Funzioni

Eugenio Animali

14 09 2022

Contents

1 Studio del Dominio

Dalle Condizioni di Esistenza troviamo il Dominio:

$$\frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow h(x) \neq 0 \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{g(x)} \rightarrow g(x) \geq 0 \text{ se } n \text{ pari} \tag{2}$$

$$\log_{f(x)}(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

E iniziamo il grafico mettendo nel grafico i punti di discontinuitá.

- Riga verticale trattegiata per discontinuitá
- zone oscurate per zone escluse dal dominio

1.1 Simmetria

Se il Dominio é simmetrico, la funzione potrebbe essere Pari o Dispari. Studio $f(-x)$:

$$= f(x) \rightarrow \text{ Pari}$$
$$= -f(x) \rightarrow \text{ Dispari}$$

2 Intersezione con Assi

Per definire il segno della funzione, dobbiamo definire delle zone dove la funzione rimane o sopra o sotto all'asse x, trovando i punti di confine tra queste zone. Una funzione puó cambiare segno solo in due casi:

1. Funzione definita a tratti $\rightarrow$ basta riprendere i confini definiti dalla funzione stessa
2. passando per $I_x \rightarrow y = 0$

Tanto vale studiare anche $I_y \rightarrow x = 0$.

3 Studio del Segno

Ora possiamo studiare il segno. Ponendo $f(x) \geq 0$, troviamo la gamma di valori x dove la funzione é positiva o uguale a zero, e possiamo oscurare in quella gamma tutta la zona sotto l'asse x, perché sappiamo che $f(x)$ non é negativa lí. Allo stesso modo possiamo oscurare la zona positiva, lá dove $f(x)$ é negativa.

4 Comportamento agli Estremi

Vediamo come si comporta $f(x)$ in ogni confine nel Dominio. Per confini definiti (dove il dominio presenta una parentesi quadra), basta sostituire il valore di x per trovare il punto di confine.

Per confini non definiti (dove il Dominio presenta una parentesi tonda) e per gli estremi infiniti, dobbiamo fare il limite per x.

4.1 Continuitá

$$y = f(x) \text{ é continua in } x_0 \in D \text{ se } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.1.1 3 teoremi sulle funzioni continue

1. Teorema di Weierstrass

   Se f é una funzione limitata e chiusa, esitono punti massimo e minimo.

2. Teorema dell'esistenza degli zeri

   Se ho una funzione che ha i due estremi di segno opposto, la funzione passa per l'asse x

3. Teorema dei valori medi

   Una fuzione chiusa e limitata assume almeno una volta tutti i valori intermedi tra il massimo e il minimo.

4.2 Discontinuitá

Quando si distacca la funzione, parliamo di discontinuitá. Vi sono 3 specie da differenziare seguendo queste regole:

1. la funzione esiste ma salta verticalmente. - prima specie
2. la funzione tende ad infinito da una o due parti. - seconda specie
3. c'é un buco nella funzione. basta dare un valore al buco per eliminare la discontinuitá. - Eliminabile

4.3 Forme Indeterminate

Le Forme Indeterminate sono 7: $[+\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, 0^0, \infty^0, 1^\infty]$

Si risolvono in diversi modi:

- Per i polinomi con x che tende ad infinito, si estrae la massima potenza di x, e tutte le altre potenze di x tenderanno a zero.
- Per $\frac{0}{0}$, bisogna estrarre un fattore che sta nel numeratore e nel denominatore.
- Per $\frac{\infty}{\infty}$, si usa la legge di De L'Hopital per cui:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.4 Infiniti e Infinitesimi

$f(x)$ é infinito per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

$f(x)$ é infinitesimo per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

4.4.1 Gerarchia degli Infiniti

per $x \to +\infty$ e $a > 0$:

$$log_a x < x^\alpha < a^x$$

4.4.2 Ordine di Infinitesimi

Studio $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Se viene 0, $f(x)$ arriva prima.

Se viene n, hanno lo stesso ordine.

Se viene ∞, $g(x)$ arriva prima e ha ordine superiore.

4.5 Limiti Notevoli

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\sin x < x < \tan x$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

per $a < b < c$, se a e c tendono allo stesso numero,
anche b tenderá allo stesso numero.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}$$

4. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

4.6 Asintoti

4.6.1 Asintoto Orizzontale

Cerchiamo un asintoto orizzontale.

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

4.6.2 Asintoto Obliquo

Se non c'é orizzontale, possiamo cercare uno obliquo.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

5 Studio Della Derivata Prima

5.1 Punti di Non Derivabilitá

Bisogna studiare punti di non derivabilitá solo dove f é continua, perché non ha senso studiare la derivabilitá dove f non esiste. Studiamo i limiti destro e sinistro di ogni confine incluso nella definizione a tratti della derivata:

1. Flesso a Tg Verticale
   la tangente verticale non ha coefficiente angolare. I limiti destro e sinistro della derivata vanno a $\pm$ infinito
2. Cuspide
   spigolo di curve per cui i limiti destro e sinistro vanno uno a + infinito e uno a - infinito
3. Punto Angoloso
   limiti destro e sinistro sono diversi e almeno uno non é infinito. si chiama cosí perché ha un angolo

Per trovare di quale si tratta facciamo i limiti sinistro e destro della derivata.

5.2 Andamento

$$\text{studio } f'(x) \geq 0 \text{ per trovare:}$$
$$f'(x) > 0 \rightarrow \text{ Funzione Crescente}$$
$$f'(x) < 0 \rightarrow \text{ Funzione Decrescente}$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{ Punto Stazionario}$$

1. Cresce, Punto Stazionario, Decresce→ Massimo Relativo (M)
2. Decresce, Punto Stazionario, Cresce→ Minimo Relativo (m)
3. Decresce, Punto Stazionario, Decresce→ Flesso Orizzontale
4. Cresce, Punto Stazionario, Cresce→ Flesso Orizzontale

6 Studio della Derivata Seconda

$$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Concavitá verso l'Alto}$$
$$f''(x) < 0 \rightarrow \text{Concavitá verso il Basso}$$
$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{Flesso (Cambio di Concavitá)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sin x} = 1$$