1

6

Lógica Computacional

Tarea 4

PCIC - UNAM

14 de abril de 2020

Diego de Jesús Isla López
(*dislalopez@gmail.com*)
(*diego.isla@comunidad.unam.mx*)

Problema 7.9

Demostrar que $(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x))$ no es válida construyendo un tableau semántico para su negación.

Demostración. Por tableau semántico:

1.	$\neg((\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \rightarrow \forall x(p(x) \rightarrow q(x)))$		Negación
2.	$(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)), \neg(\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$		$\alpha \rightarrow$
3.	$(\forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x)), \neg(p(a_1) \rightarrow q(a_1))$		$\delta\forall$
4.	$\neg\forall x p(x), \neg(p(a_1) \rightarrow q(a_1))$	$\forall x q(x), \neg(p(a_1) \rightarrow q(a_1)$	$\alpha \rightarrow$
5.	$\neg p(a_2), p(a_1), \neg q(a_1)$	$\forall x q(x), q(a_1), p(a_1), \neg q(a_1)$	$\delta\forall$; $\gamma\forall$
		$\otimes$	

2/2

El tableau tiene una rama abierta por lo que no es cerrado, por lo que se sigue que la fórmula no es válida. ◻

Problema 8.3

Demostrar que los axiomas 4 y 5 son válidos.

Axioma 4. $\vdash \forall x A(X) \rightarrow A(a)$

Demostración. Por tableau semántico en la negación de la fórmula:

1.	$\neg(\forall x A(x) \rightarrow A(a))$	Negación
2.	$\forall x A(x), \neg A(a)$	$\alpha \rightarrow$
3.	$\forall x A(x), A(a), \neg A(a)$	$\gamma\forall$
	$\otimes$	

El tableau es cerrado, por lo que la fórmula es válida. □

Axioma 5. $\vdash \forall x(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$

Demostración. Por tableau semántico en la negación de la fórmula:

1.	$\neg(\forall x(A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x)))$		Negación
2.	$\forall x(A \rightarrow B(x)), \neg(A \rightarrow \forall x B(x))$		$\alpha \rightarrow$
3.	$\forall x(A \rightarrow B(x)), A, \neg\forall x B(x)$		$\alpha \rightarrow$
4.	$\forall x(A \rightarrow B(x)), A, \neg B(a_1)$		$\delta\forall$
5.	$(A \rightarrow \forall x B(x)), A, \neg B(a_1)$		Distributividad de $\forall$
6.	$\neg A, A, \neg A(a_1)$	$\forall x B(x), A, \neg B(a_1)$	$\beta \rightarrow$
7.	$\otimes$	$\forall x B(x), B(a_1), A, \neg B(a_1)$	$\gamma\forall$
		$\otimes$	

2/2

El tableau resulta cerrado, por lo que la fórmula es válida. □

Problema 8.8

Demostrar el teorema 8.19 en H.

Teorema 8.19 Sea A una fórmula que no tiene x como variable libre:

$$\vdash \forall x(A \rightarrow B(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x B(x)), \quad (1)$$

$$\vdash \exists x(A \rightarrow B(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \exists x B(x)) \quad (2)$$

Demostración. Para (1) tenemos:

- $\forall(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ ¡Es el axioma 5!

x

1.	$\forall(A \to B(x)) \vdash \forall(A \to B(x))$	`Sup.`
2.	$\forall(A \to B(x)) \vdash \forall(\neg A \vee B(x))$	`Def. implicación`, 1
3.	$\forall(A \to B(x)) \vdash \neg A \vee \forall x B(x)$ X	¿ `Distributividad` ? (Es lo que se quiere probar)
4.	$\forall(A \to B(x)) \vdash A \to \forall x B(x)$	`Def. implicación`, 4
5.	$\forall(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$	`Deducción`, 5

- $(A \to \forall x B(x)) \to \forall(A \to B(x))$

x

1.	$A \to \forall x B(x) \vdash A \to \forall x B(x)$	`Sup.`
2.	$A \to \forall x B(x) \vdash \neg A \vee \underline{\forall x B(c)}$	`Def. implicación`
3.	$A \to \forall x B(x) \vdash \forall x(\neg A \vee B(x))$	~~`Distributividad`~~ Generalización
4.	$A \to \forall x B(x) \vdash \forall x(A \to B(x))$	`Def. implicación`
5.	$(A \to \forall x B(x)) \to \forall x(A \to B(x))$	`Deducción`

(Faltan pasos. Compara con la respuesta de Zoe)

Para (2) tenemos:

- $\exists(A \to B(x)) \to (A \to \exists x B(x))$

x

1.	$\exists(A \to B(x)) \vdash \exists(A \to B(x))$	`Sup.`
2.	$\exists(A \to B(x)) \vdash A \to B(a)$	`Regla C`, 1
3.	$\exists(A \to B(x)) \vdash A \to \exists x B(x)$	MP, 2, `Teorema 8.14`
4.	$\exists(A \to B(x)) \to (A \to \exists x B(x))$	`Deduccion`, 3 ✓

x

- $(A \to \exists x B(x)) \to \exists(A \to B(x))$

1.	$(A \to \exists x B(x)) \vdash (A \to \exists x B(x))$	`Sup.`
2.	$(A \to \exists x B(x)) \vdash \neg A \vee \exists x B(c)$	`Def. implicación`
3.	$(A \to \exists x B(x)) \vdash \exists x(\neg A \vee B(x))$	`Distributividad` X (Es lo que hay que probar)
4.	$(A \to \exists x B(x)) \vdash \exists x(A \to B(x))$	`Def. implicación`
5.	$(A \to \exists x B(x)) \to \exists x(A \to B(x))$	`Deducción`

□

2/3