

Mémoire M2

Wei ZHOU

10 septembre 2016

1 Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier les interfaces dans le modèle de percolation dans le réseau $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ avec une méthode dynamique.

2 Modèle

Nous présentons le modèle sur lequel nous allons travailler dans ce mémoire. Pour commencer, nous présentons des notations que nous allons utiliser.

Configuration. Soit un réel $p \in [0, 1]$, $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^2}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu cylindrique. Nous disons que $\omega = \{\omega(e), e \in \mathbb{E}^2\} \in \Omega$ est une configuration pour le réseau \mathbb{Z}^2 et que l'arête e est ouverte si $\omega(e) = 1$ et fermée si $\omega(e) = 0$. Chaque configuration correspond à un sous graph de \mathbb{Z}^2 si nous considérons uniquement les arêtes ouvertes.

La probabilité de percolation. Sur l'espace (Ω, \mathcal{F}) , nous considérons la probabilité produit $P_p = (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\mathbb{E}^2}$. Plus intuitivement, une configuration s'obtient en fermant indépendamment chaque arête du réseau \mathbb{Z}^2 avec une probabilité $1 - p$.

Boîte $\Lambda(l, h)$. Nous notons $\Lambda(l, h)$ le rectangle $[-l, l] \times [-h, h]$; nous notons aussi les bords $T(l, h)$ le bord supérieur de $\Lambda(l, h)$, c'est à dire les sommets de \mathbb{Z}^2 sur le segment $[-l, l] \times (0, h)$, nous notons aussi $B(l, h)$ le bord inférieur les sommets dans $[-l, l] \times (0, -h)$ et enfin les deux bords verticaux de la boîte que nous notons $V(l, h)$.

Chemin. Soit x et y deux sommets dans \mathbb{Z}^2 , nous notons $x \xleftrightarrow[\omega]{} y$ s'ils sont reliés par un chemin ouvert, i.e.

$$\exists(x_0, \dots, x_n), \forall 0 \leq i \leq n-1, \langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \mathbb{E}^2, \omega(\langle x_i, x_{i+1} \rangle) = 1,$$

nous notons $x \xleftrightarrow[\omega]{} y$, si ce n'est pas le cas. Nous enlèverons ω dans la notations si cela ne créer pas de confusion. De plus, soit B un sous ensemble de \mathbb{E}^2 , nous notons $x \xleftrightarrow[B]{} y$ si x et y sont reliés par des arêtes contenant dans B .

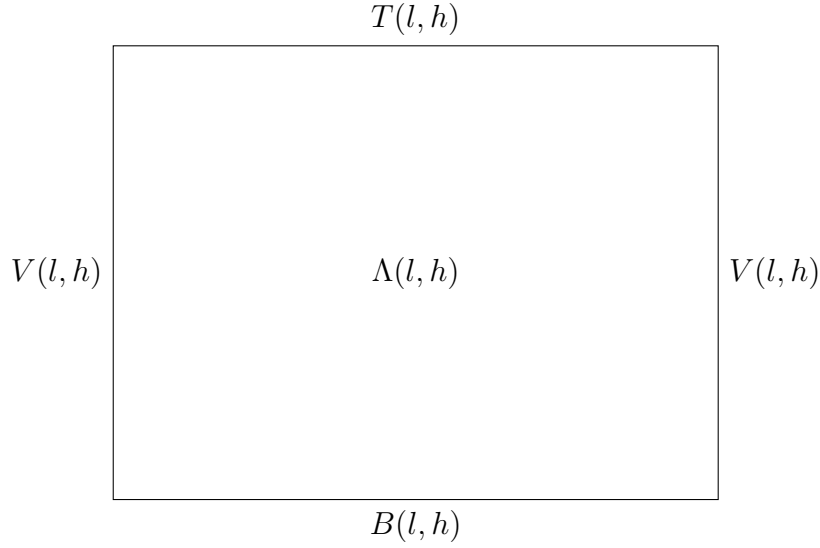


FIGURE 1 – La boîte $\Lambda(l, h)$

Graphe dual. Nous rappelons qu'un graphe dual d'une percolation sur le réseau \mathbb{Z}^2 est un réseau sur $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dont une arête e^* est ouverte ssi l'arête e dans \mathbb{Z}^2 qui l'intersecte est ouverte. Désormais, les objets dans le graphe dual seront notés avec une $*$.

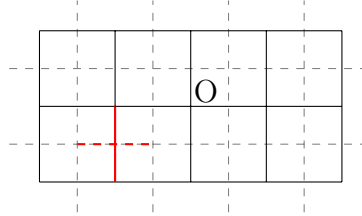


FIGURE 2 – un réseau \mathbb{Z}^2 et son dual (pointillée)

Ensemble séparant. Nous introduisons la notion d'un ensemble séparant, soit A, B deux sous ensemble de \mathbb{Z}^2 , nous disons qu'un ensemble d'arête $S \subset \mathbb{E}^2$ sépare A et B si pour tout sommet $x \in A$ et tout sommet $y \in B$, $x \xrightarrow{\mathbb{E}^2 \setminus S} y$. S est appelé un ensemble séparant pour A et B .

Nous disons que S est un ensemble séparant minimal de A, B si S sépare A, B et pour tout arête e de S , il existe $x \in A, y \in B$ tel que $x \xrightarrow{\mathbb{E}^2 \setminus (S \setminus \{e\})} y$.

3 La percolation dynamique

Nous définissons d'abord le processus la percolation dynamique dans un réseau (\mathbb{Z}^2, E^2) . Il s'agit d'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à temps continu à valeurs dans l'espace des configurations de percolation.

