Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №3

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Рогалева Юлия Александровна
Группа:	РК6-52Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Вынужденные колебания маятника

Студент ________________ Рогалева Ю.А.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ________________ ________________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Вынужденные колебания маятника

Задание

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются для изучения динамических систем, траектории которых не удаётся найти с помощью аналитических методов. Одним из простейших примеров являются вынужденные колебания маятника без предположения о малости угла отклонения маятника от вертикальной оси. Подобная математическая модель является фундаментальной для робототехники, и отчасти отражает процессы, моделируемые, например, в случае рук-манипуляторов. В данной лабораторной работе исследуются траектории, являющиеся решениями соответствующих задач Коши на основе такой модели, и проанализируем, к каким решениям они сходятся в зависимости от начальных условий.

Дано ОДУ 2-го порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + 0.1\frac{d}{dt}\theta + \sin(\theta) = \cos(t), \tag{1}$$

где $\theta(t)$ обозначает угол отклонения маятника от вертикальной оси как функцию времени t.

Требуется (базовая часть):

1. Преобразовать данное ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка.
2. Разработать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией `f`, начальным условием `x_0`, шагом по времени `h` и конечным временем `t_n`:
   - `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью явного метода Рунге–Кутта 4-го порядка;
   - `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью неявного трёхшагового метода Адамса–Моултона (выполняется в рамках продвинутой части);
   - `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью метода Милна–Симпсона (схема предиктор-корректор).
3. Для каждого из реализованных методов:
   - Численно каждым из методов найти траектории заданной динамической системы, используя шаг $h = 0.1$ и 15 различных начальных условий, для которых: $\theta(0) = 0$ и $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}$ следует выбрать случайно из интервала $[1.85; 2.1]$.
   - Вывести полученные траектории на едином графике как зависимости $\theta(t)$ (для каждого метода на отдельном графике).

4. В чем принципиальные отличия реализованных методов друг от друга? В чем они схожи?

5. Для каждой из схем каково значение шага, при котором она становится неустойчивой?

Требуется (продвинутая часть):

6. Вывести разными цветами фазовые траектории на едином двумерном графике: по оси абсцисс θ, по оси ординат - $\frac{d\theta}{dt}$, при всех различных начальных условиях(для каждого метода на отдельном графике).

7. Зафиксировать одно начальное условие (произвольно). Вывести фазовые траектории на одном двумерном графике, формируемые разными методами. Сделать вывод.

8. Какая из схем является наиболее затратной с точки зрения времени вычислений при произвольном значении шага, дающем устойчивое решение для каждой из схем? Наименее затратной?

9. Как вы можете охарактеризовать асимптотические состояния, к которым сходится решение в зависимости от начальных условий? Опишите их физический смысл.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: применение численных методов для решения задачи Коши системы ОДУ 1-го порядка, иллюстрированных на примере динамической системы вынужденных колебаний маятника, анализ траекторий, получаемых с использованием различных численных методов, и изучение их сходимости в зависимости от начальных условий..

1 Преобразование ОДУ (1) в систему ОДУ 1-го порядка

Для преобразования ОДУ (1) в систему ОДУ 1-го порядка необходимо выполнить следующую замену переменных:

$$w = \frac{d}{dt}\theta$$

Тогда система ОДУ 1-го порядка будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\theta = w \\ \frac{d}{dt}w = \cos(t) - 0.1w - \sin(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

2 Разработка функций, возвращающих дискретную траекторию системы ОДУ

Метод Рунге–Кутты

Методы Рунге-Кутты основаны на аппроксимации $T^{(n)}(t,y)$, определенного формулой:

$$T^{(n)}(t_i,w_i) = f(t_i,y(t_i)) + \frac{h}{2}f'(t_i,y(t_i)) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(t_i,y(t_i)),$$

где $w_i \approx y(t_i)$, $h = \frac{b-a}{m} = t_{i+1} - t_i$, $i = 1,\dots,m$, n — порядок ОДУ.

Так как формула для $T^{(n)}(t,y)$ была построена путем отбрасывания члена порядка $O(h^n)$, достаточно найти аппроксимацию функции $\phi(t,y)$ точную вплоть до члена порядка $O(h^5)$:

$$T^{(n)}(t,y) = \phi(t,y) + O(h^n).$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка эффективно сочетает высокую точность с умеренной вычислительной нагрузкой для решения ОДУ, превосходя методы нижних порядков по точности без значительных вычислительных затрат, характерных для методов высших порядков. Его формулировка имеет вид:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \alpha,\\
k_1 &= hf(t_i,w_i),\\
k_2 &= hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{1}{2}k_1\right),\\
k_3 &= hf\left(t_i+\frac{h}{2}, w_i+\frac{1}{2}k_2\right),\\
k_4 &= hf\left(t_i+h, w_i+k_3\right),\\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right), \quad i = 0,1,\dots,m-1.
\end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $w_0 = \alpha$ — начальное условие, k_1, k_2, k_3, k_4 — коэффициенты.

