

# Mémoire M2

Wei ZHOU

16 septembre 2016

# 1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier les interfaces dans le modèle de percolation Bernoulli sur le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  avec une méthode dynamique.

## 2 Modèle

Nous présentons le modèle sur lequel nous allons travailler dans ce mémoire. Pour commencer, nous présentons les notations que nous allons utiliser.

**Le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ .** Soit  $x, y$  deux points de  $\mathbb{Z}^2$ , nous disons que  $x, y$  sont voisins s'ils sont à distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble  $\mathbb{E}^2$  est l'ensemble des paires  $\{x, y\}$ , où  $x, y$  sont deux points voisins de  $\mathbb{Z}^2$ . Le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  est le graphe dont  $\mathbb{Z}^2$  est l'ensemble des sommets et  $\mathbb{E}^2$  est l'ensemble des arêtes.

**Les boîtes  $\Lambda(\ell, h)$ .** Nous notons  $\Lambda(\ell, h)$  le rectangle  $[-\ell, \ell] \times [-h, h]$ . Nous notons aussi  $T(\ell, h)$  le bord supérieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , i.e. le segment  $[-\ell, \ell] \times (0, h)$ . Nous notons aussi  $B(\ell, h)$  le bord inférieur de  $\Lambda(\ell, h)$ , i.e.  $[-\ell, \ell] \times (0, -h)$ . Les deux bords verticaux de la boîte  $\Lambda(\ell, h)$  sont notés  $V(\ell, h)$ .

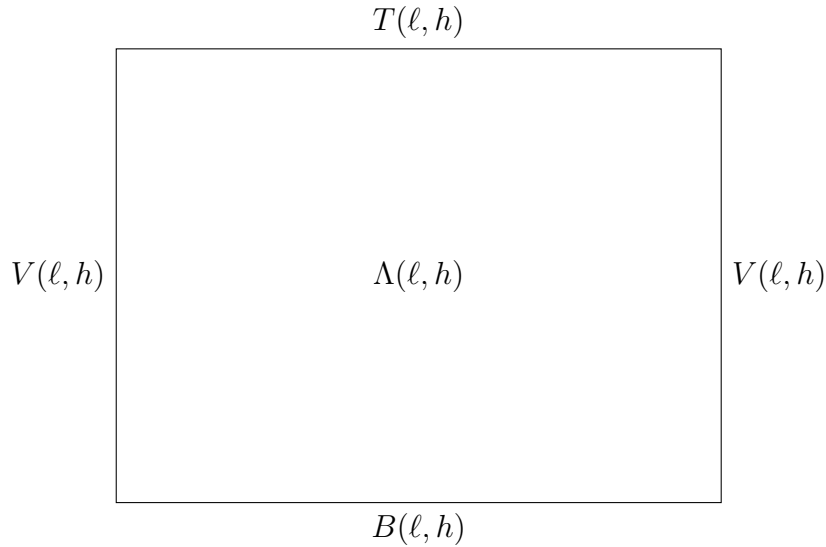


FIGURE 1 – La boîte  $\Lambda(\ell, h)$

**Les ensembles séparants.** Soient  $A, B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^2$ . Nous disons qu'un ensemble d'arêtes  $S \subset \mathbb{E}^2$  sépare  $A$  et  $B$  si aucune partie connexe du graphe  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2 \setminus S)$  n'intersecte simultanément  $A$  et  $B$ . Un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour  $A$  et  $B$ . Nous disons que  $S$  est un ensemble séparant minimal de  $A, B$  si aucun sous-ensemble strict de  $S$  ne sépare  $A$  et  $B$ .

**Le graphe dual.** Le graphe dual du réseau  $\mathbb{Z}^2$  est le graphe de sommets les points de  $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et d'arêtes  $\mathbb{E}^{2*}$ , où  $\mathbb{E}^{2*}$  est l'ensemble des arêtes joignant deux sommets de  $\mathbb{Z}^{2*}$  à distance 1. Si  $e$  est une arête dans  $\mathbb{Z}^2$ , nous notons  $e^*$  l'unique arête qui l'intersecte orthogonalement en son milieu. Désormais, les objets dans le graphe dual seront notés avec une  $*$ .

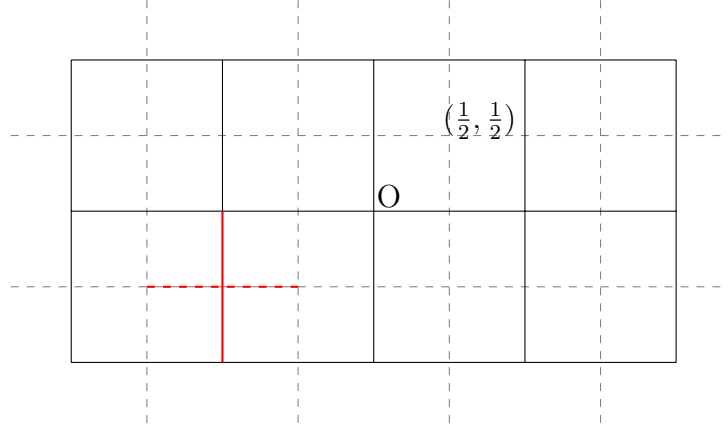


FIGURE 2 – un réseau  $\mathbb{Z}^2$  et son dual (pointillée)

**Les configurations.** L'espace de configuration est  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ . Une configuration générique est notée  $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^2\} \in \Omega$ . L'arête  $e$  est ouverte si  $\omega(e) = 1$  et fermée si  $\omega(e) = 0$ . Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  et  $\omega$  une configuration, la configuration  $\omega$  restreinte à  $A$ , notée  $\omega|_A$ , est la restriction de  $\omega$  aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans  $A$ . Soit  $e \in \mathbb{E}^2$  une arête et  $\omega \in \Omega$  une configuration, nous définissons les configurations  $\omega^e, \omega_e$  par :

$$\forall f \in \mathbb{E}^2 \quad \omega^e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases} \quad \omega_e(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}.$$

Les configurations  $\omega^e, \omega_e$  sont obtenues à partir de  $\omega$  en ouvrant ou fermant l'arête  $e$ .