Si e est une arête et $t \geq 0$, alors $X_t(e) \in \{0, 1\}$ est l'état de l'arête e au temps t .

La loi du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est définie de la manière suivante. Les processus $(X_t(e))_{t \geq 0, e \in E^2}$ sont i.i.d.. Pour une arête e fixée, le processus $(X_t(e))_{t \geq 0}$ est un processus markovien de sauts à deux états $\{0, 1\}$, qui saute de 0 vers 1 à taux p et de 1 vers 0 à taux $1 - p$.

Construction graphique. Nous allons construire la percolation dynamique sur un espace de probabilité qui nous permettra de réaliser des coupages.

Nous commençons avec un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) sur lequel sont définis les objets suivants :

- Une famille iid $(N_t(e))_{t \geq 0, e \in E^2}$ de processus de Poissons de paramètre 1 ;
- Une famille de variable aléatoire iid $U_n(e)_{n \geq 1}$ de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Soit e une arête de E^2 , notons $(T_i(e))_{i \geq 1}$, les instants des sauts du processus de Poisson $(N_t(e))_{t \geq 0}$ associé à e . A l'instant $T_i(e)$, nous retirons l'état de l'arête à l'aide de la *v.a.* $U_i(e)$.

Plus précisément, l'arête e ne peut changer d'état qu'aux instants $(T_i(e))_{i \geq 1}$, et nous posons

$$X_{T_i(e)}(e) = \begin{cases} 1 & U_i(e) < p \\ 0 & U_i(e) > p \end{cases}$$

Nous pouvons aussi définir $(\tau_i)_{i \geq 0}$ la suite des instants de changement de configuration par récurrence dans une boîte finie $\Lambda(l, h)$: soit

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ \forall i \in \mathbb{N}, \tau_{i+1} &= \inf\{t > \tau_i, \exists e_{i+1} \in \Lambda(l, h), X_t(e) \neq X_{\tau_i}(e)\} \end{aligned} \quad ,$$

et nous appelons la suite $(e_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des arêtes modifiées.

4 L'interface

Nous définissons l'interface \mathcal{I} à l'aide de la percolation dynamique. Nous définissons d'abord un couplage suivant :

Soit X_t le processus de percolation dynamique de paramètre p dans $\Lambda_{l,h}$ qui satisfait $T \xleftrightarrow{X_0} B$ et $(\tau_i)_{i \geq 0}$ sa suite des instants de changement de configuration, soit Y_t un processus à valeurs dans $\{0, 1\}^E$. Nous déterminons Y_t par récurrence sur i : $Y_0 = X_0$; soit $i \geq 0$, pour tout $s \in [\tau_i, \tau_{i+1}[$, $Y_s = Y_{\tau_i}$, soit \bar{Y}_i la configuration où nous remplaçons $Y_{\tau_i}(e_{i+1})$ par $Y_{\tau_{i+1}}(e_{i+1})$ dans Y_{τ_i} , nous déterminons $(X_{\tau_{i+1}}, Y_{\tau_{i+1}})$ ainsi :

$$(X_{\tau_{i+1}}(e), Y_{\tau_{i+1}}(e)) = \begin{cases} (X_{\tau_{i+1}}(e), X_{\tau_{i+1}}(e)) & e \neq e_{i+1} \\ (X_{\tau_{i+1}}(e_{i+1}), X_{\tau_{i+1}}(e)_{i+1}) & e = e_{i+1}, T \xleftrightarrow{\bar{Y}_i} B \\ (1, 0) & e = e_{i+1}, T \xleftrightarrow{\bar{Y}_i} B \end{cases}.$$

Nous remarquons d'abord qu'une arête e devient différente dans les deux configurations à l'instant τ_i si et seulement si e devient ouverte à τ_i mais cette ouverture induit une connexion entre T et B dans la configuration \bar{Y}_{i-1} ; dans ce cas, l'arête e reste fermée dans la configuration Y_t .

La chaîne de Markov $(X_{\tau_i})_{i \geq 0}$ est irréductible et à l'espace d'états fini donc elle admet une probabilité invariante qui est la probabilité de la percolation Bernoulli de paramètre p . La chaîne $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$ est aussi irréductible car toute configuration de $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$ est reliée à la configuration où toutes les arêtes sont fermées. En effet, pour toute arête e dans $\Lambda(l, h)$, et à toute instant de saut $(T_i(e))_{i \geq 0}$, on peut choisir de fermer e avec probabilité $1-p$ qui est strictement positive. Le théorème suivant décrit la probabilité invariante de Y .

Théorème 1. *Soit Z_n une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble E fini, irréductible de probabilité invariante π , soit $A \subset E$, nous définissons Z_n^A par sa probabilité de transition :*

$$p^A(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & y \in A, x \neq y \\ 0 & y \notin A \\ 1 - \sum_{y \neq x} p^A(x, y) & x = y \end{cases}$$

alors Z^A admet une probabilité invariante qui est $\frac{\mathbf{1}_A(\cdot)\pi(\cdot)}{\pi(A)}$ soit la probabilité invariante de la chaîne conditionnée à rester dans A .

Nous appliquons le théorème à $(Y_{\tau_i})_{i \geq 0}$ avec A l'ensemble des configuration qui satisfont $T \leftrightarrow B$. Nous obtenons la probabilité invariante qui est la

loi de la percolation Bernoulli de paramètre p conditionnée par l'événement $T \leftrightarrow B$.

