Lógica Computacional

Tarea 1

PCIC - UNAM

25 de febrero de 2020

Diego de Jesús Isla López
(*dislalopez@gmail.com*)
(*diego.isla@comunidad.unam.mx*)

Problema 2.9

Demostrar:

$$\models ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

Esta fórmula puede parecer extraña ya que puede malinterpretarse como decir que si C se sigue de $A \wedge B$, entonces se sigue de A o de B. Para clarificar esto, mostrar que:

$$\{A \wedge B \rightarrow C\} \models (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C),$$

pero:

$$\{A \wedge B \rightarrow C\} \not\models A \rightarrow C,$$
$$\{A \wedge B \rightarrow C\} \not\models B \rightarrow C,$$

Demostración. Por tableau semántico en la negación de la fórmula:

1.	$\neg(((A \wedge B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C)))$		Negación
2.	$(A \wedge B) \to C\,,\neg((A \to C) \vee (B \to C))$		$\alpha \to$
3.	$(A \wedge B) \to C\,,\neg(A \to C)\,,\neg(B \to C)$		$\alpha \to$
4.	$(A \wedge B) \to C\,,\neg(A \to C)\,,B\,,\neg C$		$\alpha \to$
5.	$(A \wedge B) \to C\,,A\,,\neg C\,,B\,,\neg C$		$\alpha \to$
6.	$\neg(A \wedge B)\,,A\,,\neg C\,,B\,,\neg C$	$C\,,A\,,\neg C\,,B\,,\neg C$ $\otimes$	$\beta \to$
7.	$\neg A\,,A\,,\neg C\,,B\,,\neg C$ $\otimes$; $\neg B\,,A\,,\neg C\,,B\,,\neg C$ $\otimes$		$\beta \to$

$\square$

Problema 3.2

Demostrar que si $\vdash U$ en $\mathscr{G}$ entonces existe un tableau semántico cerrado para $\bar{U}$.

Demostración. Sea T un tableau semántico (t.s.) para U. Por inducción en la altura h de T:

Si $h = 0$, entonces U consta de un solo par complementario de literales y, por lo tanto, también $\bar{U}$. Por lo tanto, el tabelau semántico para $\bar{U}$ es cerrado.

Si $h > 0$, entonces se aplicó alguna α-fórmula o β-fórmula en la raíz de T. Se sigue la demostración por casos.

- **Caso 1.** Se aplicó una α-fórmula como A tal como $A_1 \wedge A_2$ que corresponde a A_1, A_2. Entonces, $U = U_1 \cup U_2 \cup \{A\}$, donde $\vdash U_1 \cup \{A_1\}$ y $\vdash U_2 \cup \{A_2\}$. Por hipótesis de inducción, los complementos $\bar{U_1} \cup \{\bar{A_1}\}$ y $\bar{U_2} \cup \{\bar{A_2}\}$ tienen tableaux cerrados. Por el teorema de robustez (*soundness*) de t.s., estos conjuntos son insatisfactibles. Entonces, se sigue que sus superconjuntos $\bar{U}' = \bar{U_1} \cup \bar{U_2} \cup \{A_1\}$ y $\bar{U}'' = \bar{U_1} \cup \bar{U_2} \cup \{A_2\}$ también son insatisfactibles. Si tomamos $\bar{A} = \bar{A_1} \vee \bar{A_2}$, podemos ver que constituye una β-fórmula. Por regla de tableau, $\bar{U}$ se expande en dos hojas $\bar{U}'$ y $\bar{U}''$. Dado que ambas hojas son insatisfactibles y tienen tableaux cerrados, $\bar{U}$ también los tiene.

- **Caso 2.** Se aplicó una β-fórmula B tal como $B_1 \vee B_2$ que corresponde a B_1, B_2. Entonces, $U = U_1 \cup \{B\}$ donde $\vdash U' = U_1 \cup \{B_1, B_2\}$. Por hipótesis de inducción, el complemento $\bar{U}' = \bar{U}_1 \cup \{B_1, B_2\}$ tiene un tableau cerrado. Tomando $\bar{B} = \bar{B}_1 \wedge \bar{B}_2$, vemos que corrrsponde a una α-fórmula. Por regla de tableau, se expande $\bar{U}$ a $\bar{U}'$. Dado que $\bar{U}'$ tiene un tableau cerrado, $\bar{U}$ también lo tiene.

□

Problema 3.9

Demostrar en $\mathscr{H}$:

$$\vdash A \to A \vee B,$$
$$\vdash B \to A \vee B,$$
$$\vdash (A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$$

Demostración. Por reglas de Hilbert:

1.	$\{A \to B, \neg C \to A, \neg C\} \vdash \neg C \to A$	Suposición
2.	$\{A \to B, \neg C \to A, \neg C\} \vdash \neg C$	Suposición
3.	$\{A \to B, \neg C \to A, \neg C\} \vdash A$	M.P. 1,2
4.	$\{A \to B, \neg C \to A, \neg C\} \vdash A \to B$	Suposición
5.	$\{A \to B, \neg C \to A, \neg C\} \vdash B$	M.P. 3,4
6.	$\{A \to B, \neg C \to A\} \vdash \neg C \to B$	Deducción en 5
7.	$\{A \to B\} \vdash (C \vee A) \to (C \vee B)$	Deducción en 6

□

Problema 3.12

Demostrar que el axioma 2 de $\mathscr{H}$ es válido construyendo un tableau semántico para su negación.

Demostración. Por tableau semántico en la negación de la fórmula:

1.	$\neg((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$				Negación
2.	$A \to (B \to C), \neg((A \to B) \to (A \to C))$				$\alpha \to$
3.	$A \to (B \to C), A \to B, \neg(A \to C)$				$\alpha \to$
4.	$A \to (B \to C), A \to B, A, \neg C$				$\alpha \to$
5.	$\neg A, A \to (B \to C), A, \neg C$		$B, A \to (B \to C), A, \neg C$		$\beta \to$
6.	$\neg A, \neg A, A, \neg C$	$B \to C, \neg A, A, \neg C$	$B, \neg A, A, \neg C$	$B \to C, \neg A, A, \neg C$	$\beta \to$
	$\otimes$		$\otimes$		
7.	$\neg B, \neg A, A, \neg C$	$C, \neg A, A, \neg C$	$\neg B, B, A, \neg C$	$C, B, A, \neg C$	$\beta \to$
	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$	

$\square$