

# Mémoire M2

Wei ZHOU

17 septembre 2016

# 1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier les interfaces dans le modèle de percolation Bernoulli sur le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  avec une méthode dynamique.

## 2 Modèle

Nous présentons le modèle sur lequel nous allons travailler dans ce mémoire. Pour commencer, nous présentons les notations que nous allons utiliser.

**Le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ .** Soit  $x, y$  deux points de  $\mathbb{Z}^2$ , nous disons que  $x, y$  sont voisins s'ils sont à distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble  $\mathbb{E}^2$  est l'ensemble des paires  $\{x, y\}$ , où  $x, y$  sont deux points voisins de  $\mathbb{Z}^2$ . Le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  est le graphe dont  $\mathbb{Z}^2$  est l'ensemble des sommets et  $\mathbb{E}^2$  est l'ensemble des arêtes.

**Les boîtes  $\Lambda(\ell, h)$ .** Nous notons  $\Lambda(\ell, h)$  le rectangle  $[-\ell, \ell] \times [-h, h]$ . Nous notons aussi  $T(\ell, h)$  le bord supérieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , i.e. le segment  $[-\ell, \ell] \times (0, h)$ . Nous notons aussi  $B(\ell, h)$  le bord inférieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , i.e.  $[-\ell, \ell] \times (0, -h)$ . Les deux bords verticaux de la boîte  $\Lambda(\ell, h)$  sont notés  $V(\ell, h)$ .

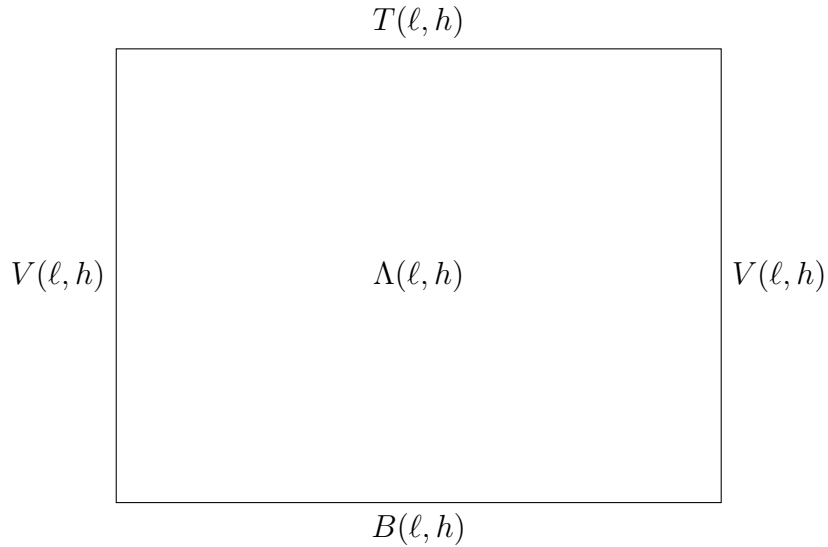


FIGURE 1 – La boîte  $\Lambda(\ell, h)$

**Les ensembles séparants.** Soient  $A, B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^2$ . Nous disons qu'un ensemble d'arêtes  $S \subset \mathbb{E}^2$  sépare  $A$  et  $B$  si aucune partie connexe du graphe  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2 \setminus S)$  n'intersecte simultanément  $A$  et  $B$ . Un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour  $A$  et  $B$ . Nous disons que  $S$  est un ensemble séparant minimal de  $A, B$  si aucun sous-ensemble strict de  $S$  ne sépare  $A$  et  $B$ .

**Le graphe dual.** Le graphe dual du réseau  $\mathbb{Z}^2$  est le graphe de sommets les points de  $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et d'arêtes  $\mathbb{E}^{2*}$ , où  $\mathbb{E}^{2*}$  est l'ensemble des arêtes joignant deux sommets de  $\mathbb{Z}^{2*}$  à distance 1. Si  $e$  est une arête dans  $\mathbb{Z}^2$ , nous notons  $e^*$  l'unique arête qui l'intersecte orthogonalement en son milieu. Désormais, les objets dans le graphe dual seront notés avec une  $*$ .

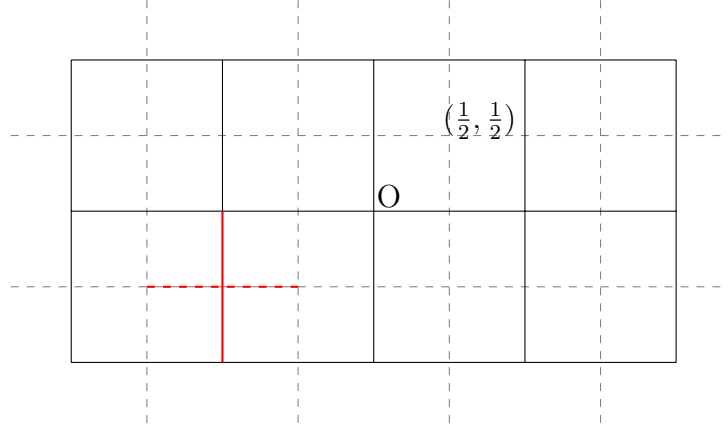


FIGURE 2 – un réseau  $\mathbb{Z}^2$  et son dual (pointillée)

**Les configurations.** L'espace de configuration est  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ . Une configuration générique est notée  $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^2\} \in \Omega$ . L'arête  $e$  est ouverte si  $\omega(e) = 1$  et fermée si  $\omega(e) = 0$ . Soient  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  et  $\omega$  une configuration, la configuration  $\omega$  restreinte à  $A$ , notée  $\omega|_A$ , est la restriction de  $\omega$  aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans  $A$ . Soient  $e \in \mathbb{E}^2$  une arête et  $\omega \in \Omega$  une configuration, nous définissons les configurations  $\omega^e, \omega_e$  par :

$$\forall f \in \mathbb{E}^2 \quad \omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases} \quad \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}.$$

Les configurations  $\omega^e, \omega_e$  sont obtenues à partir de  $\omega$  en ouvrant ou fermant l'arête  $e$ .

Soient  $\omega, \omega'$  deux configurations, nous définissons  $\omega \wedge \omega'$  la configuration suivante :

$$\forall e \in \mathbb{E}^2 \quad \omega \wedge \omega'(e) = \omega(e)\omega'(e).$$

Une arête  $e$  est ouverte dans  $\omega \wedge \omega'$  si et seulement si elle est ouverte dans  $\omega$  et  $\omega'$ .

