Lógica Computacional

Tarea 2

PCIC - UNAM

12 de marzo de 2020

Diego de Jesús Isla López
(*dislalopez@gmail.com*)
(*diego.isla@comunidad.unam.mx*)

Problema 4.13

Demostrar el teorema 4.13 sobre la correctitud del algoritmo CNF-a-3CNF.

Teorema. Sea A una fórmula en CNF y sea A' la fórmula en 3CNF construida a partir de A. Entonces A es satisfactible sii A' es satisfactible. La longitud de A' es un polinomio en la longitud de A.

Demostración. Sea A un conjunto de literales tal que $|A| = k$ para $k >= 1$. La demostración procede por casos según la longitud de A y el resultado del algoritmo.

- **Caso 1** ($k = 1$)**:** Entonces, $A = \{x_1\}$ y $A' = \{\{x_1, y, z\}, \{x_1, \bar{y}, z\}, \{x_1, y, \bar{z}\}, \{x_1, \bar{y}, \bar{z}\}\}$. Dado que A consta de una sola literal, si esta se satisface, entonces todas las cláusulas de A' se satisfacen.
- **Caso 2** ($k = 2$)**:** Entonces, $A = \{x_1, x_2\}$ y $A' = \{\{x_1, x_2, z\}, \{x_1, x_2, \bar{z}\}$. Dado que A consta de dos literales, basta con que alguna de ellas se satisfaga para que las cláusulas de A' se satisfagan.
- **Caso 3** ($k > 3$)**:** Entonces, $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}$. Tomemos $x_m = 1$ para alguna m tal que $2 < m < k - 1$. Tomemos $z_i = 1$ para toda $i \leq m - 2$ y $z_j = 0$ para toda $j \geq m - 1$. Sea $A'_m \in A'$ la cláusula que contiene a x_m. Todas las cláusulas a la izquierda de A'_m tendrán una tercera literal $z_i = 1$; a su vez, todas las cláusulas a la derecha de A'_m tendrán una primera literal $\bar{z}_j = 1$. De este modo, todas las cláusulas de A' se satisfacen.

$\square$