Mémoire M2

Wei ZHOU

13 septembre 2016

1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier les interfaces dans le modèle de percolation Bernoulli sur le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ avec une méthode dynamique.

2 Modèle

Nous présentons le modèle sur lequel nous allons travailler dans ce mémoire. Pour commencer, nous présentons les notations que nous allons utiliser.

Le réseau ($\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2$). Soit x, y deux points de \mathbb{Z}^2 , nous disons que x, y sont voisins s'ils sont de distance 1 en norme euclidienne. L'ensemble d'arêtes \mathbb{E}^2 est formé par les arêtes qui relient les sommets voisins.

Les boites $\Lambda(\ell,h)$. Nous notons $\Lambda(\ell,h)$ le rectangle $[-\ell,\ell] \times [-h,h]$. Nous notons aussi $T(\ell,h)$ le bord supérieur de $\Lambda(\ell,h)$, c'est à dire les sommets sur le segment $[-\ell,\ell] \times (0,h)$. Nous notons aussi $B(\ell,h)$ le bord inférieur de $\Lambda(\ell,h)$, c'est à dire les sommets dans $[-\ell,\ell] \times (0,-h)$. Les deux bords verticaux de la boîte $\Lambda(\ell,h)$ sont notés $V(\ell,h)$.

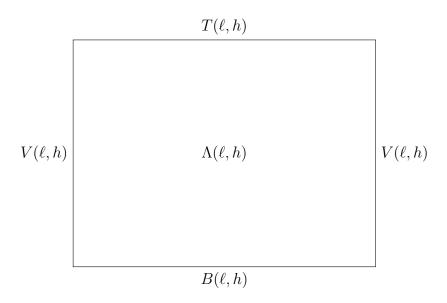


FIGURE 1 – La boîte $\Lambda(\ell, h)$

Les ensembles séparants. Soient A, B deux sous ensemble de \mathbb{Z}^2 . Nous disons qu'un ensemble d'arêtes $S \subset \mathbb{E}^2$ sépare A et B si aucune partie connexe

du graphe $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2 \setminus S)$ intersecte simultanément A et B, un tel ensemble est appelé un ensemble séparant pour A et B.

Nous disons que S est un ensemble séparant minimal de A, B si aucun sousensemble strict de S ne sépare A et B.

Le graphe dual. Nous rappelons qu'un graphe dual du réseau \mathbb{Z}^2 est un réseau de sommets les points de $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et d'arêtes \mathbb{E}^{2*} , où \mathbb{E}^{2*} est l'ensemble des arêtes joignant deux sommets de \mathbb{Z}^{2*} à distance 1. Si e une arête dans \mathbb{Z}^2 , nous notons e^* l'unique arête qui l'intersecte orthogonalement au milieu. Désormais, les objets dans le graphe dual seront notés avec une *.

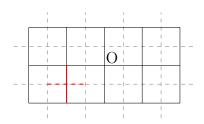


FIGURE 2 – un réseau \mathbb{Z}^2 et son dual (pointillée)

Les configurations. Nous posons $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$ l'espace de configuration. Nous disons que $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^2\} \in \Omega$ est une configuration pour le réseau \mathbb{Z}^2 et que l'arête e est ouverte si $\omega(e) = 1$ et fermée si $\omega(e) = 0$.

Soit A un sous ensemble de \mathbb{Z}^2 et ω une configuration, la configuration ω restreinte à A, notée $\omega_{|A}$, est la restriction de ω aux arêtes dont les 2 extrémités sont incluses dans A.

Soit $e \in \mathbb{E}^2$ une arête et $\omega \in \Omega$ une configuration, nous définissons les notations suivantes :

$$\omega^{e} = \omega^{e}(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 1 & f = e \end{cases}$$
$$\omega_{e} = \omega_{e}(f) = \begin{cases} \omega(f) & f \neq e \\ 0 & f = e \end{cases}$$

qui correspondent à les deux configurations obtenues à partir de ω en ouvrant ou fermant l'arête e.

Les chemins. Soit x et y deux sommets dans \mathbb{Z}^2 , un chemin entre x et y est une suite $x_0, e_0, x_1, e_1, \ldots, e_n, x_{n+1}$ de sommets x_i et d'arêtes e_i distincts où $x_0 = x$ et $x_{n+1} = y$ et e_i est l'arête joignant x_i à x_{i+1} .

Nous disons que x et y sont reliés par un chemin ouvert, noté $x \longleftrightarrow y$, s'il existe un chemin qui relie x, y et toute arête de ce chemin est ouverté dans la configuration ω . Nous notons aussi $x \to y$ l'événement complémentaire.

La probabilité de percolation. Soit un réel $p \in [0, 1]$. Sur l'espace Ω , nous considérons $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu cylindrique. Nous considérons la probabilité produit

 $P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes \mathbb{E}^2}.$

Intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau \mathbb{Z}^2 avec une probabilité 1-p.

3 La percolation dynamique

Nous définissons d'abord le processus la percolation dynamique sur le réseau (\mathbb{Z}^2, E^2) . Il s'agit d'un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à temps continu à valeurs dans l'espace des configurations $\{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$. Si e est une arête et $t\geqslant 0$, alors $X_t(e)\in\{0,1\}$ est l'état de l'arête e au temps t.

