

# Mémoire M2

Wei ZHOU

14 septembre 2016

# 1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier les interfaces dans le modèle de percolation Bernoulli sur le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  avec une méthode dynamique.

## 2 Modèle

Nous présentons le modèle sur lequel nous allons travailler dans ce mémoire. Pour commencer, nous présentons les notations que nous allons utiliser.

**Le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ .** Soit  $x, y$  deux points de  $\mathbb{Z}^2$ , nous disons que  $x, y$  sont voisins s'ils sont de distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble d'arêtes  $\mathbb{E}^2$  est formé par les arêtes qui relient les sommets voisins.

**Les boîtes  $\Lambda(\ell, h)$ .** Nous notons  $\Lambda(\ell, h)$  le rectangle  $[-\ell, \ell] \times [-h, h]$ . Nous notons aussi  $T(\ell, h)$  le bord supérieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , c'est à dire les sommets sur le segment  $[-\ell, \ell] \times (0, h)$ . Nous notons aussi  $B(\ell, h)$  le bord inférieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , c'est à dire les sommets dans  $[-\ell, \ell] \times (0, -h)$ . Les deux bords verticaux de la boîte  $\Lambda(\ell, h)$  sont notés  $V(\ell, h)$ .

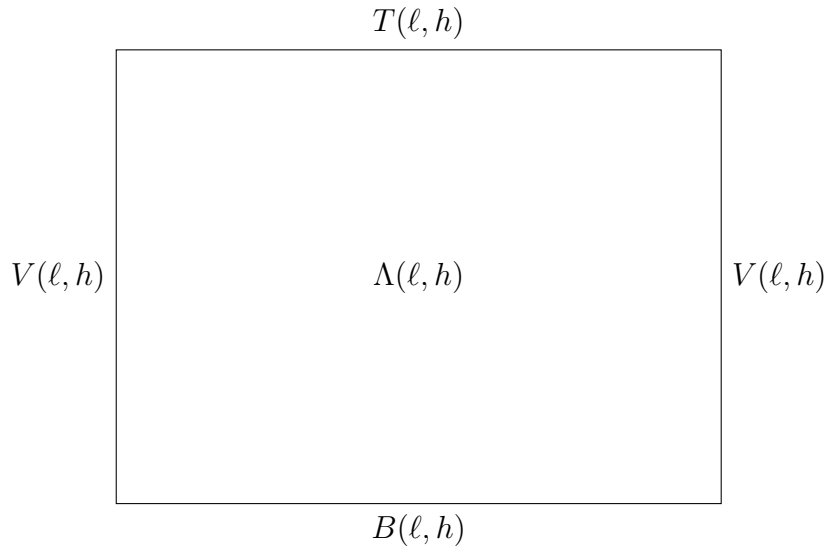


FIGURE 1 – La boîte  $\Lambda(\ell, h)$

**Les ensembles séparants.** Soient  $A, B$  deux sous ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ . Nous disons qu'un ensemble d'arêtes  $S \subset \mathbb{E}^2$  sépare  $A$  et  $B$  si aucune partie connexe

du graphe  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2 \setminus S)$  intersecte simultanément  $A$  et  $B$ , un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour  $A$  et  $B$ .

Nous disons que  $S$  est un ensemble séparant minimal de  $A, B$  si aucun sous-ensemble strict de  $S$  ne sépare  $A$  et  $B$ .

**Le graphe dual.** Nous rappelons qu'un graphe dual du réseau  $\mathbb{Z}^2$  est un réseau de sommets les points de  $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et d'arêtes  $\mathbb{E}^{2*}$ , où  $\mathbb{E}^{2*}$  est l'ensemble des arêtes joignant deux sommets de  $\mathbb{Z}^{2*}$  à distance 1. Si  $e$  une arête dans  $\mathbb{Z}^2$ , nous notons  $e^*$  l'unique arête qui l'intersecte orthogonalement au milieu. Désormais, les objets dans le graphe dual seront notés avec une  $*$ .

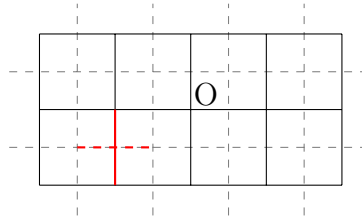


FIGURE 2 – un réseau  $\mathbb{Z}^2$  et son dual (pointillée)

**Les configurations.** Nous posons  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$  l'espace de configuration. Nous disons que  $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^2\} \in \Omega$  est une configuration pour le réseau  $\mathbb{Z}^2$  et que l'arête  $e$  est ouverte si  $\omega(e) = 1$  et fermée si  $\omega(e) = 0$ .

Soit  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  et  $\omega$  une configuration, la configuration  $\omega$  restreinte à  $A$ , notée  $\omega|_A$ , est la restriction de  $\omega$  aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans  $A$ .

Soit  $e \in \mathbb{E}^2$  une arête et  $\omega \in \Omega$  une configuration, nous définissons les notations suivantes :

$$\omega^e = \omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases}$$

$$\omega_e = \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}$$

qui correspondent à les deux configurations obtenues à partir de  $\omega$  en ouvrant ou fermant l'arête  $e$ .

**Les chemins.** Soit  $x$  et  $y$  deux sommets dans  $\mathbb{Z}^2$ , un chemin entre  $x$  et  $y$  est une suite  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$  de sommets  $x_i$  et d'arêtes  $e_i$  distincts où  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = y$  et  $e_i$  est l'arête joignant  $x_i$  à  $x_{i+1}$ .

Nous disons que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin ouvert, noté  $x \longleftrightarrow y$ , s'il existe un chemin qui relie  $x, y$  et toute arête de ce chemin est ouverte dans la configuration  $\omega$ . Nous notons aussi  $x \nleftrightarrow y$  l'événement complémentaire.

