derivate

Eugenio Animali

March 14, 2023

Contents

1 Fondamento Concettuale

Cerco il coefficiente angolare di una curva nel punto. Per fare ció mi servono 2 punti. Allora io prendo $(x, f(x))$, che mi é dato, e un punto piú in la della funzione, $(x + dx, f(x + dx))$ e trovo il coefficiente angolare utilizzando il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{(x+dx)-x}$. Poi faccio tendere dx a 0 e trovo il coefficiente angolare.

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

2 Derivate Elementari

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$D \sin x = \cos x$$
$$D \cos x = - \sin x$$
$$Da^x = a^x \ln a$$
$$De^x = e^x$$
$$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$
$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

3 Regole di Derivazione

$$(kf)' = kf'$$
$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$
$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

4 Esempi da conoscere

$$D \tan x = D \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos^2 x - \sin x(- \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$D \left[\frac{x \ln x}{e^x}\right] = \frac{\left[1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x}\right] e^x - x \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \left[\ln x + 1 - x \cdot \ln x\right]}{e^{2x}} = \frac{[\ln x + 1 - x \cdot \ln x]}{e^x}$$

5 Derivata della Funzione Inversa

$$y = f(x)$$
$$x = f^{-1}(y)$$
$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$Df^{-1}(y) \cdot Df(x) = 1$$
$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{Df(x)}$$

6 Differenziale di una Funzione

Se ho trovato la derivata (tangente) di una funzione, Δy é quanto sale veramente la funzione dopo dx, e dy é quanto sale la tangente. Piú é piccola dx, piú si avvicinano Δy e dy.

Secondo la regola (TOA) della tangente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

7 Tangenze nelle Curve

7.1 Tangente ad una Curva in un suo Punto P

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - f(x_p) = f'(x_p)(x - x_p)$$

7.2 Normale ad una Curva in un suo Punto P

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$m_\perp = -\frac{1}{m}$$
$$y - f(x_p) = -\frac{1}{f'(x_p)}(x - x_p)$$

7.3 Curve Tangenti

Due curve sono tangenti in un punto x se le y sono uguali e allo stesso tempo le tangenti (Derivate) sono uguali:

$$f(x) = g(x)$$
$$f'(x) = g'(x)$$

Due equazioni in una incognita, significa che entrambe le equazioni devono essere vere.

7.4 Tangente ad una Curva Passante per un Punto P

$$\text{parti con una curva } y = f(x) \text{ e un punto } P(x_0, y_0) \text{ fuori dalla curva}$$
$$\text{regola del fascio di rette: } y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\text{poni } f(c) - y_0 = f'(c)(x - x_0)$$

Cosí poni che i punti $(c, f(c))$ e (x_0, y_0) siano legati dal coefficiente angolare (la derivata) in c e risolvi per c.

8 Punti di Non Derivabilitá

Dove f é discontinua, non é mai derivabile. Dove f é continua, non é derivabile nelle seguenti situazioni:

1. Flesso a Tg Verticale
   la tangente verticale non ha coefficiente angolare. I limiti destro e sinistro della derivata vanno a $\pm$ infinito
2. Cuspide
   spigolo di curve per cui i limiti destro e sinistro vanno uno a + infinito e uno a - infinito
3. Punto Angoloso
   limiti destro e sinistro sono diversi e almeno uno non é infinito. si chiama cosí perché ha un angolo

Per trovare di quale si tratta facciamo i limiti sinistro e destro della derivata.

9 Studio Della Derivata Prima

$$\text{studio } f'(x) \geq 0 \text{ per trovare:}$$
$$f'(x) > 0 \rightarrow \text{ Funzione Crescente}$$
$$f'(x) < 0 \rightarrow \text{ Funzione Decrescente}$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{ Punto Stazionario}$$

1. Cresce, Punto Stazionario, Decresce$\rightarrow$ Massimo Relativo (M)
2. Decresce, Punto Stazionario, Cresce$\rightarrow$ Minimo Relativo (m)
3. Decresce, Punto Stazionario, Decresce$\rightarrow$ Flesso Orizzontale
4. Cresce, Punto Stazionario, Cresce$\rightarrow$ Flesso Orizzontale

10 Studio della Derivata Seconda

$$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Concavitá verso l'Alto}$$
$$f''(x) < 0 \rightarrow \text{Concavitá verso il Basso}$$
$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{Flesso (Cambio di Concavitá)}$$

11 Problemi di Massimo e Minimo

1. definire una incognita.
2. definire le sue limitazioni.
3. trovare l'equazione che comprende l'incognita.
4. risolvere.

12 4 Teoremi sulle Derivate

12.1 Teorema di Rolle

12.1.1 Ipotesi

$$f(x) \text{ Continua in } [a, b]$$
$$f(x) \text{ Derivabile in } (a, b) \to \text{puó avere estremi verticali}$$
$$f(a) = f(b) \to \text{estremi alla stessa altezza}$$

12.1.2 Tesi

$$\exists c \in (a, b) | f'(c) = 0$$

Verifica:

1. Funzione piatta

$$m = M$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$m = f(x_1) = f(x) = f(x_2) = M$$

2. Funzione curva

$$m = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = M$$
$$f(c + h) - f(c) \geq 0 \to \text{tutti i punti accanto al minimo devono essere piú alti di } f(c)$$
$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \text{ se } h > 0$$

12.2 Teorema di Lagrange

12.2.1 tesi

$$\exists c \in (a, b) | f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione:

$$F(x) = f(x) - kx$$
$$F(a) = F(b)$$

12.3 Teorema di Cauchy

vedi su libro

12.4 Teorema di de l'Hospital

13 Metodo delle derivate successive