**Les chemins.** Soient  $x$  et  $y$  deux sommets dans  $\mathbb{Z}^2$ , un chemin entre  $x$  et  $y$  est une suite  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$  de sommets  $x_i$  et d'arêtes  $e_i$  distincts où  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = y$  et  $e_i$  est l'arête joignant  $x_i$  à  $x_{i+1}$ . Nous disons que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin ouvert dans la configuration  $\omega$ , noté  $x \xleftrightarrow{\omega} y$ , s'il existe un chemin qui relie  $x, y$  tel que toute arête de ce chemin est ouverte dans la configuration  $\omega$ . Nous notons aussi  $x \nleftrightarrow y$  l'événement complémentaire. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\Lambda(l, h)$ , nous notons  $x \xleftrightarrow{A} y$  s'il existe un chemin entre  $x$  et  $y$  dont les arêtes sont à l'intérieur de  $A$ .

Dans ce mémoire, nous étudions en particulier les chemins entre un sommet de  $T(l, h)$  et un sommet de  $B(l, h)$ . Nous notons  $T \xleftrightarrow{\omega} B$  s'il existe un tel chemin dans la configuration  $\omega$ .

**La probabilité de percolation.** Soit un réel  $p \in [0, 1]$ . Sur l'espace  $\Omega$ , nous considérons la tribu cylindrique  $\mathcal{F}$ . Nous considérons la probabilité produit

$$P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes \mathbb{E}^2}.$$

Intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau  $\mathbb{Z}^2$  avec une probabilité  $1 - p$ .

### 3 La percolation dynamique

Nous définissons d'abord la percolation dynamique sur le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ . Il s'agit d'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à temps continu à valeurs dans l'espace des configurations  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ . Si  $e$  est une arête et  $t \geq 0$ , alors  $X_t(e) \in \{0, 1\}$  est l'état de l'arête  $e$  au temps  $t$ . La loi du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est définie de la manière suivante. Les processus  $(X_t(e))_{t \geq 0, e \in \mathbb{E}^2}$  sont i.i.d.. Pour une arête  $e$  fixée, le processus  $(X_t(e))_{t \geq 0}$  est un processus markovien de sauts à deux états  $\{0, 1\}$ , qui saute de 0 vers 1 à taux  $p$  et de 1 vers 0 à taux  $1 - p$ .

**Construction graphique.** Nous allons construire la percolation dynamique sur un espace de probabilité qui nous permettra de réaliser des couplages utiles pour les preuves. Nous commençons avec un espace de probabilité  $(\Phi, \mathcal{A}, P)$  sur lequel sont définis les objets suivants :

- Une famille  $(N_t(e))_{t \geq 0}$  de processus de Poisson iid de paramètre 1 indexée par les arêtes  $e \in \mathbb{E}^2$  ;
- Une famille de variables aléatoires  $U_n(e)_{n \geq 1}, e \in \mathbb{E}^2$  iid de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Soit  $e$  une arête de  $\mathbb{E}^2$ , notons  $(T_i(e))_{i \geq 1}$ , les instants des sauts du processus de Poisson  $(N_t(e))_{t \geq 0}$  associé à  $e$ . A l'instant  $T_i(e)$ , nous retirons l'état de l'arête à l'aide de la v.a.  $U_i(e)$ . Plus précisément, l'arête  $e$  ne peut changer d'état qu'aux instants  $(T_i(e))_{i \geq 1}$ , et nous posons

$$X_{T_i(e)}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i(e) < p, \\ 0 & \text{si } U_i(e) > p. \end{cases}$$

Nous définissons la suite  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  des instants de changement dans une boîte finie  $\Lambda(\ell, h)$ , en posant  $\tau_0 = 0$  et pour tout  $i \geq 0$  :

$$\tau_{i+1} = \inf \{ t > \tau_i : X_t|_{\Lambda(\ell, h)} \neq X_{\tau_i}|_{\Lambda(\ell, h)} \}$$

Pour tout  $i \geq 1$ , il existe une unique arête  $e_i$  incluse dans  $\Lambda(\ell, h)$  telle que  $X_{\tau_i}(e_i) \neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$ . Nous appelons la suite  $(e_i)_{i \geq 1}$  la suite des arêtes modifiées.

## 4 Les chaînes de Markov conditionnées

Nous énonçons un théorème général sur les chaînes de Markov conditionnées que nous allons utiliser dans la construction de l'interface.

Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble  $E$  fini, irréductible apériodique de probabilité invariante  $\pi$ . Soit  $A \subset E$ , nous définissons la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  conditionnée à rester dans  $A$ , notée  $(Z_n^A)_{n \geq 0}$  par sa valeur initiale  $Z_0 \in A$  et sa probabilité de transition

$$p^A(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & y \in A, x \neq y \\ 0 & y \notin A \\ 1 - \sum_{y \neq x} p^A(x, y) & x = y \end{cases}$$

**Théorème 1.** *La chaîne  $(Z_n^A)_{n \geq 0}$  admet une probabilité invariante qui est la probabilité invariante de la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  conditionnée à rester dans  $A$ , c'est à dire :*

$$\forall x \in A \quad \pi^A(x) = \pi(x | A) = \frac{\pi(\{x\})}{\pi(A)}$$

## 5 L'interface

Nous allons proposer une définition d'interface à l'aide de la percolation dynamique. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus de percolation dynamique de paramètre  $p$  dans  $\Lambda(\ell, h)$  issu d'une configuration initiale  $X_0$  appartenant à l'événement  $\{T \not\leftrightarrow B\}$  et  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  sa suite des instants de changement. Nous allons coupler un processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$  avec  $(X_t)_{t \geq 0}$  comme suit. D'abord nous posons  $Y_0 = X_0$ . Ensuite, soit  $i \geq 0$ , pour tout  $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$ , nous posons  $Y_s = Y_{\tau_i}$ , et nous déterminons  $Y_{\tau_{i+1}}$  en fonction de  $X_{\tau_{i+1}}$  via la formule suivante :

$$Y_{\tau_{i+1}}(e) = \begin{cases} Y_{\tau_i}(e) & \text{si } e \neq e_{i+1} \\ 0 & \text{si } e = e_{i+1}, X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 0 \\ 1 & \text{si } e = e_{i+1}, X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \not\leftrightarrow B \text{ dans } Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} \\ 0 & \text{si } e = e_{i+1}, X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \longleftrightarrow B \text{ dans } Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} \end{cases}.$$

Remarquons que l'arête  $e_i$  devient différente dans les deux processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à l'instant  $\tau_i$  si et seulement si  $e_i$  devient ouverte à  $\tau_i$  dans  $(X_t)_{t \geq 0}$  mais cette ouverture induit une connexion entre  $T$  et  $B$  dans la configuration  $Y_{\tau_{i+1}}^{e_i}$ . Dans ce cas, l'arête  $e_i$  reste fermée dans le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$ .