**La probabilité de percolation.** Soit un réel  $p \in [0, 1]$ . Sur l'espace  $\Omega$ , nous considérons  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  la tribu cylindrique. Nous considérons la probabilité produit

$$P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes \mathbb{E}^2}.$$

Intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau  $\mathbb{Z}^2$  avec une probabilité  $1-p$ .

### 3 La percolation dynamique

Nous définissons d'abord le processus la percolation dynamique sur le réseau  $(\mathbb{Z}^2, E^2)$ . Il s'agit d'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à temps continu à valeurs dans l'espace des configurations  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ . Si  $e$  est une arête et  $t \geq 0$ , alors  $X_t(e) \in \{0, 1\}$  est l'état de l'arête  $e$  au temps  $t$ .

La loi du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est définie de la manière suivante. Les processus  $(X_t(e))_{t \geq 0, e \in \mathbb{E}^2}$  sont i.i.d.. Pour une arête  $e$  fixée, le processus  $(X_t(e))_{t \geq 0}$  est un processus markovien de sauts à deux états  $\{0, 1\}$ , qui saute de 0 vers 1 à taux  $p$  et de 1 vers 0 à taux  $1-p$ .

**Construction graphique.** Nous allons construire la percolation dynamique sur un espace de probabilité qui nous permettra de réaliser des couplages utiles pour les preuves.

Nous commençons avec un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sur lequel sont définis les objets suivants :

- Une famille iid de processus de Poisson de paramètre 1  $(N_t(e))_{t \geq 0}$  indexée par les arêtes  $e \in \mathbb{E}^2$  ;
- Une famille de variables aléatoires iid  $U_n(e)_{n \geq 1, e \in \mathbb{E}^2}$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Soit  $e$  une arête de  $\mathbb{E}^2$ , notons  $(T_i(e))_{i \geq 1}$ , les instants des sauts du processus de Poisson  $(N_t(e))_{t \geq 0}$  associé à  $e$ . A l'instant  $T_i(e)$ , nous retirons l'état de l'arête à l'aide de la v.a.  $U_i(e)$ .

Plus précisément, l'arête  $e$  ne peut changer d'état qu'aux instants  $(T_i(e))_{i \geq 1}$ , et nous posons

$$X_{T_i(e)}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i(e) < p \\ 0 & \text{si } U_i(e) > p \end{cases}.$$

Nous définissons la suite  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  des instants de changement dans une boîte finie  $\Lambda(\ell, h)$ , en posant  $\tau_0 = 0$  et pour tout  $i \geq 0$  :

$$\tau_{i+1} = \inf \{ t > \tau_i : X_{t|\Lambda(\ell, h)} \neq X_{\tau_i|\Lambda(\ell, h)} \}$$

Pour tout  $i \geq 1$ , il existe une unique arête  $e_i$  incluse dans  $\Lambda(\ell, h)$  telle que  $X_{\tau_i}(e_i) \neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$  et nous appelons la suite  $(e_i)_{i \geq 1}$  la suite des arêtes modifiées.

## 4 Les chaînes de Markov conditionnées

Nous énonçons un théorème général sur les chaînes de Markov conditionnées que nous allons utiliser dans la construction de l'interface.

**Théorème 1.** *Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble  $E$  fini, irréductible apériodique de probabilité invariante  $\pi$ . Soit  $A \subset E$ , nous définissons la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  conditionnée à rester dans  $A$ , notée  $(Z_n^A)_{n \geq 0}$  par sa valeur initiale  $Z_0 \in A$  et sa probabilité de transition*

$$p^A(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & y \in A, x \neq y \\ 0 & y \notin A \\ 1 - \sum_{y \neq x} p^A(x, y) & x = y \end{cases}$$

alors la chaîne  $(Z_n^A)_{n \geq 0}$  admet une probabilité invariante qui est la probabilité invariante de la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  conditionnée à rester dans  $A$ , c'est à dire :

$$\forall x \in A \quad \pi^A(x) = \pi(x | A) = \frac{\pi(\{x\})}{\pi(A)}$$

## 5 L'interface

Nous allons proposer une définition d'interface à l'aide de la percolation dynamique. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus de percolation dynamique de paramètre  $p$  dans  $\Lambda_{\ell, h}$  issu d'une configuration initiale  $X_0$  appartenant à l'événement  $\{T \overset{X_0}{\not\leftrightarrow} B\}$  et  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  sa suite des instants de changement. Nous allons coupler  $Y_t$  un processus à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$  avec  $X_t$  ainsi :  $Y_0 = X_0$  ; soit  $i \geq 0$ , pour tout  $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$ ,  $Y_s = Y_{\tau_i}$ , et nous déterminons  $Y_{\tau_{i+1}}$  en fonction de  $X_{\tau_{i+1}}$  :

$$Y_{\tau_{i+1}} = \begin{cases} Y_{\tau_i e_{i+1}} & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 0 \\ Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \not\leftrightarrow B \text{ dans } Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} \\ Y_{\tau_i} & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \longleftrightarrow B \text{ dans } Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} \end{cases}.$$

Remarquons d'abord que l'arête  $e_i$  devient différente dans les deux configurations à l'instant  $\tau_i$  si et seulement si  $e_i$  devient ouverte à  $\tau_i$  dans  $(X_t)_{t \geq 0}$  mais cette ouverture induit une connexion entre  $T$  et  $B$  dans la configuration  $Y_{i-1}$ . Dans ce cas, l'arête  $e$  reste fermée dans la configuration  $Y_t$ .

