Université Paris-Sud
Département de mathématiques
20 septembre 2016
Mémoire pour le M2 mathématiques de l'aléatoire

Etudes sur l'interface dans le modèle de percolation dynamique

Wei ZHOU

Directeur : Raphaël CERF

Table des matières

1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier les interfaces dans le modèle de percolation Bernoulli sur le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ avec une méthode dynamique.

2 Modèle

Nous présentons le modèle sur lequel nous allons travailler dans ce mémoire. Pour commencer, nous présentons les notations que nous allons utiliser.

Le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$**.** Soit x, y deux points de $\mathbb{Z}^2$, nous disons que x, y sont voisins s'ils sont à distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble $\mathbb{E}^2$ est l'ensemble des paires $\{x, y\}$, où x, y sont deux points voisins de $\mathbb{Z}^2$. Le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ est le graphe dont $\mathbb{Z}^2$ est l'ensemble des sommets et $\mathbb{E}^2$ est l'ensemble des arêtes. Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2)$, nous disons que $e = \langle x, y \rangle$ est incluse dans A si le segment ouvert $]x, y[$ est inclus dans A.

Les boîtes $\Lambda(\ell, h)$**.** Nous notons $\Lambda(\ell, h)$ le sous graphe de $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ à l'intérieur du rectangle $[-\ell, \ell] \times [-h, h]$. Nous notons aussi $T(\ell, h)$ le bord supérieur de $\Lambda(\ell, h)$, i.e. le segment $[-\ell, \ell] \times (0, h)$. Nous notons aussi $B(\ell, h)$ le bord inférieur de $\Lambda(\ell, h)$, i.e. $[-\ell, \ell] \times (0, -h)$. Les deux bords verticaux de la boîte $\Lambda(\ell, h)$ sont notés $V(\ell, h)$.

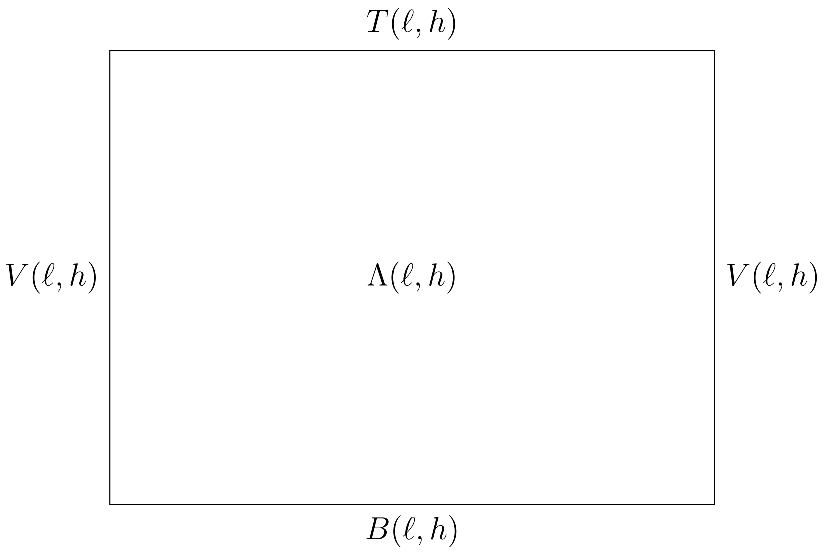

FIGURE 1 – La boîte $\Lambda(\ell, h)$

Les ensembles séparants. Soient A, B deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}^2$. Nous disons qu'un ensemble d'arêtes $S \subset \mathbb{E}^2$ sépare A et B si aucune partie connexe du graphe $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2 \setminus S)$ n'intersecte simultanément A et B. Un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour A et B. Nous disons que S est un ensemble séparant minimal pour A, B si aucun sous-ensemble strict de S ne sépare A et B.

Le graphe dual. Le graphe dual du réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ est le graphe de sommets les points de $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et d'arêtes $\mathbb{E}^{2*}$, où $\mathbb{E}^{2*}$ est l'ensemble des arêtes joignant deux sommets de $\mathbb{Z}^{2*}$ à distance 1. Si e est une arête dans $\mathbb{E}^2$, nous notons e^* l'unique arête de $\mathbb{E}^{2*}$ qui l'intersecte orthogonalement en son milieu. Les objets dans le graphe dual seront notés avec une $*$. La boîte

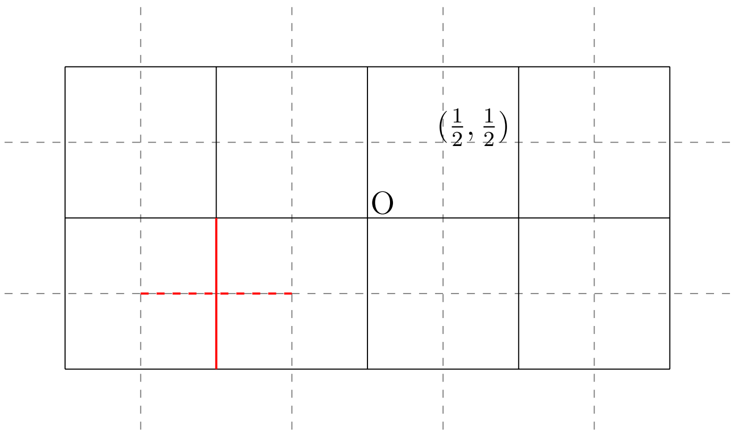

FIGURE 2 – le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ et son dual

duale de $\Lambda(\ell, h)$ est le sous graphe de $(\mathbb{Z}^{2*}, \mathbb{E}^{2*})$ à l'intérieur du rectangle $]-\ell-\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}[\times]-h-\frac{1}{2}, h+\frac{1}{2}[$, que nous notons $\Lambda^*(\ell, h)$. Nous définissons le bord extérieur de $\Lambda^*(\ell, h)$, que notons $\partial^{ext}\Lambda^*(\ell, h)$, par,

$$\partial^{ext}\Lambda^*(\ell, h) = \left\{ y \in \mathbb{Z}^{2*} \setminus \Lambda(l, h) : \exists x \in \mathbb{Z}^{2*} \quad \langle x, y \rangle \in \Lambda^*(\ell, h) \right\}$$

Les configurations. L'espace des configurations est $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$. Une configuration générique est notée $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^2\} \in \Omega$. L'arête e est ouverte dans la configuration ω si $\omega(e) = 1$ et fermée si $\omega(e) = 0$. Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ et ω une configuration, la configuration ω restreinte à A, notée $\omega\,|_A$, est la restriction de ω aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans A. Soient $e \in \mathbb{E}^2$ une arête et $\omega \in \Omega$ une configuration, nous définissons les configurations ω^e, ω_e par :

$$\forall f \in \mathbb{E}^2 \qquad \omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases}, \quad \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}.$$

Les configurations ω^e, ω_e sont obtenues à partir de ω en ouvrant ou fermant l'arête e.
Soient ω, ω' deux configurations, nous définissons la configuration $\omega \wedge \omega'$ par :

$$\forall e \in \mathbb{E}^2 \qquad \omega \wedge \omega'(e) = \omega(e)\omega'(e).$$

Une arête e est ouverte dans $\omega \wedge \omega'$ si et seulement si elle est ouverte dans ω et ω'.