Définition 1. Soit $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ un couplage défini précédemment, nous appelons une interface dans $\Lambda(l, h)$ notée $\mathcal{I}_t(l, h)$ l'ensemble aléatoire des arêtes qui sont ouvertes dans X_t et fermé dans Y_t :

$$\mathcal{I}_t(l, h) = \{e \in E : X_t(e) = 1, Y_t(e) = 0\}.$$

5 Condition aux bords

Nous allons étudier l'influence de l sur la loi de l'interface dans la boîte $\Lambda(l, h)$. Nous introduisons la notion de conditions aux bords. Pour instant, nous traitons uniquement le cas où seulement l varie. Nous fixons alors un entier h et nous introduisons l'ensemble $\{top, bot, null\}$. Nous notons $\partial^{in} \Lambda(l, h)$ le bord intérieur de $\Lambda(l, h)$, soit

$$\partial^{in} \Lambda(l, h) = \{x \in \Lambda(l, h), \exists y \notin \Lambda(l, h), \langle x, y \rangle \in E^2\}.$$

Une condition aux bord $\Pi_{l,h}$ est une application de ∂^{in} à $\{top, bot, null\}$ qui se définit en deux étapes. Nous posons d'abord la condition aux bords sur les bords horizontaux $T(l, h)$ et $B(l, h)$:

$$\forall t \geq 0, \forall x \in T \cup B, \Pi_t^{l,h}(x) = \begin{cases} top & x \in T \\ bot & x \in B \end{cases}$$

et nous appelons une condition aux bords nulle si

$$\forall y \in V(l, h) \setminus \{(\pm l, \pm h)\}, \Pi(y) = null.$$

Soit $t \geq 0$, pour un sommet x sur le bord vertical $V(l, h)$, nous déterminons $\Pi_{l,h}(x)$ à l'aide une boîte plus grande de condition aux bords nulle. Plus précisément, une condition aux bords $\Pi_{l,h}$ est une application tel qu'il existe $m > l$ un entier naturel et une boîte $\Lambda(m, h)$ de condition aux bords nulle qui contient la boîte $\Lambda(l, h)$ de configuration X qui vérifie :

$$\forall x \in V(l, h), \Pi_{l,h}(x) = \begin{cases} top & \Leftrightarrow x \xrightarrow[\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)]{X} T \\ bot & \Leftrightarrow x \xrightarrow[\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)]{X} B \\ null & \Leftrightarrow x \xrightarrow[\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)]{X} T \cup B \end{cases},$$

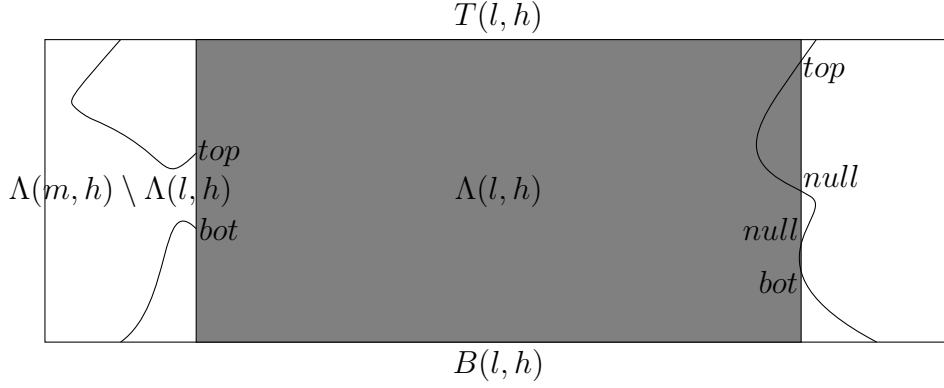


FIGURE 3 – Exemples d’une condition aux bords

la notation $x \xleftrightarrow{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)} T(\text{resp. } B)$ signifie que le sommet x est relié à $T(\text{resp. } B)$ uniquement par un chemin ouvert dont les arrêtes sont dans l’ensemble $(\Lambda(m, h) \setminus \Lambda(l, h)) \cup \partial^{in} \Lambda(l, h)$.

Nous pouvons aussi déterminer la condition aux bords d’une boîte $\Lambda(l, h)$ induite par une boîte $\Lambda(m, h)$ de configuration X avec une condition aux bords $\Pi_{m,h}$ non nulle. Soit x un sommet dans $V(l, h)$,

$$\Pi_{l,h}(x) = \begin{cases} top & \exists y \in \partial^{in} \Lambda(m, h), \Pi_{m,h}(y) = top, x \xleftrightarrow{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)}^X y \\ bot & \exists y \in \partial^{in} \Lambda(m, h), \Pi_{m,h}(y) = bot, x \xleftrightarrow{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)}^X y \\ null & \forall y \in \partial^{in} \Lambda(m, h), \Pi_{m,h}(y) \neq null, x \xleftrightarrow{\Lambda(m,h) \setminus \Lambda(l,h)}^X y \end{cases}.$$

Nous généralisons désormais l’événement $T \leftrightarrow B$ avec la condition aux bords. Nous disons $T \leftrightarrow B$ s’il existe une connexion entre un sommet x tel que $\Pi_{l,h}(x) = top$ (resp. bot) et $B(l, h)$ (resp. $T(l, h)$), de plus nous disons $T \leftrightarrow B$ s’il existe une connexion entre deux sommets x, y tels que $\Pi_{l,h}(x) = top, \Pi_{l,h}(y) = bot$.