La chaîne de Markov  $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est irréductible apériodique et à l'espace d'états fini donc elle admet une probabilité invariante qui est la probabilité de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$ . La chaîne  $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est aussi irréductible car toute configuration de  $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est reliée à la configuration où toutes les arêtes sont fermées. En effet, pour chaque arête  $e$  dans  $\Lambda(\ell, h)$ , et à tout instant de saut  $(T_i(e))_{i \geq 0}$ , nous pouvons fermer  $e$  avec probabilité  $1 - p > 0$ .

Nous appliquons le théorème 1 à  $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$  avec  $A$  l'ensemble des configuration qui satisfont l'événement  $\{T \leftrightarrow B\}$ . Nous obtenons la probabilité invariante qui est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$  conditionnée par l'événement  $\{T \leftrightarrow B\}$ .

Nous proposons la définition de l'interface en se servant du couplage.

**Définition 1.** Soit  $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$  un couplage défini précédemment, nous appelons une interface dans  $\Lambda(\ell, h)$  à l'instant  $i$  notée  $\mathcal{I}_t(\ell, h)$  l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans  $X_t$  et fermé dans  $Y_t$  :

$$\mathcal{I}_t(\ell, h) = \{e \in E : X_t(e) = 1, Y_t(e) = 0\}.$$

## 6 Les conditions aux bords

Nous fixons un entier  $h$  et nous allons étudier l'influence de  $\ell$  sur la loi de l'interface dans la boîte  $\Lambda(\ell, h)$ . Pour cela, nous introduisons des conditions aux bords. Désormais, nous enlèverons  $h$  si cela ne cause pas de confusion. Nous notons  $R(\ell)$  le rectangle  $\Lambda(\ell, h)$  et  $\partial^{in} \Lambda(\ell, h)$  son bord intérieur, c'est à dire :

$$\partial^{in} R(\ell) = \{x \in R(\ell) : \exists y \notin R(\ell) \quad \langle x, y \rangle \in E^2\}.$$

Les conditions aux bords sont données par  $\Pi_\ell$  une application de  $\partial^{in} R(\ell)$  à l'ensemble  $\{top, bot, null\}$ . L'application  $\Pi_\ell$  vaut  $top$  et  $bot$  sur les bords horizontaux  $T(\ell)$  et  $B(\ell)$ , plus précisément :

$$\forall x \in T(\ell) \cup B(\ell) \quad \Pi_\ell(x) = \begin{cases} top & \text{si } x \in T(\ell) \\ bot & \text{si } x \in B(\ell) \end{cases}.$$

Nous appelons une condition aux bords nulle si

$$\forall y \in V(\ell) \setminus \{(\pm\ell, \pm h)\} \quad \Pi_\ell(y) = null.$$

Soit  $m > \ell$ , et soit  $R(m)$  une boîte avec des conditions aux bords  $\Theta$ . Soit  $\omega$  la configuration de percolation dans  $R(m)$ . Nous pouvons définir les conditions aux bords  $\Pi_\ell$  induites sur  $V(\ell)$  comme suit. Soit  $x$  un sommet dans  $V(\ell, h)$ ,

$$\Pi_\ell^\Theta(x) = \begin{cases} top & \text{si } \exists y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) = top, x \xleftrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \\ bot & \text{si } \exists y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) = bot, x \xleftrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \\ null & \text{si } \forall y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) \neq null, x \not\xleftrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \end{cases},$$

avec la notation  $x \xleftrightarrow[\substack{\Lambda(m, h) \setminus \Lambda(\ell, h)}]{\omega} T(\text{resp. } B)$  signifie que le sommet  $x$  est relié à  $T(\text{resp. } B)$  uniquement par un chemin ouvert dont les arrêtes sont dans l'ensemble  $(\Lambda(m, h) \setminus \Lambda(\ell, h)) \cup \partial^{in} \Lambda(\ell, h)$ .

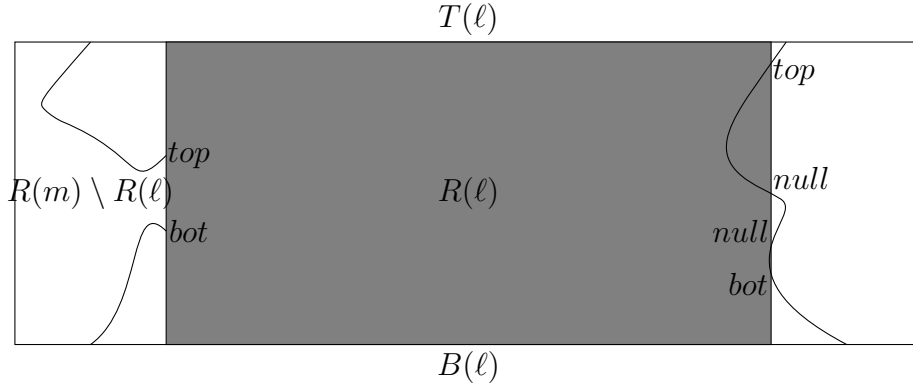


FIGURE 3 – Exemples d'une condition aux bords

Nous généralisons désormais l'événement  $\{T \longleftrightarrow B\}$  en tenant compte des conditions aux bords. Nous disons que  $\{T \longleftrightarrow B\}$  arrive dans la boîte  $R(\ell)$  s'il existe une connexion entre deux sommets  $x, y$  tels que  $\Pi_\ell(x) = top, \Pi_\ell(y) = bot$ .

## 7 Quelques résultats géométriques

Nous nous intéressons à la probabilité qu'une arrête fixée soit dans l'interface. Nous considérons désormais le régime surcritique, qui correspond au cas  $p > \frac{1}{2}$  en dimension 2. Soit  $e_0$  l'arrête qui joint  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ , notre objectif est de montrer que à  $t$  fixé la probabilité  $\mathbb{P}(e_0 \in I_t^\ell)$  converge lorsque  $\ell$  tend vers l'infini.