**Les chemins.** Soient  $x$  et  $y$  deux sommets dans  $\mathbb{Z}^2$ , un chemin entre  $x$  et  $y$  est une suite  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$  de sommets  $x_i$  et d'arêtes  $e_i$  distincts où  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = y$  et  $e_i$  est l'arête joignant  $x_i$  à  $x_{i+1}$ . Nous disons que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin ouvert dans la configuration  $\omega$ , noté  $x \xleftrightarrow{\omega} y$ , s'il existe un chemin qui relie  $x, y$  tel que toute arête de ce chemin est ouverte dans la configuration  $\omega$ . Nous notons aussi  $x \not\xleftrightarrow{\omega} y$  l'événement complémentaire.

Dans ce mémoire, nous étudions en particulier les chemins entre un sommet de  $T(l, h)$  et un sommet de  $B(l, h)$ . Nous notons  $T \xleftrightarrow{\omega} B$  s'il existe un tel chemin dans la configuration  $\omega$ .

**La probabilité de percolation.** Soit un réel  $p \in [0, 1]$ . Sur l'espace  $\Omega$ , nous considérons la tribu cylindrique  $\mathcal{F}$ . Nous considérons la probabilité produite

$$P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes \mathbb{E}^2}.$$

Intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau  $\mathbb{Z}^2$  avec une probabilité  $1 - p$ .

### 3 La percolation dynamique

Nous définissons d'abord la percolation dynamique sur le réseau  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ . Il s'agit d'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  à temps continu à valeurs dans l'espace des configurations  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ . Si  $e$  est une arête et  $t \geq 0$ , alors  $X_t(e) \in \{0, 1\}$  est l'état de l'arête  $e$  au temps  $t$ . La loi du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est définie de la manière suivante. Les processus  $(X_t(e))_{t \geq 0, e \in \mathbb{E}^2}$  sont i.i.d.. Pour une arête  $e$  fixée, le processus  $(X_t(e))_{t \geq 0}$  est un processus markovien de sauts à deux états  $\{0, 1\}$ , qui saute de 0 vers 1 à taux  $p$  et de 1 vers 0 à taux  $1 - p$ .

**Construction graphique.** Nous allons construire la percolation dynamique sur un espace de probabilité qui nous permettra de réaliser des couplages utiles pour les preuves. Nous commençons avec un espace de probabilité  $(\Phi, \mathcal{A}, P)$  sur lequel sont définis les objets suivants :

- Une famille  $(N_t(e))_{t \geq 0}$  de processus de Poisson iid de paramètre 1 indexée par les arêtes  $e \in \mathbb{E}^2$  ;
- Une famille de variables aléatoires  $U_n(e)_{n \geq 1}, e \in \mathbb{E}^2$  iid de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Soit  $e$  une arête de  $\mathbb{E}^2$ , notons  $(T_i(e))_{i \geq 1}$ , les instants des sauts du processus de Poisson  $(N_t(e))_{t \geq 0}$  associé à  $e$ . A l'instant  $T_i(e)$ , nous retirons l'état de l'arête à l'aide de la v.a.  $U_i(e)$ . Plus précisément, l'arête  $e$  ne peut changer

d'état qu'aux instants  $(T_i(e))_{i \geq 1}$ , et nous posons

$$X_{T_i(e)}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i(e) < p, \\ 0 & \text{si } U_i(e) > p. \end{cases}$$

Nous définissons la suite  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  des instants de changement dans une boîte finie  $\Lambda(\ell, h)$ , en posant  $\tau_0 = 0$  et pour tout  $i \geq 0$  :

$$\tau_{i+1} = \inf \left\{ t > \tau_i : X_t|_{\Lambda(\ell, h)} \neq X_{\tau_i}|_{\Lambda(\ell, h)} \right\}$$

Pour tout  $i \geq 1$ , il existe une unique arête  $e_i$  incluse dans  $\Lambda(\ell, h)$  telle que  $X_{\tau_i}(e_i) \neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$ . Nous appelons la suite  $(e_i)_{i \geq 1}$  la suite des arêtes modifiées.

## 4 Les chaînes de Markov conditionnées

Nous énonçons un théorème général sur les chaînes de Markov conditionnées que nous allons utiliser dans la construction de l'interface.

Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble  $E$  fini, irréductible apériodique de probabilité invariante  $\pi$ . Soit  $A \subset E$ , nous définissons la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  conditionnée à rester dans  $A$ , notée  $(Z_n^A)_{n \geq 0}$  par sa valeur initiale  $Z_0 \in A$  et sa probabilité de transition

$$p^A(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & y \in A, x \neq y \\ 0 & y \notin A \\ 1 - \sum_{y \neq x} p^A(x, y) & x = y \end{cases}$$

**Théorème 1.** *La chaîne  $(Z_n^A)_{n \geq 0}$  admet une probabilité invariante qui est la probabilité invariante de la chaîne  $(Z_n)_{n \geq 0}$  conditionnée à rester dans  $A$ , c'est à dire :*

$$\forall x \in A \quad \pi^A(x) = \pi(x | A) = \frac{\pi(\{x\})}{\pi(A)}$$

## 5 L'interface

Nous allons proposer une définition d'interface à l'aide de la percolation dynamique. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus de percolation dynamique de paramètre  $p$  dans  $\Lambda(\ell, h)$  issu d'une configuration initiale  $X_0$  appartenant à l'événement  $\{T \not\leftrightarrow B\}$  et  $(\tau_i)_{i \geq 0}$  sa suite des instants de changement. Nous allons coupler un processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$  avec  $(X_t)_{t \geq 0}$  comme suit. D'abord nous posons  $Y_0 = X_0$ . Ensuite, soit  $i \geq 0$ , pour tout  $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$ ,

nous posons  $Y_s = Y_{\tau_i}$ , et nous déterminons  $Y_{\tau_{i+1}}$  en fonction de  $X_{\tau_{i+1}}$  via la formule suivante :

$$Y_{\tau_{i+1}}(e) = \begin{cases} Y_{\tau_i}(e) & \text{si } e \neq e_{i+1} \\ 0 & \text{si } e = e_{i+1}, X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 0 \\ 1 & \text{si } e = e_{i+1}, X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \not\longleftrightarrow B \text{ dans } Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} \\ 0 & \text{si } e = e_{i+1}, X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}) = 1, T \longleftrightarrow B \text{ dans } Y_{\tau_i}^{e_{i+1}} \end{cases}.$$

Remarquons que l'arête  $e_i$  devient différente dans les deux processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y_t)_{t \geq 0}$  à l'instant  $\tau_i$  si et seulement si  $e_i$  devient ouverte à  $\tau_i$  dans  $(X_t)_{t \geq 0}$  mais cette ouverture induit une connexion entre  $T$  et  $B$  dans la configuration  $Y_{\tau_{i-1}}^{e_i}$ . Dans ce cas, l'arête  $e_i$  reste fermée dans le processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$ .