Les chemins. Soient x et y deux sommets dans $\mathbb{Z}^2$, un chemin entre x et y est une suite $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$ de sommets x_i et d'arêtes e_i distincts où $x_0 = x$ et $x_{n+1} = y$ et e_i est l'arête joignant x_i à x_{i+1}. Nous disons que x et y sont reliés par un chemin ouvert dans la configuration ω, noté $x \overset{\omega}{\longleftrightarrow} y$, s'il existe un chemin qui relie x, y tel que toute arête de ce chemin est ouverte dans la configuration ω. Nous notons aussi $x \overset{\omega}{\not\longleftrightarrow} y$ l'événement complémentaire. Soit A un sous-ensemble de $\Lambda(l,h)$, nous notons $x \overset{A}{\longleftrightarrow} y$ s'il existe un chemin ouvert entre x et y dont les arêtes sont incluses dans A.
Soient A, B deux sous-graphes de $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$, nous disons que A est connecté à B dans la configuration ω, que nous notons $A \overset{\omega}{\longleftrightarrow} B$, s'il existe un chemin entre un sommet de A et un sommet de B. Dans ce mémoire, nous étudions en particulier les chemins entre un sommet de $T(l,h)$ et un sommet de $B(l,h)$.

La probabilité de percolation. Soit un réel $p \in [0,1]$. Sur l'espace Ω, nous considérons la tribu cylindrique $\mathcal{F}$. Nous considérons la probabilité produit

$$P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes \mathbb{E}^2}.$$

Intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau $\mathbb{Z}^2$ avec une probabilité $1-p$.

3 La percolation dynamique

Nous définissons d'abord la percolation dynamique sur le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$. Il s'agit d'un processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ à temps continu à valeurs dans l'espace des configurations $\{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$. Si e est une arête et $t \geqslant 0$, alors $X_t(e) \in \{0,1\}$ est l'état de l'arête e au temps t. La loi du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est définie de la manière suivante. Les processus $(X_t(e))_{t\geqslant 0}, e \in \mathbb{E}^2$ sont i.i.d.. Pour une arête e fixée, le processus $(X_t(e))_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts à deux états $\{0,1\}$, qui saute de 0 vers 1 à taux p et de 1 vers 0 à taux $1-p$.

Construction graphique. Nous allons construire la percolation dynamique sur un espace de probabilité qui nous permettra de réaliser des couplages utiles pour les preuves. Nous commençons avec un espace de probabilité sur lequel sont définis les objets suivants :

- Une famille $(N_t(e))_{t\geqslant 0}, e \in \mathbb{E}^2$ de processus de Poisson iid de paramètre 1 indexée par les arêtes $e \in \mathbb{E}^2$;
- Une famille de variables aléatoires $U_n(e)_{n\geqslant 1}, e \in \mathbb{E}^2$, iid de loi uniforme sur $[0,1]$.

La probabilité sur cet espace sera notée par $\mathbb{P}$. Soit e une arête de $\mathbb{E}^2$, notons $(T_i(e))_{i\geqslant 1}$, les instants des sauts du processus de Poisson $(N_t(e))_{t\geqslant 0}$ associé à e. A l'instant $T_i(e)$, nous retirons l'état de l'arête à l'aide de la v.a. $U_i(e)$. Plus précisément, l'arête e ne peut changer d'état qu'aux instants $(T_i(e))_{i\geqslant 1}$, et nous posons

$$X_{T_i(e)}(e) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } U_i(e) < p \\ 0 & \text{si } U_i(e) > p \end{array} \right. .$$

Nous définissons la suite $(\tau_i)_{i\geqslant 0}$ des instants de changement dans une boîte finie $\Lambda(\ell,h)$, en posant $\tau_0 = 0$ et pour tout $i \geqslant 0$,

$$\tau_{i+1} \;=\; \inf \left\{ \, t > \tau_i : X_t \, |_{\Lambda(\ell,h)} \neq X_{\tau_i} \, |_{\Lambda(\ell,h)} \, \right\}.$$

Pour tout $i \geqslant 1$, il existe une unique arête e_i incluse dans $\Lambda(\ell,h)$ telle que $X_{\tau_i}(e_i) \neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$. Nous appelons la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ la suite des arêtes modifiées.

Le space-time chemin (STC). Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de percolation dynamique. Un space-time chemin s'obtient en prolongeant un chemin dans le temps. Plus précisément, nous définissons une relation d'équivalence $\stackrel{X}{\longleftrightarrow}$ sur les couples $(e,t) \in (\mathbb{E}^2, \mathbb{R}_+)$ par, soient $e = \langle a,b \rangle, f = \langle c,d \rangle \in \mathbb{E}^2$ deux arêtes, et $s,t \geqslant 0$ deux instants,

$$\begin{aligned} (e,t) \stackrel{X}{\longleftrightarrow} (f,t) \text{ si } a \stackrel{X_t}{\longleftrightarrow} c, X_t(e) = 1, X_t(f) = 1 \\ (e,s) \stackrel{X}{\longleftrightarrow} (e,t) \text{ si } \forall r \in [s \wedge t, s \vee t] \quad X_r(r) = 1. \end{aligned}$$

Nous généralisons ensuite cette relation d'équivalence sur les sommets de $\mathbb{Z}^2$ par, soit $x,y \in \mathbb{Z}^2, s,t \in \mathbb{R}_+$,

$$(x,s) \stackrel{X}{\longleftrightarrow} (y,t) \text{ si } \exists e \text{ d'une extrémité } x, f \text{ d'une extrémité } y \quad (e,s) \stackrel{X}{\longleftrightarrow} (f,t).$$

Nous disons qu'il existe un space-time chemin (STC) entre (x,s) et (y,t) si $(x,s) \overset{X}{\longleftrightarrow} (y,t)$.