La loi du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est définie de la manière suivante. Les processus $(X_t(e))_{t\geqslant 0, e\in \mathbb{E}^2}$ sont i.i.d.. Pour une arête e fixée, le processus $(X_t(e))_{t\geqslant 0}$ est un processus markovien de sauts à deux états $\{0,1\}$, qui saute de 0 vers 1 à taux p et de 1 vers 0 à taux 1-p.

Construction graphique. Nous allons construire la percolation dynamique sur un espace de probabilité qui nous permettra de réaliser des couplages utiles pour les preuves.

Nous commençons avec un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) sur lequel sont définis les objets suivants :

- Une famille iid de processus de Poisson de paramètre 1 $(N_t(e))_{t\geqslant 0}$ indexée par les arêtes $e\in \mathbb{E}^2$;
- Une famille de variables aléatoires iid $U_n(e)_{n\geqslant 1}, e\in \mathbb{E}^2$ de loi uniforme sur [0,1].

Soit e une arête de \mathbb{E}^2 , notons $(T_i(e))_{i\geqslant 1}$, les instants des sauts du processus de Poisson $(N_t(e))_{t\geqslant 0}$ associé à e. A l'instant $T_i(e)$, nous retirons l'état de l'arête à l'aide de la v.a. $U_i(e)$.

Plus précisément, l'arête e ne peut changer d'état qu'aux instants $(T_i(e))_{i\geqslant 1}$, et nous posons

$$X_{T_i(e)}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U_i(e) p \end{cases}.$$

Nous définissons la suite $(\tau_i)_{i\geqslant 0}$ des instants de changement dans une boîte finie $\Lambda(\ell,h)$, en posant $\tau_0=0$ et pour tout $i\geqslant 0$:

$$\tau_{i+1} = \inf \left\{ t > \tau_i : X_{t \mid \Lambda(\ell,h)} \neq X_{\tau_i \mid \Lambda(\ell,h)} \right\}$$

Pour tout $i \geq 1$, il existe une unique arête e_i incluse dans $\Lambda(\ell, h)$ telle que $X_{\tau_i}(e_i) \neq X_{\tau_{i-1}}(e_i)$ et nous appelons la suite $(e_i)_{i \geq 1}$ la suite des arêtes modifiées.

4 L'interface

Nous définissons l'interface \mathcal{I} à l'aide de la percolation dynamique. Nous définissons d'abord un couplage suivant :

Soit X_t le processus de percolation dynamique de paramètre p dans $\Lambda_{\ell,h}$ qui satisfait $T \overset{X_0}{\leftrightarrow} B$ et $(\tau_i)_{i\geqslant 0}$ sa suite des instants de changement de configuration, soit Y_t un processus à valeurs dans $\{0,1\}^E$. Nous déterminons Y_t par récurrence sur $i: Y_0 = X_0$; soit $i\geqslant 0$, pour tout $s\in [\tau_i,\tau_{i+1}[,Y_s=Y_{\tau_i},\text{ soit }\bar{Y}_i]$ la configuration où nous remplaçons $Y_{\tau_i}(e_{i+1})$ par $Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})$ dans Y_{τ_i} , nous déterminons $(X_{\tau_{i+1}},Y_{\tau_{i+1}})$ ainsi :

$$(X_{\tau_{i+1}}(e), Y_{\tau_{i+1}}(e)) = \begin{cases} (X_{\tau_{i+1}}(e), X_{\tau_{i+1}}(e)) & e \neq e_{i+1} \\ (X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}), X_{\tau_{i+1}}(e)_{i+1}) & e = e_{i+1}, T \stackrel{\bar{Y}_i}{\leftrightarrow} B \\ (1, 0) & e = e_{i+1}, T \stackrel{\bar{Y}_i}{\leftrightarrow} B \end{cases}.$$

Nous remarquons d'abord qu'une arête e devient différente dans les deux configurations à l'instant τ_i si et seulement si e devient ouverte à τ_i mais cette ouverture induit une connexion entre T et B dans la configuration \bar{Y}_{i-1} ; dans ce cas, l'arête e reste fermée dans la configuration Y_t .

La chaîne de Markov $(X_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ est irréductible et à l'espace d'états fini donc elle admet une probabilité invariante qui est la probabilité de la percolation Bernoulli de paramètre p. La chaîne $(Y_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ est aussi irréductible car toute configuration de $(Y_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ est reliée à la configuration où toutes les arêtes sont fermées. En effet, pour toute arête e dans $\Lambda(\ell,h)$, et à toute instant de saut $(T_i(e))_{i\geqslant 0}$, on peut choisir de fermer e avec probabilité 1-p qui est strictement positive. Le théorème suivant décrit la probabilité invariante de Y.

Théorème 1. Soit Z_n une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble E fini, irréductible de probabilité invariante π , soit $A \subset E$, nous définissons Z_n^A par sa probabilité de transition :

$$p^{A}(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & y \in A, x \neq y \\ 0 & y \notin A \\ 1 - \sum_{y \neq x} p^{A}(x,y) & x = y \end{cases}$$

alors Z^A admet une probabilité invariante qui est $\frac{\mathbf{1}_A(.)\pi(.)}{\pi(A)}$ soit la probabilité invariante de la chaîne conditionnée à rester dans A.