La chaîne de Markov  $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est irréductible apériodique et d'espace d'états fini donc elle admet une unique probabilité invariante qui est simplement la probabilité de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$ . La chaîne  $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est aussi irréductible car toute configuration de  $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est reliée à la configuration où toutes les arêtes sont fermées. En effet, pour chaque arête  $e$  dans  $\Lambda(\ell, h)$ , et à chaque instant de saut  $(\tau_i(e))_{i \geq 0}$ , nous pouvons fermer  $e$  avec probabilité  $1 - p > 0$ .

Nous appliquons le théorème 1 à  $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$  avec  $A$  l'ensemble des configurations qui satisfont l'événement  $\{T \not\leftrightarrow B\}$ . Nous obtenons que la probabilité invariante du processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$  conditionnée par l'événement  $\{T \not\leftrightarrow B\}$ .

Nous proposons la définition de l'interface en se servant du couplage.

**Définition 1.** Soit  $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$  un couplage défini précédemment, nous définissons l'interface dans  $\Lambda(\ell, h)$  au temps  $t$ , que nous notons  $\mathcal{I}_t(\ell, h)$ , comme l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans  $X_t$  et fermées dans  $Y_t$  :

$$\mathcal{I}_t(\ell, h) = \{ e \in \mathbb{E}^2 : X_t(e) = 1, Y_t(e) = 0 \}.$$

## 6 Les conditions aux bords

Nous fixons un entier  $h$  et nous allons étudier l'influence de  $\ell$  sur la loi de l'interface dans la boîte  $\Lambda(\ell, h)$ . Pour cela, nous introduisons des conditions

aux bords. Désormais, nous enlèverons  $h$  des notations si cela ne cause pas de confusion. Nous notons  $R(\ell)$  le rectangle  $\Lambda(\ell, h)$  et  $\partial^{in}\Lambda(\ell, h)$  son bord intérieur, c'est à dire :

$$\partial^{in}R(\ell) = \{x \in R(\ell) : \exists y \notin R(\ell) \quad \langle x, y \rangle \in \mathbb{E}^2\}.$$

Les conditions aux bords sont données par  $\Pi_\ell$  une application de  $\partial^{in}R(\ell)$  à l'ensemble  $\{top, bot, null\}$ . L'application  $\Pi_\ell$  vaut  $top$  et  $bot$  sur les bords horizontaux  $T(\ell)$  et  $B(\ell)$ , plus précisément :

$$\forall x \in T(\ell) \cup B(\ell) \quad \Pi_\ell(x) = \begin{cases} top & \text{si } x \in T(\ell) \\ bot & \text{si } x \in B(\ell) \end{cases}.$$

La condition aux bords nulle correspond au choix suivant :

$$\forall y \in V(\ell) \setminus \{(\pm\ell, \pm h)\} \quad \Pi_\ell(y) = null.$$

Soit  $m > \ell$ , et soit  $R(m)$  une boîte avec des conditions aux bords  $\Theta$ . Soit  $\omega$  la configuration de percolation dans  $R(m)$ . Nous pouvons définir les conditions aux bords  $\Pi_\ell$  induites sur  $V(\ell)$  comme suit. Soit  $x$  un sommet dans  $V(\ell, h)$ ,

$$\Pi_\ell^\Theta(x) = \begin{cases} top & \text{si } \exists y \in \partial^{in}R(m) \quad \Theta(y) = top, x \xrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \\ bot & \text{si } \exists y \in \partial^{in}R(m) \quad \Theta(y) = bot, x \xrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \\ null, & \text{si } \forall y \in \partial^{in}R(m) \quad \Theta(y) \neq null, x \not\xrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y, \end{cases}.$$

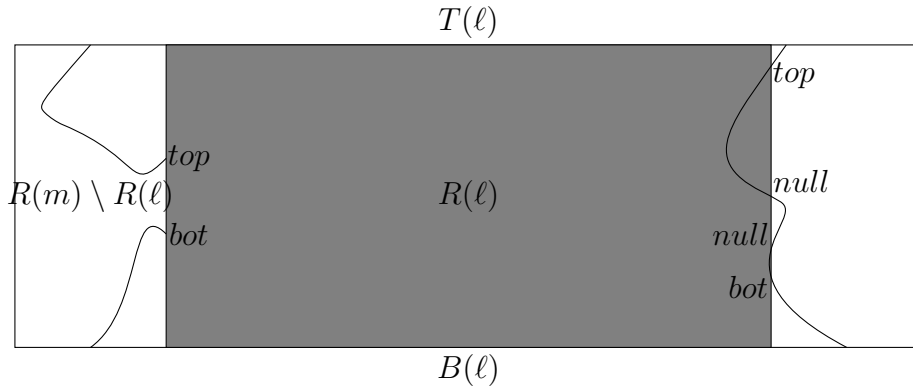


FIGURE 3 – Exemples d'une condition aux bords

Nous définissons désormais l'événement  $\{T \longleftrightarrow B\}$  en tenant compte des conditions aux bords. Nous disons que  $\{top \longleftrightarrow bot\}$  arrive dans la boîte  $R(\ell)$  s'il existe une connexion entre deux sommets  $x, y$  tels que  $\Pi_\ell(x) = top, \Pi_\ell(y) = bot$ .

## 7 La propagation des conditions aux bords

Nous considérons désormais le régime surcritique, qui correspond à  $p > \frac{1}{2}$  en dimension 2. Nous nous intéressons à la probabilité qu'une arête fixée soit dans l'interface. Soit  $e_0$  l'arête d'extrémités  $(0, 0)$  et  $(0, 1)$ . Notre objectif est de montrer que, à  $t$  fixé, la probabilité  $P(e_0 \in I_t^\ell)$  converge lorsque  $\ell$  tend vers l'infini. Intuitivement, nous imaginons que l'influence des conditions aux bords disparaissent lorsque la taille de la boîte grandit.