La chaîne de Markov  $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est irréductible apériodique et d'espace d'états fini donc elle admet une unique probabilité invariante qui est simpla probabilité de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$ . La chaîne  $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est aussi irréductible car toute configuration de  $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$  est reliée à la configuration où toutes les arêtes sont fermées. En effet, pour chaque arête  $e$  dans  $\Lambda(\ell, h)$ , et à chaque instant de saut  $(T_i(e))_{i \geq 0}$ , nous pouvons fermer  $e$  avec probabilité  $1 - p > 0$ .

Nous appliquons le théorème 1 à  $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$  avec  $A$  l'ensemble des configurations qui satisfont l'événement  $\{T \not\longleftrightarrow B\}$ . Nous obtenons que la probabilité invariante du processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre  $p$  conditionnée par l'événement  $\{T \not\longleftrightarrow B\}$ .

Nous proposons la définition de l'interface en se servant du couplage.

**Définition 1.** Soit  $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$  un couplage défini précédemment, nous définissons l'interface dans  $\Lambda(\ell, h)$  au temps  $t$ , que nous notons  $\mathcal{I}_t(\ell, h)$ , comme l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans  $X_t$  et fermé dans  $Y_t$  :

$$\mathcal{I}_t(\ell, h) = \{ e \in \mathbb{E}^2 : X_t(e) = 1, Y_t(e) = 0 \}.$$

## 6 Les conditions aux bords

Nous fixons un entier  $h$  et nous allons étudier l'influence de  $\ell$  sur la loi de l'interface dans la boîte  $\Lambda(\ell, h)$ . Pour cela, nous introduisons des conditions aux bords. Désormais, nous enlèverons  $h$  si cela ne cause pas de confusion. Nous notons  $R(\ell)$  le rectangle  $\Lambda(\ell, h)$  et  $\partial^{in} \Lambda(\ell, h)$  son bord intérieur, c'est à dire :

$$\partial^{in} R(\ell) = \{ x \in R(\ell) : \exists y \notin R(\ell) \quad \langle x, y \rangle \in \mathbb{E}^2 \}.$$

Les conditions aux bords sont données par  $\Pi_\ell$  une application de  $\partial^{in} R(\ell)$  à l'ensemble  $\{top, bot, null\}$ . L'application  $\Pi_\ell$  vaut  $top$  et  $bot$  sur les bords

horizontaux  $T(\ell)$  et  $B(\ell)$ , plus précisément :

$$\forall x \in T(\ell) \cup B(\ell) \quad \Pi_\ell(x) = \begin{cases} top & \text{si } x \in T(\ell) \\ bot & \text{si } x \in B(\ell) \end{cases}.$$

Nous appelons une condition aux bords nulle si

$$\forall y \in V(\ell) \setminus \{(\pm\ell, \pm h)\} \quad \Pi_\ell(y) = null.$$

Soit  $m > \ell$ , et soit  $R(m)$  une boîte avec des conditions aux bords  $\Theta$ . Soit  $\omega$  la configuration de percolation dans  $R(m)$ . Nous pouvons définir les conditions aux bords  $\Pi_\ell$  induites sur  $V(\ell)$  comme suit. Soit  $x$  un sommet dans  $V(\ell, h)$ ,

$$\Pi_\ell^\Theta(x) = \begin{cases} top & \text{si } \exists y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) = top, x \xleftrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \\ bot & \text{si } \exists y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) = bot, x \xleftrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \\ null & \text{si } \forall y \in \partial^{in} R(m) \quad \Theta(y) \neq null, x \not\xleftrightarrow[\substack{R(m) \setminus R(\ell)}]{\omega} y \end{cases},$$

avec la notation  $x \xleftrightarrow[\substack{\Lambda(m, h) \setminus \Lambda(\ell, h)}]{\omega} T(resp. B)$  signifie que le sommet  $x$  est relié à  $T(resp. B)$  uniquement par un chemin ouvert dont les arrêtes sont dans l'ensemble  $(\Lambda(m, h) \setminus \Lambda(\ell, h)) \cup \partial^{in} \Lambda(\ell, h)$ .

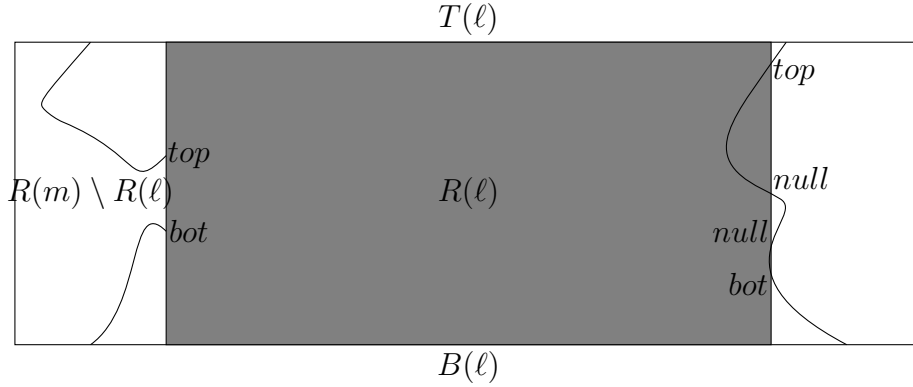


FIGURE 3 – Exemples d'une condition aux bords

Nous généralisons désormais l'événement  $\{T \longleftrightarrow B\}$  en tenant compte des conditions aux bords. Nous disons que  $\{T \longleftrightarrow B\}$  arrive dans la boîte  $R(\ell)$  s'il existe une connexion entre deux sommets  $x, y$  tels que  $\Pi_\ell(x) = top, \Pi_\ell(y) = bot$ .