Nous appliquons le théorème à $(Y_{\tau_i})_{i\geqslant 0}$ avec A l'ensemble des configuration qui satisfont $T \leftrightarrow B$. Nous obtenons la probabilité invariante qui est la loi de la percolation Bernoulli de paramètre p conditionnée par l'événement $T \leftrightarrow B$.

Définition 1. Soit $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ un couplage défini précédemment, nous appelons une interface dans $\Lambda(\ell, h)$ notée $\mathcal{I}_t(\ell, h)$ l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans X_t et fermé dans Y_t :

$$\mathcal{I}_t(\ell, h) = \{ e \in E : X_t(e) = 1, Y_t(e) = 0 \}.$$

5 Condition aux bords

Nous allons étudier l'influence de ℓ sur la loi de l'interface dans la boîte $\Lambda(\ell, h)$. Nous introduisons la notion de conditions aux bords. Pour instant, nous traitons uniquement le cas où seulement ℓ varie. Nous fixons alors un entier h et nous introduisons l'ensemble $\{top, bot, null\}$. Nous notons $\partial^{in}\Lambda(\ell, h)$ le bord intérieur de $\Lambda(\ell, h)$, soit

$$\partial^{in}\Lambda(\ell,h) = \{x \in \Lambda(\ell,h), \exists y \notin \Lambda(\ell,h), \langle x,y \rangle \in E^2\}.$$

Une condition aux bord $\Pi_{\ell,h}$ est une application de ∂^{in} à $\{top, bot, null\}$ qui se définit en deux étapes. Nous posons d'abord la condition aux bords sur les bords horizontaux $T(\ell,h)$ et $B(\ell,h)$:

$$\forall t\geqslant 0, \forall x\in T\cup B, \Pi_t^{\ell,h}(x)=\left\{\begin{array}{ll}top & x\in T\\bot & x\in B\end{array}\right.$$

et nous appelons une condition aux bords nulle si

$$\forall y \in V(\ell, h) \setminus \{(\pm \ell, \pm h)\}, \Pi(y) = null.$$

Soit $t \geqslant 0$, pour un sommet x sur le bord vertical $V(\ell,h)$, nous déterminons $\Pi_{\ell,h}(x)$ à l'aide une boîte plus grande de condition aux bords nulle. Plus précisément, une condition aux bords $\Pi_{\ell,h}$ est une application tel qu'il existe $m > \ell$ un entier naturel et une boîte $\Lambda(m,h)$ de condition aux bords nulle qui contient la boîte $\Lambda(\ell,h)$ de configuration X qui vérifie :

$$\forall x \in V(\ell, h), \Pi_{\ell, h}(x) = \begin{cases} top & \Leftrightarrow x \overset{X}{\longleftrightarrow} T \\ bot & \Leftrightarrow x \overset{X}{\longleftrightarrow} B \\ null & \Leftrightarrow x \overset{X}{\longleftrightarrow} T \cup B \end{cases},$$

la notation $x \xrightarrow{\Lambda(m,h)\setminus\Lambda(\ell,h)} T(resp.B)$ signifie que le sommet x est relié à T(resp.B) uniquement par un chemin ouvert dont les arrêtes sont dans l'ensemble $(\Lambda(m,h)\setminus\Lambda(\ell,h))\cup\partial^{in}\Lambda(\ell,h)$.

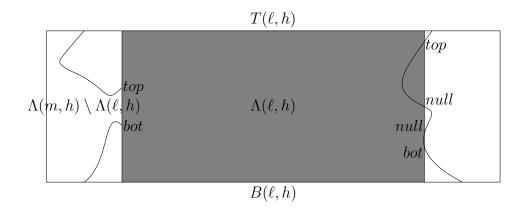


Figure 3 – Exemples d'une condition aux bords

Nous pouvons aussi déterminer la condition aux bords d'une boîte $\Lambda(\ell, h)$ induite par une boite $\Lambda(m, h)$ de configuration X avec une condition aux bords $\Pi_{m,h}$ non nulle. Soit x un sommet dans $V(\ell, h)$,

$$\Pi_{\ell,h}(x) = \begin{cases}
top & \exists y \in \partial^{in} \Lambda(m,h), \Pi_{m,h}(y) = top, x \xrightarrow{X} \underset{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(\ell,h)}{\longleftrightarrow} y \\
bot & \exists y \in \partial^{in} \Lambda(m,h), \Pi_{m,h}(y) = bot, x \xrightarrow{X} \underset{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(\ell,h)}{\longleftrightarrow} y \\
null & \forall y \in \partial^{in} \Lambda(m,h), \Pi_{m,h}(y) \neq null, x \xrightarrow{X} \underset{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(\ell,h)}{\longleftrightarrow} y
\end{cases}$$

Nous généralisons désormais l'événement $T \leftrightarrow B$ avec la condition aux bords. Nous disons $T \leftrightarrow B$ s'il existe une connexion entre un sommet x tel que $\Pi_{\ell,h}(x) = top$ (resp. bot) et $B(\ell,h)$ (resp. $T(\ell,h)$), de plus nous disons $T \leftrightarrow B$ s'il existe une connexion entre deux sommets x, y tels que $\Pi_{\ell,h}(x) = top, \Pi_{\ell,h}(y) = bot$.

