Lógica Computacional

Examen 1

PCIC - UNAM

20 de abril de 2020

Diego de Jesús Isla López
(*dislalopez@gmail.com*)
(*diego.isla@comunidad.unam.mx*)

Problema 1

Demostrar que $\vdash (A \to B) \vee (B \to C)$ en el sistema de Hilbert $\mathscr{H}$.

Demostración.

1.	$\neg(A \to B) \to \neg(A \to B)$	`Sup.`
2.	$\neg(A \to B) \vdash A \to \neg B$	`Def. implicación (1)`
3.	$\neg(A \to B) \vdash \neg B \to (B \to C)$	`Teorema 3.20`
4.	$\neg(A \to B) \vdash A \to (B \to C)$	`Transitividad (2,3)`
5.	$\neg(A \to B) \to (A \to (B \to C))$	`Deducción (4)`
6.	$(A \to B) \vee (A \to (B \to C))$	`Def. implicación (5)`
7.	$(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee (\neg B \vee C))$	`Def. implicación (6)`
8.	$\neg A \vee B \vee \neg A \vee \neg B \vee C$	`Def. (∨ (7)`
9.	$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C)$	`Def. ∨ (8)`
10.	$(A \to B) \vee (B \to C)$	`Def. implicación (9)`

■

Problema 2

Calcular la expansión de Shannon de $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ con respecto a su proposición atómica r. ¿Por qué usted sabe la respuesta aún antes de comenzar los cálculos?

Solución. Tomando $A = p \to (q \to r)$ y $B = (p \to q) \to (p \to r)$ tenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
&A|_{r=T} = p \to (q \to T) \equiv p \to T \equiv T \\
&B|_{r=T} = (p \to q) \to p \equiv p \\
&A|_{r=F} = p \to (q \to F) \equiv p \to \neg q \equiv \neg(p \wedge q) \\
&B|_{r=F} = (p \to q) \to (p \to F) \equiv (p \to q) \to \neg p \equiv \neg(p \wedge q)
\end{aligned}$$

Desarrollando la expansión de Shannon tenemos:

$$\begin{gathered}
[p \wedge (T \to p)] \vee [\neg p \wedge (\neg(p \wedge q) \to \neg(p \wedge q))] \\
(p \wedge p) \vee (\neg p \wedge T) \\
p \vee \neg p \\
T
\end{gathered}$$

Podemos saber la solución sin hacer la expansión ya que la fórmula es consistente con el axioma 2 de Hilbert.

Problema 3

Demostrar que si el conjunto de cláusulas que etiquetan a las hojas de un árbol de resolución es satisfactible, entonces la cláusula que etiqueta a la raíz es satisfactible.

Lema. El resolvente C es satisfactible sii las cláusulas padre C_1 y C_2 son ambas satisfactibles.

Demostración. Por construcción del árbol de resolución, la raíz tiene como etiqueta al resolvente C de las cláusulas C_1 y C_2 en sus hojas. Por el lema anterior, C es satisfactible sii las cláusulas padre C_1 y C_2 son ambas satisfactibles. ■

Problema 4

Sea A una fórmula construida solo con cuantificadores y los operadores booleanos $\neg$, $\vee$ y $\wedge$. La forma dual de A, A', se obtiene intercambiando $\forall$ con $\exists$ y $\vee$ con $\wedge$. Demostrar que $\vdash A$ sii $\vdash \neg A'$.

Demostración. Por construcción de A', es posible ver que $\neg A'$ siempre será la fórmula A original pero con una distribución contraria de signos $\neg$. De este modo, si desarrollamos tableaux semánticos T y T' para A y A' respectivamente, podemos observar que ambos tableaux tienen exactamente las mismas aplicaciones de las reglas de construcción. A su vez, se llegarán a los mismos conjuntos de literales y fórmulas γ en ambos casos. Teniendo esto en cuenta, se sigue que si T es un árbol abierto, T' también lo será; de igual manera si T es un árbol cerrado, T' también lo será.

El caso opuesto es análogo. ■