Intuitivement, nous imaginons que l'influence d'une condition aux bords disparaît quand la taille de la boîte grandit.

Soit  $\Lambda(\ell, h)$  une boîte dans  $\mathbb{Z}^2, E^2$  munis de deux conditions aux bords  $\Pi_{\ell, h}, \Pi'_{\ell, h}$  qui diffèrent à un seul sommet  $v_0$ . Nous considérons  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de percolation dynamique dans  $\Lambda(\ell, h)$  et deux couplage  $(X, Y)$  et  $(X, Y')$  conditionnés par  $T \leftrightarrow B$  avec les deux conditions aux bords.

**Proposition 1.** *Soit  $\theta > 0$  premier instant où  $e_0$  diffère dans les deux configurations, alors il existe un entier aléatoire  $N \in \mathbb{N}$ , une suite d'arêtes aléatoires  $e_1, \dots, e_N$  et des instants aléatoires  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = t$  qui vérifient les conditions suivantes :*

1. *à l'instant  $\theta_1$ ,  $e_1$  diffère dans les deux configurations. Il existe deux chemins fermés  $p_1^*, \rho_1^*$  disjoints qui relient  $e_1^*$  et le dual du bord contenant  $v_0$  ;*
2. *pour tout  $i > 1$ , l'arête  $e_i$  devient différente à  $\theta_i$  et il existe deux chemins fermés  $\gamma_i^*, \rho_i^*$  disjoints qui relient  $e_{i-1}^*$  et  $e_i^*$ .*
3. *pour tout  $i \geq 1$ , à l'instant  $\theta_i$ , il existe un ensemble d'arêtes fermées  $S_i$  qui sépare  $T(\ell, h)$  et  $B(\ell, h)$  et un chemin fermé  $c_i^*$  disjoint de  $S_i$  tel que  $c_i^* \subset (\gamma_i^* \cup \rho_i^*)$  et  $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^* \cup \rho_i^*|$*

*Démonstration.* Nous notons  $\tau_0 = 0, \tau_i = \inf\{s > \tau_{i-1}, \exists e \in \Lambda(\ell, h), Y_{s-}(e) = Y'_s(e), Y_s(e) \neq Y'_s(e)\}$ . Nous considérons maintenant la première arête  $e_1$  qui devient différente dans les deux boîtes. Par symétrie, nous pouvons supposer que  $v_0$  soit dans le bord gauche et que  $e_1$  soit fermée dans  $\Lambda'_\ell$ .

Cette arête devient différente car il si elle était ouverte dans la configuration  $Y'$ , il existerait un chemin ouvert entre  $T$  et  $B$  et pas dans la configuration  $Y$ . Il existe alors un chemin ouvert entre  $e_1$  et le sommet  $v_0$  au bord. Sans perte de généralité, nous supposons que  $\Pi'_\ell(v_0) = T$ , il existe alors dans  $Y_{\tau_1}$  et  $Y'_{\tau_1}$  un chemin identique qui relie une extrémité de  $e_0$  et  $B$ . Nous considérons maintenant le cluster ouvert de ce chemin dans la configuration  $Y'_{\tau_1}$ , il n'est pas connecté à  $B$  par la condition  $T \leftrightarrow B$  dans  $Y'_{\tau_1}$ , de plus, il n'est pas connecté à  $T$  car s'il l'était,  $T \longleftrightarrow B$  dans la configuration  $Y_{\tau_1}$  où  $e_0$  est ouverte. Il existe donc dans le graphe dual un contour fermé  $C_1^*$  qui sépare ce cluster de  $T$  et de  $B$ . L'arête  $e_1^*$  sépare donc ce contour en deux parties disjointes (voir Figure 4).

Nous considérons maintenant une arête  $e_i$  qui devient différente à cause des autres arêtes qui sont déjà différentes. Par symétrie, nous supposons que  $e_i$  est ouverte dans  $Y_{\tau_i}$  et fermée dans  $Y'_{\tau_i}$  et que dans les deux boîtes  $e_i$  est reliée à  $B$ .

Nous pouvons choisir une arête  $e_j$  avec  $j < i$  qui est devenue différente avant  $\tau_i$  et qui est restée différente entre  $\tau_j$  et  $\tau_i$ . En plus, il existe un chemin ouvert qui les relie. En effet, nous considérons le cluster ouvert  $C_i$  dans  $Y_{\tau_i}$



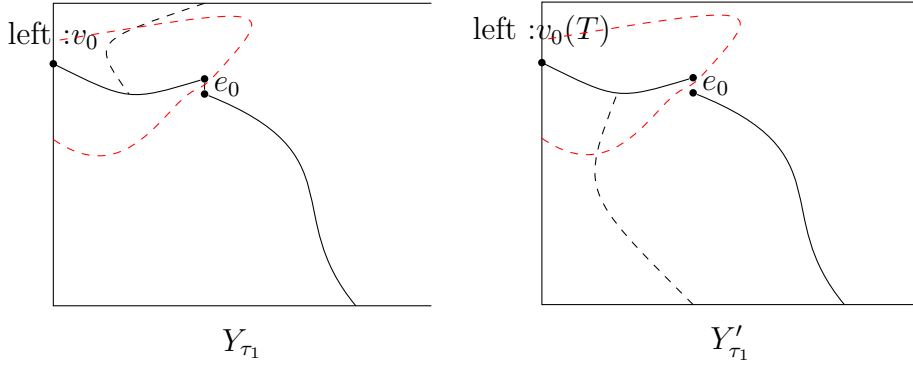


FIGURE 4 – La configuration dans les deux boîtes quand  $e_1$  devient différente et le contour  $C_1$  en rouge

du sommet qui est séparé de  $B$  par l'arête  $e_i$ . Nous considérons  $R_i$  l'ensemble suivant :

$$R_i = \left\{ e = \langle x, y \rangle, x \in C_i, y \notin C_i, y \xleftrightarrow{Y'_{\tau_i}} T \cup \Pi_{\ell, h}^{-1}(top), Y_{\tau_i}(e) \neq Y'_{\tau_i}(e) \right\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, car  $e_i \xleftrightarrow{Y'_{\tau_i}} T$ , mais pas dans  $Y_{\tau_i}$ , donc il existe un tel  $\langle x, y \rangle$  sur le bord extérieur de  $C_i$  qui diffère dans les deux configurations. Nous pouvons ordonner cet ensemble avec l'ordre lexicographique de  $\mathbb{Z}^2$  et nous prenons  $e_j$  la première arête de  $R_i$ .