4 Les chaînes de Markov conditionnées

Nous énonçons un théorème général sur les chaînes de Markov conditionnées que nous allons utiliser dans la construction de l'interface.
Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble E fini, irréductible apériodique de probabilité invariante π. Soit $A \subset E$, nous définissons la chaîne $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ conditionnée à rester dans A, notée $(Z_n^A)_{n\geqslant 0}$ par sa valeur initiale $Z_0^A \in A$ et sa probabilité de transition

$$p^A(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & y \in A, x \neq y \\ 0 & y \notin A \\ 1 - \sum_{y\neq x} p^A(x,y) & x = y \end{cases}.$$

Théorème 1. *La chaîne $(Z_n^A)_{n\geqslant 0}$ admet une probabilité invariante qui est la probabilité invariante de la chaîne $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ conditionnée à rester dans A, c'est à dire :*

$$\forall x \in A \quad \pi^A(x) = \pi(x \mid A) = \frac{\pi(\{x\})}{\pi(A)}.$$

5 L'interface

Nous allons proposer une définition de l'interface à l'aide de la percolation dynamique. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de percolation dynamique de paramètre p dans $\Lambda(\ell,h)$ issu d'une configuration initiale X_0 appartenant à l'événement $\{T \overset{X_0}{\not\longleftrightarrow} B\}$ et $(\tau_i)_{i\geqslant 0}$ sa suite des instants de changement. Nous allons coupler un processus $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$ avec $(X_t)_{t\geqslant 0}$ comme suit. D'abord nous posons $Y_0 = X_0$. Ensuite, soit $i \geqslant 0$, pour tout $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$, nous posons $Y_s = Y_{\tau_i}$, et $Y_{\tau_{i+1}}(e) = Y_{\tau_i}(e)$ si $e \neq e_{i+1}$, et nous déterminons $Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})$ en fonction de $X_{\tau_{i+1}}$ via la formule suivante :

$$Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 0 \\ 1 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \not\longleftrightarrow B \text{ dans } (Y_{\tau_i})^{e_{i+1}} \\ 0 & \text{si } X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \longleftrightarrow B \text{ dans } (Y_{\tau_i})^{e_{i+1}} \end{cases}.$$

Remarquons que l'arête e_i devient différente dans les deux processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ à l'instant τ_i si et seulement si e_i devient ouverte à τ_i dans $(X_t)_{t\geqslant 0}$ mais cette ouverture induit une connexion entre T et B dans la configuration $(Y_{\tau_{i-1}})^{e_i}$. Dans ce cas, l'arête e_i reste fermée dans le processus $(Y_t)_{t\geqslant 0}$.

La chaîne de Markov $(X_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ est irréductible apériodique et d'espace d'états fini donc elle admet une unique probabilité invariante qui est simplement la probabilité de la percolation Bernoulli de paramètre p. La chaîne $(Y_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ est aussi irréductible car toute configuration de $(Y_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ est reliée à la configuration où toutes les arêtes sont fermées. En effet, pour chaque arête e dans $\Lambda(\ell,h)$, et à chaque instant de saut $(T_i(e))_{i\geqslant 0}$, nous pouvons fermer e avec probabilité $1-p>0$.
Nous appliquons le théorème 1 à $(X_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ avec A l'ensemble des configurations qui satisfont l'événement $\{T \not\longleftrightarrow B\}$. Nous obtenons que la probabilité invariante du processus $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre p conditionnée par l'événement $\{T \not\longleftrightarrow B\}$. Nous proposons une définition de l'interface en à l'aide de ce couplage.

Définition 1. *Soit $(X_t,Y_t)_{t\geqslant 0}$ un couplage défini précédemment, nous définissons l'interface dans $\Lambda(\ell,h)$ au temps t, que nous notons $\mathcal{I}_t(\ell,h)$, comme l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans X_t et fermées dans Y_t :*

$$\mathcal{I}_t(\ell,h) \;=\; \big\{\, e\in\mathbb{E}^2 : X_t(e)=1, Y_t(e)=0 \,\big\}.$$

6 Les conditions aux bords

Nous fixons un entier h et nous allons étudier l'influence de ℓ sur la loi de l'interface dans la boîte $\Lambda(\ell,h)$. Pour cela, nous introduisons des conditions aux bords. Désormais, nous enlèverons h des notations si cela ne cause pas de confusion. Nous notons $R(\ell)$ le rectangle $\Lambda(\ell,h)$ et $\partial^{in}\Lambda(\ell,h)$ son bord intérieur, c'est à dire,

$$\partial^{in}R(\ell) \;=\; \big\{\, x\in R(\ell) : \exists y\notin R(\ell) \quad \langle x,y\rangle\in\mathbb{E}^2 \,\big\}.$$

Les conditions aux bords sont données par une application Π_ℓ de $\partial^{in}R(\ell)$ dans l'ensemble $\{top, bot, null\}$. L'application Π_l vaut *top* et *bot* sur les bords horizontaux $T(\ell)$ et $B(\ell)$, plus précisément :

$$\forall x\in T(\ell)\cup B(\ell) \quad \Pi_\ell(x)=\left\{\begin{array}{ll} top & \text{si } x\in T(\ell) \\ bot & \text{si } x\in B(\ell) \end{array}\right. .$$

La condition aux bords nulle correspond au choix suivant :

$$\forall y\in V(\ell)\setminus\{(\pm\ell,\pm h))\} \quad \Pi_\ell(y)=null.$$

Soit $m>\ell$, et soit $R(m)$ une boîte avec des conditions aux bords Θ. Soit ω la configuration de percolation dans $R(m)$. Nous pouvons définir les conditions aux bords Π_ℓ induites sur $V(\ell)$ comme suit. Soit x un sommet dans $V(\ell, h)$, nous posons

$$\Pi^\Theta_\ell(x) = \begin{cases} top & \text{si } \exists y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) = top,\ x \underset{R(m)\setminus R(\ell)}{\overset{\omega}{\longleftrightarrow}} y \\ bot & \text{si } \exists y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) = bot,\ x \underset{R(m)\setminus R(\ell)}{\overset{\omega}{\longleftrightarrow}} y \\ null & \text{si } \forall y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) \neq null,\ x \underset{R(m)\setminus R(\ell)}{\overset{\omega}{\not\longleftrightarrow}} y, \end{cases}.$$

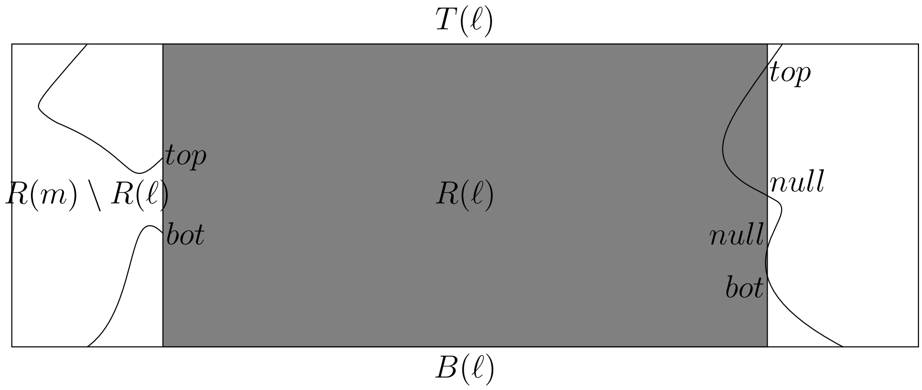

FIGURE 3 – Exemples d'une condition aux bords

Nous définissons ensuite la connexion entre le bord supérieur et le bord inférieur en tenant compte des conditions aux bords. Nous disons que l'événement $\{top \longleftrightarrow bot\}$ arrive dans la boîte $R(\ell)$ s'il existe un chemin ouvert entre deux sommets x, y tels que $\Pi_\ell(x) = top, \Pi_\ell(y) = bot$.