6 Quelques résultats géométriques

Nous nous intéressons à la probabilité qu'une arrête fixée soit dans l'interface. Nous considérons désormais le régime surcritique, qui correspond au cas $p > \frac{1}{2}$ en dimension 2. Soit e_0 l'arête qui joint (0,0) et (1,1), notre objectif est de montrer que à t fixé la probabilité $\mathbb{P}(e_0 \in I_t^{\ell})$ converge lorsque ℓ tend vers l'infini.

Intuitivement, nous imaginons que l'influence d'une condition aux bords disparaît quand la taille de la boîte grandit.

Soit $\Lambda(\ell, h)$ une boite dans \mathbb{Z}^2, E^2 munis de deux conditions aux bords $\Pi_{\ell,h}, \Pi'_{\ell,h}$ qui diffèrent à un seul sommet v_0 . Nous considérons $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de percolation dynamique dans $\Lambda(\ell, h)$ et deux couplage (X, Y) et (X, Y') conditionnés par $T \leftrightarrow B$ avec les deux conditions aux bords.

Proposition 1. Soit $\theta > 0$ premier instant où e_0 diffère dans les deux configurations, alors il existe un entier aléatoire $N \in \mathbb{N}$, une suite d'arêtes aléatoires e_1, \ldots, e_N et des instants aléatoires $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_N = t$ qui vérifient les conditions suivantes :

- à l'instant θ₁, e₁ diffère dans les deux configurations. Il existe deux chemins fermés p₁*, ρ₁* disjoints qui relient e₁* et le dual du bord contenant v₀;
- 2. pour tout i > 1, l'arête e_i devient différente à θ_i et il existe deux chemins fermés γ_i^*, ρ_i^* disjoints qui relient e_{i-1}^* et e_i^* .
- 3. pour tout $i \geq 1$, à l'instant θ_i , il existe un ensemble d'arêtes fermées S_i qui sépare $T(\ell,h)$ et $B(\ell,h)$ et un chemin fermé c_i^* disjoint de S_i tel que $c_i^* \subset (\gamma_i^* \cup \rho_i^*)$ et $|c_i^*| \geq \frac{1}{2} |\gamma_i^* \cup \rho_i^*|$

Démonstration. Nous notons $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \inf\{s > \tau_{i-1}, \exists e \in \Lambda(\ell, h), Y_{s^-}(e) = Y'_{s^-}(e), Y_s(e) \neq Y'_s(e)\}$. Nous considérons maintenant la première arête e_1 qui devient différente dans les deux boites. Par symétrie, nous pouvons supposer que v_0 soit dans le bord gauche et que e_1 soit fermée dans Λ'_{ℓ} .

Cette arête devient différente car il si elle était ouverte dans la configuration Y', il existerait un chemin ouvert entre T et B et pas dans la configuration Y. Il existe alors un chemin ouvert entre e_1 et le sommet v_0 au bord. Sans perte de généralité, nous supposons que $\Pi'_{\ell}(v_0) = T$, il existe alors dans Y_{τ_1} et Y'_{τ_1} un chemin identique qui relie une extrémité de e_0 et B. Nous considérons maintenant le cluster ouvert de ce chemin dans la configuration Y'_{τ_1} , il n'est pas connecté à B par la condition $T \nleftrightarrow B$ dans Y'_{τ_1} , de plus, il n'est pas connecté à T car s'il l'était, $T \longleftrightarrow B$ dans la configuration $Y\tau_1$ où e_0 est ouverte. Il existe donc dans le graphe dual un contour fermé C_1^* qui sépare ce cluster de T et de B. L'arête e_1^* sépare donc ce contour en deux parties disjointes (voir Figure 4).

Nous considérons maintenant une arête e_i qui devient différente à cause des autres arêtes qui sont déjà différentes. Par symétrie, nous supposons que e_i est ouverte dans Y_{τ_i} et fermée dans Y'_{τ_i} et que dans les deux boîtes et e_i est reliée à B.

Nous pouvons choisir une arête e_j avec j < i qui est devenue différente avant τ_i et qui est restée différente entre τ_j et τ_i . En plus, il existe un chemin ouvert qui les relie. En effet, nous considérons le cluster ouvert C_i dans Y_{τ_i}

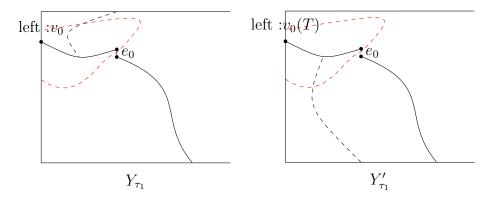


FIGURE 4 – La configuration dans les deux boites quand e_1 devient différente et le contour C_1 en rouge

du sommet qui est séparé de B par l'arête e_i . Nous considérons R_i l'ensemble suivant :

$$R_i = \left\{ e = \langle x, y \rangle, x \in C_i, y \notin C_i, y \underset{Y'_{\tau_i}}{\leftrightarrow} T \cup \Pi_{\ell, h}^{-1}(top), Y_{\tau_i}(e) \neq Y'_{\tau_i}(e) \right\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, car $e_i \stackrel{Y'_{\tau_i}}{\leftrightarrow} T$, mais pas dans Y_{τ_i} , donc il existe un tel $\langle x, y \rangle$ sur le bord extérieur de C_i qui diffère dans les deux configurations. Nous pouvons ordonner cet ensemble avec l'ordre lexicographique de \mathbb{Z}^2 et nous prenons e_i la première arête de R_i .