Comme pour la première arête  $e_0$ , il y a un chemin ouvert qui relie  $e_i$  et  $e_j$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $e_j$  est reliée à  $T$ . Nous pouvons considérer le cluster ouvert du chemin  $c$  entre  $e_i, e_j$  dans  $Y'_{\tau_i}$  arrêté à  $e_j$  et  $e_i$ . Ce cluster n'est pas connecté à  $T$  car  $e_i$  est ouverte, il n'est pas connecté à  $B$  dans  $Y'_{\tau_i}$  car  $e_j$  est ouverte. Nous pouvons donc trouver un ensemble  $S_i$  d'arêtes fermées qui sépare ce chemin de  $T$  dans  $Y_{\tau_i}$  et un ensemble  $S'_i$  qui le sépare de  $B$  dans  $Y'_{\tau_i}$ . Nous pouvons supposer que  $S_i \cap S'_i \neq \emptyset$ , sinon, nous avons deux ensembles qui séparent  $T$  et  $B$  dans  $\Lambda(\ell, h)$  qui est de probabilité inférieure à  $e^{-\lambda \ell}$  et nous avons le résultat voulu. Nous pouvons désormais considérer un ensemble  $S^*$  formé par des arêtes qui sont soit fermées dans l'une des deux configurations et qui sépare le chemin  $c$  de  $T$  et de  $B$ . Quitte à prendre l'ensemble minimal, nous pouvons supposer que  $S^*$  est un circuit qui relie  $e_i$  et  $e_j$ . Les deux arêtes  $e_i$  et  $e_j$  coupent cet ensemble en deux chemins fermés  $\gamma_i^*, \rho_i^*$ .

Enfin, pour obtenir la suite  $(e_i)_{i \geq 1}$  dans l'énoncé, nous partons de l'instant  $t$  pour trouver l'arête qui a causé la différence à  $e_0$ , ensuite nous répétons ce procédé à l'instant où cette arête est devenue différente jusqu'à arriver au bord. Comme chaque ouverture ou fermeture d'une arête est donnée par

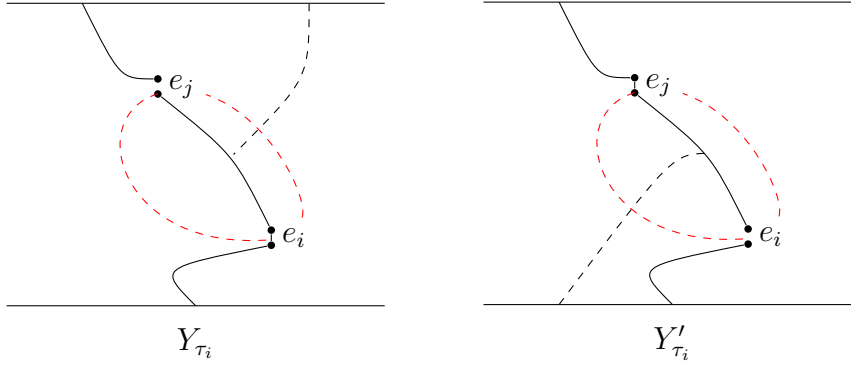


FIGURE 5 – La configuration dans les deux boîtes quand  $e_i$  devient différente avec le contour  $C_i$  en rouge

une horloge exponentielle, il y a presque sûrement un nombre fini d'arêtes qui sont devenues différentes avant  $t$ . Nous pouvons donc trouver une suite finie d'arêtes  $e_0, e_1, \dots, e_N$  avec  $e_N = e_0$  et des instants  $\theta_1 < \dots < \theta_N = t$  qui vérifient les deux premiers points de l'énoncé.

Nous considérons le contour fermé formé par  $\gamma_i^1$  et  $\gamma_i^2$ , la condition  $T \leftrightarrow B$  impose qu'il existe un ensemble séparant  $K_i$  qui contient  $e_i$  dans la configuration où elle est fermée. Quitte à ouvrir les arêtes de  $K_i$  qui ne sont pas pivotes, nous pouvons supposer  $K_i$  minimal. Nous considérons le dual de  $K_i$ , qui est un chemin fermé simple de gauche à droite. Nous pouvons numéroté les arêtes de  $K_i$  de la façon suivante :

- nous posons  $e_i^* = k_0$  ;
- si  $e_i^*$  est horizontale, nous posons  $k_{-1}$  l'arête qui partage le sommet gauche de  $e_i^*$  et  $k_1$  l'arête qui partage le sommet droite. S'il  $e_i^*$  est verticale, nous posons  $k_{-1}$  l'arête en bas et  $k_1$  celle en haut.
- Nous nous éloignons de  $e_i$ , jusqu'à avoir numéroté toutes les arêtes. Dans la direction négative, nous diminuons l'indice de 1 à chaque pas et nous augmentons de 1 par pas dans la direction positive.