## 7 La propagation des conditions aux bords

Nous nous intéressons à la probabilité qu'une arête fixée soit dans l'interface. Nous considérons désormais le régime surcritique, qui correspond à  $p > \frac{1}{2}$  en dimension 2. Soit  $e_0$  l'arête d'extrémités  $(0, 0)$  et  $(0, 1)$ . Notre objectif est de montrer que, à  $t$  fixé, la probabilité  $P(e_0 \in I_t^\ell)$  converge lorsque  $\ell$  tend vers l'infini. Intuitivement, nous imaginons que l'influence des conditions aux bords disparaissent lorsque la taille de la boîte grandit.

Plus formellement, soit  $R(\ell)$  une boîte dans  $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$  et considérons deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$  sur  $R(\ell)$  qui diffèrent en un seul sommet  $v_0$ . Nous considérons  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus de percolation dynamique dans  $R(\ell)$  et deux couplages  $(X, Y)$  et  $(X, Y')$  conditionnés par l'événement  $\{T \not\leftrightarrow B\}$  associés aux deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$ .

**Proposition 1.** *Soit  $\theta > 0$  le premier instant où  $e_0$  diffère dans les deux processus  $(Y_t)_{t \geq 0}$  et  $(Y'_t)_{t \geq 0}$ , alors il existe un entier aléatoire  $N \in \mathbb{N}$ , une suite d'arêtes aléatoires  $e_1, \dots, e_N$  et des instants aléatoires  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = \theta$  qui vérifient les conditions suivantes :*

1. *à l'instant  $\theta_1$ , il existe deux chemins fermés  $\gamma_1^*, \rho_1^*$  disjoints qui relient  $e_1^*$  et le bord vertical contenant  $v_0$  ;*
2. *pour tout  $i > 1$ , à l'instant  $\theta_i$ , il existe deux chemins fermés  $\gamma_i^*, \rho_i^*$  disjoints qui relient  $e_{i-1}^*$  et  $e_i^*$ .*
3. *pour tout  $i \geq 1$ , à l'instant  $\theta_i$ , l'arête  $e_i$  devient différente dans les deux processus. Il existe un ensemble d'arêtes fermées  $S_i$  qui sépare  $T(\ell)$  et  $B(\ell)$  et un chemin fermé  $c_i^*$  disjoint de  $S_i$  tel que  $c_i^* \subset (\gamma_i^* \cup \rho_i^*)$  et  $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^* \cup \rho_i^*|$*

*Démonstration.* Nous notons  $\tau_0 = 0$ , et

$$\tau_i = \inf \left\{ s > \tau_{i-1} : \exists e \in R(\ell) \quad Y_{s-}(e) = Y'_s(e), Y_s(e) \neq Y'_s(e) \right\}.$$

Par symétrie, nous pouvons supposer que  $v_0$  soit dans le bord gauche et que  $e_1$  est fermée dans le processus  $(Y'_t)_{t \geq 0}$ . Nous pouvons aussi supposer  $\Pi'(v_0) = T$  sans perte de la généralité.

Nous considérons maintenant la première arête  $e_1$  qui devient différente dans les deux boîtes. Cette arête devient différente car si elle était ouverte dans la configuration  $Y'_{\theta_1}$ , il existerait un chemin ouvert entre  $T$  et  $B$  alors que ce n'est pas le cas dans la configuration  $Y_{\theta_1}$ . Il existe un chemin ouvert entre  $e_1$  et le sommet  $v_0$ . Nous considérons le cluster ouvert  $C_1$  contenant ce chemin dans la configuration  $Y'_{\theta_1}$ , il n'est pas connecté à  $B$  vu la condition  $T \not\leftrightarrow B$ . De plus, le cluster  $C_1$  n'est pas connecté à  $T$  car s'il l'était, l'événement  $\{T \longleftrightarrow B\}$  arriverait dans la configuration  $Y_{\theta_1}$  dans laquelle  $e_0$  est ouverte. Il existe donc dans le graphe dual un chemin fermé  $C_1^*$  qui sépare le cluster



$C_1$  de  $T$  et de  $B$ , et l'arête  $e_1^*$  sépare ce chemin en deux chemins disjoints que nous notons  $\gamma_1^*$  et  $\rho_1^*$  (voir Figure 4).

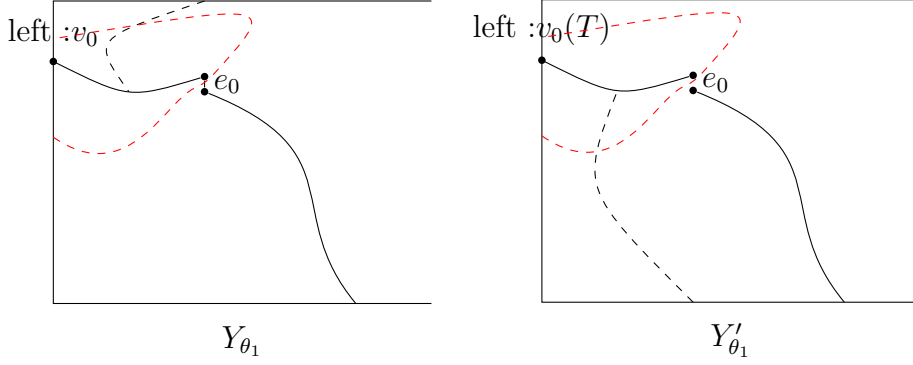


FIGURE 4 – L'instant  $\theta_1$  quand  $e_1$  devient différente

Nous considérons maintenant le cas d'une arête  $e_i$  qui devient différente à cause des autres arêtes qui sont déjà différentes. Par symétrie, nous supposons que  $e_i$  est ouverte dans  $Y_{\theta_i}$  et fermée dans  $Y'_{\theta_i}$  et que dans la configuration  $Y'_{\theta_i}$ ,  $e_i$  est reliée à  $B$ .