Comme pour la première arête e_0 , il y a un chemin ouvert qui relie e_i et e_j . Sans perte de généralité, nous supposons que e_j est reliée à T. Nous pouvons considérer le cluster ouvert du chemin c entre e_i , e_j dans Y'_{τ_i} arrêté à e_j et e_i . Ce cluster n'est pas connecté à T car e_i est ouverte, il n'est pas connecté à B dans Y'_{τ_i} car e_j est ouverte. Nous pouvons donc trouver un ensemble S_i d'arêtes fermées qui sépare ce chemin de T dans Y_{τ_i} et un ensemble S'_i qui le sépare de B dans Y'_{τ_i} . Nous pouvons supposer que $S_i \cap S'_i \neq \emptyset$, sinon, nous avons deux ensembles qui séparent T et B dans $\Lambda(\ell,h)$ qui est de probabilité inférieure à $e^{-\lambda \ell}$ et nous avons le résultat voulu. Nous pouvons désormais considérer un ensemble S* formé par des arêtes qui sont soit fermées dans l'une des deux configurations et qui sépare le chemin c de T et de B. Quitte à prendre prendre l'ensemble minimal, nous pouvons supposer que S^* est un circuit qui relie e_i et e_j . Les deux arêtes e_i et e_j coupent cet ensemble en deux chemins fermés γ_i^* , ρ_i^* .

Enfin, pour obtenir la suite $(e_i)_{i\geqslant 1}$ dans l'énoncé, nous partons de l'instant t pour trouver l'arête qui a causé la différence à e_0 , ensuite nous répétons ce procédure à l'instant où cette arête est devenue différente jusqu'à arriver au bord. Comme chaque ouverture ou fermeture d'une arête est donnée par

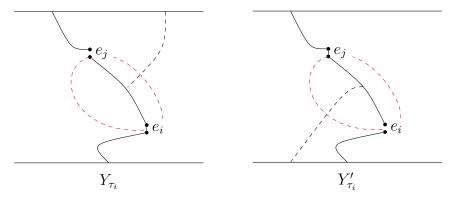


FIGURE 5 – La configuration dans les deux boites quand e_i devient différente avec le contour C_i en rouge

une horloge exponentielle, il y a presque sûrement un nombre fini d'arêtes qui sont devenues différentes avant t. Nous pouvons donc trouver une suite finie d'arêtes e_0, e_1, \ldots, e_N avec $e_N = e_0$ et des instants $\theta_1 < \cdots < \theta_N = t$ qui vérifient les deux premiers points de l'énoncé.

Nous considérons le contour fermé formé par γ_i^1 et γ_i^2 , la condition $T \nleftrightarrow B$ impose qu'il existe un ensemble séparant K_i qui contient e_i dans la configuration où elle est fermée. Quitte à ouvrir les arêtes de K_i qui ne sont pas pivotes, nous pouvons supposer K_i minimal. Nous considérons le dual de K_i , qui est un chemin fermé simple de gauche à droite. Nous pouvons numéroter les arêtes de K_i de la façon suivante :

- nous posons $e_i^* = k_0$;
- si e_i^* est horizontale, nous posons k_{-1} l'arête qui partage le sommet gauche de e_i^* et k_1 l'arête qui partage le sommet droite. S'il e_i^* est verticale, nous posons k_{-1} l'arête en bas et k_1 celle en haut.
- Nous nous éloignons de e_i , jusqu'à avoir numéroté toutes les arêtes. Dans la direction négative, nous diminuons l'indice de 1 à chaque pas et nous augmentons de 1 par pas dans la direction positive.

Nous considérons maintenant l'arête minimale et l'arête maximale de l'ensemble $K_i \cap (\gamma_i^1 \cup \rho_i^2)$ que nous notons k_{min} et k_{max} . Les deux arêtes k_{min} et k_{max} coupe K_i en 3 parties disjointes : C_i^g un chemin entre le bord gauche et k_{min} ; C_i^d un chemin entre le bord droite et k_{max} ; l'union d'un chemin entre k_{min} et k_{max} et ces deux arêtes. De plus, les deux sommets qui séparent ces trois parties coupent le contour $\gamma_i^1 \cup \rho_i^2$ en deux chemins disjoints c_i^1 et c_i^2 . Quitte à échanger les numéros, nous supposons que $|c_i^1| \ge |c_i^2|$.