Реализация данного метода представлена в листинге 1.

Листинг 1. Функция, реализующая метод Рунге-Кутты 4-го порядка

```
def runge_kutta(x_0, t_n, f, h):
    n = int(t_n / h)
    w = np.zeros((n + 1, len(x_0)))
    w[0] = x_0
    t = np.linspace(0, t_n, n + 1)
    for i in range(n):
        k1 = h * f(t[i], w[i])
        k2 = h * f(t[i] + h / 2, w[i] + k1 / 2)
        k3 = h * f(t[i] + h / 2, w[i] + k2 / 2)
        k4 = h * f(t[i] + h, w[i] + k3)
        w[i + 1] = w[i] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    return w
```

Метод Адамса-Моултона

Порядок точности метода можно увеличить за счёт использования уже посчитанных значений функции $y(t)$ на предыдущих шагах t_{i-1}, t_{i-2} и так далее. Метод Адамса-Моултона представляет собой неявный $(p-1)$ шаговый метод численного интегрирования ОДУ с p точками интерполяции:

$$(t_{i+1}, f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))), (t_i, f(t_i, y(t_i))), \dots, (t_{i+2-p}, f(t_{i+2-p}, y(t_{i+2-p}))).$$

Обобщенная формулировка метода Адамса-Моултона представлена ниже:

$$w_0 = \alpha_0,\ w_1 = \alpha_1,\ \dots,\ w_{p-1} = \alpha_{p-1},$$

$$w_{i+1} = w_i + h\sum_{j=1}^{p} a_j f(t_{i-j+2}, w_{i-j+2}), \quad i = p-1, p, \dots, m-1, \tag{3}$$

где коэффициенты a_j имеют вид:

$$a_j = \int_0^1 \prod_{j\neq k} \frac{s+k-2}{k-j} ds, \quad j = 1, \dots, p \tag{4}$$

и остаточный член, формирующийся из-за интерполяции функции $f(t, y)$, имеет форму:

$$\frac{h^{p+1}}{p!} f^{(p)}(\mu_i, y(\mu_i)) \int_0^1 \prod_{j=1}^{p} (s+j-2) ds.$$

Таким образом, $(p-1)$-шаговый метод Адамса-Моултона имеет порядок $O(h^p)$.

Для реализации данного метода необходимо вычислить коэффициенты a_j по формуле (4):

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^1 \frac{s+2-2}{2-1} \cdot \frac{s+3-2}{3-1} \cdot \frac{s+4-2}{4-1} ds = \frac{3}{8},\\
a_2 &= \int_0^1 \frac{s+1-2}{1-2} \cdot \frac{s+3-2}{3-2} \cdot \frac{s+4-2}{4-2} ds = \frac{19}{24},\\
a_3 &= \int_0^1 \frac{s+1-2}{1-3} \cdot \frac{s+2-2}{2-3} \cdot \frac{s+4-2}{4-3} ds = -\frac{5}{24},\\
a_4 &= \int_0^1 \frac{s+1-2}{1-4} \cdot \frac{s+2-2}{2-4} \cdot \frac{s+3-2}{3-4} ds = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Тогда (3) примет вид:

$$w_{i+1} = w_i + h[(\frac{3}{8} f(t_{i+1}, w_{i+1}) + \frac{19}{24} f(t_i, w_i) - \frac{5}{14} f(t_{i-1}, w_{i-1}) + \frac{1}{24} f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

Начальные условия для этого метода были найдены с помощью метода Рунге-Кутты, определяющего первые 3 шага.

Код метода Адамса-Моултона продемонстрирован в листинге 2.