Nous pouvons choisir une arête  $e_j$  avec  $j < i$  qui est devenue différente avant  $\theta_i$  et qui est restée différente entre  $\theta_j$  et  $\theta_i$ . En plus, il existe un chemin ouvert qui les relie. En effet, nous considérons le cluster ouvert  $C_i$  dans  $Y_{\theta_i}$  du sommet qui est séparé de  $B$  par l'arête  $e_i$ . Nous considérons  $R_i$  l'ensemble suivant :

$$R_i = \{ e = \langle x, y \rangle : x \in C_i, y \notin C_i, y \xleftrightarrow{Y'_{\theta_i}} T \cup \Pi'^{-1}(top), Y_{\theta_i}(e) \neq Y'_{\theta_i}(e) \}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, car  $e_i \xleftrightarrow{Y'_{\theta_i}} T$ , mais pas dans  $Y_{\theta_i}$ , donc il existe un tel  $\langle x, y \rangle$  sur le bord extérieur de  $C_i$  qui diffère dans les deux configurations. Nous fixons un ordre arbitraire sur les arêtes  $\mathbb{E}^2$  et nous ordonnons cet ensemble avec cet ordre. Notons  $e_j$  la première arête de  $R_i$ .

Comme pour la première arête  $e_0$ , il y a un chemin ouvert qui relie  $e_i$  et  $e_j$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $e_j$  est reliée à  $T$ . Nous pouvons considérer le cluster ouvert du chemin  $c$  entre  $e_i, e_j$  dans  $Y'_{\theta_i}$  arrêté à  $e_j$  et  $e_i$ . Ce cluster n'est pas connecté à  $T$  car  $e_i$  est ouverte, il n'est pas connecté à  $B$  dans  $Y'_{\theta_i}$  car  $e_j$  est ouverte. Nous pouvons donc trouver un ensemble  $S_i$  d'arêtes fermées qui sépare ce chemin de  $T$  dans  $Y_{\theta_i}$  et un ensemble  $S'_i$  qui le sépare de  $B$  dans  $Y'_{\theta_i}$ . Nous pouvons supposer que  $S_i \cap S'_i \neq \emptyset$ , sinon, nous avons deux ensembles qui séparent  $T$  et  $B$  dans  $R(\ell)$  qui est de probabilité inférieure à  $e^{-\lambda \ell}$  et nous avons le résultat voulu. Nous pouvons désormais

considérer un ensemble  $S^*$  formé par des arêtes qui sont soit fermées dans l'une des deux configurations et qui sépare le chemin  $c$  de  $T$  et de  $B$ . Quitte à prendre l'ensemble minimal, nous pouvons supposer que  $S^*$  est un circuit qui relie  $e_i$  et  $e_j$ . Les deux arêtes  $e_i$  et  $e_j$  coupent cet ensemble en deux chemins fermés  $\gamma_i^*, \rho_i^*$ .

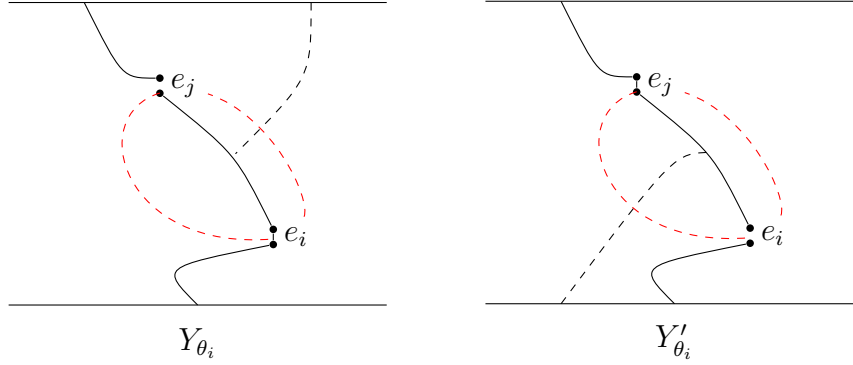


FIGURE 5 – L'instant  $\theta_i$  quand  $e_i$  devient différente

Enfin, pour obtenir la suite  $(e_i)_{i \geq 1}$  d'arêtes et les temps  $(\theta_i)_{i \geq 1}$  comme dans l'énoncé, nous partons de l'instant  $\theta$  pour trouver l'arête qui a causé la différence à  $e_0$ , ensuite nous répétons cette procédure à l'instant où cette arête est devenue différente jusqu'à arriver au bord. Comme chaque ouverture ou fermeture d'une arête ne peut se produire qu'aux instants d'arrivée des processus de Poisson, il y a presque sûrement un nombre fini d'arêtes qui sont devenues différentes avant  $\theta$ . Nous pouvons donc trouver une suite finie d'arêtes  $e_0, e_1, \dots, e_N$  avec  $e_N = e_0$  et des instants  $\theta_1 < \dots < \theta_N = \theta$  qui vérifient les deux premiers points de l'énoncé.

Nous considérons le contour fermé formé par les deux chemins fermés dans le graph dual  $\gamma_i^*$  et  $\rho_i^*$ , la condition  $T \not\leftrightarrow B$  impose qu'il existe un ensemble séparant  $K_i$  qui contient  $e_i$  dans la configuration où elle est fermée. Quitte à ouvrir les arêtes de  $K_i$  qui ne sont pas pivotes, nous pouvons supposer  $K_i$  minimal. Nous considérons le dual de  $K_i$ , qui est un chemin fermé simple de gauche à droite. Nous pouvons numéroter les arêtes de  $K_i$  de la façon suivante :

- nous posons  $e_i^* = k_0$  ;
- si  $e_i^*$  est horizontale, nous posons  $k_{-1}$  l'arête qui partage le sommet gauche de  $e_i^*$  et  $k_1$  l'arête qui partage le sommet droit. S'il  $e_i^*$  est verticale, nous posons  $k_{-1}$  l'arête en bas et  $k_1$  celle en haut.
- Nous nous éloignons de  $e_i$ , jusqu'à avoir numéroté toutes les arêtes. Dans la direction négative, nous diminuons l'indice de 1 à chaque pas et nous augmentons de 1 par pas dans la direction positive.