Enfin nous posons $S_i^* = C_i^g \cup C_i^d \cup c_i^2$ un chemin fermé du bord gauche au bord droite dans le graphe dual et $c_i^* = c_i^1$. Nous posons S_i le dual de S_i^* qui est un cut. Or $|c_i^1| \ge |c_i^2|$, nous obtenons $|c_i^*| \ge \frac{1}{2} |\gamma_i^1 \cup p_i^2|$. Par construction,

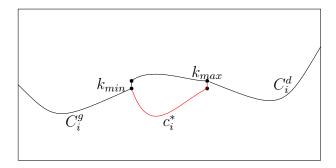


FIGURE 6 – construction d'un chemin fermé disjoint d'un cut

 S_i et c_i^* sont disjoints.

7 Quelques inégalités préliminaires

Nous allons énoncer quelques inégalités pour la suite de notre étude. Nous commençons par une inégalité de type BK adaptée au problème. Nous commençons par généraliser la notion de l'occurrence disjointe.

Nous considérons dans cette partie A un événement croissant qui dépend d'un nombre fini d'arêtes à l'instant s, et B un événement croissant qui dépend d'un nombre fini d'arête à l'instant t. Nous notons $K(\omega) = \{e : e = 1\}$ l'ensemble d'arêtes ouvertes dans une configuration ω . Nous définissons l'occurrence disjointe ainsi :

Définition 2. Soit A, B définis précédemment, l'occurrence disjointe de A et B noté par $A \circ B$ par :

- $si\ s = t,\ A \circ B = \{\omega : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B, K(\omega_1) \cap K(\omega_2) = \emptyset, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(\omega)\};$
- $si \ s < t, \ A \circ B = \{\omega : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(\omega), \forall e \in (\omega_1) \cap K(\omega_2), \exists r \in [s,t], e(r) \neq e(s)\}.$

Nous énonçons l'inégalité de BK pour la percolation dynamique :

Proposition 2. Soit $\Lambda(\ell, h)$ une boîte de longueur ℓ , $0 < s \le t$, soit A et B des événements définis au début de la partie, alors $P(A \circ B) \le P(A)P(B)$.

Démonstration. Pour le premier cas, c'est l'inégalité de BK classique. Nous traitons uniquement le deuxième cas où les instants sont différents. Soit $\Gamma = \{f : [s,t] \to \{0,1\} \text{ càdlàg}\}^{|\Lambda(\ell,h)|}$. Nous introduisons deux espaces de probabilité identiques $S_1 = (\Gamma_1, \mathcal{F}_1, P_1), S_2 = (\Gamma_2, \mathcal{F}_2, P_2)$, nous définissons S l'espace produit de S_1, S_2 . Nous écrivons $x \times y$ un point de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Nous notons $A' = A \times \Gamma_2, B'_k = \{x \times y : (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_{|\Lambda(\ell,h)|}) \in B\}$. Nous notons P_{12} la probabilité produit de P_1, P_2 . Nous avons bien que $P(A \circ B) = P_1$

 $P_{12}(A' \circ B'_0)$ et $P_{12}(A' \circ B'_{|\Lambda(\ell,h)|}) = P(A)P(B)$. Nous montrons maintenant :

$$\forall k > 0, P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leqslant P_{12}(A' \circ B'_k)$$

.

Soit M un événement, nous disons que e est pivot pour M si $(\omega^e \in M, \omega_e \notin M)$ ou $(\omega^e \notin M, \omega_e \in M)$, c'est à dire un changement de l'arête e change l'occurrence de M dans la configuration ω . Nous notons $e \triangleright M$ si e est pivot pour M.

Nous considérons d'abord le cas où e_k n'est pas pivot pour B. Nous vérifions facilement que

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright B) \leqslant P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright B)$$

car il suffit de poser y_k une copie indépendante de x_k qui réalise $A \circ B_{k-1}$ pour obtenir $A \circ B_k$.

Nous considérons maintenant le cas e_k pivot pour B mais pas pour A. Par symétrie nous pouvons supposer $\omega^{e_k} \in B$. Il nous faut $x_k(t) = 1$ réaliser pour $A \circ B_{k-1}$ et $y_k(t) = 1$ pour réaliser $A \circ B_k$. Or x_k et y_k sont de même loi, nous avons $P_{12}(x_k(t) = 1) = P_{12}(y_k(t) = 1)$. D'où:

$$P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B) = P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k, e_k \not\triangleright A, e_k \triangleright B)$$

Il reste le cas où l'arête e_k est pivot pour A et B. Quitte à changer p en (1-p), nous pouvons supposer que $\omega^{e_k} \in A$, il faut donc distinguer deux cas :

• Si $\omega^{e_k} \in A, \omega^{e_k} \in B$, nous devons avoir $x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s,t], x_k(r) = 0$ pour $A \circ B_{k-1}$. Pour $A \circ B_k$, il faut $x_k(s) = 1$ et $y_k(t) = 1$. Nous montrons que

$$P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \leqslant P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).$$

