In[ ]:=

$$X = \begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0
\end{pmatrix};$$

In[ ]:=

$$P = (x+4)\ \text{IdentityMatrix}[20] + \frac{10\ (x+6)}{(x-22)\ (x+8)}\ \text{ConstantArray}[1, \{20, 20\}] + X;$$

In[ ]:=

```
Det[P] // Factor
```

Out[ ]=

$$\frac{(-12+x)\ (-2+x)\ (2+x)^5\ (4+x)^{10}\ (6+x)^5}{(-22+x)\ (8+x)}$$

In[ ]:=

$$\text{Inverse}[P] - \left(\frac{\text{IdentityMatrix}[20]}{x+4} - \frac{10\ \text{ConstantArray}[1, \{20, 20\}]}{(x-12)\ (x-2)\ (x+6)} + \frac{X.X - (x+4)\ X}{(x+2)\ (x+4)\ (x+6)}\right)\ //$$

```
FullSimplify // MatrixForm
```

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Coeff of $J_{s,20}$ in $Q^T P^{-1}$

```
In[•]:= (9 x + 82)/((x - 22) (x + 4) (x + 8)) - 100/((x - 12) (x - 2) (x + 6)) -
  200 (9 x + 82)/((x - 22) (x - 12) (x - 2) (x + 6) (x + 8)) - 2 (9 x + 82)/((x - 22) (x + 4) (x + 6) (x + 8)) // Factor
Out[•]= 9/((-12 + x) (6 + x))
```

Coeff of J_s in $Q^T P^{-1} Q$

```
In[•]:= 90/((x - 12) (x + 6)) + 10 (9 x + 82)/((x - 22) (x + 8) (x + 4)) +
  180 (9 x + 82)/((x - 22) (x - 12) (x + 6) (x + 8)) - 20 (9 x + 82)/((x - 22) (x + 4) (x + 6) (x + 8)) // Factor
Out[•]= 20 (-546 + 5 x + 9 x^2)/((-22 + x) (-12 + x) (6 + x) (8 + x))
```

Coeff of J_s in $R - Q^T P^{-1} Q$

```
In[•]:= 10 (x + 6)/((x - 22) (x + 8)) - 20 (-546 + 5 x + 9 x^2)/((-22 + x) (-12 + x) (6 + x) (8 + x)) // Factor
Out[•]= 10 (-30 + 4 x + x^2)/((-12 + x) (6 + x) (8 + x))
```

Lemma 3.12

```
In[•]:= ((x + 4) + 10 (-30 + 4 x + x^2)/((-12 + x) (6 + x) (8 + x)) - 10/(x + 4) - α/((x + 2) (x + 4) (x + 6)) + β/((x + 2) (x + 6))) //
  Factor
Out[•]= (-9312 - 15592 x - 8356 x^2 - 1620 x^3 - 68 x^4 + 12 x^5 + x^6 + 96 α + 4 x α -
    x^2 α - 384 β - 112 x β + x^3 β) / ((-12 + x) (2 + x) (4 + x) (6 + x) (8 + x))

In[•]:= (-9312 - 15592 x - 8356 x^2 - 1620 x^3 - 68 x^4 + 12 x^5 + x^6 + 96 α + 4 x α - x^2 α -
    384 β - 112 x β + x^3 β) - ((2 + x) (-4656 - 5468 x - 1444 x^2 - 88 x^3 + 10 x^4 + x^5) -
    (-12 + x) (8 + x) (α - (x + 4) β)) // Simplify
Out[•]= 0
```

```
In[ ]:= Collect[PolynomialMod[(2 + x) (-4656 - 5468 x - 1444 x^2 - 88 x^3 + 10 x^4 + x^5) -
          (-12 + x) (8 + x) (α - (x + 4) β), (x + 6)^2], x]
Out[ ]= -3984 + 132 α + x (-424 + 16 α - 4 β) + 48 β

In[ ]:= Solve[-3984 + 132 α + 48 β == 0 && -424 + 16 α - 4 β == 0, {α, β}]
Out[ ]= {{α → 28, β → 6}}
```

Lemma 3.14

```
In[ ]:= Det[(x + 4) IdentityMatrix[2] + 10 (x^2 + 4 x - 30) / ((x - 12) (x + 6) (x + 8)) ConstantArray[1, {2, 2}] -
          {{10, α}, {α, 10}} / (x + 4) - 40 ConstantArray[1, {2, 2}] / ((x + 2) (x + 4) (x + 6)) +
          {{6, β}, {β, 6}} / ((x + 2) (x + 4))] // Factor
Out[ ]= ((18 + 22 x + 10 x^2 + x^3 + 2 α + x α - β) (-1248 - 2704 x - 950 x^2 - 94 x^3 + 6 x^4 + x^5 + 192 α +
          104 x α + 2 x^2 α - x^3 α - 96 β - 4 x β + x^2 β)) / ((-12 + x) (2 + x)^2 (4 + x)^2 (8 + x))

In[ ]:= CoefficientList[-1248 - 2704 x - 950 x^2 - 94 x^3 + 6 x^4 +
          x^5 + 192 α + 104 x α + 2 x^2 α - x^3 α - 96 β - 4 x β + x^2 β, x] // Reverse
        CoefficientList[18 + 22 x + 10 x^2 + x^3 + 2 α + x α - β, x] // Reverse
Out[ ]= {1, 6, -94 - α, -950 + 2 α + β, -2704 + 104 α - 4 β, -1248 + 192 α - 96 β}
Out[ ]= {1, 10, 22 + α, 18 + 2 α - β}

In[ ]:= f[x_] :=
         -1248 - 2704 x - 950 x^2 - 94 x^3 + 6 x^4 + x^5 + 192 α + 104 x α + 2 x^2 α - x^3 α - 96 β - 4 x β + x^2 β
        g[x_] := 18 + 22 x + 10 x^2 + x^3 + 2 α + x α - β

In[ ]:= Collect[PolynomialMod[f[x] × g[x], (x + 6)^2], x]
        CoefficientList[PolynomialMod[f[x] × g[x], (x + 6)^2], x] // Reverse
Out[ ]= 68 400 - 12 000 α + 384 α^2 - 6240 β + 624 α β +
         132 β^2 + x (6000 - 560 α - 32 α^2 - 680 β + 56 α β + 16 β^2)
Out[ ]= {6000 - 560 α - 32 α^2 - 680 β + 56 α β + 16 β^2,
         68 400 - 12 000 α + 384 α^2 - 6240 β + 624 α β + 132 β^2}

In[ ]:= Reduce[6000 - 560 α - 32 α^2 - 680 β + 56 α β + 16 β^2 == 0 &&
          68 400 - 12 000 α + 384 α^2 - 6240 β + 624 α β + 132 β^2 == 0, {α, β}]
Out[ ]= (α == 35/9 && β == 130/9) || β == 30 - 4 α
```