Plus formellement, soit  $R(\ell)$  une boîte dans  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  et considérons deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$  sur  $R(\ell)$  qui diffèrent en un seul sommet  $v_0$ . Nous considérons  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus de percolation dynamique dans  $R(\ell)$  et deux couplages  $(X, Y)$  et  $(X, Y')$  conditionnés par l'événement  $\{top \not\leftrightarrow bot\}$  associés aux deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$ . Notons  $D_t$  l'ensemble des arêtes qui sont différentes dans les deux configurations  $Y_t, Y'_t$ .

**Proposition 1.** *Soit  $\theta > 0$  le premier instant où  $e_0$  diffère dans les deux processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y'_t)_{t \geq 0}$ . Il existe un entier aléatoire  $N$ , une suite d'arêtes aléatoires  $e_1, \dots, e_N$  et des instants aléatoires  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = \theta$  qui vérifient les conditions suivantes :*

1. *à l'instant  $\theta_1$ , il existe deux chemins  $\gamma_1^*, \rho_1^*$  disjoints dont les arêtes sont fermées en dehors de  $D_{\theta_1}^*$  qui relient  $e_1^*$  et le bord vertical contenant  $v_0$ .*
2. *pour tout  $1 < i \leq N$ , à l'instant  $\theta_i$ , il existe deux chemins  $\gamma_i^*, \rho_i^*$  disjoints dont les arêtes en dehors de  $D_{\theta_i}^*$  sont fermées dans les deux configurations  $Y_{\theta_i}$  et  $Y'_{\theta_i}$ . De plus,  $\gamma_i^*, \rho_i^*$  relient  $e_{i-1}^*$  et  $e_i^*$  ;*
3. *pour tout  $1 \leq i \leq N$ , à l'instant  $\theta_i$ , l'arête  $e_i$  devient différente dans les deux processus. Il existe un ensemble d'arêtes  $S_i$  qui sépare  $T(\ell)$  et  $B(\ell)$  et un chemin  $c_i^*$  disjoint de  $S_i$  tel que  $c_i^* \subset (\gamma_i^* \cup \rho_i^*)$  et  $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^* \cup \rho_i^*|$ . Toutes les arêtes de  $S_i \setminus D_{\theta_i}$  et de  $c_i^* \setminus D_{\theta_i}^*$  sont fermées.*

*Démonstration.* Nous notons  $\tau_0 = 0$ , et

$$\tau_i = \inf \left\{ s > \tau_{i-1} : \exists e \in R(\ell) \quad Y_{s-}(e) = Y'_{s-}(e), Y_s(e) \neq Y'_s(e) \right\}.$$

Nous pouvons aussi supposer  $\Pi'(v_0) = top$  sans perte de généralité.

Nous considérons maintenant la première arête  $e_1$  qui devient différente dans les deux processus. Par symétrie, nous pouvons supposer que  $v_0$  soit dans le bord gauche et que  $e_1$  est fermée dans le processus  $(Y'_t)_{t \geq 0}$ . Cette arête devient différente car il si elle était ouverte dans la configuration  $Y'_{\tau_1}$ , il existerait un chemin ouvert entre  $top$  et  $bot$ , alors que ce n'est pas le cas dans la configuration  $Y_{\tau_1}$ . Il existe donc un chemin ouvert entre  $e_1$  et le sommet  $v_0$  à l'instant  $\tau_1$ . Nous considérons le cluster ouvert  $C_1$  contenant ce chemin dans la configuration  $Y'_{\tau_1}$ , il n'est pas connecté à  $B$  vu la condition  $top \not\leftrightarrow bot$ . De plus, le cluster  $C_1$  n'est pas connecté à  $top$  car s'il l'était, l'événement



$\{top \longleftrightarrow top\}$  arriverait dans la configuration  $Y_{\tau_1}$  dans laquelle  $e_1$  est ouverte. Considérons le bord arête de  $C_1$  :

$$S_1 = \{ e = \langle x, y \rangle : x \in C_1, y \notin C_1 \}$$

L'arête  $e_1$  appartient à  $S_1$ , les arêtes de  $S_1$  sont fermées et l'ensemble  $S_1$  sépare  $C_1$  de  $top$  et de  $bot$ . Comme la dimension est 2, l'ensemble dual  $S_1^*$  contient un chemin dual fermé qui sépare  $C_1$  de  $top, bot$ , et ce chemin passe nécessairement par  $e_1^*$ ; en particulier si nous enlevons  $e_1^*$  de ce chemin, nous obtenons 2 chemins disjoints que nous notons  $\gamma_1^*, \rho_1^*$ . Chacun de ces chemins relie une extrémité de  $e_1^*$  au bord vertical contenant  $v_0$  (voir Figure 4).

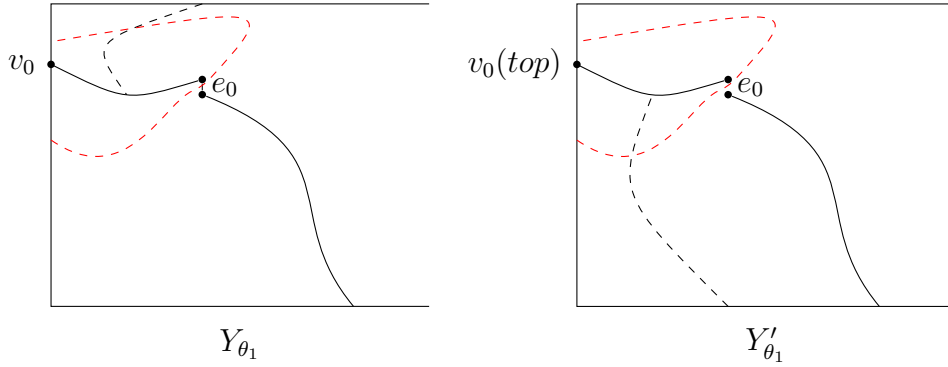


FIGURE 4 – L'instant  $\theta_1$  quand  $e_1$  devient différente

Considérons maintenant la  $i$ ème arête  $e_i$  qui devient différente dans les deux processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y'_t)_{t \geq 0}$ . Notons  $x_i, y_i$  les extrémités de  $e_i$ . Nous supposons par exemple que  $e_i$  est ouverte dans  $Y_{\tau_i}$  et fermé dans  $Y'_{\tau_i}$ . Nécessairement, l'une extrémité de  $e_i$  est reliée à  $bot$  dans  $Y'_{\tau_i}$ , par exemple  $x_i$ , et l'autre extrémité  $y_i$  est reliée à  $top$  dans  $Y'_{\tau_i}$ . Par contre, ce n'est pas le cas dans  $Y_{\tau_i}$ , sinon l'arête  $e_i$  ne pourrait pas s'ouvrir dans  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à l'instant  $\tau_i$ .