7 La propagation des conditions aux bords

Nous considérons désormais le régime surcritique, qui correspond à $p > \frac{1}{2}$ en dimension 2. Nous nous intéressons à la probabilité qu'une arête fixée soit dans l'interface. Soit e_0 l'arête d'extrémités $(0,0)$ et $(0,1)$. Notre objectif est de montrer que, à t fixé, la probabilité $P(e_0 \in I^\ell_t)$ converge lorsque ℓ tend vers l'infini. Intuitivement, nous imaginons que l'influence des conditions aux bords disparaissent lorsque la taille de la boîte grandit. Plus formellement, soit $R(\ell)$ une boîte dans $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ et considérons deux conditions aux bords Π, Π' sur $R(\ell)$ qui diffèrent en un seul sommet v_0 sur le bord gauche de $R(\ell)$. Nous considérons $(X_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de percolation dynamique dans $R(\ell)$ et deux couplages (X, Y) et (X, Y') conditionnés par l'événement $\{top \not\longleftrightarrow bot\}$

associés aux deux conditions aux bords Π, Π' construit sur l'espace de probabilité de la construction graphique. Pour $t \geqslant 0$, nous notons D_t l'ensemble des arêtes qui sont différentes dans les deux configurations Y_t, Y'_t.

Proposition 1. *Soit $\theta > 0$ le premier instant où e_0 diffère dans les deux processus $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ et $(Y'_t)_{t \geqslant 0}$. Il existe un entier aléatoire N, une suite aléatoires $e_1, \dots, e_N$ et des instants aléatoires $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_N = \theta$. Notons*

$$e_1^* = \langle x_i^*, y_i^* \rangle, \dots, e_N^* = \langle x_N^*, y_N^* \rangle$$

les arêtes duales de $e_1, \dots, e_N$, ainsi que leurs extrémités, alors nous avons,

1. *à l'instant θ_1, il existe deux chemins γ_1^*, ρ_1^* disjoints dont les arêtes sont fermées en dehors de $D^*_{\theta_1}$ qui relient x_1^* et y_1^* au bord gauche de $\partial^{ext} R^*(\ell)$.*
2. *pour tout $1 < i \leqslant N$, à l'instant θ_i, il existe deux chemins γ_i^*, ρ_i^* disjoints dont les arêtes en dehors de $D^*_{\theta_i}$ sont fermées dans les deux configurations Y_{θ_i} et Y'_{θ_i}. De plus, γ_i^* relie x_{i-1}^* à x_i^*, et ρ_i^* relie y_{i-1}^* à y_i^* ;*
3. *pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, à l'instant θ_i, l'arête e_i devient différente dans les deux processus. Il existe un ensemble d'arêtes S_i qui sépare $T(\ell)$ et $B(\ell)$ et un chemin c_i^* disjoint de S_i^* tel que $c_i^* \subset (\gamma_i^* \cup \rho_i^*)$ et $|c_i^*| \geqslant \frac{1}{2} |\gamma_i^* \cup \rho_i^*|$. Toutes les arêtes de $S_i \setminus D_{\theta_i}$ et de $c_i^* \setminus D^*_{\theta_i}$ sont fermées.*

Démonstration. Nous notons $\tau_0 = 0$, et

$$\tau_i = \inf \left\{ s > \tau_{i-1} : \exists e \in R(\ell) \quad Y_{s^-}(e) = Y'_{s^-}(e), Y_s(e) \neq Y'_s(e) \right\}.$$

Nous pouvons aussi supposer $\Pi'(v_0) = top$ sans perte de généralité.
Nous considérons maintenant la première arête e_1 qui devient différente dans les deux processus $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ et $(Y'_t)_{t \geqslant 0}$. Supposons par exemple e_1 est fermée dans le processus $(Y'_t)_{t \geqslant 0}$. Cette arête devient différente car si elle était ouverte dans la configuration Y'_{τ_1}, il existerait un chemin ouvert entre *top* et *bot*, alors que ce n'est pas le cas dans la configuration Y_{τ_1}. Nécessairement, il existe un chemin ouvert entre une extrémité de e_1 et le sommet v_0 à l'instant τ_1. Nous considérons le cluster ouvert C_1 contenant ce chemin dans la configuration Y'_{τ_1}. Le cluster C_1 n'est pas connecté à B vu la condition $\{top \not\longleftrightarrow bot\}$. De plus, le cluster C_1 n'est pas connecté à *top* car s'il l'était, l'événement $\{top \longleftrightarrow bot\}$ arriverait dans la configuration Y_{τ_1} dans laquelle e_1 est ouverte. Considérons le bord arête de C_1 :

$$S_1 \;=\; \left\{ e = \langle x, y \rangle : \quad x \in C_1, y \notin C_1 \right\}$$

L'arête e_1 appartient à S_1, les arêtes de S_1 sont fermées et l'ensemble S_1 sépare C_1 de *top* et de *bot*. Comme la dimension est 2, l'ensemble dual S_1^* contient un chemin dual fermé qui sépare C_1 de *top*, *bot*, et ce chemin passe

