integrali

Eugenio Animali

April 14, 2023

1 Integrali indefiniti

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2 Integrali elementari

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ eccetto } \alpha = -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

3 Integrale della Funzione Composta

Se nella funzione integranda trovo una funzione e la sua derivata, posso usare la regola della funzione composta. Sapendo che il differenziale é

$$df(x) = f'(x)dx$$

quindi:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)d(f(x)) = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Ció vale anche se $f(x)$ é interna ad una funzione $g(f(x))$ piú complessa. Basta manipolare la funzione integranda finché presenta una $f(x)$ che corrisponda ad una $f'(x)$.

4 Integrazione per Sostituzione

Particolarmente utile nei seguenti casi:

1. Radici
2. Esponenziali
3. Goniometria

Il metodo consiste nel sostituire x per un'altra funzione t scelta da me, per togliere parti complicate della funzione. per passare da x a t, devo considerare l'effetto ché avrá su dx:

$$x = g(t)$$
$$dx = g'(t)dt$$

Esempio:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx$$

Pongo:

$$t = \sqrt{x^2-9}$$
$$x = \sqrt{t^2+9}$$
$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2+9}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+9}}$$
$$dx = \frac{t}{\sqrt{t^2+9}}dt$$

Quindi:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dt = \int \frac{\sqrt{t^2+9}}{t}\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}dt$$
$$= t + c = \sqrt{x^2-9} + c$$

5 Integrazione per Parti

Quando ho una funzione facilmente derivabile e una facilmente integrabile.

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Esempio:

$$\int xe^x dx$$

Pongo:

$$f(x) = x, f'(x) = 1$$
$$g(x) = e^x, g'(x) = e^x$$

Quindi:

$$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

6 Integrale con Frazione di Polinomi

Posso separare la mia frazione in parti per renderla piu facile da gestire

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

6.1 Integrale con Denominatore con $\Delta = 0$

Se il denominatore e un quadrato, si separa in parti nel seguente modo:

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+9}dx$$
$$\frac{x+5}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$$
$$\frac{x+5}{(x-3)^2} = \frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2}$$

Visto che sto cercando A e B non e un problema dividere per $(x-3)^2$ e risolvere. Cosi separo il problema in parti piu semplici.

6.2 Δ negativo

Il primo obbiettivo e di avere al denominatore solo un numero.

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+9}dx$$

prima provo a trasformare il numeratore per diventare la derivata del denominatore:

$$\frac{d(x^2-4x+9)}{dx} = 2x-4$$

Quindi posso usare la prima regola di integrazione (funzione composta):

$$\int \frac{3(x+\frac{1}{3}}{x^2-4x+9}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+\frac{1}{3})}{x^2-4x+9}dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}-4+4}{x^2-4x+9}dx = \frac{3}{2}\left[\int \frac{2x-4}{x^2-4x+9}dx + \int \frac{\frac{14}{3}}{x^2-4x+9}dx\right]$$
$$= \frac{3}{2}\left[\ln(x^2-4+9) + \frac{14}{3}\int \frac{1}{x^2-4x+9}dx\right]$$

Ora per risolvere la seconda parte, posso evidenziare il quadrato del binomio:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+9}dx = \int \frac{1}{(x^2-4x+4)+5}dx$$
$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{(x-2)^2}{5}+1}dx$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)+1}$$

con:

$$t = \frac{x-2}{\sqrt{5}}$$
$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t$$

studiamo:

$$dx = \sqrt{5}dt$$

Quindi:

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{5}dt$$

6.3 polinomi alla 3za potenza

Utilizza ruffini per trovare fattori del denominatore e separa cosi il problema:

$$\frac{A}{fattore_1} + \frac{Bx+C}{fattore_2}$$

dove fattore 2 sta alla 2da potenza

7 Integrali Definiti

il problema delle aree e quello di determinare l'area sotto una curva delimitata. per risolverlo posso dividere l'intervallo x in tanti dx e fare una somma infinita:

$$\int_a^b f(x)dx$$

7.1 teorema di torricelli-barrow

data una integrale definita in questo modo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

allora la sua derivata e:

$$F'(x) = f(x)$$

vediamo:

$$F(a) = 0 + c$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + c$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esempio:

$$\int_4^9 (3\sqrt{x} + 2x)dx = \left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$

$$F(b) - F(a)$$

8 valore medio del grafico

l'area sotto al grafico tra a e b, anche per una curva, sara uguale all'area di un rettangolo con base ab, e altezza che arriva in un qualche punto della curva tra a e b

8.1 area tra due curve

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$