Lógica Computacional

Tarea 4

PCIC - UNAM

14 de abril de 2020

Diego de Jesús Isla López
(*dislalopez@gmail.com*)
(*diego.isla@comunidad.unam.mx*)

Problema 7.9

Demostrar que $(\forall x p(x) \to \forall x q(x)) \to \forall x(p(x) \to q(x))$ no es válida construyendo un tableau semántico para su negación.

Demostración. Por tableau semántico:

1.	$\neg((\forall x p(x) \to \forall x q(x)) \to \forall x(p(x) \to q(x)))$		Negación
2.	$(\forall x p(x) \to \forall x q(x)), \neg(\forall x(p(x) \to q(x))$		$\alpha \to$
3.	$(\forall x p(x) \to \forall x q(x)), \neg(p(a_1) \to q(a_1))$		$\delta\forall$
4.	$\neg\forall x p(x), \neg(p(a_1) \to q(a_1))$	$\forall x q(x), \neg(p(a_1) \to q(a_1)$	$\alpha \to$
5.	$\neg p(a_2), p(a_1), \neg q(a_1)$	$\forall x q(x), q(a_1), p(a_1), \neg q(a_1)$	$\delta\forall$; $\gamma\forall$
		$\otimes$	

El tableau tiene una rama abierta por lo que no es cerrado, por lo que se sigue que la fórmula no es válida. ◻

Problema 8.3

Demostrar que los axiomas 4 y 5 son válidos.

Axioma 4. $\vdash \forall x A(X) \to A(a)$

Demostración. Por tableau semántico en la negación de la fórmula:

1.	$\neg(\forall x A(x) \to A(a))$	Negación
2.	$\forall x A(x), \neg A(a)$	$\alpha \to$
3.	$\forall x A(x), A(a), \neg A(a)$	$\gamma\forall$
	$\otimes$	

El tableau es cerrado, por lo que la fórmula es válida. ◻

Axioma 5. $\vdash \forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$

Demostración. Por tableau semántico en la negación de la fórmula:

1.	$\neg(\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x)))$		Negación
2.	$\forall x(A \to B(x)), \neg(A \to \forall x B(x))$		$\alpha \to$
3.	$\forall x(A \to B(x)), A, \neg\forall x B(x)$		$\alpha \to$
4.	$\forall x(A \to B(x)), A, \neg B(a_1)$		$\delta\forall$
5.	$(A \to \forall x B(x)), A, \neg B(a_1)$		Distributividad de $\forall$
6.	$\neg A, A, \neg A(a_1)$	$\forall x B(x), A, \neg B(a_1)$	$\beta \to$
7.	$\otimes$	$\forall x B(x), B(a_1), A, \neg B(a_1)$	$\gamma\forall$
		$\otimes$	

El tableau resulta cerrado, por lo que la fórmula es válida. ◻

Problema 8.8

Demostrar el teorema 8.19 en H.

Teorema 8.19 Sea A una fórmula que no tiene x como variable libre:

$$\vdash \forall x(A \to B(x)) \leftrightarrow (A \to \forall x B(x)), \tag{1}$$

$$\vdash \exists x(A \to B(x)) \leftrightarrow (A \to \exists x B(x)) \tag{2}$$

Demostración. Para (1) tenemos:

- $\forall(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$

1. $\forall(A \to B(x)) \vdash \forall(A \to B(x))$ `Sup.`
2. $\forall(A \to B(x)) \vdash \forall(\neg A \vee B(x))$ `Def. implicación`
3. $\forall(A \to B(x)) \vdash \neg A \vee \forall x B(x)$ `Distributividad`
4. $\forall(A \to B(x)) \vdash A \to \forall x B(x)$ `Def. implicación`
5. $\forall(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ `Deducción`

- $(A \to \forall x B(x)) \to \forall(A \to B(x))$

1. $A \to \forall x B(x) \vdash A \to \forall x B(x)$ `Sup.`
2. $A \to \forall x B(x) \vdash \neg A \vee \forall x B(c)$ `Def. implicación`
3. $A \to \forall x B(x) \vdash \forall x(\neg A \vee B(x))$ `Distributividad`
4. $A \to \forall x B(x) \vdash \forall x(A \to B(x))$ `Def. implicación`
5. $(A \to \forall x B(x)) \to \forall x(A \to B(x))$ `Deducción`

Para (2) tenemos:

- $\exists(A \to B(x)) \to (A \to \exists x B(x))$

1. $\exists(A \to B(x)) \vdash \exists(A \to B(x))$ `Sup.`
2. $\exists(A \to B(x)) \vdash A \to B(a)$ `Regla C`
3. $\exists(A \to B(x)) \vdash A \to \exists x B(x)$ `Teorema 8.14`
4. $\exists(A \to B(x)) \to (A \to \exists x B(x))$ `Deduccion`

- $(A \to \exists x B(x)) \to \exists(A \to B(x))$

1. $(A \to \exists x B(x)) \vdash (A \to \exists x B(x))$ `Sup.`
2. $(A \to \exists x B(x)) \vdash \neg A \vee \exists x B(c)$ `Def. implicación`
3. $(A \to \exists x B(x)) \vdash \exists x(\neg A \vee B(x))$ `Distributividad`
4. $(A \to \exists x B(x)) \vdash \exists x(A \to B(x))$ `Def. implicación`
5. $(A \to \exists x B(x)) \to \exists x(A \to B(x))$ `Deducción`

$\square$