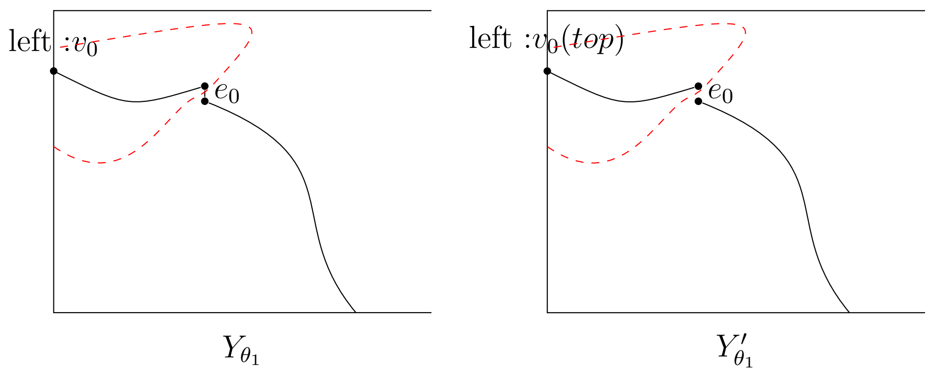

FIGURE 4 – L'instant θ_1 quand e_1 devient différente

nécessairement par e_1^* ; en particulier si nous enlevons e_1^* de ce chemin, nous obtenons 2 chemins disjoints que nous notons γ_1^*, ρ_1^*. Chacun de ces chemins relie une extrémité de e_1^* au bord gauche de $\partial^{ext} R^*(\ell)$ (voir Figure 4).
Considérons maintenant la ième arête e_i qui devient différente dans les deux processus $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y'_t)_{t\geqslant 0}$. Notons x_i, y_i les extrémités de e_i. Nous supposons par exemple que e_i est ouverte dans Y_{τ_i} et fermé dans Y'_{τ_i}. Nécessairement, l'une extrémité de e_i est reliée à *bot* dans Y'_{τ_i}, par exemple x_i, et l'autre extrémité y_i est reliée à *top* dans Y'_{τ_i}. Par contre, ce n'est pas le cas dans Y_{τ_i}, sinon l'arête e_i ne pourrait pas s'ouvrir dans $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ à l'instant τ_i. Choisissons dans Y'_{τ_i} un chemin ouvert de x_i à *bot* et un chemin ouvert de y_i à *top*. Deux cas se présentent :

- Premier cas : les deux chemins sont aussi ouverts dans Y_{τ_i}. Nécessairement, le chemin ouvert de y_i à *top* relie y_i à v_0 ;
- Second cas : les deux chemins ne sont pas tous les deux ouverts dans Y_{τ_i}.

Le premier cas est similaire au cas de l'arête e_1. La seule différence c'est que nous trouvons les deux chemins γ_i^*, ρ_i^* que nous obtenons sont fermés dans la configuration $Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}$ certaines arêtes sont différentes. Nous considérons désormais le second cas.
Considérons $R_i = R_i^1 \cup R_i^2$ le sous-ensemble de D_{τ_i} défini par :

$$R_i^1 = \Big\{ e = \langle x, y\rangle : x \longleftrightarrow x_i \text{ dans } Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}, y \longleftrightarrow bot \text{ dans } Y'_{\tau_i}, \\ Y_{\tau_i}(e) = 0, Y'_{\tau_i}(e) = 1 \Big\}$$

et

$$R_i^2 = \Big\{ e = \langle x, y\rangle : x \longleftrightarrow y_i \text{ dans } Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}, y \longleftrightarrow top \text{ dans } Y'_{\tau_i}, \\ Y_{\tau_i}(e) = 0, Y'_{\tau_i}(e) = 1 \Big\}$$

L'ensemble R_i n'est pas vide, sinon les événements $\{x_i \longleftrightarrow bot\}$ et $\{y_i \longleftrightarrow$

top$\}$ arriveraient dans Y_{τ_i} et e_i ne pourrait être ouverte dans Y_{τ_i}. Nous appelons que R_i est l'ensemble des arêtes qui causent la différence en e_i. Nous fixons un ordre arbitraire sur $\mathbb{E}^2$ et nous ordonnons l'ensemble R_i avec cet ordre. Nous notons e_j la première arête de R_i selon cet ordre. Supposons par exemple que $y_j \longleftrightarrow top$ dans Y'_{τ_i} et $y_i \longleftrightarrow x_j$ dans $Y'_{\tau_i} \wedge Y_{\tau_i}$. (Le cas où $y_j \longleftrightarrow bot$, $x_i \longleftrightarrow x_j$ se traite de manière analogue.) Soit c'_i un chemin de x_j à y_i qui est ouvert dans $Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}$ et soit C'_i le cluster ouvert dans Y'_{τ_i} qui contient c_i. Le cluster C'_i n'est pas connecté à *top* dans Y_{τ_i} car e_i est ouverte dans Y'_{τ_i}, il n'est pas connecté à *bot* dans Y_{τ_i} car e_j est ouverte dans Y'_{τ_i}. Il existe donc un ensemble B_i^* d'arêtes duales qui séparent C'_i de *top* et de *bot*, et qui sont fermées dans $Y_{\tau_i} \wedge Y'_{\tau_i}$. Comme nous sommes en dimension 2, nous pouvons de plus choisir B_i^* de sorte que les arêtes de B_i^* forment un circuit entourant C'_i et qui passe par les arêtes e_i^* et e_j^*. Dans ce cas, l'ensemble $B_i^* \setminus \{e_i^*, e_j^*\}$ est formé de deux chemins γ_i^*, ρ_i^* disjoints.

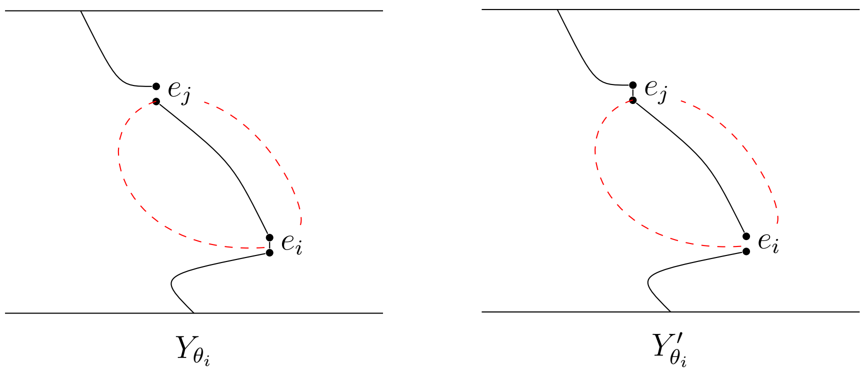

FIGURE 5 – L'instant τ_i quand e_i devient différente

Voyons maintenant le troisième point. Nous considérons le circuit B_i^*. La condition $top \not\longleftrightarrow bot$ impose qu'il existe un ensemble K_i séparant *top* et *bot* dans la configuration Y'_{τ_i}. Vu que la dimension est 2, nous pouvons supposer que K_i^* est un chemin fermé. Comme e_i est pivot pour $top \longleftrightarrow bot$ dans la configuration Y'_{τ_i}, nécessairement K_i^* emprunte l'arête e_i^*. Nous pouvons numéroter les arêtes de K_i selon un ordre croissant de gauche à droite. Nous considérons maintenant l'arête minimale et l'arête maximale de l'ensemble $K_i \cap (\gamma_i \cup \rho_i)$ que nous notons k_{min} et k_{max}. L'ensemble $K_i \setminus \{k_{min}, k_{max}\}$ se décompose en 3 chemins disjoints : C_i^g un chemin entre le bord gauche et k_{min} ; C_i^d un chemin entre le bord droit et k_{max} ; un chemin entre k_{min} et k_{max} contenant ces deux arêtes. De plus, les deux sommets qui séparent ces trois parties coupent le contour $\gamma_i^1 \cup \rho_i^2$ en deux chemins disjoints c_i^1 et c_i^2. Quitte à échanger les numéros, nous supposons que $|c_i^1| \geqslant |c_i^2|$.
Pour terminer, nous posons $S_i^* = C_i^g \cup C_i^d \cup c_i^2$ un chemin fermé du bord