Листинг 2. Функция, реализующая метод Адамса-Моултона

```
def adams_moulton(x_0, t_n, f, h):
    w_rk = runge_kutta(x_0, 3 * h, f, h)
    w = np.zeros((int(t_n / h) + 1, len(x_0)))
    w[:4] = w_rk[:4]
    for i in range(3, int(t_n / h)):
        t = (i + 1) * h
        def g(y):
            y = np.array(y)
            return y - w[i] - h * ((9 / 24) * f(t, y) + (19 / 24) * f(t - h, w[i]) -
                                   (5 / 24) * f(t - 2 * h, w[i - 1]) +
                                   (1 / 24) * f(t - 3 * h, w[i - 2]))
        sol = root(g, w[i])
        w[i + 1] = sol.x
    return w
```

Метод Милна-Симпсона

Метод Милна-Симпсона является многошаговым методом, который можно построить, если проинтегрировать ОДУ $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ на интервале $[t_j; t_{i+1}]$ для $j < i$ вместо $[t_i; t_{i+1}]$:

$$\int_{t_j}^{t_{i+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_j}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$
$$\implies \quad y(t_{i+1}) = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Для интервала $[t_{i-3}; t_{i+1}]$ и квадратичного интерполянта для $f(t, y(t))$ получается явный метод, называемый методом Милна:

$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha_0, w_1 = \alpha_1, w_2 = \alpha_2, w_3 = \alpha_3 \\ &w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})\right], \quad i = 3, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{5}$$

Подобным образом для интервала $[t_{i-1}; t_{i+1}]$ и квадратичного интерполянта для $f(t, y(t))$ получается неявный метод, называемый методом Симпсона.

$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha_0, w_1 = \alpha_1, \\ &w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})\right], \quad i = 1, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{6}$$

Метод Милна и метод Симпсона часто используются в комбинации по схеме предиктор-корректор. Она состоит из двух шагов:

1. Предиктор (5) — предсказание значения w_{i+1} при помощи экстраполяции по предыдущим точкам.

2. Корректор (6) — уточнение w_{i+1} посредством решения нелинейного уравнения неявной схемы итерационным методом.

Рассмотренные методы (5) и (6) часто используются в комбинации по схеме предиктор-корректор:

$$
\begin{aligned}
&w_0 = \alpha_0, w_1 = \alpha_1, w_2 = \alpha_2, w_3 = \alpha_3 \\
&\tilde{w}_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})\right], \\
&w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f(t_{i+1}, \tilde{w}_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})\right], \quad i = 3, \ldots, m-1.
\end{aligned}
$$

В листинге 3 представлена реализация метода Милна-Симпсона.

Листинг 3. Функция, реализующая метод Милна-Симпсона

```
def milne_simpson(x_0, t_n, f, h):
    w_rk = runge_kutta(x_0, 4 * h, f, h)
    w = np.zeros((int(t_n / h) + 1, len(x_0)))
    w[:4] = w_rk[:4]
    t = np.linspace(0, t_n, int(t_n / h) + 1)
    for i in range(3, int(tn / h)):
        wp = w[i - 3] + (4 * h / 3) * (2 * f(t[i], w[i]) - f(t[i - 1], w[i - 1]) + 2 * f(t[i - 2], w[i - 2]))
        w[i + 1] = w[i - 1] + (h / 3) * (f(t[i + 1], wp) + 4 * f(t[i], w[i]) + f(t[i - 1], w[i - 1]))
    return w
```

3 Нахождение траектории заданной динамической системы и вывод полученных траекторий на едином графике для каждого метода

Для каждого из методов получены графики зависимости $\theta(t)$ траекторий системы при 15 различных начальных условиях (рисунки 1-3). Для них начальный угол $\theta(0) = 0$ и начальная скорость $\frac{d\theta}{dt}\big|_{t=0}$ выбраны из интервала $[1.85; 2.1]$, а шаг $h = 0.1$.

• для метода Рунге-Кутты:

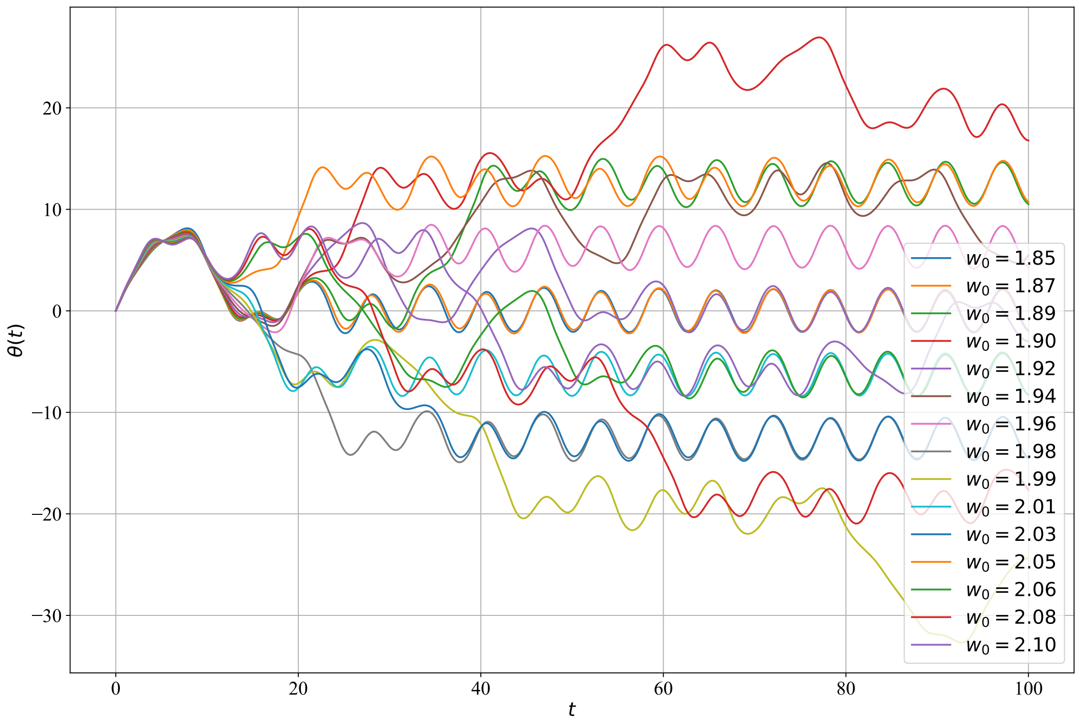

Рис. 1. График траекторий при различных начальных условиях заданной динамической системы для метода Рунге-Кутты

- для метода Адамса-Моултона:

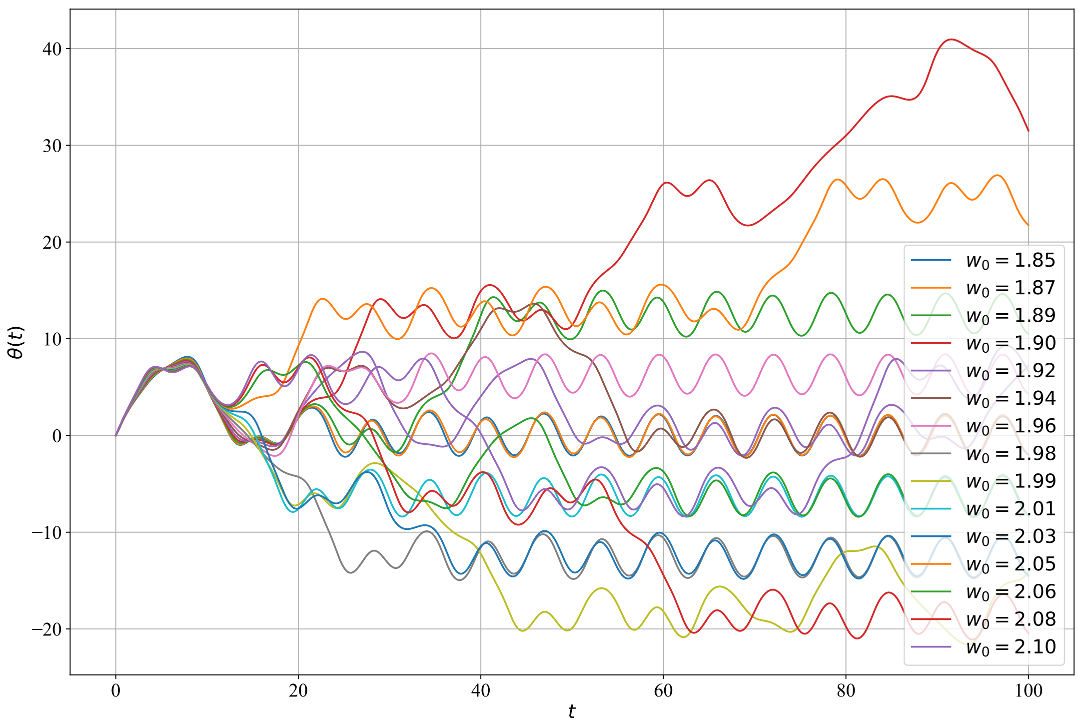

Рис. 2. График траекторий при различных начальных условиях заданной динамической системы для метода Адамса-Моултона

- для метода Милна-Симпсона:

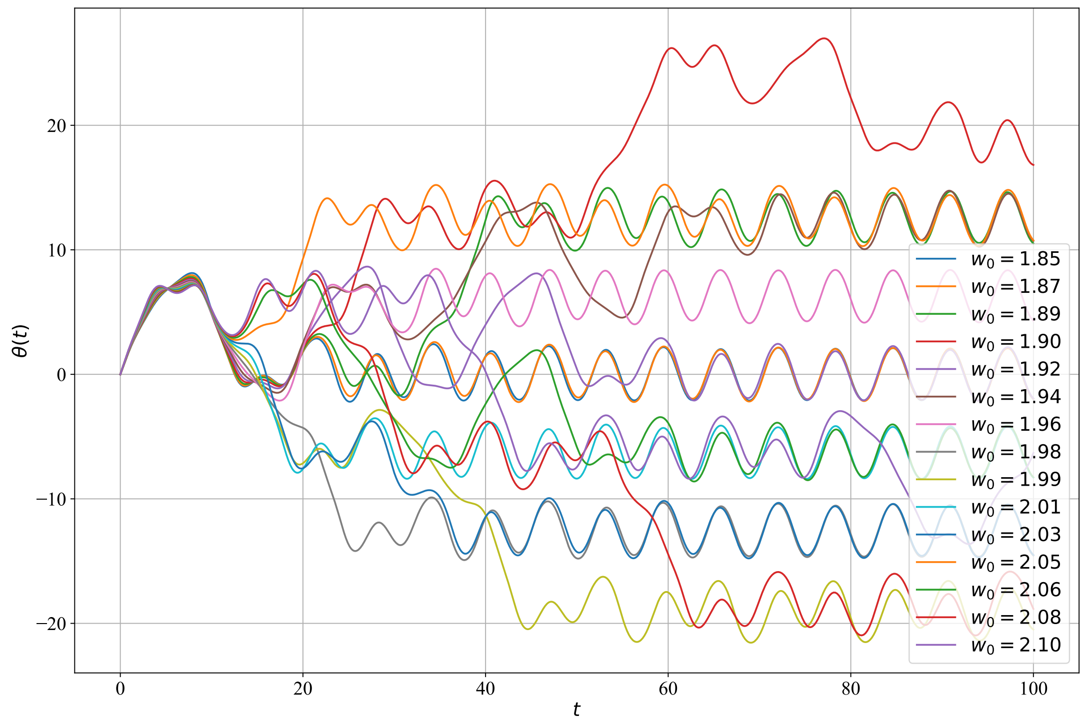

Рис. 3. График траекторий при различных начальных условиях заданной динамической системы для метода Милна-Симпсона

4 Сравнение реализованных методов

В таблице 1 представлено сравнение методов Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона.

Таблица 1. Сравнение методов Рунге-Кутта, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона

Критерий	**Метод Рунге-Кутты**	**Метод Адамса-Моултона**	**Метод Милна-Симпсона**
Тип метода	Явный	Неявный	Предиктор-корректор
Количество шагов	Одношаговый	Многошаговый	Многошаговый
Порядок точности	Четвертого порядка	Четвертого порядка	Четвертого порядка для предиктора и корректора
Вычислительная сложность	Относительно высокая	Высокая из-за необходимости решения нелинейных уравнений	Средняя, требует начальных значений из другого метода
Стабильность	Хорошая для умеренных шагов	Хорошая, особенно для жестких ОДУ	Зависит от стабильности предиктора и корректора
Требования к данным	Начальные условия	Начальные условия + предыдущие значения	Начальные условия + первые несколько шагов из другого метода
Применение	Широко используется для различных типов ОДУ	Подходит для жестких и нестационарных ОДУ	Эффективен для долгосрочных интеграций с высокой точностью

Принципиальное отличие между методами Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона заключается в их подходе к интегрированию и требованиям к исходным данным. Метод Рунге-Кутты — одношаговый и явный, что делает его относительно простым в реализации и широко применимым. В то время как методы Адамса-Моултона и Милна-Симпсона являются многошаговыми и сложнее в реализации из-за необходимости использования предыдущих значений или дополнительных шагов других методов для инициализации.

Однако, все три метода обладают высокой точностью и применимы для решения разнообразных задач ОДУ, включая сложные и жесткие системы. Это обеспечивает их широкую применяемость в области численных методов решения ОДУ.