6 Quelques résultats géométriques

Nous nous intéressons à la probabilité qu’une arrête fixée soit dans l’interface. Nous considérons désormais le régime surcritique, qui correspond au cas $p > \frac{1}{2}$ en dimension 2. Soit e_0 l’arrête qui joint $(0, 0)$ et $(1, 1)$, notre objectif

est de montrer que à t fixé la probabilité $\mathbb{P}(e_0 \in I_t^l)$ converge lorsque l tend vers l'infini.

Intuitivement, nous imaginons que l'influence d'une condition aux bords disparaît quand la taille de la boîte grandit.

Soit $\Lambda(l, h)$ une boîte dans \mathbb{Z}^2 , E^2 munis de deux conditions aux bords $\Pi_{l,h}$, $\Pi'_{l,h}$ qui diffèrent à un seul sommet v_0 . Nous considérons $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de percolation dynamique dans $\Lambda(l, h)$ et deux couplage (X, Y) et (X, Y') conditionnés par $T \leftrightarrow B$ avec les deux conditions aux bords.

Proposition 1. *Soit $\theta > 0$ premier instant où e_0 diffère dans les deux configurations, alors il existe un entier aléatoire $N \in \mathbb{N}$, une suite d'arêtes aléatoires e_1, \dots, e_N et des instants aléatoires $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = t$ qui vérifient les conditions suivantes :*

1. *à l'instant θ_1 , e_1 diffère dans les deux configurations. Il existe deux chemins fermés p_1^*, ρ_1^* disjoints qui relient e_1^* et le dual du bord contenant v_0 ;*
2. *pour tout $i > 1$, l'arête e_i devient différente à θ_i et il existe deux chemins fermés γ_i^*, ρ_i^* disjoints qui relient e_{i-1}^* et e_i^* .*
3. *pour tout $i \geq 1$, à l'instant θ_i , il existe un ensemble d'arêtes fermées S_i qui sépare $T(l, h)$ et $B(l, h)$ et un chemin fermé c_i^* disjoint de S_i tel que $c_i^* \subset (\gamma_i^* \cup \rho_i^*)$ et $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^* \cup \rho_i^*|$*

Démonstration. Nous notons $\tau_0 = 0$, $\tau_i = \inf\{s > \tau_{i-1}, \exists e \in \Lambda(l, h), Y_{s-}(e) = Y'_{s-}(e), Y_s(e) \neq Y'_s(e)\}$. Nous considérons maintenant la première arête e_1 qui devient différente dans les deux boîtes. Par symétrie, nous pouvons supposer que v_0 soit dans le bord gauche et que e_1 soit fermée dans Λ'_l .

Cette arête devient différente car il si elle était ouverte dans la configuration Y' , il existerait un chemin ouvert entre T et B et pas dans la configuration Y . Il existe alors un chemin ouvert entre e_1 et le sommet v_0 au bord. Sans perte de généralité, nous supposons que $\Pi'_l(v_0) = T$, il existe alors dans Y_{τ_1} et Y'_{τ_1} un chemin identique qui relie une extrémité de e_0 et B . Nous considérons maintenant le cluster ouvert de ce chemin dans la configuration Y'_{τ_1} , il n'est pas connecté à B par la condition $T \leftrightarrow B$ dans Y'_{τ_1} , de plus, il n'est pas connecté à T car s'il l'était, $T \longleftrightarrow B$ dans la configuration Y_{τ_1} où e_0 est ouverte. Il existe donc dans le graphe dual un contour fermé C_1^* qui sépare ce cluster de T et de B . L'arête e_1^* sépare donc ce contour en deux parties disjointes (voir Figure 4).

Nous considérons maintenant une arête e_i qui devient différente à cause des

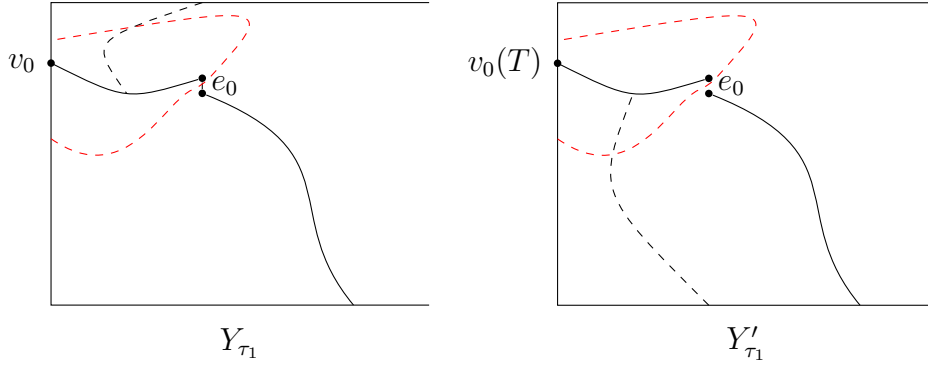


FIGURE 4 – La configuration dans les deux boîtes quand e_1 devient différente et le contour C_1 en rouge

autres arêtes qui sont déjà différentes. Par symétrie, nous supposons que e_i est ouverte dans Y_{τ_i} et fermée dans Y'_{τ_i} et que dans les deux boîtes et e_i est reliée à B .