Choisissons dans  $Y'_{\tau_i}$  un chemin ouvert de  $x_i$  à  $bot$  et un chemin ouvert de  $y_i$  à  $top$ . Deux cas se présentent :

- Premier cas : les deux chemins sont aussi ouverts dans  $Y_{\tau_i}$ . Nécessairement, le chemin ouvert de  $y_i$  à  $top$  relie  $y_i$  à  $v_0$  ;
- Second cas : les deux chemins ne sont pas tous les deux ouverts dans  $Y_{\tau_i}$ . Le premier cas est similaire au cas de l'arête  $e_1$ . La seule différence c'est que nous trouvons les deux chemins fermés dans la configuration  $Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}$  à cause de l'existence des arêtes différentes. Nous considérons désormais le second cas.

Considérons  $R_i = R_i^1 \cup R_i^2$  un sous-ensemble de  $D_{\tau_i}$  avec :

$$R_i^1 = \left\{ e = \langle x, y \rangle : \begin{array}{ll} x \longleftrightarrow x_i \text{ dans } Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i} & y \longleftrightarrow \text{bot dans } Y'_{\tau_i} \\ Y_{\tau_i}(e) = 0 & Y'_{\tau_i}(e) = 1 \end{array} \right\}$$

et

$$R_i^2 = \left\{ e = \langle x, y \rangle : \begin{array}{ll} x \longleftrightarrow y_i \text{ dans } Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i} & y \longleftrightarrow \text{top dans } Y'_{\tau_i} \\ Y_{\tau_i}(e) = 0 & Y'_{\tau_i}(e) = 1 \end{array} \right\}$$

L'ensemble  $R_i$  n'est pas vide, sinon les événements  $\{x_i \longleftrightarrow \text{bot}\}$  et  $\{y_i \longleftrightarrow \text{top}\}$  arriveraient dans  $Y_{\tau_i}$ . Nous disons que  $R_i$  est l'ensemble des arêtes qui causent la différence en  $e_i$ . Nous fixons un ordre arbitraire sur  $\mathbb{E}^2$  et nous ordonnons l'ensemble  $R_i$  avec cet ordre. Nous notons  $e_j$  la première arête de  $R_i$ . Notons  $x_j, y_j$  les extrémités de  $e_j$  et supposons par exemple que  $y_j \longleftrightarrow \text{top}$  dans  $Y'_{\tau_i}$  et  $y_i \longleftrightarrow x_j$  dans  $Y'_{\tau_i} \wedge Y_{\tau_i}$ . (Le cas où  $y_j \longleftrightarrow \text{bot}$ ,  $x_i \longleftrightarrow x_j$  se traite de manière analogue.)

Soit  $c'_i$  un chemin de  $x_j$  à  $y_i$  qui est ouvert dans  $Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}$  et soit  $C'_i$  le cluster ouvert dans  $Y'_{\tau_i}$  qui contient  $c_i$ . Le cluster  $C'_i$  n'est pas connecté à  $\text{top}$  dans  $Y_{\tau_i}$  car  $e_i$  est ouverte, il n'est pas connecté à  $B$  dans  $Y'_{\tau_i}$  car  $e_j$  est ouverte. Il existe donc un ensemble  $B_i^*$  d'arêtes duales qui séparent  $C'_i$  de  $\text{top}$  et de  $\text{bot}$ , et qui sont fermées dans  $Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}$ .

Comme nous sommes en dimension 2, nous pouvons de plus choisir  $B_i^*$  de sorte que les arêtes de  $B_i^*$  forment un circuit entourant  $C'_i$  et qui passe par les arêtes  $e_i^*$  et  $e_j^*$ . Dans ce cas, l'ensemble  $B_i^* \setminus \{e_i^*, e_j^*\}$  est formé de deux chemins  $\gamma_i^*, \rho_i^*$

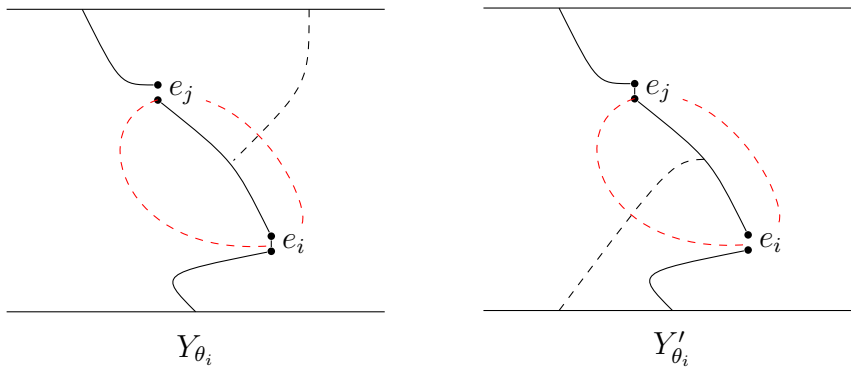


FIGURE 5 – L'instant  $\tau_i$  quand  $e_i$  devient différente

Voyons maintenant le troisième point, nous considérons le circuit  $B_i^*$ , la condition  $\text{top} \nleftrightarrow \text{bot}$  impose qu'il existe un ensemble  $K_i$  séparant  $\text{top}$  et  $\text{bot}$  dans

la configuration  $Y'_{\tau_i}$ . Vu que la dimension est 2, nous pouvons supposer que  $K_i^*$  est un chemin fermé. Comme  $e_i$  est pivot pour  $top \longleftrightarrow bot$  dans la configuration  $Y'_{\tau_i}$ , nécessairement  $K_i^*$  emprunte l'arête  $e_i^*$ . Nous pouvons numéroté les arêtes de  $K_i$  de la façon suivante :

- nous posons  $e_i^* = k_0$  ;
- si  $e_i^*$  est horizontale, nous posons  $k_{-1}$  l'arête qui partage le sommet gauche de  $e_i^*$  et  $k_1$  l'arête qui partage le sommet droite. S'il  $e_i^*$  est verticale, nous posons  $k_{-1}$  l'arête en bas et  $k_1$  celle en haut.
- Nous nous éloignons de  $e_i$ , jusqu'à avoir numéroté toutes les arêtes. Dans la direction négative, nous diminuons l'indice de 1 à chaque pas et nous augmentons de 1 par pas dans la direction positive.

