à l'instant t donné, il existe un chemin fermé qui relie tous les arêtes pivot de cet instant. Nous considérons $\theta(t)$ le dernier instant où il existe une arête de $\mathcal{P}_t$ qui devient pivot, i.e.,

$$\theta(t) = \sup \left\{ r \leqslant t, \exists e_1 \in \mathcal{P}_t, e_1 \text{ devient pivot à l'instat } r, e_1 \text{ pivot sur } [r,t] \right\}.$$

Nous montrons que $\theta(t) < t$. En effet, si à l'instant t, il y a une arête qui se ferme, alors il n'y a pas d'arête pivot créé à l'instant t, donc les arêtes de $\mathcal{P}_t$ sont aussi pivot à l'instant $t-1$. Dans le cas contraire, si une arête s'ouvre à l'instant t. Nous considérons une arête ϵ de $\mathcal{P}_{t-1}$, il existe un chemin ouvert passant par ϵ qui relie le haut et le bas à l'instant $t-1$. Or une ouverture d'une arête quelconque ne modifie pas ce chemin ouvert, ϵ est toujours pivot à l'instant t. Donc ϵ est devenu pivot avant l'instant t. D'où $\theta(t) < t$. Si $\theta(t) \leqslant s$, le chemin $(e,t),(e_1,t),(e_1,s)$ est un chemin espace-temps voulu. Sinon, $\theta(t) > s$, nous considérons l'arête-temps $(e_1,\theta(t)) \in \mathcal{P}_{\theta(t)}$ qui est reliée à (e,t) par le chemin $(e,t),(e_1,t),(e_1,\theta(t))$. Nous devons maintenant montrer le résultat voulu avec $(e_1,\theta(t))$ à la place de (e,t). Nous répétons le procédure précédent et nous construisons une suite décroissante d'instants $(t,\theta(t),\theta(\theta(t)),\dots)$ et une suite d'arête $(e,e_1,e_2,\dots)$. Or tout instant de la suite est supérieur à s, la suite est forcément finie. Donc il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta^k(t) \leqslant s$. Or pour tout $0 \leqslant i < k$, l'arête $(e_i,\theta^i(t))$ est reliée à $(e_{i+1},\theta^{i+1}(t))$ par un chemin espace-temps fermé. Nous obtenons un chemin espace-temps fermé qui relie (e,t) à $(e_k,\theta^k(t))$. Or $\theta^k(t) \leqslant s$ et e_k est pivot entre $\theta^k(t)$ et s. Nous obtenons un chemin voulu. □

3 La comparaison entre deux processus : une inégalité de type BK

Nous étudions maintenant le chemin espace-temps dans les deux processus, en particulier, nous comparons les arêtes fermées du chemin et nous allons obtenir une inégalité de type BK à l'aide du couplage.
Soit (e,t) une arête-temps fermée dans le processus Y. Dans le processus X, vu qu'il n'y a pas de conditionnement, elle peut être ouverte ou fermée à l'instant t. Si elle est ouverte, par la définition de l'interface, $e \in \mathcal{P}_t$. Dans le cas contraire, elle est fermée dans le processus de percolation standard, nous avons $P(X_t(e) = 0) = 1 - p$. Si e se ferme dans Y à un instant, elle se ferme aussi dans X. Par contre, si e est pivot dans Y, lors d'une arrivée du processus d'ouverture, elle s'ouvre dans X mais pas dans Y. Maintenant, regardons le chemin espace-temps obtenu dans la proposition 1. Or il existe des arêtes pivot dans le chemin, ce chemin n'est pas forcément fermé dans le

processus X. Par contre, nous pouvons considérer le dernier instant de fermeture avant le passage sur une arête. Plus précisément, notons $(e_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ le chemin espace-temps. Nous considérons $\tilde{t_i}$ le dernier instant d'arrivée du processus de fermeture de l'arête e_i avant t_i.*(notation ?)* Nous allons distinguer trois cas. Dans le premier cas $\tilde{t_i} \geqslant s$, l'arête e_i est fermée à t_i car il y a une fermeture après l'instant s. Dans le deuxième cas $\tilde{t_i} < s$ et e_i est fermé à l'instant s dans les deux processus. Dans le dernier cas, $\tilde{t_i} < s$ et à l'instant s, e_i est fermée dans Y mais ouverte dans X, nous remarquons que $e_i \in \mathcal{I}_f$.