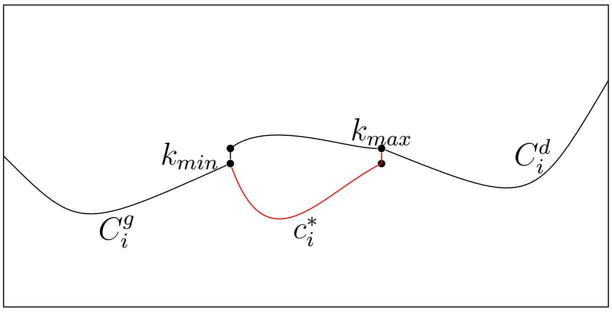

FIGURE 6 – construction d'un chemin fermé disjoint d'un ensemble séparant

gauche au bord droite dans le graphe dual et $c_i^* = c_i^1$. Nous posons S_i le dual de S_i^* qui est un cut. Or $|c_i^1| \geqslant |c_i^2|$, nous obtenons $|c_i^*| \geqslant \frac{1}{2}|\gamma_i^1 \cup p_i^2|$. Par construction, l'ensemble séparant S_i et le chemin fermé c_i^* sont disjoints.
Enfin, pour obtenir la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ d'arêtes et les temps $(\theta_i)_{i\geqslant 1}$ comme dans l'énoncé, nous partons de l'instant θ pour trouver une arête qui a causé la différence à e_0, ensuite nous répétons cette procédure à l'instant où cette arête est devenue différente jusqu'à arriver au bord. Comme chaque ouverture ou fermeture d'une arête ne peut se produire qu'aux instants d'arrivée des processus de Poisson, il y a presque sûrement un nombre fini d'arêtes qui sont devenues différentes avant θ. Nous pouvons donc trouver une suite finie d'arêtes $e_0, e_1, \ldots, e_N$ avec $e_N = e_0$ et des instants $\theta_1 < \cdots < \theta_N = \theta$ qui vérifient les deux premiers points de l'énoncé. $\square$

8 Une inégalité BK temporelle

Nous énonçons ici pour le processus de percolation dynamique une inégalité de type BK. Nous commençons par généraliser la notion de l'occurrence disjointe pour des événements qui arrivent à des instants différents. Nous considérons le processus de percolation dynamique $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Nous notons, pour une configuration ω,

$$K(\omega) = \{e : \omega(e) = 1\}$$

l'ensemble des arêtes ouvertes dans la configuration ω. Nous définissons l'occurrence disjointe comme suit :

Définition 2. *Soient A, B 2 événements de percolation et deux instants $0 \leqslant s \leqslant t$, l'occurrence disjointe de A et B, instants s et t, noté par $A \overset{s,t}{\circ} B$ est l'événement défini par :*

- *si* $s = t$,

$$A \overset{s,t}{\circ} B = \left\{ \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B \quad K(\omega_1) \cap K(\omega_2) = \emptyset, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(X_t) \right\};$$

- *si* $s < t$,

$$A \overset{s,t}{\circ} B = \Big\{ \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B \quad K(\omega_1) \subset K(X_s), K(\omega_2) \subset K(X_t) \text{ et } \\ \forall e \in K(\omega_1) \cap K(\omega_2) \quad \exists r \in [s,t] \quad X_r(e) \neq X_s(e) \Big\}.$$

Nous énonçons alors une inégalité de BK pour la percolation dynamique.

Proposition 2. *Soient* $0 \leqslant s \leqslant t$ *deux instants. Soient deux événements croissants* A, B *qui dépendant d'un nombre fini d'arêtes, alors*

$$\mathbb{P}(A \overset{s,t}{\circ} B) \leqslant P(A)P(B).$$

Démonstration. Pour le premier cas, c'est l'inégalité de BK classique, voir [2]. Nous traitons uniquement le deuxième cas où les instants sont différents. Soit $\Gamma = \{f : [s,t] \to \{0,1\} \text{ càdlàg}\}^{|\Lambda(\ell,h)|}$. Nous introduisons deux espaces de probabilité identiques $S_1 = (\Gamma_1, \mathcal{F}_1, P_1), S_2 = (\Gamma_2, \mathcal{F}_2, P_2)$, nous définissons S l'espace produit de S_1, S_2. Nous écrivons $x \times y$ un point de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Nous notons $A' = A \times \Gamma_2$, $B'_k = \{x \times y : (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_{|\Lambda(\ell,h)|}) \in B\}$. Nous notons P_{12} la probabilité produit de P_1, P_2. Nous avons bien que $P(A \circ B) = P_{12}(A' \circ B'_0)$ et $P_{12}(A' \circ B'_{|\Lambda(\ell,h)|}) = P(A)P(B)$. Nous montrons maintenant :

$$\forall k > 0, P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leqslant P_{12}(A' \circ B'_k)$$

.

Soit M un événement, nous disons que e est pivot pour M si $(\omega^e \in M, \omega_e \notin M)$ ou $(\omega^e \notin M, \omega_e \in M)$, c'est à dire un changement de l'arête e change l'occurrence de M dans la configuration ω. Nous notons $e \triangleright M$ si e est pivot pour M.

Nous considérons d'abord le cas où e_k n'est pas pivot pour B. Nous vérifions facilement que

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright B) \leqslant P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright B)$$

car il suffit de poser y_k une copie indépendante de x_k qui réalise $A \circ B_{k-1}$ pour obtenir $A \circ B_k$.

Nous considérons maintenant le cas e_k pivot pour B mais pas pour A. Par symétrie nous pouvons supposer $\omega^{e_k} \in B$. Il nous faut $x_k(t) = 1$ réaliser pour $A \circ B_{k-1}$ et $y_k(t) = 1$ pour réaliser $A \circ B_k$. Or x_k et y_k sont de même loi, nous avons $P_{12}(x_k(t) = 1) = P_{12}(y_k(t) = 1)$. D'où :

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B) = P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B)$$

Il reste le cas où l'arête e_k est pivot pour A et B. Quitte à changer p en $(1-p)$, nous pouvons supposer que $\omega^{e_k} \in A$, il faut donc distinguer deux cas :

- Si $\omega^{e_k} \in A, \omega^{e_k} \in B$, nous devons avoir $x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s,t], x_k(r) = 0$ pour $A \circ B_{k-1}$. Pour $A \circ B_k$, il faut $x_k(s) = 1$ et $y_k(t) = 1$. Nous montrons que

  $$\mathbb{P}\big(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s,t], x_k(r) = 0\big) \leqslant \mathbb{P}(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).$$

