

integrali

Eugenio Animali

May 17, 2023

1 Integrali indefiniti

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2 Integrali elementari

$$\begin{aligned}\int dx &= x + c \\ \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ eccetto } \alpha = -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + c \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + c\end{aligned}$$

3 Integrale della Funzione Composta

Se nella funzione integranda trovo una funzione e la sua derivata, posso usare la regola della funzione composta. Sapendo che il differenziale é

$$df(x) = f'(x)dx$$

quindi:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)d(f(x)) = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Ci   vale anche se $f(x)$    interna ad una funzione $g(f(x))$ pi   complessa. Basta manipolare la funzione integranda finch   presenta una $f(x)$ che corrisponda ad una $f'(x)$.

4 Integrazione per Sostituzione

Particolarmente utile nei seguenti casi:

1. Radici
2. Esponenziali
3. Goniometria

Il metodo consiste nel sostituire x per un'altra funzione t scelta da me, per togliere parti complicate della funzione. per passare da x a t , devo considerare l'effetto che avrà su dx :

$$\begin{aligned}x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt\end{aligned}$$

Esempio:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

Pongo:

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{x^2 - 9} \\ x &= \sqrt{t^2 + 9} \\ g'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 9}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} \\ dx &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} dt\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dt &= \int \frac{\sqrt{t^2 + 9}}{t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} dt \\ &= t + c = \sqrt{x^2 - 9} + c\end{aligned}$$

5 Integrazione per Parti

Quando ho una funzione facilmente derivabile e una facilmente integrabile.

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Esempio:

$$\int x e^x dx$$

Pongo:

$$\begin{aligned}f(x) &= x, f'(x) = 1 \\ g(x) &= e^x, g'(x) = e^x\end{aligned}$$

Quindi:

$$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

6 Integrale con Frazione di Polinomi

Posso separare la mia frazione in parti per renderla più facile da gestire

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

6.1 Integrale con Denominatore con $\Delta = 0$

Se il denominatore è un quadrato, si separa in parti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2-6x+9} dx \\ \frac{x+5}{(x-3)^2} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \\ &= \frac{A(x-3) + B}{(x-3)^2} \\ \frac{x+5}{(x-3)^2} &= \frac{Ax - 3A + B}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Visto che sto cercando A e B non è un problema dividere per $(x-3)^2$ e risolvere. Così separo il problema in parti più semplici.

6.2 Δ negativo

Il primo obiettivo è di avere al denominatore solo un numero.

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+9} dx$$

prima provo a trasformare il numeratore per diventare la derivata del denominatore:

$$\frac{d(x^2 - 4x + 9)}{dx} = 2x - 4$$

Quindi posso usare la prima regola di integrazione (funzione composta):

$$\begin{aligned} \int \frac{3(x + \frac{1}{3})}{x^2 - 4x + 9} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2(x + \frac{1}{3})}{x^2 - 4x + 9} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{2}{3} - 4 + 4}{x^2 - 4x + 9} dx = \frac{3}{2} \left[\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 9} dx + \int \frac{\frac{14}{3}}{x^2 - 4x + 9} dx \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[\ln(x^2 - 4x + 9) + \frac{14}{3} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 9} dx \right] \end{aligned}$$

Ora per risolvere la seconda parte, posso evidenziare il quadrato del binomio:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 4x + 9} dx &= \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4) + 5} dx \\ &= \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\frac{(x-2)^2}{5} + 1} dx \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}t &= \frac{x - 2}{\sqrt{5}} \\ \int \frac{1}{1 + t^2} dt &= \arctan t\end{aligned}$$

studiamo:

$$dx = \sqrt{5} dt$$

Quindi:

$$\frac{1}{5} \int \frac{1}{t^2 + 1} \sqrt{5} dt$$

6.3 polinomi alla 3a potenza

Utilizza ruffini per trovare fattori del denominatore e separa così il problema:

$$\frac{A}{fattore_1} + \frac{Bx + C}{fattore_2}$$

dove fattore 2 sta alla 2da potenza

7 Integrali Definiti

il problema delle aree e quello di determinare l'area sotto una curva delimitata. per risolverlo posso dividere l'intervallo x in tanti dx e fare una somma infinita:

$$\int_a^b f(x) dx$$

7.1 teorema di torricelli-barrow

data una integrale definita in questo modo:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

allora la sua derivata e:

$$F'(x) = f(x)$$

vediamo:

$$\begin{aligned}F(a) &= 0 + c \\F(b) &= \int_a^b f(x)dx + c \\ \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}\int_4^9 (3\sqrt{x} + 2x)dx &= \left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

8 valore medio del grafico

l'area sotto al grafico tra a e b , anche per una curva, sarà uguale all'area di un rettangolo con base ab , e altezza che arriva in un qualche punto della curva tra a e b

9 area tra due curve

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

per trovare l'area tra varie curve, si segue la linea di contorno della forma, aggiungendo o sottraendo le integrali definite in base a se la linea segue verso destra o verso sinistra

10 solidi di rotazione

ruotando una curva attorno all'asse x , si crea una forma tridimensionale, la cui area si calcola considerando non più piccoli rettangoli, ma circonferenze con raggio $f(x)$, e quindi area $\pi f(x)^2 dx$. l'integrale $A = \pi \int [f(x)]^2 dx$ trova l'area completa del solido.

l'area della sfera si trova con il solido di rotazione di $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

attorno alla y : vai a rivedere. $A = 2\pi \int [xf(x)]dx$