Nous considérons maintenant l'arête minimale et l'arête maximale de l'ensemble  $K_i \cap (\gamma_i^1 \cup \rho_i^2)$  que nous notons  $k_{min}$  et  $k_{max}$ . Les deux arêtes  $k_{min}$  et  $k_{max}$  coupe  $K_i$  en 3 parties disjointes :  $C_i^g$  un chemin entre le bord gauche et  $k_{min}$  ;  $C_i^d$  un chemin entre le bord droite et  $k_{max}$  ; l'union d'un chemin entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$  et ces deux arêtes. De plus, les deux sommets qui séparent ces trois parties coupent le contour  $\gamma_i^1 \cup \rho_i^2$  en deux chemins disjoints  $c_i^1$  et  $c_i^2$ . Quitte à échanger les numéros, nous supposons que  $|c_i^1| \geq |c_i^2|$ .

Enfin nous posons  $S_i^* = C_i^g \cup C_i^d \cup c_i^2$  un chemin fermé du bord gauche au bord droite dans le graphe dual et  $c_i^* = c_i^1$ . Nous posons  $S_i$  le dual de  $S_i^*$  qui est un cut. Or  $|c_i^1| \geq |c_i^2|$ , nous obtenons  $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^1 \cup \rho_i^2|$ . Par construction,

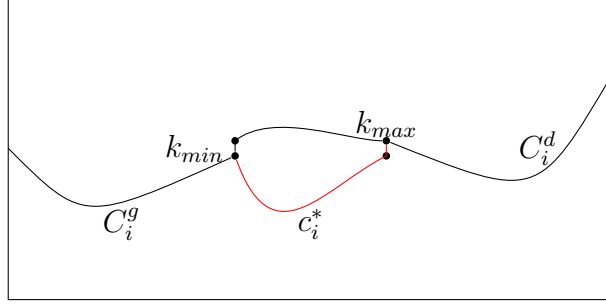


FIGURE 6 – construction d'un chemin fermé disjoint d'un cut

$S_i$  et  $c_i^*$  sont disjoints. □

## 8 Quelques inégalités préliminaires

Nous allons énoncer quelques inégalités pour la suite de notre étude. Nous commençons par une inégalité de type BK adaptée au problème. Nous commençons par généraliser la notion de l'occurrence disjointe.

Nous considérons dans cette partie  $A$  un événement croissant qui dépend d'un nombre fini d'arêtes à l'instant  $s$ , et  $B$  un événement croissant qui dépend d'un nombre fini d'arête à l'instant  $t$ . Nous notons  $K(\omega) = \{e : e = 1\}$  l'ensemble d'arêtes ouvertes dans une configuration  $\omega$ . Nous définissons l'occurrence disjointe ainsi :

**Définition 2.** Soit  $A, B$  définis précédemment, l'occurrence disjointe de  $A$  et  $B$  noté par  $A \circ B$  par :

- si  $s = t$ ,  $A \circ B = \{\omega : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B, K(\omega_1) \cap K(\omega_2) = \emptyset, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(\omega)\}$  ;
- si  $s < t$ ,  $A \circ B = \{\omega : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(\omega), \forall e \in (\omega_1) \cap K(\omega_2), \exists r \in [s, t], e(r) \neq e(s)\}$ .

Nous énonçons l'inégalité de BK pour la percolation dynamique :

**Proposition 2.** Soit  $\Lambda(\ell, h)$  une boîte de longueur  $\ell$ ,  $0 < s \leq t$ , soit  $A$  et  $B$  des événements définis au début de la partie, alors  $P(A \circ B) \leq P(A)P(B)$ .

*Démonstration.* Pour le premier cas, c'est l'inégalité de BK classique. Nous traitons uniquement le deuxième cas où les instants sont différents. Soit  $\Gamma = \{f : [s, t] \rightarrow \{0, 1\} \text{ càdlàg}\}^{|\Lambda(\ell, h)|}$ . Nous introduisons deux espaces de probabilité identiques  $S_1 = (\Gamma_1, \mathcal{F}_1, P_1), S_2 = (\Gamma_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ , nous définissons  $S$  l'espace produit de  $S_1, S_2$ . Nous écrivons  $x \times y$  un point de  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Nous notons  $A' = A \times \Gamma_2$ ,  $B'_k = \{x \times y : (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_{|\Lambda(\ell, h)|}) \in B\}$ . Nous notons  $P_{12}$  la probabilité produit de  $P_1, P_2$ . Nous avons bien que  $P(A \circ B) =$

$P_{12}(A' \circ B'_0)$  et  $P_{12}(A' \circ B'_{|\Lambda(\ell, h)|}) = P(A)P(B)$ . Nous montrons maintenant :

$$\forall k > 0, P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_{12}(A' \circ B'_k)$$

Soit  $M$  un événement, nous disons que  $e$  est pivot pour  $M$  si  $(\omega^e \in M, \omega_e \notin M)$  ou  $(\omega^e \notin M, \omega_e \in M)$ , c'est à dire un changement de l'arête  $e$  change l'occurrence de  $M$  dans la configuration  $\omega$ . Nous notons  $e \triangleright M$  si  $e$  est pivot pour  $M$ .

Nous considérons d'abord le cas où  $e_k$  n'est pas pivot pour  $B$ . Nous vérifions facilement que

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright B) \leq P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright B)$$

car il suffit de poser  $y_k$  une copie indépendante de  $x_k$  qui réalise  $A \circ B_{k-1}$  pour obtenir  $A \circ B_k$ .

