

Derivate

Eugenio Animali

February 22, 2023

Contents

1	Fondamento Concettuale	3
2	Derivate Elementari	3
3	Regole di Derivazione	3
4	Esempi da conoscere	3
5	Derivata della Funzione Inversa	4
6	Differenziale di una Funzione	4
7	Tangenze nelle Curve	4
7.1	Tangente ad una Curva in un suo Punto P	4
7.2	Normale ad una Curva in un suo Punto P	4
7.3	Curve Tangenti	4
7.4	Tangente ad una Curva Passante per un Punto P	5
8	Punti di Non Derivabilità	5
9	Studio Della Derivata Prima	5
10	Studio della Derivata Seconda	5
11	Problemi di Massimo e Minimo	6
12	4 Teoremi sulle Derivate	6
12.1	Teorema di Rolle	6
12.1.1	Ipotesi	6
12.1.2	Tesi	6
12.2	Teorema di Lagrange	6
12.2.1	tesi	6
12.3	Teorema di Cauchy	7
12.4	Teorema di de l'Hospital	7
13	Metodo delle derivate successive	7

1 Fondamento Concettuale

Cerco il coefficiente angolare di una curva nel punto. Per fare ciò mi servono 2 punti. Allora io prendo $(x, f(x))$, che mi é dato, e un punto piú in la della funzione, $(x + dx, f(x + dx))$ e trovo il coefficiente angolare utilizzando il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{(x+dx)-x}$. Poi faccio tendere dx a 0 e trovo il coefficiente angolare.

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

2 Derivate Elementari

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$Da^x = a^x \ln a$$

$$De^x = e^x$$

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

3 Regole di Derivazione

$$(kf)' = kf'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

4 Esempi da conoscere

$$D \tan x = D \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$D \left[\frac{x \ln x}{e^x} \right] = \frac{[1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x}] e^x - x \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x [\ln x + 1 - x \cdot \ln x]}{e^{2x}} = \frac{[\ln x + 1 - x \cdot \ln x]}{e^x}$$

5 Derivata della Funzione Inversa

$$\begin{aligned}y &= f(x) \\x &= f^{-1}(y) \\f^{-1}(f(x)) &= x \\Df^{-1}(y) \cdot Df(x) &= 1 \\Df^{-1}(y) &= \frac{1}{Df(x)}\end{aligned}$$

6 Differenziale di una Funzione

Se ho trovato la derivata (tangente) di una funzione, Δy é quanto sale veramente la funzione dopo dx , e dy é quanto sale la tangente. Più é piccola dx , più si avvicinano Δy e dy .

Secondo la regola (TOA) della tangente:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\dy &= f'(x) \cdot dx\end{aligned}$$

7 Tangenze nelle Curve

7.1 Tangente ad una Curva in un suo Punto P

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - f(x_p) &= f'(x_p)(x - x_p)\end{aligned}$$

7.2 Normale ad una Curva in un suo Punto P

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\m_{\perp} &= -\frac{1}{m} \\y - f(x_p) &= -\frac{1}{f'(x_p)}(x - x_p)\end{aligned}$$

7.3 Curve Tangenti

Due curve sono tangenti in un punto x se le y sono uguali e allo stesso tempo le tangenti (Derivate) sono uguali:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\f'(x) &= g'(x)\end{aligned}$$

Due equazioni in una incognita, significa che entrambe le equazioni devono essere vere.

7.4 Tangente ad una Curva Passante per un Punto P

parti con una curva $y = f(x)$ e un punto $P(x_0, y_0)$ fuori dalla curva

regola del fascio di rette: $y - y_0 = m(x - x_0)$

poni $f(c) - y_0 = f'(c)(x - x_0)$

Così poni che i punti $(c, f(c))$ e (x_0, y_0) siano legati dal coefficiente angolare (la derivata) in c e risolvi per c .

8 Punti di Non Derivabilità

Dove f è discontinua, non è mai derivabile. Dove f è continua, non è derivabile nelle seguenti situazioni:

1. Flesso a Tg Verticale
la tangente verticale non ha coefficiente angolare. I limiti destro e sinistro della derivata vanno a \pm infinito
2. Cuspide
spigolo di curve per cui i limiti destro e sinistro vanno uno a $+$ infinito e uno a $-$ infinito
3. Punto Angoloso
limiti destro e sinistro sono diversi e almeno uno non è infinito. si chiama così perché ha un angolo

Per trovare di quale si tratta facciamo i limiti sinistro e destro della derivata.

9 Studio Della Derivata Prima

studio $f'(x) \geq 0$ per trovare:

$f'(x) > 0 \rightarrow$ Funzione Crescente

$f'(x) < 0 \rightarrow$ Funzione Decrescente

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Punto Stazionario

1. Cresce, Punto Stazionario, Decresce \rightarrow Massimo Relativo (M)
2. Decresce, Punto Stazionario, Cresce \rightarrow Minimo Relativo (m)
3. Decresce, Punto Stazionario, Decresce \rightarrow Flesso Orizzontale
4. Cresce, Punto Stazionario, Cresce \rightarrow Flesso Orizzontale

10 Studio della Derivata Seconda

$f''(x) > 0 \rightarrow$ Concavità verso l'Alto

$f''(x) < 0 \rightarrow$ Concavità verso il Basso

$f''(x) = 0 \rightarrow$ Flesso (Cambio di Concavità)

11 Problemi di Massimo e Minimo

1. definire una incognita.
2. definire le sue limitazioni.
3. trovare l'equazione che comprende l'incognita.
4. risolvere.

12 4 Teoremi sulle Derivate

12.1 Teorema di Rolle

12.1.1 Ipotesi

$$\begin{aligned}f(x) &\text{ Continua in } [a, b] \\f(x) &\text{ Derivabile in } (a, b) \rightarrow \text{puó avere estremi verticali} \\f(a) &= f(b) \rightarrow \text{estremi alla stessa altezza}\end{aligned}$$

12.1.2 Tesi

$$\exists c \in (a, b) | f'(c) = 0$$

Verifica:

1. Funzione piatta

$$\begin{aligned}m &= M \\f(x_1) &= f(x_2) \\m &= f(x_1) = f(x) = f(x_2) = M\end{aligned}$$

2. Funzione curva

$$\begin{aligned}m &= f(x_1) < f(x) < f(x_2) = M \\f(c+h) - f(c) &\geq 0 \rightarrow \text{tutti i punti accanto al minimo devono essere piú alti di } f(c) \\\frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\geq 0 \text{ se } h > 0\end{aligned}$$

12.2 Teorema di Lagrange

12.2.1 tesi

$$\exists c \in (a, b) | f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}F(x) &= f(x) - kx \\ F(a) &= F(b)\end{aligned}$$

12.3 Teorema di Cauchy

vedi su libro

12.4 Teorema di de l'Hospital

13 Metodo delle derivate successive