Nous considérons maintenant l'arête minimale et l'arête maximale de l'ensemble  $K_i \cap (\gamma_i^1 \cup \rho_i^2)$  que nous notons  $k_{min}$  et  $k_{max}$ . Les deux arêtes  $k_{min}$  et  $k_{max}$  coupe  $K_i$  en 3 parties disjointes :  $C_i^g$  un chemin entre le bord gauche et  $k_{min}$  ;  $C_i^d$  un chemin entre le bord droite et  $k_{max}$  ; l'union d'un chemin entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$  et ces deux arêtes. De plus, les deux sommets qui séparent ces trois parties coupent le contour  $\gamma_i^1 \cup \rho_i^2$  en deux chemins disjoints  $c_i^1$  et  $c_i^2$ . Quitte à échanger les numéros, nous supposons que  $|c_i^1| \geq |c_i^2|$ .

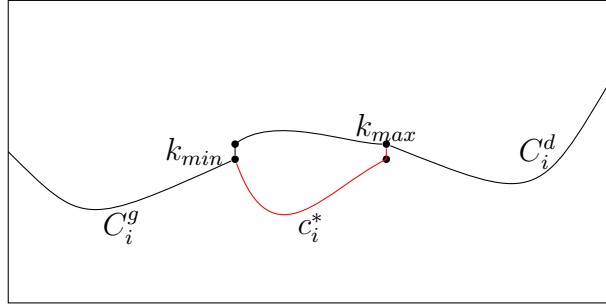


FIGURE 6 – construction d'un chemin fermé disjoint d'un ensemble séparant

Enfin nous posons  $S_i^* = C_i^g \cup C_i^d \cup c_i^2$  un chemin fermé du bord gauche au bord droite dans le graphe dual et  $c_i^* = c_i^1$ . Nous posons  $S_i$  le dual de  $S_i^*$  qui est un cut. Or  $|c_i^1| \geq |c_i^2|$ , nous obtenons  $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^1 \cup \rho_i^2|$ . Par construction, l'ensemble séparant  $S_i$  et le chemin fermé  $c_i^*$  sont disjoints.  $\square$

## 8 Une inégalité BK temporelle

Nous énonçons ici pour le processus de percolation dynamique une inégalité de type BK. Nous commençons par généraliser la notion de l'occurrence disjointe pour des événements qui arrivent à des instants différents.

Nous considérons d'abord le processus de percolation dynamique  $(X_t)_{t \geq 0}$  qui est à valeurs dans  $\{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$ , un événement croissant  $A$  qui dépend d'un nombre fini d'arêtes à l'instant  $s$ , et un autre événement croissant  $B$  qui dépend d'un nombre fini d'arête à l'instant  $t$ . Nous notons

$$K(\omega) = \{e : \omega(e) = 1\}$$

l'ensemble des arêtes ouvertes dans la configuration  $\omega$ . Nous définissons l'occurrence disjointe comme suit :

**Définition 2.** Soit  $A, B$  définis précédemment, l'occurrence disjointe de  $A$  et  $B$  noté par  $A \overset{s,t}{\circ} B$  par :

- si  $s = t$ ,  $A \overset{s,t}{\circ} B = \{(X_t)_{t \geq 0} : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B \quad K(\omega_1) \cap K(\omega_2) = \emptyset, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(X_t)\}$ ;
- si  $s < t$ ,  $A \overset{s,t}{\circ} B = \{(X_t)_{t \geq 0} : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B \quad K(\omega_1) \subset K(X_s), K(\omega_2) \subset K(X_t) \text{ et } \forall e \in K(\omega_1) \cap K(\omega_2) \quad \exists r \in [s, t] X_r(e) \neq X_s(e)\}$ .

Nous énonçons l'inégalité de BK pour la percolation dynamique :

**Proposition 2.** *Soit  $\Lambda(\ell, h)$  une boîte de longueur  $\ell$ ,  $0 < s \leq t$ , soit  $A$  et  $B$  des événements définis au début de la partie, alors  $P(A \overset{s,t}{\circ} B) \leq P(A)P(B)$ .*

*Démonstration.* Pour le premier cas, c'est l'inégalité de BK classique. Nous traitons uniquement le deuxième cas où les instants sont différents. Soit  $\Gamma = \{f : [s, t] \rightarrow \{0, 1\} \text{ càdlàg}\}^{|\Lambda(\ell, h)|}$ . Nous introduisons deux espaces de probabilité identiques  $S_1 = (\Gamma_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ ,  $S_2 = (\Gamma_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ , nous définissons  $S$  l'espace produit de  $S_1, S_2$ . Nous écrivons  $x \times y$  un point de  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Nous notons  $A' = A \times \Gamma_2$ ,  $B'_k = \{x \times y : (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_{|\Lambda(\ell, h)|}) \in B\}$ . Nous notons  $P_{12}$  la probabilité produit de  $P_1, P_2$ . Nous avons bien que  $P(A \circ B) = P_{12}(A' \circ B'_0)$  et  $P_{12}(A' \circ B'_{|\Lambda(\ell, h)|}) = P(A)P(B)$ . Nous montrons maintenant :

$$\forall k > 0, P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_{12}(A' \circ B'_k)$$

Soit  $M$  un événement, nous disons que  $e$  est pivot pour  $M$  si  $(\omega^e \in M, \omega_e \notin M)$  ou  $(\omega^e \notin M, \omega_e \in M)$ , c'est à dire un changement de l'arête  $e$  change l'occurrence de  $M$  dans la configuration  $\omega$ . Nous notons  $e \triangleright M$  si  $e$  est pivot pour  $M$ .

