integrali

Eugenio Animali

March 22, 2023

1 Integrali indefiniti

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2 Integrali elementari

$$\int dx = x + c$$
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ eccetto } \alpha = -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + x$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

3 Integrale della Funzione Composta

Se nella funzione integranda trovo una funzione e la sua derivata, posso usare la regola della funzione composta. Sapendo che il differenziale é

$$df(x) = f'(x)dx$$

quindi:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)d(f(x)) = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Ció vale anche se $f(x)$ é interna ad una funzione $g(f(x))$ piú complessa. Basta manipolare la funzione integranda finché presenta una $f(x)$ che corrisponda ad una $f'(x)$.

4 Integrazione per Sostituzione

Particolarmente utile nei seguenti casi:

1. Radici
2. Esponenziali
3. Goniometria

Il metodo consiste nel sostituire x per un'altra funzione t scelta da me, per togliere parti complicate della funzione. per passare da x a t, devo considerare l'effetto ché avrá su dx:

$$x = g(t)$$
$$dx = g'(t)dt$$

Esempio:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

Pongo:

$$t = \sqrt{x^2 - 9}$$
$$x = \sqrt{t^2 + 9}$$
$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 9}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}}$$
$$dx = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} dt$$

Quindi:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dt = \int \frac{\sqrt{t^2 + 9}}{t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} dt$$
$$= t + c = \sqrt{x^2 - 9} + c$$

5 Integrazione per Parti

Quando ho una funzione facilmente derivabile e una facilmente integrabile.

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Esempio:

$$\int x e^x dx$$

Pongo:

$$f(x) = x, f'(x) = 1$$
$$g(x) = e^x, g'(x) = e^x$$

Quindi:

$$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

6 Integrale con Frazione di Polinomi

Posso separare la mia frazione in parti per renderla piu facile da gestire

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

6.1 Integrale con Denominatore con $\Delta = 0$

Se il denominatore e un quadrato, si separa in parti nel seguente modo:

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 9} dx$$
$$\frac{x+5}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{A(x-3) + B}{(x-3)^2}$$
$$\frac{x+5}{(x-3)^2} = \frac{Ax - 3A + B}{(x-3)^2}$$

Visto che sto cercando A e B non e un problema dividere per $(x-3)^2$ e risolvere. Cosi separo il problema in parti piu semplici.