Nous considérons maintenant l'arête minimale et l'arête maximale de l'ensemble  $K_i \cap (\gamma_i^1 \cup \rho_i^2)$  que nous notons  $k_{min}$  et  $k_{max}$ . Les deux arêtes  $k_{min}$  et  $k_{max}$  coupe  $K_i$  en 3 parties disjointes :  $C_i^g$  un chemin entre le bord gauche et  $k_{min}$  ;  $C_i^d$  un chemin entre le bord droite et  $k_{max}$  ; un chemin entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$  contenant ces deux arêtes. De plus, les deux sommets qui séparent ces trois parties coupent le contour  $\gamma_i^1 \cup \rho_i^2$  en deux chemins disjoints  $c_i^1$  et  $c_i^2$ . Quitte à échanger les numéros, nous supposons que  $|c_i^1| \geq |c_i^2|$ .

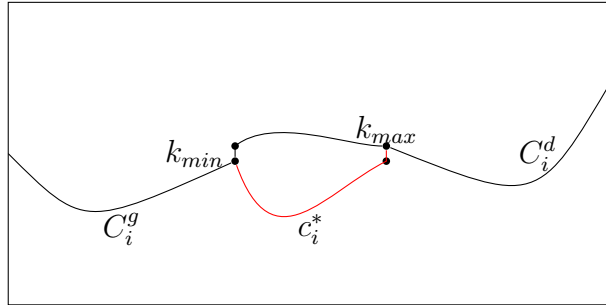


FIGURE 6 – construction d'un chemin fermé disjoint d'un ensemble séparant

Pour terminer, nous posons  $S_i^* = C_i^g \cup C_i^d \cup c_i^2$  un chemin fermé du bord gauche au bord droite dans le graphe dual et  $c_i^* = c_i^1$ . Nous posons  $S_i$  le dual de  $S_i^*$  qui est un cut. Or  $|c_i^1| \geq |c_i^2|$ , nous obtenons  $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^1 \cup \rho_i^2|$ . Par construction, l'ensemble séparant  $S_i$  et le chemin fermé  $c_i^*$  sont disjoints.

Enfin, pour obtenir la suite  $(e_i)_{i \geq 1}$  d'arêtes et les temps  $(\theta_i)_{i \geq 1}$  comme dans l'énoncé, nous partons de l'instant  $\theta$  pour trouver une arête qui a causé la différence à  $e_0$ , ensuite nous répétons cette procédure à l'instant où cette arête est devenue différente jusqu'à arriver au bord. Comme chaque ouverture ou fermeture d'une arête ne peut se produire qu'aux instants d'arrivée des processus de Poisson, il y a presque sûrement un nombre fini d'arêtes qui sont devenues différentes avant  $\theta$ . Nous pouvons donc

trouver une suite finie d'arêtes  $e_0, e_1, \dots, e_N$  avec  $e_N = e_0$  et des instants  $\theta_1 < \dots < \theta_N = \theta$  qui vérifient les deux premiers points de l'énoncé.  $\square$

## 8 Une inégalité BK temporelle

Nous énonçons ici pour le processus de percolation dynamique une inégalité de type BK. Nous commençons par généraliser la notion de l'occurrence disjointe pour des événements qui arrivent à des instants différents.

Nous considérons d'abord le processus de percolation dynamique  $(X_t)_{t \geq 0}$  qui est à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ , un événement croissant  $A$  qui dépend d'un nombre fini d'arêtes à l'instant  $s$ , et un autre événement croissant  $B$  qui dépend d'un nombre fini d'arête à l'instant  $t$ . Nous notons

$$K(\omega) = \{e : \omega(e) = 1\}$$

l'ensemble des arêtes ouvertes dans la configuration  $\omega$ . Nous définissons l'occurrence disjointe comme suit :

**Définition 2.** Soit  $A, B$  définis précédemment, l'occurrence disjointe de  $A$  et  $B$  noté par  $A \overset{s,t}{\circ} B$  par :

- si  $s = t$ ,  $A \overset{s,t}{\circ} B = \{(X_t)_{t \geq 0} : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B \quad K(\omega_1) \cap K(\omega_2) = \emptyset, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(X_t)\}$  ;
- si  $s < t$ ,  $A \overset{s,t}{\circ} B = \{(X_t)_{t \geq 0} : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B \quad K(\omega_1) \subset K(X_s), K(\omega_2) \subset K(X_t) \text{ et } \forall e \in K(\omega_1) \cap K(\omega_2) \quad \exists r \in [s, t] \quad X_r(e) \neq X_s(e)\}$ .

Nous énonçons l'inégalité de BK pour la percolation dynamique :

**Proposition 2.** Soit  $\Lambda(\ell, h)$  une boîte de longueur  $\ell$ ,  $0 < s \leq t$ , soit  $A$  et  $B$  des événements définis au début de la partie, alors  $P(A \overset{s,t}{\circ} B) \leq P(A)P(B)$ .

*Démonstration.* Pour le premier cas, c'est l'inégalité de BK classique. Nous traitons uniquement le deuxième cas où les instants sont différents. Soit  $\Gamma = \{f : [s, t] \rightarrow \{0, 1\} \text{ càdlàg}\}^{|\Lambda(\ell, h)|}$ . Nous introduisons deux espaces de probabilité identiques  $S_1 = (\Gamma_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ ,  $S_2 = (\Gamma_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ , nous définissons  $S$  l'espace produit de  $S_1, S_2$ . Nous écrivons  $x \times y$  un point de  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Nous notons  $A' = A \times \Gamma_2$ ,  $B'_k = \{x \times y : (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_{|\Lambda(\ell, h)|}) \in B\}$ . Nous notons  $P_{12}$  la probabilité produit de  $P_1, P_2$ . Nous avons bien que  $P(A \circ B) = P_{12}(A' \circ B'_0)$  et  $P_{12}(A' \circ B'_{|\Lambda(\ell, h)|}) = P(A)P(B)$ . Nous montrons maintenant :

$$\forall k > 0, P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_{12}(A' \circ B'_k)$$

Soit  $M$  un événement, nous disons que  $e$  est pivot pour  $M$  si  $(\omega^e \in M, \omega_e \notin M)$  ou  $(\omega^e \notin M, \omega_e \in M)$ , c'est à dire un changement de l'arête  $e$  change l'occurrence de  $M$  dans la configuration  $\omega$ . Nous notons  $e \triangleright M$  si  $e$  est pivot pour  $M$ .