Nous considérons la première instant de saut de x_k , soit

$$T = \inf\{r > s, x_k(s) = 0\}$$

et nous conditionnons la première probabilité par $\{T=r\}$, et nous utilisons

la propriété de Markov forte qui donne :

$$P(x_{k}(s) = 1, x_{k}(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_{k}(r) = 0)$$

$$= E \left[\mathbf{1}_{x_{k}(s)=1} \mathbf{1}_{x_{k}(t)=1} \mathbf{1}_{T < t} \right]$$

$$= E \left[E[\mathbf{1}_{x_{k}(s)=1} \mathbf{1}_{x_{k}(t)=1} \mathbf{1}_{T < t} | T = r] \right]$$

$$= E \left[\mathbf{1}_{x_{k}(s)=1} \mathbf{1}_{T=r} E[\mathbf{1}_{x_{k}(t)=1} | T = r] \right]$$

$$= E \left[\mathbf{1}_{x_{k}(s)=1} \mathbf{1}_{T < t} P_{0}(x'_{k}(t-r) = 1) \right]$$

$$\leq E \left[\mathbf{1}_{x_{k}(s)=1} \mathbf{1}_{T < t} \right] P(y_{k}(t-r) = 1)$$

$$= P(x_{k}(s) = 1, T < t) P(y_{k}(t) = 1)$$

$$\leq P(x_{k}(s) = 1, y_{k}(t) = 1).$$

Avec x'_k le processus démarré à T. Nous avons $P_0(x'_k(t-r)=1) \leq P(y_k(t-r)=1)$ car $\{x_k(t-r)=1\}$ est un événement croissant. Nous avons $P(y_k(t-r)=1)=P(y_k(t)+1)$ car y_k est stationnaire à l'équilibre.

• Si $\omega^{e_k} \in A$, $\omega_{e_k} \in B$, nous devons avoir $x_k(s) = 1$, $x_k(t) = 0$ pour réaliser $A \circ B_{k-1}$ et $x_k(s) = 1$, $y_k(t) = 0$ pour réaliser $A \circ B_k$. Or l'événement $x_k(t) = 1$ est un événement croissant, nous avons

$$P_0(x_k(t-s)=1) \leqslant P(x_k(t-s)=1).$$

Par la propriété de Markov forte, nous avons :

$$P(x_k(s) = 0, x_k(t) = 1) = E[\mathbf{1}_{x_k(s)=0} P_0(x_k(t-s) = 1)]$$

$$\leq P(x_k(s) = 0) P(y_k(t) = 1)$$

Nous obtenons l'inégalité voulu en combinant les deux cas précédents :

$$P_{12}(A \circ B_{k-1}, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B) \leqslant P_{12}(A \circ B_k, e_k \triangleright A, e_k \triangleright B).$$

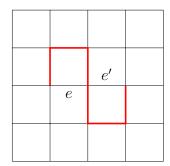
Enfin, nous en déduisons l'inégalité de BK en effectuant une récurrence sur k.

Nous avons déjà qu'un chemin fermé admet la propriété de décroissance exponentielle en fonction de son cardinal dans la phase surcritique, nous montrons maintenant une propriété similaire pour la percolation dynamique sur son comportement temporel :

Proposition 3. Soit $p > \frac{1}{2}$, c un chemin fermé à l'instant s de cardinal m, soit $P_{c,c'}$ la probabilité qu'il ne soit pas disjoint d'un chemin c' à l'instant t > s, nous avons $P_{c,c'} \leq me^{-\gamma(t-s)}$ avec γ une constante indépendante de c et de c'.

Démonstration. nous considérons une arête (x,y) fermé et une modification locale M pour l'ouvrir suivante : nous fermons deux arêtes perpendiculaires de même côté qui contiennent respectivement un sommet x,y et l'arête qui relie ces deux arêtes ; ensuite nous ouvrons l'arête (x,y). Chaque étape de la modification est déterminée par une horloge exponentielle et elle respecte la condition de $T \nleftrightarrow B$. Entre [0,1], cette modification a une probabilité positive r pour se réaliser. Nous en déduisons qu'il existe une constante γ pour qu'entre [s,t], la probabilité que cette modification ne se réalise pas est inférieur à $e^{-\gamma(t-s)}$.

Nous considérons maintenant deux arêtes e, e' voisines, nous pouvons choisir les arêtes que nous modifions pour que e, e' soient modifiées indépendamment. En effet, si les e, e' sont colinéaires alors nous effectuons les modifications à différents côtés; si e, e' sont perpendiculaires, alors nous effectuons la modification à l'extérieur de l'angle formé par e, e', voir figure 7.



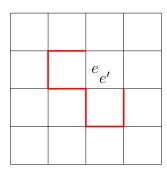


FIGURE 7 – deux arêtes voisines et les arêtes à modifier en rouge

Nous avons donc

$$P(c \coprod c') \geqslant P(\forall e \in c, M \text{ se réalise sur } e)$$

 $\geqslant (1 - e^{-\gamma(t-s)})^m \geqslant 1 - me^{-\gamma(t-s)}$

Nous introduisons la notion de space-time chemin, en prolongeant la connexion dans le temps, c'est-à-dire si une arête e=(x,y) reste ouverte (resp. fermée) entre s et t alors $(x,s)\longleftrightarrow (y,t)$ par un space-time chemin ouvert (resp.fermé). Nous montrons aussi une décroissance exponentielle avec les space-time chemin.

Proposition 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, t > 0, $p > \frac{1}{2}$, soit A(n,t) l'événement $(O,0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt)$ par un space-time chemin fermé où $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, alors $\exists \gamma(p,t)$, une constante qui dépend de p,t tel que $P(A(n,t)) \leq e^{-\gamma(p,t)n}$.