Nous pouvons choisir une arête e_j avec $j < i$ qui est devenue différente avant τ_i et qui est restée différente entre τ_j et τ_i . En plus, il existe un chemin ouvert qui les relie. En effet, nous considérons le cluster ouvert C_i dans Y_{τ_i} du sommet qui est séparé de B par l'arête e_i . Nous considérons R_i l'ensemble suivant :

$$R_i = \left\{ e = \langle x, y \rangle, x \in C_i, y \notin C_i, y \leftrightarrow T \cup \Pi_{l,h}^{-1}(top), Y_{\tau_i}(e) \neq Y'_{\tau_i}(e) \right\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide, car $e_i \xleftrightarrow{Y'_{\tau_i}} T$, mais pas dans Y_{τ_i} , donc il existe un tel $\langle x, y \rangle$ sur le bord extérieur de C_i qui diffère dans les deux configurations. Nous pouvons ordonner cet ensemble avec l'ordre lexicographique de \mathbb{Z}^2 et nous prenons e_j la première arête de R_i .

Comme pour la première arête e_0 , il y a un chemin ouvert qui relie e_i et e_j . Sans perte de généralité, nous supposons que e_j est reliée à T . Nous pouvons considérer le cluster ouvert du chemin c entre e_i, e_j dans Y'_{τ_i} arrêté à e_j et e_i . Ce cluster n'est pas connecté à T car e_i est ouverte, il n'est pas connecté à B dans Y'_{τ_i} car e_j est ouverte. Nous pouvons donc trouver un ensemble S_i d'arêtes fermées qui sépare ce chemin de T dans Y_{τ_i} et un ensemble S'_i qui le sépare de B dans Y'_{τ_i} . Nous pouvons supposer que $S_i \cap S'_i \neq \emptyset$, sinon, nous avons deux ensembles qui séparent T et B dans $\Lambda(l, h)$ qui est de probabilité inférieure à $e^{-\lambda l}$ et nous avons le résultat voulu. Nous pouvons désormais considérer un ensemble S^* formé par des arêtes qui sont soit fermées dans l'une des deux configurations et qui sépare le chemin c de T et de B . Quitte

à prendre l'ensemble minimal, nous pouvons supposer que S^* est un circuit qui relie e_i et e_j . Les deux arêtes e_i et e_j coupent cet ensemble en deux chemins fermés γ_i^*, ρ_i^* .

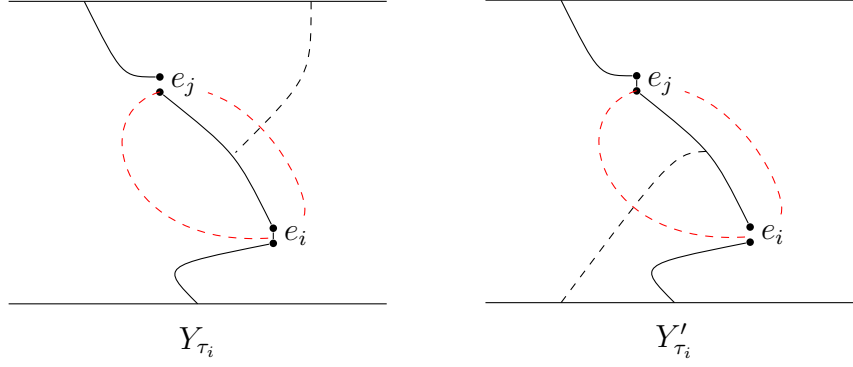


FIGURE 5 – La configuration dans les deux boîtes quand e_i devient différente avec le contour C_i en rouge

Enfin, pour obtenir la suite $(e_i)_{i \geq 1}$ dans l'énoncé, nous partons de l'instant t pour trouver l'arête qui a causé la différence à e_0 , ensuite nous répétons ce procédé à l'instant où cette arête est devenue différente jusqu'à arriver au bord. Comme chaque ouverture ou fermeture d'une arête est donnée par une horloge exponentielle, il y a presque sûrement un nombre fini d'arêtes qui sont devenues différentes avant t . Nous pouvons donc trouver une suite finie d'arêtes e_0, e_1, \dots, e_N avec $e_N = e_0$ et des instants $\theta_1 < \dots < \theta_N = t$ qui vérifient les deux premiers points de l'énoncé.

Nous considérons le contour fermé formé par γ_i^1 et γ_i^2 , la condition $T \leftrightarrow B$ impose qu'il existe un ensemble séparant K_i qui contient e_i dans la configuration où elle est fermée. Quitte à ouvrir les arêtes de K_i qui ne sont pas pivotes, nous pouvons supposer K_i minimal. Nous considérons le dual de K_i , qui est un chemin fermé simple de gauche à droite. Nous pouvons numéroté les arêtes de K_i de la façon suivante :

- nous posons $e_i^* = k_0$;
- si e_i^* est horizontale, nous posons k_{-1} l'arête qui partage le sommet gauche de e_i^* et k_1 l'arête qui partage le sommet droite. S'il e_i^* est verticale, nous posons k_{-1} l'arête en bas et k_1 celle en haut.
- Nous nous éloignons de e_i , jusqu'à avoir numéroté toutes les arêtes. Dans la direction négative, nous diminuons l'indice de 1 à chaque pas et nous augmentons de 1 par pas dans la direction positive.

Nous considérons maintenant l'arête minimale et l'arête maximale de l'ensemble $K_i \cap (\gamma_i^1 \cup \rho_i^2)$ que nous notons k_{min} et k_{max} . Les deux arêtes k_{min} et k_{max} coupe K_i en 3 parties disjointes : C_i^g un chemin entre le bord gauche et k_{min} ; C_i^d un chemin entre le bord droite et k_{max} ; l'union d'un chemin entre k_{min} et k_{max} et ces deux arêtes. De plus, les deux sommets qui séparent ces trois parties coupent le contour $\gamma_i^1 \cup \rho_i^2$ en deux chemins disjoints c_i^1 et c_i^2 . Quitte à échanger les numéros, nous supposons que $|c_i^1| \geq |c_i^2|$.