Nous considérons d'abord le cas où  $e_k$  n'est pas pivot pour  $B$ . Nous vérifions facilement que

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright B) \leq P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright B)$$

car il suffit de poser  $y_k$  une copie indépendante de  $x_k$  qui réalise  $A \circ B_{k-1}$  pour obtenir  $A \circ B_k$ .

Nous considérons maintenant le cas  $e_k$  pivot pour  $B$  mais pas pour  $A$ . Par symétrie nous pouvons supposer  $\omega^{e_k} \in B$ . Il nous faut  $x_k(t) = 1$  réaliser pour  $A \circ B_{k-1}$  et  $y_k(t) = 1$  pour réaliser  $A \circ B_k$ . Or  $x_k$  et  $y_k$  sont de même loi, nous avons  $P_{12}(x_k(t) = 1) = P_{12}(y_k(t) = 1)$ . D'où :

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B) = P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B)$$

Il reste le cas où l'arête  $e_k$  est pivot pour  $A$  et  $B$ . Quitte à changer  $p$  en  $(1 - p)$ , nous pouvons supposer que  $\omega^{e_k} \in A$ , il faut donc distinguer deux cas :

- Si  $\omega^{e_k} \in A, \omega^{e_k} \in B$ , nous devons avoir  $x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0$  pour  $A \circ B_{k-1}$ . Pour  $A \circ B_k$ , il faut  $x_k(s) = 1$  et  $y_k(t) = 1$ . Nous montrons que

$$P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).$$

Nous considérons la première instant de saut de  $x_k$ , soit

$$T = \inf\{r > s, x_k(r) = 0\}$$

et nous conditionnons la première probabilité par  $\{T = r\}$ , et nous utilisons la propriété de Markov forte qui donne :

$$\begin{aligned} & P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \\ &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t}] \\ &= E[E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t} | T = r]] \\ &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T=r} E[\mathbf{1}_{x_k(t)=1} | T = r]] \\ &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t} P_0(x'_k(t-r) = 1)] \\ &\leq E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t}] P(y_k(t-r) = 1) \\ &= P(x_k(s) = 1, T < t) P(y_k(t) = 1) \\ &\leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1). \end{aligned}$$

Avec  $x'_k$  le processus démarré à  $T$ . Nous avons  $P_0(x'_k(t-r) = 1) \leq P(y_k(t-r) = 1)$  car  $\{x_k(t-r) = 1\}$  est un événement croissant. Nous avons  $P(y_k(t-r) = 1) = P(y_k(t) = 1)$  car  $y_k$  est stationnaire à l'équilibre.

- Si  $\omega^{e_k} \in A, \omega^{e_k} \in B$ , nous devons avoir  $x_k(s) = 1, x_k(t) = 0$  pour réaliser  $A \circ B_{k-1}$  et  $x_k(s) = 1, y_k(t) = 0$  pour réaliser  $A \circ B_k$ . Or l'événement  $x_k(t) = 1$  est un événement croissant, nous avons

$$P_0(x_k(t-s) = 1) \leq P(x_k(t-s) = 1).$$

Par la propriété de Markov forte, nous avons :

$$\begin{aligned} P(x_k(s) = 0, x_k(t) = 1) &= E[\mathbf{1}_{x_k(s)=0} P_0(x_k(t-s) = 1)] \\ &\leq P(x_k(s) = 0) P(y_k(t) = 1) \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux cas précédents :

$$P_{12}(A \circ B_{k-1}, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B) \leq P_{12}(A \circ B_k, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B).$$

Enfin, nous en déduisons l'inégalité de BK en effectuant une récurrence sur  $k$ .  $\square$

## 9 Décroissance exponentielle pour la percolation dynamique

La probabilité qu'un chemin fermé décroît exponentiellement vite avec sa longueur dans la phase surcritique. Nous montrons ici une propriété similaire pour la percolation dynamique :

**Proposition 3.** *Soient  $p > \frac{1}{2}$ , et deux instants  $0 < s < t$ . Soient  $\gamma, \rho$  deux chemins fixés. Nous avons l'inégalité suivante :*

$$P \left( \begin{array}{l} \gamma \text{ fermé à l'instant } s \\ \rho \text{ fermé à l'instant } t \\ \gamma, \rho \text{ ne sont pas d'occurrence disjointe} \end{array} \right) \leqslant me^{-\lambda(t-s)}$$

avec  $\lambda$  une constante indépendante de  $\gamma, \rho$ .

*Démonstration.* nous considérons une arête  $(x, y)$  fermé et une modification locale  $M$  pour l'ouvrir suivante : nous fermons deux arêtes perpendiculaires de même côté qui contiennent respectivement un sommet  $x, y$  et l'arête qui relie ces deux arêtes ; ensuite nous ouvrons l'arête  $(x, y)$ . Chaque étape de la modification est déterminée par une horloge exponentielle et elle respecte la condition de  $T \not\leftrightarrow B$ . Entre  $[0, 1]$ , cette modification a une probabilité positive  $r$  pour se réaliser. Nous en déduisons qu'il existe une constante  $\lambda$  pour qu'entre  $[s, t]$ , la probabilité que cette modification ne se réalise pas est inférieur à  $e^{-\lambda(t-s)}$ .

Nous considérons maintenant deux arêtes  $e, e'$  voisines, nous pouvons choisir les arêtes que nous modifions pour que  $e, e'$  soient modifiées indépendamment. En effet, si les  $e, e'$  sont colinéaires alors nous effectuons les modifications à différents côtés ; si  $e, e'$  sont perpendiculaires, alors nous effectuons la modification à l'extérieur de l'angle formé par  $e, e'$ , voir figure 7.