Démonstration. Nous montrons cette équivalence par le lemme sous-additif. En fait,

$$P((O,0) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t))$$

$$\geqslant P((O,0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((n\mathbf{e}_1, nt) \leftrightarrow ((n+m)\mathbf{e}_1, (n+m)t))$$

$$\geqslant P((O,0) \leftrightarrow (n\mathbf{e}_1, nt))P((O,0) \leftrightarrow (m\mathbf{e}_1, mt))$$

Car nous avons l'invariance par translation. La suite $(-\ln P(A(n,t)))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. Par le lemme sous-additif, nous obtenons :

$$\lim_{n} -\frac{1}{n} \ln P(A(n,t)) = \inf_{n} -\frac{1}{n} \ln P(A(n,t)) = \gamma(p,t)$$

Nous avons donc

$$\forall n, -\frac{1}{n} \ln P(A(n,t)) \geqslant \gamma(p,t).$$

8 La probabilité d'une influence du bord

Nous montrons maintenant que la probabilité que le bord influence une arête à l'intérieur de la boîte décroit exponentiellement avec la taille de la boite.

Théorème 2. Soit $p \ge \frac{1}{2}$, \bar{e} l'arête au centre de la boîte $\Lambda(l,h)$ avec deux processus Y,Y' définis avec deux conditions aux bords Π,Π' , il existe une constante $\lambda > 0$ tel que $P(Y(\bar{e}) \ne Y'(\bar{e})) \le e^{-\lambda \ell} P(T \leftrightarrow B \text{ entre } [0,t])$.

Démonstration. Nous utilisons les notations de la proposition 1 et son co-rollaire. D'après la proposition 1, nous savons qu'il existe une suite d'arêtes e_1, e_n qui sont reliées l'une après l'autre à différentes instants. Nous notons x_i, y_i les extrémités de c_i^* chemin fermé dans le graphe dual et de C_i le cut, nous notons aussi k_i le cardinal de $p_i^1 \cup p_i^2$. Nous séparons la suite en différentes sous suites selon l'indépendance, plus précisément, si c_j^* et c_{j+1}^* est de l'occurrence disjointe, alors nous coupons la suite à l'indice j. Ainsi, nous obtenons les indices j_1, \ldots, j_r telles que $\forall 1 \leqslant u \leqslant r, c_{j_u}^*$ et $c_{j_{u+1}}^*$ sont disjoints, $\forall j_k \leqslant v \leqslant j_{k+1}, c_k^*$ et c_{k+1}^* ne sont pas disjoints.

$$P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) = P(\exists e_1, \dots, e_n, \forall i, \exists p_i^1, p_i^2, e_{i-1} \overset{p_i^1, p_i^2}{\longleftrightarrow} e_i)$$

$$\leqslant P(\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n c_1^*, \dots, c_n^*, C_1, \dots, C_n)$$

$$\leqslant \sum_{j_1, \dots, j_r} \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} P \begin{pmatrix} \exists x_{j_{k-1}+1}, \dots, x_{j_k}, \\ y_{j_{k-1}+1}, \dots, y_{j_k}, \\ c_{j_{k-1}+1}, \dots, c_{j_k}^*, \\ C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}, \\ \forall j_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant j_k, x_m \overset{c_m^*}{\longleftrightarrow} y_m, c_m^* \circ C_m \end{pmatrix}$$

Nous utilisons la proposition 4 pour majorer chaque terme du produit. Or les $\forall j_{k-1}+1\leqslant c_m^*\leqslant j_k$, les c_m^* ne sont pas d'occurrence disjointe, nous avons un space-time chemin σ_k qui relie $x_{j_{k-1}+1}$ et y_{j_k} . Donc elle est bornée par

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p,\theta_{j_k}-\theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1},\dots,C_{j_k} \text{ cut})$$

car $x_{j_{k-1}+1}$ et y_{j_k} sont dans un carré de taille inférieure à $|\sigma_k|$. Or $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x > 1, x^4 e^{-x} \leq e^{-\delta x}$, nous avons

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p,\theta_{j_k}-\theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} \leqslant |\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p,t)|\sigma_k|} \leqslant e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}$$

Nous partons de \bar{e} , $x_{j_{n-1}+1}$ est de distance inférieure à $2|\sigma_r|$ de \bar{e} , nous avons denc

$$\sum_{1=j_1<\dots< j_r=n} \prod_{1\leqslant k\leqslant r} e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1},\dots,C_{j_k} \text{ cut})$$

$$\leqslant P(\exists C_1,\dots,C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1<\dots< j_{r-1}} 4|\sigma_r|^2 e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_r|} \prod_{1\leqslant k\leqslant r-1} e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}$$

$$\leqslant P(\exists C_1,\dots,C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1<\dots< j_{r-1}} 4e^{-\delta^2\gamma(p,t)|\sigma_r|} \prod_{1\leqslant k\leqslant r-1} e^{-\delta\gamma(p,t)|\sigma_k|}$$

$$\leqslant 4^r e^{-\delta^2\gamma(p,t)\sum_1^r |\sigma_k|} P(\exists C_1,\dots,C_n \text{ séparent } T,B)$$

Enfin, r est borné par une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\ell^2(1-p)t$, nous avons le résultat.