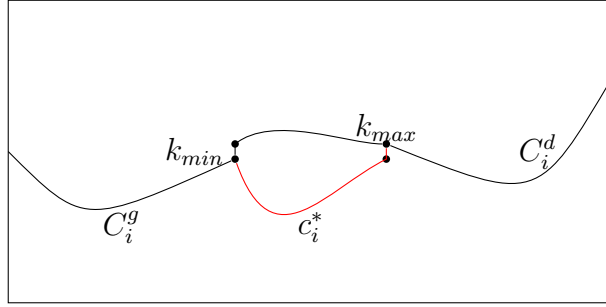


FIGURE 6 – construction d'un chemin fermé disjoint d'un cut

Enfin nous posons $S_i^* = C_i^g \cup C_i^d \cup c_i^2$ un chemin fermé du bord gauche au bord droite dans le graphe dual et $c_i^* = c_i^1$. Nous posons S_i le dual de S_i^* qui est un cut. Or $|c_i^1| \geq |c_i^2|$, nous obtenons $|c_i^*| \geq \frac{1}{2}|\gamma_i^1 \cup \rho_i^2|$. Par construction, S_i et c_i^* sont disjoints. \square

7 Quelques inégalités préliminaires

nous allons énoncer quelques inégalités utiles pour montrer la convergence en loi de l'interface quand la taille de la boîte tend vers infini. Nous commençons par une inégalité de type BK adaptée au problème. Nous commençons par généraliser la notion de l'occurrence disjointe.

Définition 2. Soit $\Lambda(l, h)$ une boîte de longueur l , soit A l'événement $x \longleftrightarrow y$ à l'instant s , B l'événement $u \longleftrightarrow v$ à l'instant t , soit $K(\omega) = \{e : e = 1\}$, nous définissons l'occurrence disjointe de A et B noté par $A \circ B$ par :

- si $s = t$, $A \circ B = \{\omega : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B, K(\omega_1) \cap K(\omega_2) = \emptyset, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(\omega)\}$;
- si $s < t$, $A \circ B = \{\omega : \exists \omega_1 \in A, \exists \omega_2 \in B, K(\omega_1) \cup K(\omega_2) \subset K(\omega), \forall e \in (\omega_1) \cap K(\omega_2), \exists r \in [s, t], e(r) = 1\}$.

Nous énonçons l'inégalité de BK pour la percolation dynamique :

Proposition 2. Soit $\Lambda(l, h)$ une boîte de longueur l , $0 < s \leq t$, soit A l'événement $x \longleftrightarrow y$ à l'instant s , B l'événement $u \longleftrightarrow v$ à l'instant t , alors $P(A \circ B) \leq P(A)P(B)$ quand p est assez proche de 1.

Démonstration. Pour le premier cas, c'est l'inégalité de BK classique. Nous traitons uniquement le deuxième cas où les instants sont différents. Soit $\Gamma = \{f : [s, t] \rightarrow \{0, 1\} \text{ càdlàg}\}^{|\Lambda(l, h)|}$. Nous introduisons deux espaces de probabilité identiques $S_1 = (\Gamma_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $S_2 = (\Gamma_2, \mathcal{F}_2, P_2)$, nous définissons S l'espace produit de S_1, S_2 . Nous écrivons $x \times y$ un point de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Nous notons $A' = A \times \Gamma_2$, $B'_k = \{x \times y : (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_{|\Lambda(l, h)|}) \in B\}$. Nous notons P_{12} la probabilité produit de P_1, P_2 . Nous avons bien que $P(A \circ B) = P_{12}(A' \circ B'_0)$ et $P_{12}(A' \circ B'_{|\Lambda(l, h)|}) = P(A)P(B)$. Nous montrons maintenant :

$$\forall k > 0, P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_{12}(A' \circ B'_k)$$

.

Nous considérons $x \times y \in A' \circ B'_{k-1}$, donc $x \in A$ et $(y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, \dots, x_{|\Lambda(l, h)|}) \in B$.

Nous considérons d'abord le cas où e_k n'est pas pivot pour B . Nous vérifions facilement $x \times y \in A' \circ B'_k$.

Nous considérons maintenant l'arête e_k est pivot pour A et B . Nous devons avoir $x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0$ pour $A \circ B_{k-1}$. Pour $A \circ B_k$, il faut $x_k(s) = 1$ et $y_k(t) = 1$. Nous montrons que

$$P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1).$$

Nous considérons la première instant de saut de x_k , soit

$$T = \inf\{r > s, x_k(r) = 0\}$$

et nous conditionnons la première probabilité par $\{T = r\}$, et nous utilisons la propriété de Markov forte qui donne :

$$\begin{aligned} & P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \\ &= E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t}] \\ &= E [E[\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{x_k(t)=1} \mathbf{1}_{T < t} | T = r]] \\ &= E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T=r} E[\mathbf{1}_{x_k(t)=1} | T = r]] \\ &= E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t} P_0(x'_k(t-r) = 1)] \\ &\leq E [\mathbf{1}_{x_k(s)=1} \mathbf{1}_{T < t}] P(y_k(t-r) = 1) \\ &= P(x_k(s) = 1, T < t) P(y_k(t) = 1) \\ &\leq P(x_k(s) = 1, y_k(t) = 1). \end{aligned}$$

Avec x'_k le processus démarré à T . Nous avons $P_0(x'_k(t-r) = 1) \leq P(y_k(t-r) = 1)$ car $\{x_k(t-r) = 1\}$ est un événement croissant. Nous avons $P(y_k(t-r) = 1) = P(y_k(t) = 1)$ car y_k est stationnaire à l'équilibre.