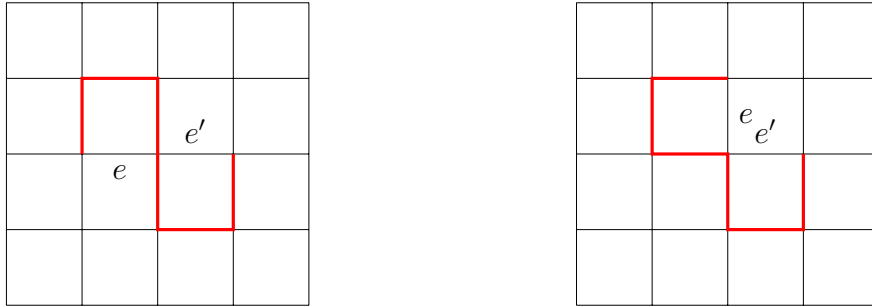


FIGURE 7 – deux arêtes voisines et les arêtes à modifier en rouge

Nous avons donc

$$\begin{aligned} P(\gamma \stackrel{s,t}{\circ} \rho) &\geq P(\forall e \in \gamma, M \text{ se réalise sur } e) \\ &\geq (1 - e^{-\lambda(t-s)})^m \geq 1 - me^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

□

Nous introduisons la notion de space-time chemin, en prolongeant la connexion dans le temps, c'est-à-dire si une arête  $e = (x, y)$  reste ouverte (resp. fermée) entre  $s$  et  $t$  alors  $(x, s) \longleftrightarrow (y, t)$  par un space-time chemin ouvert (resp. fermé). Nous montrons aussi une décroissance exponentielle avec les space-time chemin.

**Proposition 4.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$ ,  $p > \frac{1}{2}$ , soit  $A(n, t)$  l'événement  $(O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt)$  par un space-time chemin fermé où  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ , alors  $\exists \gamma(p, t)$ , une constante qui dépend de  $p, t$  tel que  $P(A(n, t)) \leq e^{-\gamma(p, t)n}$ .*

*Démonstration.* Nous montrons cette équivalence par le lemme sous-additif. En fait,

$$\begin{aligned} P((O, 0) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ \geq P((O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((n\mathbf{e}_1, nt) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t)) \\ \geq P((O, 0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((O, 0) \leftrightarrow (m\mathbf{e}_1, mt)) \end{aligned}$$

Car nous avons l'invariance par translation. La suite  $(-\ln P(A(n, t)))_{n \in \mathbb{N}}$  est sous-additive. Par le lemme sous-additif, nous obtenons :

$$\lim_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) = \inf_n -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) = \gamma(p, t)$$

Nous avons donc

$$\forall n, -\frac{1}{n} \ln P(A(n, t)) \geq \gamma(p, t).$$

□

## 10 La probabilité d'une influence du bord

Nous montrons maintenant que la probabilité que le bord influence une arête à l'intérieur de la boîte décroît exponentiellement avec la taille de la boîte.

**Théorème 2.** *Soit  $p \geq \frac{1}{2}$ ,  $\bar{e}$  l'arête au centre de la boîte  $\Lambda(l, h)$  avec deux processus  $Y, Y'$  définis avec deux conditions aux bords  $\Pi, \Pi'$ , il existe une constante  $\lambda > 0$  tel que  $P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) \leq e^{-\lambda \ell} P(T \not\leftrightarrow B \text{ entre } [0, t])$ .*

*Démonstration.* Nous utilisons les notations de la proposition 1 et son corollaire. D'après la proposition 1, nous savons qu'il existe une suite d'arêtes  $e_1, e_n$  qui sont reliées l'une après l'autre à différentes instants. Nous notons  $x_i, y_i$  les extrémités de  $c_i^*$  chemin fermé dans le graphe dual et de  $C_i$  le cut, nous notons aussi  $k_i$  le cardinal de  $p_i^1 \cup p_i^2$ . Nous séparons la suite en différentes sous suites selon l'indépendance, plus précisément, si  $c_j^*$  et  $c_{j+1}^*$  est de l'occurrence disjointe, alors nous coupons la suite à l'indice  $j$ . Ainsi, nous obtenons les indices  $j_1, \dots, j_r$  telles que  $\forall 1 \leq u \leq r, c_{j_u}^*$  et  $c_{j_{u+1}}^*$  sont disjoints,  $\forall j_k \leq v \leq j_{k+1}, c_k^*$  et  $c_{k+1}^*$  ne sont pas disjoints.

$$\begin{aligned} P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) &= P(\exists e_1, \dots, e_n, \forall i, \exists p_i^1, p_i^2, e_{i-1} \xleftrightarrow{p_i^1, p_i^2} e_i) \\ &\leq P(\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, c_1^*, \dots, c_n^*, C_1, \dots, C_n) \\ &\leq \sum_{j_1, \dots, j_r} \prod_{1 \leq k \leq r} P \left( \begin{array}{c} \exists x_{j_{k-1}+1}, \dots, x_{j_k}, \\ y_{j_{k-1}+1}, \dots, y_{j_k}, \\ c_{j_{k-1}+1}, \dots, c_{j_k}^*, \\ C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}, \\ \forall j_{k-1} + 1 \leq m \leq j_k, x_m \xleftrightarrow{c_m^*} y_m, c_m^* \circ C_m \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nous utilisons la proposition 4 pour majorer chaque terme du produit. Or les  $\forall j_{k-1} + 1 \leq m \leq j_k$ , les  $c_m^*$  ne sont pas d'occurrence disjointe, nous avons un space-time chemin  $\sigma_k$  qui relie  $x_{j_{k-1}+1}$  et  $y_{j_k}$ . Donc elle est bornée par

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut})$$

car  $x_{j_{k-1}+1}$  et  $y_{j_k}$  sont dans un carré de taille inférieure à  $|\sigma_k|$ . Or  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall x > 1, x^4 e^{-x} \leq e^{-\delta x}$ , nous avons

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} \leq |\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, t)|\sigma_k|} \leq e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|}$$

Nous partons de  $\bar{e}$ ,  $x_{j_{n-1}+1}$  est de distance inférieure à  $2|\sigma_r|$  de  $\bar{e}$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} &\sum_{1=j_1 < \dots < j_r=n} \prod_{1 \leq k \leq r} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}) \\ &\leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4|\sigma_r|^2 e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\ &\leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4e^{-\delta^2 \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\ &\leq 4^r e^{-\delta^2 \gamma(p, t) \sum_1^r |\sigma_k|} P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ séparent } T, B) \end{aligned}$$

Enfin,  $r$  est borné par une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\ell^2(1-p)t$ , nous avons le résultat.  $\square$