Nous considérons maintenant le cas  $e_k$  pivot pour  $B$  mais pas pour  $A$ . Par symétrie nous pouvons supposer  $\omega^{e_k} \in B$ . Il nous faut  $x_k(t) = 1$  réaliser pour  $A \circ B_{k-1}$  et  $y_k(t) = 1$  pour réaliser  $A \circ B_k$ . Or  $x_k$  et  $y_k$  sont de même loi, nous avons  $P_{12}(x_k(t) = 1) = P_{12}(y_k(t) = 1)$ . D'où :

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B) = P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B)$$

Il reste le cas où l'arête  $e_k$  est pivot pour  $A$  et  $B$ . Quitte à changer  $p$  en  $(1 - p)$ , nous pouvons supposer que  $\omega^{e_k} \in A$ , il faut donc distinguer deux cas :

- Si  $\omega^{e_k} \in A, \omega^{e_k} \in B$ , nous devons avoir  $x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0$  pour  $A \circ B_{k-1}$ . Pour  $A \circ B_k$ , il faut  $x_k(s) = 1$  et  $y_k(t) = 1$ . Nous montrons que

$$P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).$$

Nous considérons la première instant de saut de  $x_k$ , soit

$$T = \inf\{r > s, x_k(r) = 0\}$$

et nous conditionnons la première probabilité par  $\{T = r\}$ , et nous utilisons

la propriété de Markov forte qui donne :

$$\begin{aligned}
& P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \\
&= E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t}] \\
&= E [E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t} | T = r]] \\
&= E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T=r} E[\mathbf{1}_{x_k(t)=1} | T = r]] \\
&= E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t} P_0(x'_k(t-r) = 1)] \\
&\leq E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t}] P(y_k(t-r) = 1) \\
&= P(x_k(s) = 1, T < t) P(y_k(t) = 1) \\
&\leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).
\end{aligned}$$

Avec  $x'_k$  le processus démarré à  $T$ . Nous avons  $P_0(x'_k(t-r) = 1) \leq P(y_k(t-r) = 1)$  car  $\{x_k(t-r) = 1\}$  est un événement croissant. Nous avons  $P(y_k(t-r) = 1) = P(y_k(t) = 1)$  car  $y_k$  est stationnaire à l'équilibre.

- Si  $\omega^{e_k} \in A, \omega_{e_k} \in B$ , nous devons avoir  $x_k(s) = 1, x_k(t) = 0$  pour réaliser  $A \circ B_{k-1}$  et  $x_k(s) = 1, y_k(t) = 0$  pour réaliser  $A \circ B_k$ . Or l'événement  $x_k(t) = 1$  est un événement croissant, nous avons

$$P_0(x_k(t-s) = 1) \leq P(x_k(t-s) = 1).$$

Par la propriété de Markov forte, nous avons :

$$\begin{aligned}
P(x_k(s) = 0, x_k(t) = 1) &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=0} P_0(x_k(t-s) = 1)] \\
&\leq P(x_k(s) = 0) P(y_k(t) = 1)
\end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux cas précédents :

$$P_{12}(A \circ B_{k-1}, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B) \leq P_{12}(A \circ B_k, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B).$$

Enfin, nous en déduisons l'inégalité de BK en effectuant une récurrence sur  $k$ . □

Nous avons déjà qu'un chemin fermé admet la propriété de décroissance exponentielle en fonction de son cardinal dans la phase surcritique, nous montrons maintenant une propriété similaire pour la percolation dynamique sur son comportement temporel :

**Proposition 3.** *Soit  $p > \frac{1}{2}$ ,  $c$  un chemin fermé à l'instant  $s$  de cardinal  $m$ , soit  $P_{c,c'}$  la probabilité qu'il ne soit pas disjoint d'un chemin  $c'$  à l'instant  $t > s$ , nous avons  $P_{c,c'} \leq me^{-\gamma(t-s)}$  avec  $\gamma$  une constante indépendante de  $c$  et de  $c'$ .*

*Démonstration.* nous considérons une arête  $(x, y)$  fermé et une modification locale  $M$  pour l'ouvrir suivante : nous fermons deux arêtes perpendiculaires de même côté qui contiennent respectivement un sommet  $x, y$  et l'arête qui relie ces deux arêtes ; ensuite nous ouvrons l'arête  $(x, y)$ . Chaque étape de la modification est déterminée par une horloge exponentielle et elle respecte la condition de  $T \leftrightarrow B$ . Entre  $[0, 1]$ , cette modification a une probabilité positive  $r$  pour se réaliser. Nous en déduisons qu'il existe une constante  $\gamma$  pour qu'entre  $[s, t]$ , la probabilité que cette modification ne se réalise pas est inférieur à  $e^{-\gamma(t-s)}$ .

Nous considérons maintenant deux arêtes  $e, e'$  voisines, nous pouvons choisir les arêtes que nous modifions pour que  $e, e'$  soient modifiées indépendamment. En effet, si les  $e, e'$  sont colinéaires alors nous effectuons les modifications à différents côtés ; si  $e, e'$  sont perpendiculaires, alors nous effectuons la modification à l'extérieur de l'angle formé par  $e, e'$ , voir figure 7.

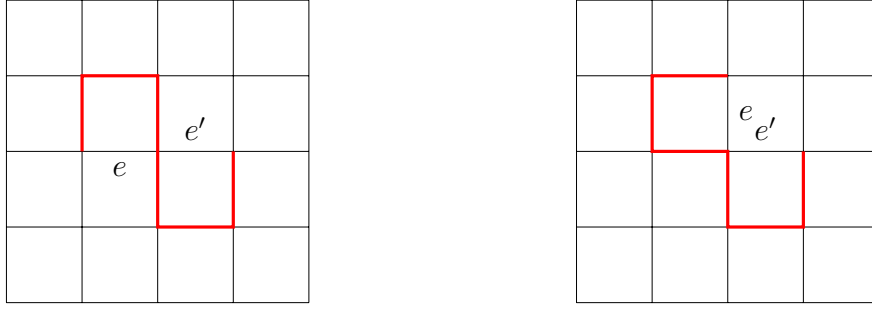


FIGURE 7 – deux arêtes voisines et les arêtes à modifier en rouge

Nous avons donc

$$\begin{aligned} P(c \coprod c') &\geq P(\forall e \in c, M \text{ se réalise sur } e) \\ &\geq (1 - e^{-\gamma(t-s)})^m \geq 1 - me^{-\gamma(t-s)} \end{aligned}$$

□

Nous introduisons la notion de space-time chemin, en prolongeant la connexion dans le temps, c'est-à-dire si une arête  $e = (x, y)$  reste ouverte (resp. fermée) entre  $s$  et  $t$  alors  $(x, s) \longleftrightarrow (y, t)$  par un space-time chemin ouvert (resp. fermé). Nous montrons aussi une décroissance exponentielle avec les space-time chemin.