Il reste le cas e_k pivot pour B mais pas pour A . Nous avons maintenant $x_k(t) = 1$, nous posons

$$x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, f_k, x_{k+1}, \dots, x_{|\Lambda(l,h)|})$$

$$y' = (y_1, \dots, y_{k-1}, x'_k, y_{k+1}, \dots, y_{|\Lambda(l,h)|})$$

où $f_k : [s, t] \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction càdlàg et x'_k une copie indépendante de x_k . Nous avons $x' \times y' \in A' \circ B'_k$, et $P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_k; e_k \text{ pivot } B) = \frac{1}{p} P_{12}(x \times y \in A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ pivot } B)$.

Nous montrons maintenant $P(e_k \text{ pivot } A, B) \leq P(e_k \text{ pivot } B)$ quand p proche de 1. En effet,

$$\begin{aligned} P(e_k \text{ pivot } A, B) &\leq P(x_k(s) = 1, x_k(t) = 1, \exists r \in [s, t], x_k(r) = 0) \\ &\leq 1 - \exp(-(1-p)(t-s)) \end{aligned}$$

$$P(e_k \text{ pivot } B) \geq P(e_k \text{ ne change pas d'état}) \geq \exp(-(t-s))$$

Pour p assez proche de 1, nous avons l'inégalité demandée. Nous avons donc

$$\begin{aligned} P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) &= P_{12}(A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ pivot } A, B) + P_{12}(A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ pivot } B) \\ &\quad + P_{12}(A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ non pivot}) \\ &\leq p P_{12}(A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ pivot } A, B) + \frac{1}{p} P_{12}(A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ pivot } B) \\ &\quad + P_{12}(A' \circ B'_{k-1}; e_k \text{ non pivot}) \\ &\leq P_{12}(A' \circ B'_k; e_k \text{ pivot } A, B) + P_{12}(A' \circ B'_k; e_k \text{ pivot } B) \\ &\quad + P_{12}(A' \circ B'_k; e_k \text{ non pivot}) \\ &\leq P_{12}(A' \circ B'_k) \end{aligned}$$

Avec une récurrence sur k , nous avons l'inégalité demandée dans la proposition. \square

Nous avons déjà qu'un chemin fermé admet la propriété de décroissance exponentielle en fonction de son cardinal dans la phase surcritique, nous montrons maintenant une propriété similaire pour la percolation dynamique sur son comportement temporel :

Proposition 3. Soit $p > \frac{1}{2}$, c un chemin fermé à l'instant s de cardinal m , soit $P_{c,c'}$ la probabilité qu'il ne soit pas disjoint d'un chemin c' à l'instant $t > s$, nous avons $P_{c,c'} \leq me^{-\gamma(t-s)}$ avec γ une constante indépendante de c et de c' .

Démonstration. nous considérons une arête (x, y) fermé et une modification locale M pour l'ouvrir suivante : nous fermons deux arêtes perpendiculaires de même côté qui contiennent respectivement un sommet x, y et l'arête qui relie ces deux arêtes ; ensuite nous ouvrons l'arête (x, y) . Chaque étape de la modification est déterminée par une horloge exponentielle et elle respecte la condition de $T \leftrightarrow B$. Entre $[0, 1]$, cette modification a une probabilité positive r pour se réaliser. Nous en déduisons qu'il existe une constante γ pour qu'entre $[s, t]$, la probabilité que cette modification ne se réalise pas est inférieur à $e^{-\gamma(t-s)}$.

Nous considérons maintenant deux arêtes e, e' voisines, nous pouvons choisir les arêtes que nous modifions pour que e, e' soient modifiées indépendamment. En effet, si les e, e' sont colinéaires alors nous effectuons les modifications à différents côtés ; si e, e' sont perpendiculaires, alors nous effectuons la modification à l'extérieur de l'angle formé par e, e' , voir figure 7.

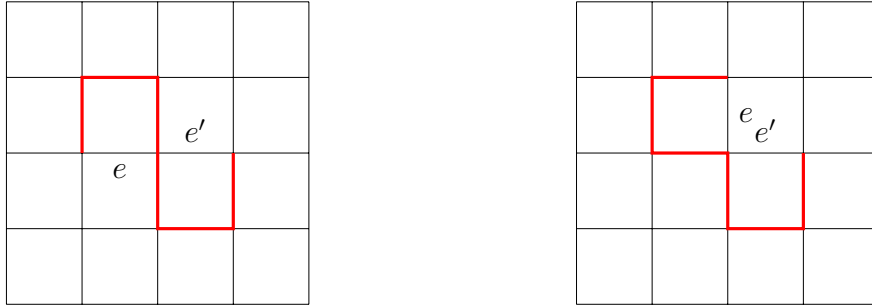


FIGURE 7 – deux arêtes voisines et les arêtes à modifier en rouge

Nous avons donc

$$\begin{aligned} P(c \amalg c') &\geq P(\forall e \in c, M \text{ se réalise sur } e) \\ &\geq (1 - e^{-\gamma(t-s)})^m \geq 1 - me^{-\gamma(t-s)} \end{aligned}$$

□

Nous introduisons la notion de space-time chemin, en prolongeant la connexion dans le temps, c'est-à-dire si une arête $e = (x, y)$ reste ouverte (resp. fermée) entre s et t alors $(x, s) \longleftrightarrow (y, t)$ par un space-time chemin ouvert (resp. fermé).