Nous considérons d'abord le cas où  $e_k$  n'est pas pivot pour  $B$ . Nous vérifions facilement que

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright B) \leq P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright B)$$

car il suffit de poser  $y_k$  une copie indépendante de  $x_k$  qui réalise  $A \circ B_{k-1}$  pour obtenir  $A \circ B_k$ .

Nous considérons maintenant le cas  $e_k$  pivot pour  $B$  mais pas pour  $A$ . Par symétrie nous pouvons supposer  $\omega^{e_k} \in B$ . Il nous faut  $x_k(t) = 1$  réaliser pour  $A \circ B_{k-1}$  et  $y_k(t) = 1$  pour réaliser  $A \circ B_k$ . Or  $x_k$  et  $y_k$  sont de même loi, nous avons  $P_{12}(x_k(t) = 1) = P_{12}(y_k(t) = 1)$ . D'où :

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B) = P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B)$$

Il reste le cas où l'arête  $e_k$  est pivot pour  $A$  et  $B$ . Quitte à changer  $p$  en  $(1 - p)$ , nous pouvons supposer que  $\omega^{e_k} \in A$ , il faut donc distinguer deux cas :

- Si  $\omega^{e_k} \in A, \omega^{e_k} \in B$ , nous devons avoir  $x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0$  pour  $A \circ B_{k-1}$ . Pour  $A \circ B_k$ , il faut  $x_k(s) = 1$  et  $y_k(t) = 1$ . Nous montrons que

$$P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).$$

Nous considérons la première instant de saut de  $x_k$ , soit

$$T = \inf\{r > s, x_k(r) = 0\}$$

et nous conditionnons la première probabilité par  $\{T = r\}$ , et nous utilisons la propriété de Markov forte qui donne :

$$\begin{aligned} & P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \\ &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t}] \\ &= E[E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t} | T = r]] \\ &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T=r} E[\mathbf{1}_{x_k(t)=1} | T = r]] \\ &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t} P_0(x'_k(t-r) = 1)] \\ &\leq E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t}] P(y_k(t-r) = 1) \\ &= P(x_k(s) = 1, T < t) P(y_k(t) = 1) \\ &\leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1). \end{aligned}$$

Avec  $x'_k$  le processus démarré à  $T$ . Nous avons  $P_0(x'_k(t-r) = 1) \leq P(y_k(t-r) = 1)$  car  $\{x_k(t-r) = 1\}$  est un événement croissant. Nous avons  $P(y_k(t-r) = 1) = P(y_k(t) = 1)$  car  $y_k$  est stationnaire à l'équilibre.

- Si  $\omega^{e_k} \in A, \omega_{e_k} \in B$ , nous devons avoir  $x_k(s) = 1, x_k(t) = 0$  pour réaliser  $A \circ B_{k-1}$  et  $x_k(s) = 1, y_k(t) = 0$  pour réaliser  $A \circ B_k$ . Or l'événement  $x_k(t) = 1$  est un événement croissant, nous avons

$$P_0(x_k(t-s) = 1) \leq P(x_k(t-s) = 1).$$

Par la propriété de Markov forte, nous avons :

$$\begin{aligned} P(x_k(s) = 0, x_k(t) = 1) &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=0} P_0(x_k(t-s) = 1)] \\ &\leq P(x_k(s) = 0) P(y_k(t) = 1) \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux cas précédents :

$$P_{12}(A \circ B_{k-1}, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B) \leq P_{12}(A \circ B_k, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B).$$

Enfin, nous en déduisons l'inégalité de BK en effectuant une récurrence sur  $k$ .  $\square$

## 9 Décroissance exponentielle pour la percolation dynamique

La probabilité qu'un chemin fermé décroît exponentiellement vite avec sa longueur dans la phase surcritique. Nous montrons ici une propriété similaire pour la percolation dynamique :

**Proposition 3.** *Soient  $p > \frac{1}{2}$ , et deux instants  $0 < s < t$ . Soient  $\gamma, \rho$  deux chemins fixés. Nous avons l'inégalité suivante :*

$$P \left( \begin{array}{l} \gamma \text{ fermé à l'instant } s \\ \rho \text{ fermé à l'instant } t \\ \gamma, \rho \text{ ne sont pas d'occurrence disjointe} \end{array} \right) \leq me^{-\lambda(t-s)}$$

avec  $\lambda$  une constante indépendante de  $\gamma, \rho$ .

*Démonstration.* nous considérons une arête  $(x, y)$  fermé et une modification locale  $M$  pour l'ouvrir suivante : nous fermons deux arêtes perpendiculaires de même côté qui contiennent respectivement un sommet  $x, y$  et l'arête qui relie ces deux arêtes ; ensuite nous ouvrons l'arête  $(x, y)$ . Chaque étape de la modification est déterminée par une horloge exponentielle et elle respecte la condition de  $T \not\leftrightarrow B$ . Entre  $[0, 1]$ , cette modification a une probabilité

positive  $r$  pour se réaliser. Nous en déduisons qu'il existe une constante  $\lambda$  pour qu'entre  $[s, t]$ , la probabilité que cette modification ne se réalise pas est inférieur à  $e^{-\lambda(t-s)}$ .

Nous considérons maintenant deux arêtes  $e, e'$  voisines, nous pouvons choisir les arêtes que nous modifions pour que  $e, e'$  soient modifiées indépendamment. En effet, si les  $e, e'$  sont colinéaires alors nous effectuons les modifications à différents côtés ; si  $e, e'$  sont perpendiculaires, alors nous effectuons la modification à l'extérieur de l'angle formé par  $e, e'$ , voir figure 7.