**Proposition 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$ ,  $p > \frac{1}{2}$ , soit  $A(n, t)$  l'événement  $(O, 0) \leftrightarrow (ne_1, nt)$  par un space-time chemin fermé où  $e_1 = (1, 0)$ , alors  $\exists \gamma(p, t)$ , une constante qui dépend de  $p, t$  tel que  $P(A(n, t)) \leq e^{-\gamma(p, t)^n}$ .

*Démonstration.* Nous montrons cette équivalence par le lemme sous-additif. En fait,

$$\begin{aligned} P((O, 0) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ \geq P((O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((n\mathbf{e}_1, nt) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ \geq P((O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((O, 0) \leftrightarrow (m\mathbf{e}_1, mt)) \end{aligned}$$

Car nous avons l'invariance par translation. La suite  $(-\ln P(A(n, t)))_{n \in \mathbb{N}}$  est sous-additive. Par le lemme sous-additif, nous obtenons :

$$\lim_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) = \inf_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) = \gamma(p, t)$$

Nous avons donc

$$\forall n, -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) \geq \gamma(p, t).$$

□

## 9 La probabilité d'une influence du bord

Nous montrons maintenant que la probabilité que le bord influence une arête à l'intérieur de la boîte décroît exponentiellement avec la taille de la boîte.

**Théorème 2.** *Soit  $p \geq \frac{1}{2}$ ,  $\bar{e}$  l'arête au centre de la boîte  $\Lambda(l, h)$  avec deux processus  $Y, Y'$  définis avec deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$ , il existe une constante  $\lambda > 0$  tel que  $P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) \leq e^{-\lambda \ell} P(T \leftrightarrow B \text{ entre } [0, t])$ .*

*Démonstration.* Nous utilisons les notations de la proposition 1 et son corollaire. D'après la proposition 1, nous savons qu'il existe une suite d'arêtes  $e_1, e_n$  qui sont reliées l'une après l'autre à différentes instants. Nous notons  $x_i, y_i$  les extrémités de  $c_i^*$  chemin fermé dans le graphe dual et de  $C_i$  le cut, nous notons aussi  $k_i$  le cardinal de  $p_i^1 \cup p_i^2$ . Nous séparons la suite en différentes sous suites selon l'indépendance, plus précisément, si  $c_j^*$  et  $c_{j+1}^*$  est de l'occurrence disjointe, alors nous coupons la suite à l'indice  $j$ . Ainsi, nous obtenons les indices  $j_1, \dots, j_r$  telles que  $\forall 1 \leq u \leq r, c_{j_u}^*$  et  $c_{j_{u+1}}^*$  sont disjoints,  $\forall j_k \leq v \leq j_{k+1}, c_k^*$  et  $c_{k+1}^*$  ne sont pas disjoints.

$$\begin{aligned}
P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) &= P(\exists e_1, \dots, e_n, \forall i, \exists p_i^1, p_i^2, e_{i-1} \xleftrightarrow{p_i^1, p_i^2} e_i) \\
&\leq P(\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, c_1^*, \dots, c_n^*, C_1, \dots, C_n) \\
&\leq \sum_{j_1, \dots, j_r} \prod_{1 \leq k \leq r} P \left( \begin{array}{c} \exists x_{j_{k-1}+1}, \dots, x_{j_k}, \\ y_{j_{k-1}+1}, \dots, y_{j_k}, \\ c_{j_{k-1}+1}, \dots, c_{j_k}^*, \\ C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}, \\ \forall j_{k-1} + 1 \leq m \leq j_k, x_m \xleftrightarrow{c_m^*} y_m, c_m^* \circ C_m \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Nous utilisons la proposition 4 pour majorer chaque terme du produit. Or les  $\forall j_{k-1} + 1 \leq c_m^* \leq j_k$ , les  $c_m^*$  ne sont pas d'occurrence disjointe, nous avons un space-time chemin  $\sigma_k$  qui relie  $x_{j_{k-1}+1}$  et  $y_{j_k}$ . Donc elle est bornée par

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut})$$

car  $x_{j_{k-1}+1}$  et  $y_{j_k}$  sont dans un carré de taille inférieure à  $|\sigma_k|$ . Or  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall x > 1, x^4 e^{-x} \leq e^{-\delta x}$ , nous avons

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} \leq |\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, t)|\sigma_k|} \leq e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|}$$

Nous partons de  $\bar{e}$ ,  $x_{j_{n-1}+1}$  est de distance inférieure à  $2|\sigma_r|$  de  $\bar{e}$ , nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{1=j_1 < \dots < j_r=n} \prod_{1 \leq k \leq r} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}) \\
&\leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4|\sigma_r|^2 e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\
&\leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4e^{-\delta^2 \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\
&\leq 4^r e^{-\delta^2 \gamma(p, t) \sum_1^r |\sigma_k|} P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ séparent } T, B)
\end{aligned}$$

Enfin,  $r$  est borné par une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\ell^2(1-p)t$ , nous avons le résultat.  $\square$