integrali

Eugenio Animali

April 27, 2023

1 Integrali indefiniti

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2 Integrali elementari

$$\int dx = x + c$$
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ eccetto } \alpha = -1$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + x$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

3 Integrale della Funzione Composta

Se nella funzione integranda trovo una funzione e la sua derivata, posso usare la regola della funzione composta. Sapendo che il differenziale é

$$df(x) = f'(x)dx$$

quindi:

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)d(f(x)) = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

Ció vale anche se $f(x)$ é interna ad una funzione $g(f(x))$ piú complessa. Basta manipolare la funzione integranda finché presenta una $f(x)$ che corrisponda ad una $f'(x)$.

4 Integrazione per Sostituzione

Particolarmente utile nei seguenti casi:

1. Radici
2. Esponenziali
3. Goniometria

Il metodo consiste nel sostituire x per un'altra funzione t scelta da me, per togliere parti complicate della funzione. per passare da x a t, devo considerare l'effetto ché avrá su dx:

$$x = g(t)$$
$$dx = g'(t)dt$$

Esempio:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$$

Pongo:

$$t = \sqrt{x^2 - 9}$$
$$x = \sqrt{t^2 + 9}$$
$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 9}} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}}$$
$$dx = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} dt$$

Quindi:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} dt = \int \frac{\sqrt{t^2 + 9}}{t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 9}} dt$$
$$= t + c = \sqrt{x^2 - 9} + c$$

5 Integrazione per Parti

Quando ho una funzione facilmente derivabile e una facilmente integrabile.

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Esempio:

$$\int x e^x dx$$

Pongo:

$$f(x) = x, f'(x) = 1$$
$$g(x) = e^x, g'(x) = e^x$$

Quindi:

$$xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

6 Integrale con Frazione di Polinomi

Posso separare la mia frazione in parti per renderla piu facile da gestire

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

6.1 Integrale con Denominatore con $\Delta = 0$

Se il denominatore e un quadrato, si separa in parti nel seguente modo:

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+9} dx$$
$$\frac{x+5}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$
$$= \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$$
$$\frac{x+5}{(x-3)^2} = \frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2}$$

Visto che sto cercando A e B non e un problema dividere per $(x-3)^2$ e risolvere. Cosi separo il problema in parti piu semplici.

6.2 Δ negativo

Il primo obbiettivo e di avere al denominatore solo un numero.

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+9} dx$$

prima provo a trasformare il numeratore per diventare la derivata del denominatore:

$$\frac{d(x^2-4x+9)}{dx} = 2x-4$$

Quindi posso usare la prima regola di integrazione (funzione composta):

$$\int \frac{3(x+\frac{1}{3})}{x^2-4x+9} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2(x+\frac{1}{3})}{x^2-4x+9} dx$$
$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+\frac{2}{3}-4+4}{x^2-4x+9} dx = \frac{3}{2} \left[\int \frac{2x-4}{x^2-4x+9} dx + \int \frac{\frac{14}{3}}{x^2-4x+9} dx \right]$$
$$= \frac{3}{2} \left[\ln(x^2-4+9) + \frac{14}{3} \int \frac{1}{x^2-4x+9} dx \right]$$

Ora per risolvere la seconda parte, posso evidenziare il quadrato del binomio:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 9} dx = \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4) + 5} dx$$
$$= \int \frac{1}{(x-2)^2 + 5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\frac{(x-2)^2}{5} + 1} dx$$
$$= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + 1}$$

con:

$$t = \frac{x-2}{\sqrt{5}}$$
$$\int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t$$

studiamo:

$$dx = \sqrt{5} dt$$

Quindi:

$$\frac{1}{5} \int \frac{1}{t^2+1} \sqrt{5} dt$$

6.3 polinomi alla 3za potenza

Utilizza ruffini per trovare fattori del denominatore e separa cosi il problema:

$$\frac{A}{fattore_1} + \frac{Bx + C}{fattore_2}$$

dove fattore 2 sta alla 2da potenza

7 Integrali Definiti

il problema delle aree e quello di determinare l'area sotto una curva delimitata. per risolverlo posso dividere l'intervallo x in tanti dx e fare una somma infinita:

$$\int_a^b f(x) dx$$

7.1 teorema di torricelli-barrow

data una integrale definita in questo modo:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

allora la sua derivata e:

$$F'(x) = f(x)$$

vediamo:

$$F(a) = 0 + c$$
$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + c$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esempio:

$$\int_4^9 (3\sqrt{x} + 2x)dx = \left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$F(b) - F(a)$$

8 valore medio del grafico

l'area sotto al grafico tra a e b, anche per una curva, sara uguale all'area di un rettangolo con base ab, e altezza che arriva in un qualche punto della curva tra a e b

9 area tra due curve

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

per trovare l'area tra varie curve, si segue la linea di contorno della forma, aggiungendo o sottraendo le integrali definite in base a se la linea segue verso destra o verso sinistra

10 solidi di rotazione

ruotando una curva attorno all'asse x, si crea una forma tridimenzionale, la cui area si calcola considerando non piu piccoli rettangoli, ma circonferenze con raggio $f(x)$, e quindi area $\pi f(x)^2 dx$. l'integrale $A = \pi \int [f(x)]^2 dx$ trova l'area completa del solido.

l'area della sfera si trova con il solido di rotazione di $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

attorno alla y: vai a rivedere. $A = 2\pi \int [xf(x)]dx$