

Integrali

Eugenio Animali

March 10, 2023

1 Integrali indefiniti

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2 Integrali elementari

$$\begin{aligned}\int dx &= x + c \\ \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ eccetto } \alpha = -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + c\end{aligned}$$

3 Integrale della Funzione Composta

Se nella funzione integranda trovo una funzione e la sua derivata, posso usare la regola della funzione composta. Sapendo che il differenziale é

$$f(x) = f'(x)dx$$

quindi:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)d(f(x)) = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Ciò vale anche se $f(x)$ é interna ad una funzione $g(f(x))$ piú complessa. Basta manipolare la funzione integranda finché presenta una $f(x)$ che corrisponda ad una $f'(x)$.

4 Integrazione per Sostituzione

Particolarmente utile nei seguenti casi:

1. Radici
2. Esponenziali
3. Goniometria

Il metodo consiste nel sostituire x per un'altra funzione t scelta da me, per togliere parti complicate della funzione. per passare da x a t , devo considerare l'effetto che avrà su dx :

$$\begin{aligned}x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt\end{aligned}$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{1+2\sqrt{x}} dx$$

Pongo:

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{x} \\ x &= t^2 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{1+2t} 2t dt \\&\int \frac{2t+1-1}{2t+1} dt \\&\int \left(1 - \frac{1}{2t+1}\right) dt \\&t - \ln|2t+1| \\&\sqrt{x} - \ln|2\sqrt{x}+1|\end{aligned}$$

dare esempio migliore

Esempio:

$$\int \sqrt{9-x^2} dx$$

Pongo:

$$t = \sqrt{9-x^2}$$