  Nous considérons la première instant de saut de x_k, soit

  $$T = \inf\{r > s, x_k(s) = 0\}$$

  et nous conditionnons la première probabilité par $\{T = r\}$, et nous utilisons la propriété de Markov forte qui donne :

  $$\begin{aligned}
  &\mathbb{P}\big(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s,t], x_k(r) = 0\big) \\
  &= E\left[\mathbf{1}_{x_k(s)=1}\mathbf{1}_{x_k(t)=1}\mathbf{1}_{T<t}\right] \\
  &= E\left[E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1}\mathbf{1}_{x_k(t)=1}\mathbf{1}_{T<t}|T = r]\right] \\
  &= E\left[\mathbf{1}_{x_k(s)=1}\mathbf{1}_{T=r}E[\mathbf{1}_{x_k(t)=1}|T = r]\right] \\
  &= E\left[\mathbf{1}_{x_k(s)=1}\mathbf{1}_{T<t}P_0(x'_k(t-r) = 1)\right] \\
  &\leqslant E\left[\mathbf{1}_{x_k(s)=1}\mathbf{1}_{T<t}\right] P(y_k(t-r) = 1) \\
  &= \mathbb{P}(x_k(s) = 1, T < t)P(y_k(t) = 1) \\
  &\leqslant \mathbb{P}(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).
  \end{aligned}$$

  Avec x'_k le processus démarré à T. Nous avons $\mathbb{P}_0(x'_k(t-r) = 1) \leqslant \mathbb{P}(y_k(t-r) = 1)$ car $\{x_k(t-r) = 1\}$ est un événement croissant. Nous avons $\mathbb{P}(y_k(t-r) = 1) = \mathbb{P}(y_k(t) + 1)$ car y_k est stationnaire à l'équilibre.
- Si $\omega^{e_k} \in A, \omega_{e_k} \in B$, nous devons avoir $x_k(s) = 1, x_k(t) = 0$ pour réaliser $A \circ B_{k-1}$ et $x_k(s) = 1, y_k(t) = 0$ pour réaliser $A \circ B_k$. Or l'événement $x_k(t) = 1$ est un événement croissant, nous avons

  $$\mathbb{P}_0(x_k(t-s) = 1) \leqslant \mathbb{P}(x_k(t-s) = 1).$$

  Par la propriété de Markov forte, nous avons :

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}(x_k(s) = 0, x_k(t) = 1) &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=0}\mathbb{P}_0(x_k(t-s) = 1)] \\
  &\leqslant \mathbb{P}(x_k(s) = 0)\mathbb{P}(y_k(t) = 1)
  \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux cas précédents :

$$P_{12}(A \circ B_{k-1}, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B) \leqslant P_{12}(A \circ B_k, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B).$$

Enfin, nous en déduisons l'inégalité de BK en effectuant une récurrence sur k. $\square$

9 Décroissance exponentielle des STCs

Dans la phase surcritique, la probabilité d'avoir un chemin fermé décroît exponentiellement vite avec sa longueur. Nous avons des résultats similaires pour la percolation dynamique. Nous montrons d'abord que la probabilité d'avoir un chemin fermé décroît exponentiellement avec sa durée. C'est à dire :

Proposition 3. *Soient* $p > \frac{1}{2}$, *et deux instants* $0 < s < t$. *Soient* γ, ρ *deux chemins fixés. Nous avons l'inégalité suivante :*

$$P\begin{pmatrix} \gamma \textit{ fermé à l'instant } s \\ \rho \textit{ fermé à l'instant } t \\ \gamma, \rho \textit{ ne sont pas d'occurrence disjointe} \end{pmatrix} \leqslant me^{-\lambda(t-s)}$$

avec λ *une constante indépendante de* γ, ρ.

Démonstration. Nous considérons une arête (x, y) fermé et une modification locale M pour l'ouvrir suivante : nous fermons deux arêtes perpendiculaires de même côté qui contiennent respectivement un sommet x, y et l'arête qui relie ces deux arêtes ; ensuite nous ouvrons l'arête (x, y). Chaque étape de la modification est déterminée par une horloge exponentielle et elle respecte la condition de *top* $\not\leftrightarrow$ *bot*. Entre $[0, 1]$, cette modification a une probabilité positive r de se réaliser. Nous en déduisons qu'il existe une constante λ pour que entre $[s, t]$, la probabilité que cette modification ne se réalise pas est inférieur à $e^{-\lambda(t-s)}$.
Nous considérons maintenant deux arêtes e, e' voisines, nous pouvons choisir les arêtes que nous modifions pour que e, e' soient modifiées indépendamment. En effet, si les e, e' sont colinéaires alors nous effectuons les modifications sur différents côtés ; si e, e' sont perpendiculaires, alors nous effectuons la modification à l'extérieur de l'angle formé par e, e', voir figure 7.

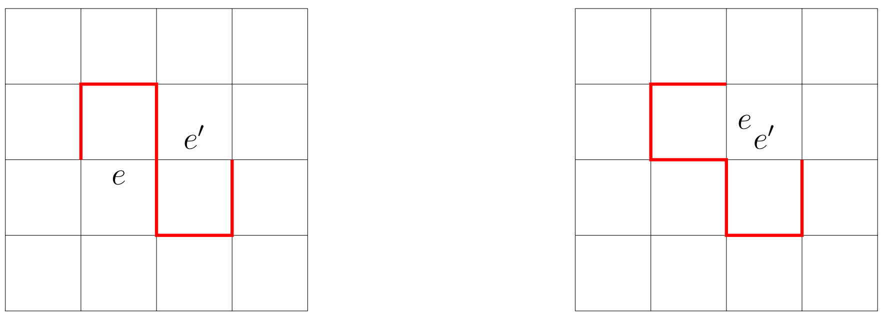

FIGURE 7 – deux arêtes voisines et les arêtes à modifier en rouge

Nous avons donc

$$\begin{aligned} P(\gamma \overset{s,t}{\circ} \rho) &\geqslant P(\forall e \in \gamma, M \text{ se réalise sur } e) \\ &\geqslant (1 - e^{-\lambda(t-s)})^m \geqslant 1 - me^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

□

Nous montrons aussi une décroissance exponentielle en fonction de la longueur d'un space-time chemin.