Nous montrons aussi une décroissance exponentielle avec les space-time chemin.

Proposition 4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $p > \frac{1}{2}$, soit $A(n, t)$ l'événement $(O, 0) \longleftrightarrow (n\mathbf{e}_1, t)$ par un space-time chemin fermé ou $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, alors $\exists \gamma(p, t)$, une constante qui dépend de p, t tel que $P(A(n, t)) \sim e^{-\gamma(p, t)n}$.*

Démonstration. Nous montrons cette équivalence par le lemme sous-additif. En fait,

$$\begin{aligned} P((O, 0) \longleftrightarrow ((n + m)\mathbf{e}_1, s + t)) &\geq P((O, 0) \longleftrightarrow (n\mathbf{e}_1, s))P((n\mathbf{e}_1, s) \longleftrightarrow ((m + n)\mathbf{e}_1, s + t)) \\ &\leq P((O, 0) \longleftrightarrow (n\mathbf{e}_1, s))P((O, 0) \longleftrightarrow (m\mathbf{e}_1, t)) \end{aligned}$$

Car nous avons l'invariance par translation. Nous concluons avec le lemme sous additif. \square

8 La probabilité d'une influence du bord

Nous montrons maintenant que la probabilité d'avoir une influence du bord sur une arête à l'intérieur de la boîte.

Théorème 2. *Soit $p \geq \frac{1}{2}$, \bar{e} l'arête au centre de la boîte $\Lambda(l, h), \Lambda(l, h)'$ décrit dans la proposition 1, il existe une constante $\lambda > 0$ tel que $P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) \leq e^{-\lambda} P(T \leftrightarrow B \text{ entre } [0, t])$.*

Démonstration. Nous utilisons les notations de la proposition 1 et son corollaire. D'après la proposition 1, nous savons qu'il existe une suite d'arêtes e_1, e_n qui sont reliées l'une après l'autre à différents instants. Nous notons x_i, y_i les extrémités de c_i^* chemin fermé dans le graphe dual et de C_i le cut, nous notons aussi k_i le cardinal de $p_i^1 \cup p_i^2$. Nous séparons la suite en différentes sous suites selon l'indépendance, plus précisément, si c_j^* et c_{j+1}^* est de l'occurrence disjointe, alors nous coupons la suite à l'indice j . Ainsi, nous obtenons les indices j_1, \dots, j_r telles que $\forall 1 \leq u \leq r, c_{j_u}^*$ et $c_{j_{u+1}}^*$ sont disjoints, $\forall j_k \leq v \leq j_{k+1}, c_k^*$ et c_{k+1}^* ne sont pas disjoints.

$$\begin{aligned}
P(Y(\bar{e}) \neq Y'(\bar{e})) &= P(\exists e_1, \dots, e_n, \forall i, \exists p_i^1, p_i^2, e_{i-1} \xleftrightarrow{p_i^1, p_i^2} e_i) \\
&\leq P(\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, c_1^*, \dots, c_n^*, C_1, \dots, C_n) \\
&\leq \sum_{j_1, \dots, j_r} \prod_{1 \leq k \leq r} P \left(\begin{array}{c} \exists x_{j_{k-1}+1}, \dots, x_{j_k}, \\ y_{j_{k-1}+1}, \dots, y_{j_k}, \\ c_{j_{k-1}+1}, \dots, c_{j_k}^*, \\ C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}, \\ \forall j_{k-1} + 1 \leq m \leq j_k, x_m \xleftrightarrow{c_m^*} y_m, c_m^* \circ C_m \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Nous utilisons la proposition 4 pour majorer chaque terme du produit. Or les $\forall j_{k-1} + 1 \leq c_m^* \leq j_k$, les c_m^* ne sont pas d'occurrence disjointe, nous avons un space-time chemin σ_k qui relie $x_{j_{k-1}+1}$ et y_{j_k} . Donc elle est bornée par

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut})$$

car $x_{j_{k-1}+1}$ et y_{j_k} sont dans un carré de taille inférieure à $|\sigma_k|$. Or $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x > 1, x^4 e^{-x} \leq e^{-\delta x}$, nous avons

$$|\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, \theta_{j_k} - \theta_{j_{k-1}+1})|\sigma_k|} \leq |\sigma_k|^4 e^{-\gamma(p, t)|\sigma_k|} \leq e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|}$$

Nous partons de \bar{e} , $x_{j_{n-1}+1}$ est de distance inférieure à $2|\sigma_r|$ de \bar{e} , nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{1=j_1 < \dots < j_r=n} \prod_{1 \leq k \leq r} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} P(\exists C_{j_{k-1}+1}, \dots, C_{j_k} \text{ cut}) \\
&\leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4|\sigma_r|^2 e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\
&\leq P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut}) \sum_{1=j_1 < \dots < j_{r-1}} 4e^{-\delta^2 \gamma(p, t)|\sigma_r|} \prod_{1 \leq k \leq r-1} e^{-\delta \gamma(p, t)|\sigma_k|} \\
&\leq 4^r e^{-\delta^2 \gamma(p, t) \sum_{i=1}^r |\sigma_k|} P(\exists C_1, \dots, C_n \text{ cut})
\end{aligned}$$

Enfin, r est borné par une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $l^2(1-p)t$, nous avons le résultat. \square