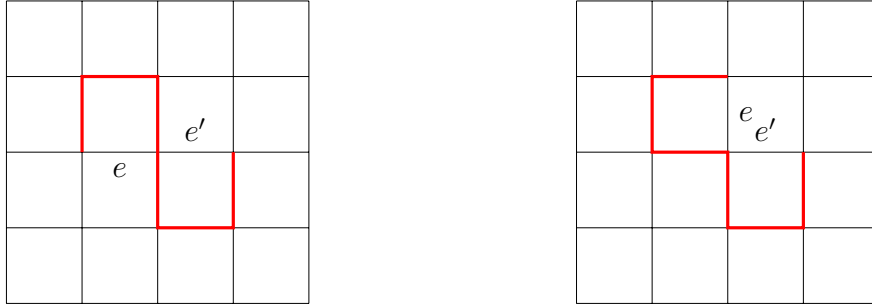


FIGURE 7 – deux arêtes voisines et les arêtes à modifier en rouge

Nous avons donc

$$\begin{aligned} P(\gamma \stackrel{s,t}{\circ} \rho) &\geq P(\forall e \in \gamma, M \text{ se réalise sur } e) \\ &\geq (1 - e^{-\lambda(t-s)})^m \geq 1 - me^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

□

Nous introduisons la notion de space-time chemin, en prolongeant la connexion dans le temps, c'est-à-dire si une arête  $e = (x, y)$  reste ouverte (resp. fermée) entre  $s$  et  $t$  alors  $(x, s) \longleftrightarrow (y, t)$  par un space-time chemin ouvert (resp. fermé). Nous montrons aussi une décroissance exponentielle avec les space-time chemin.

**Proposition 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$ ,  $p > \frac{1}{2}$ , soit  $A(n, t)$  l'événement  $(O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt)$  par un space-time chemin fermé où  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ , alors  $\exists \gamma(p, t)$ , une constante qui dépend de  $p, t$  tel que  $P(A(n, t)) \leq e^{-\gamma(p, t)n}$ .

*Démonstration.* Nous montrons cette équivalence par le lemme sous-additif. En fait,

$$\begin{aligned} P((O, 0) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ \geq P((O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((n\mathbf{e}_1, nt) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ \geq P((O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((O, 0) \leftrightarrow (m\mathbf{e}_1, mt)) \end{aligned}$$

Car nous avons l'invariance par translation. La suite  $(-\ln P(A(n, t)))_{n \in \mathbb{N}}$  est sous-additive. Par le lemme sous-additif, nous obtenons :

$$\lim_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) = \inf_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) = \gamma(p, t)$$

Nous avons donc

$$\forall n, -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) \geq \gamma(p, t).$$

□

## 10 La probabilité d'une influence du bord

Nous montrons maintenant que la probabilité que le bord influence une arête à l'intérieur de la boîte décroît exponentiellement avec la taille de la boîte.

**Théorème 2.** *Soit  $p \geq \frac{1}{2}$ ,  $\bar{e}$  l'arête au centre de la boîte  $\Lambda(l, h)$  avec deux processus  $Y, Y'$  définis avec deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$ , il existe une constante  $\lambda > 0$  tel que  $P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) \leq e^{-\lambda \ell} P(T \not\leftrightarrow B \text{ entre } [0, t])$ .*

*Démonstration.* Nous utilisons les notations de la proposition 1 et son corollaire. D'après la proposition 1, nous savons qu'il existe une suite d'arêtes  $e_1, e_n$  qui sont reliées l'une après l'autre à différentes instants. Nous notons  $x_i, y_i$  les extrémités de  $c_i^*$  chemin fermé dans le graphe dual et de  $C_i$  le cut, nous notons aussi  $k_i$  le cardinal de  $p_i^1 \cup p_i^2$ . Nous séparons la suite en différentes sous suites selon l'indépendance, plus précisément, si  $c_j^*$  et  $c_{j+1}^*$  est de l'occurrence disjointe, alors nous coupons la suite à l'indice  $j$ . Ainsi, nous obtenons les indices  $j_1, \dots, j_r$  telles que  $\forall 1 \leq u \leq r, c_{j_u}^*$  et  $c_{j_{u+1}}^*$  sont disjoints,  $\forall j_k \leq v \leq j_{k+1}, c_k^*$  et  $c_{k+1}^*$  ne sont pas disjoints.

$$\begin{aligned} P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) &= P(\exists e_1, \dots, e_n, \forall i, \exists p_i^1, p_i^2, e_{i-1} \xleftrightarrow{p_i^1, p_i^2} e_i) \\ &\leq P(\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, c_1^*, \dots, c_n^*, C_1, \dots, C_n) \\ &\leq \sum_{j_1, \dots, j_r} \prod_{1 \leq k \leq r} P \left( \begin{array}{c} \exists x_{j_{k-1}+1}, \dots, x_{j_k}, \\ y_{j_{k-1}+1}, \dots, y_{j_k}, \\ c_{j_{k-1}+1}, \dots, c_{j_k}^*, \\ C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}, \\ \forall j_{k-1} + 1 \leq m \leq j_k, x_m \xleftrightarrow{c_m^*} y_m, c_m^* \circ C_m \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nous utilisons la proposition 4 pour majorer chaque terme du produit. Or les  $\forall j_{k-1} + 1 \leq c_m^* \leq j_k$ , les  $c_m^*$  ne sont pas d'occurrence disjointe, nous avons



un space-time chemin  $\sigma_k$  qui relie  $x_{j_{k-1}+1}$  et  $y_{j_k}$ . Donc elle est bornée par

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut})$$

car  $x_{j_{k-1}+1}$  et  $y_{j_k}$  sont dans un carré de taille inférieure à  $|\sigma_k|$ . Or  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall x > 1, x^4 e^{-x} \leq e^{-\delta x}$ , nous avons

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} \leq |\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, t)|\sigma_k|} \leq e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|}$$

Nous partons de  $\bar{e}$ ,  $x_{j_{n-1}+1}$  est de distance inférieure à  $2|\sigma_r|$  de  $\bar{e}$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} & \sum_{1=j_1 < \dots < j_r=n} \prod_{1 \leq k \leq r} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}) \\ & \leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4|\sigma_r|^2 e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\ & \leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4e^{-\delta^2 \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\ & \leq 4^r e^{-\delta^2 \gamma(p, t) \sum_{i=1}^r |\sigma_{j_i}|} P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ séparent } T, B) \end{aligned}$$

Enfin,  $r$  est borné par une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\ell^2(1-p)t$ , nous avons le résultat.  $\square$