Proposition 4. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ et $p > \frac{1}{2}$, notons $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ le vecteur unitaire horizontal. Il existe $\gamma(p,t)$, une constante qui dépend de p, t tel que*

$$\forall n \geqslant 0 \quad P\big((O,0) \longleftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt)\big) \leqslant e^{-\gamma(p,t)n}.$$

Démonstration. Nous montrons ce résultat à l'aide du lemme sous-additif. Notons $A(n,t)$ l'événement $\{(O,0) \longleftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt)\}$. En fait, pour deux entiers $m, n \geqslant 0$,et $t > 0$,

$$\begin{aligned} &P((O,0) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ &\quad \geqslant P((O,0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((n\mathbf{e}_1, nt) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ &\quad \geqslant P((O,0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((O,0) \leftrightarrow (m\mathbf{e}_1, mt)) \end{aligned}$$

ici, nous utilisons l'inégalité FKB [2] pour obtenir le produit et l'invariance par translation en temps et en espace pour remplacer le deuxième terme du produit. La suite $(-\ln P(A(n,t)))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. Par le lemme sous-additif, nous obtenons :

$$\lim_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n,t)) = \inf_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n,t)) = \gamma(p,t)$$

Nous avons donc

$$\forall n \geqslant 1 \quad -\frac{1}{n} \ln P(A(n,t)) \geqslant \gamma(p,t).$$

□

10 La probabilité d'une influence du bord

Nous montrons maintenant que la probabilité que le bord influence une arête à l'intérieur de la boîte décroit exponentiellement avec la taille de la boîte.

Théorème 2. *Soient* $p \geqslant \frac{1}{2}, t > 0$, *et* e_0 *l'arête d'extrémités* $(0,0)$ *et* $(0,1)$. *Soient* Π, Π' *deux conditions aux bords et soient* $(Y_t)_{t\geqslant 0}, (Y'_t)_{t\geqslant 0}$ *deux processus associés construits via le couplage, il existe une constante* $\lambda > 0$ *telle que*

$$\mathbb{P}\big(Y_t(e_0) \neq Y'_t(e)\big) \leqslant e^{-\lambda\ell}.$$

Démonstration. Nous utilisons les notations de la proposition 1. D'après la proposition 1, il existe une suite d'arêtes $e_1, \ldots, e_n$ telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i^* \overset{Y_{t_i}}{\longleftrightarrow} e_{i+1}^*$ par un chemin fermé. Il existe aussi à chaque instant t_i, un ensemble S_i sépare *top* et *bot* qui est disjoint de c_i^*. Nous notons x_i, y_i les extrémités de c_i^* chemin fermé dans le graphe dual, nous notons aussi k_i le cardinal de $p_i^1 \cup p_i^2$. Nous séparons la suite en différentes sous-suites selon leur occurrence, plus précisément, si c_j^* et c_{j+1}^* est de l'occurrence disjointe, alors nous coupons la suite à l'indice j. Ainsi, nous obtenons les indices $j_1, \ldots, j_r$ telles que pour tout $1 \leqslant u \leqslant r-1, c_{j_u}^*$ et $c_{j_{u+1}}^*$ sont disjoints, et pour tout $j_k \leqslant v < j_{k+1} - 1$, c_v^* et c_{v+1}^* ne sont pas disjoints.

$$\begin{aligned}
P(Y(e_0) \neq Y'(e_0)) &= P(\exists e_1, \ldots, e_n, \forall i\, \exists p_i^1, p_i^2\; e_{i-1} \overset{p_i^1, p_i^2}{\longleftrightarrow} e_i) \\
&= P(\exists x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n c_1^*, \ldots, c_n^*, S_1, \ldots, S_n) \\
&\leqslant \sum_{j_1,\ldots,j_r} \prod_{1\leqslant k\leqslant r} P\left(\begin{array}{c} \exists x_{j_{k-1}+1}, \ldots, x_{j_k}, \\ y_{j_{k-1}+1}, \ldots, y_{j_k}, \\ c_{j_{k-1}+1}, \ldots, c_{j_k}^*, \\ S_{j_{k-1}+1}, \ldots, S_{j_k} \text{ sépare } \textit{top} \text{ et } \textit{bot}, \\ \forall j_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant j_k, x_m \overset{c_m^*}{\longleftrightarrow} y_m, c_m^* \circ S_m \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Nous utilisons la proposition 4 pour majorer chaque terme du produit. Or les $\forall j_{k-1}+1 \leqslant c_m^* \leqslant j_k$, les c_m^* ne sont pas d'occurrence disjointe, nous avons un space-time chemin σ_k qui relie $x_{j_{k-1}+1}$ et y_{j_k}. Donc elle est bornée par

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p,\theta_{j_k}-\theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \ldots, C_{j_k} \text{ cut})$$

car $x_{j_{k-1}+1}$ et y_{j_k} sont dans un carré de taille inférieure à $|\sigma_k|$. Or $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x > 1, x^4 e^{-x} \leqslant e^{-\delta x}$, nous avons

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p,\theta_{j_k}-\theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} \leqslant |\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p,t)|\sigma_k|} \leqslant e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}$$

Nous partons de $\bar{e}$, $x_{j_{n-1}+1}$ est de distance inférieure à $2|\sigma_r|$ de $\bar{e}$, nous avons donc

$$\sum_{1=j_1<\cdots<j_r=n}\prod_{1\leqslant k\leqslant r} e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}P(\exists C_{j_{k-1}+1},\ldots,C_{j_k} \text{ sépare } top \text{ et } bot)$$

$$\leqslant P(\exists C_1,\ldots,C_n \text{ sépare } top \text{ et } bot)\sum_{1=j_1<\cdots<j_{r-1}} 4|\sigma_r|^2 e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_r|}\prod_{1\leqslant k\leqslant r-1} e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}$$

$$\leqslant P(\exists C_1,\ldots,C_n \text{ sépare } top \text{ et } bot)\sum_{1=j_1<\cdots<j_{r-1}} 4e^{-\delta^2\gamma(p,t)|\sigma_r|}\prod_{1\leqslant k\leqslant r-1} e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}$$

$$\leqslant 4^r e^{-\delta^2\gamma(p,t)\sum_1^r|\sigma_k|}P(\exists C_1,\ldots,C_n \text{ sépare } top \text{ et } bot)$$

Enfin, r est borné par une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\ell^2(1-p)t$, nous avons le résultat. □

11 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons proposé une définition de l'interface à l'aide de la percolation dynamique et nous avons montré que la probabilité que le bord influence une arête au centre de la boîte $R(\ell)$ décroît exponentiellement avec la taille de la boîte. Dans la suite, nous étudions plus en détails le nombre d'arête qui deviennent différente pendant la propagation des conditions aux bords. Nous étudions aussi la perturbation d'un événement pour comparer les événements dans les deux processus de conditions aux bords différentes. Enfin, nous allons utiliser ce résultat pour montrer la convergence en loi de l'interface quand la taille de la boîte tend vers l'infini.

Références

[1] Pouria Dehghanpour and H. Roberto Schonmann. Metropolis dynamics relaxation via nucleation and growth. *Communications in Mathematical Physics*, 188(1) :89–119, 1997.

[2] G. Grimmett. *Percolation.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 1999.

[3] Peres Yuval Steif Jeffrey E. Häggström, Olle. Dynamical percolation. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*, 33(4) :497–528, 1997.

[4] Roberto H. Schonmann. Slow droplet-driven relaxation of stochastic ising models in the vicinity of the phase coexistence region. *Comm. Math. Phys.*, 161(1) :1–49, 1994.