5 Поиск шага, при котором каждая из схем становится неустойчивой

Определить значение шага, при котором схема становится неустойчивой, можно эмпирически. Для этого задаётся произвольное начальное условие и проводится наблюдение за поведением графиков зависимости $\theta(t)$ при различных шагах. Неустойчивость будет проявляться в виде расходящегося решения.

Анализ графиков для каждого метода при $w_0 = 2.06$ представлен на рисунках 4-6.

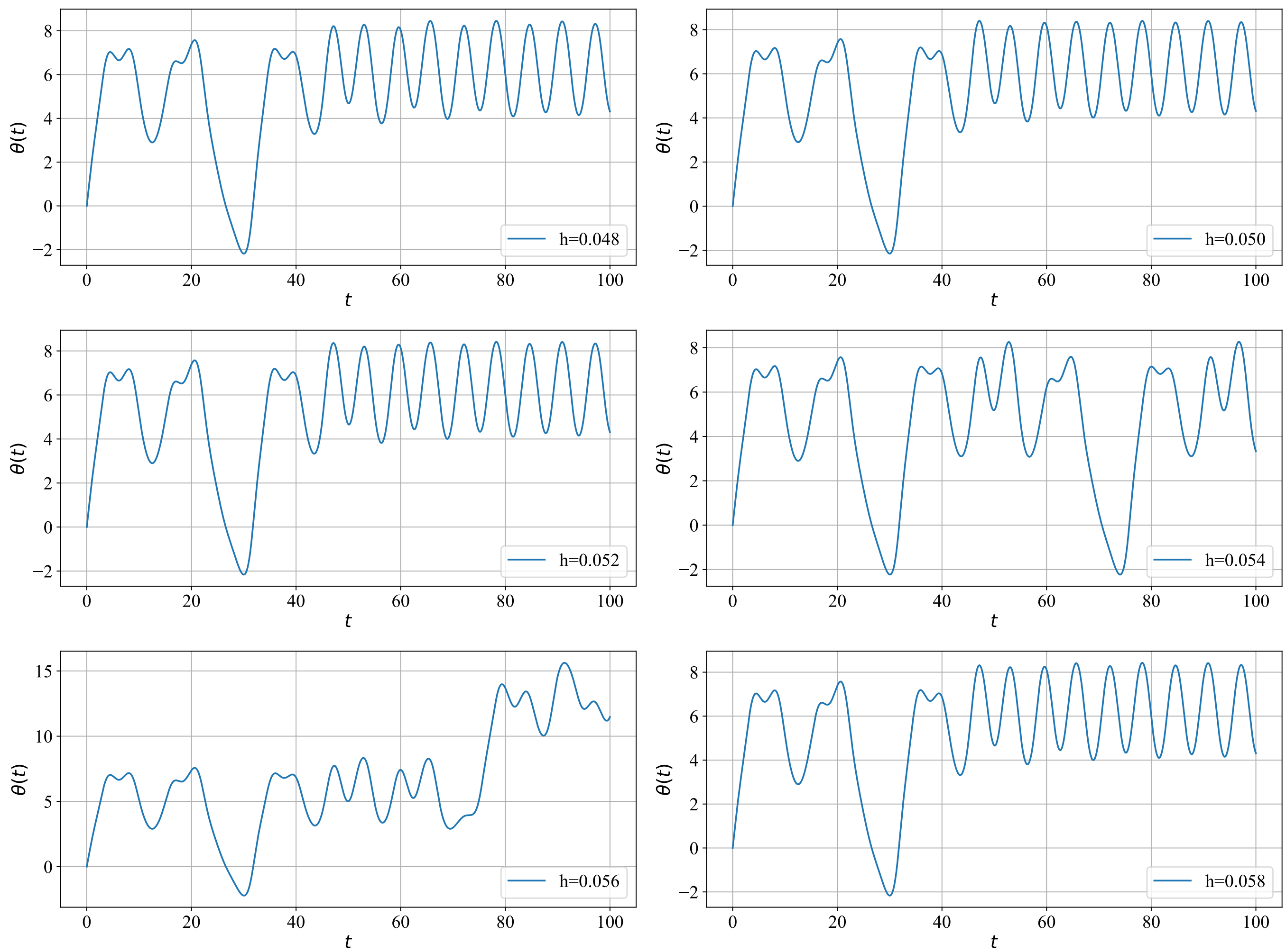

Рис. 4. График траекторий при $h \in [0.048; 0.058]$ и $w_0 = 2.06$ заданной динамической системы для метода Рунге-Кутты

При $h \geq 0.054$ схема метода Рунге-Кутты становится неустойчивой.

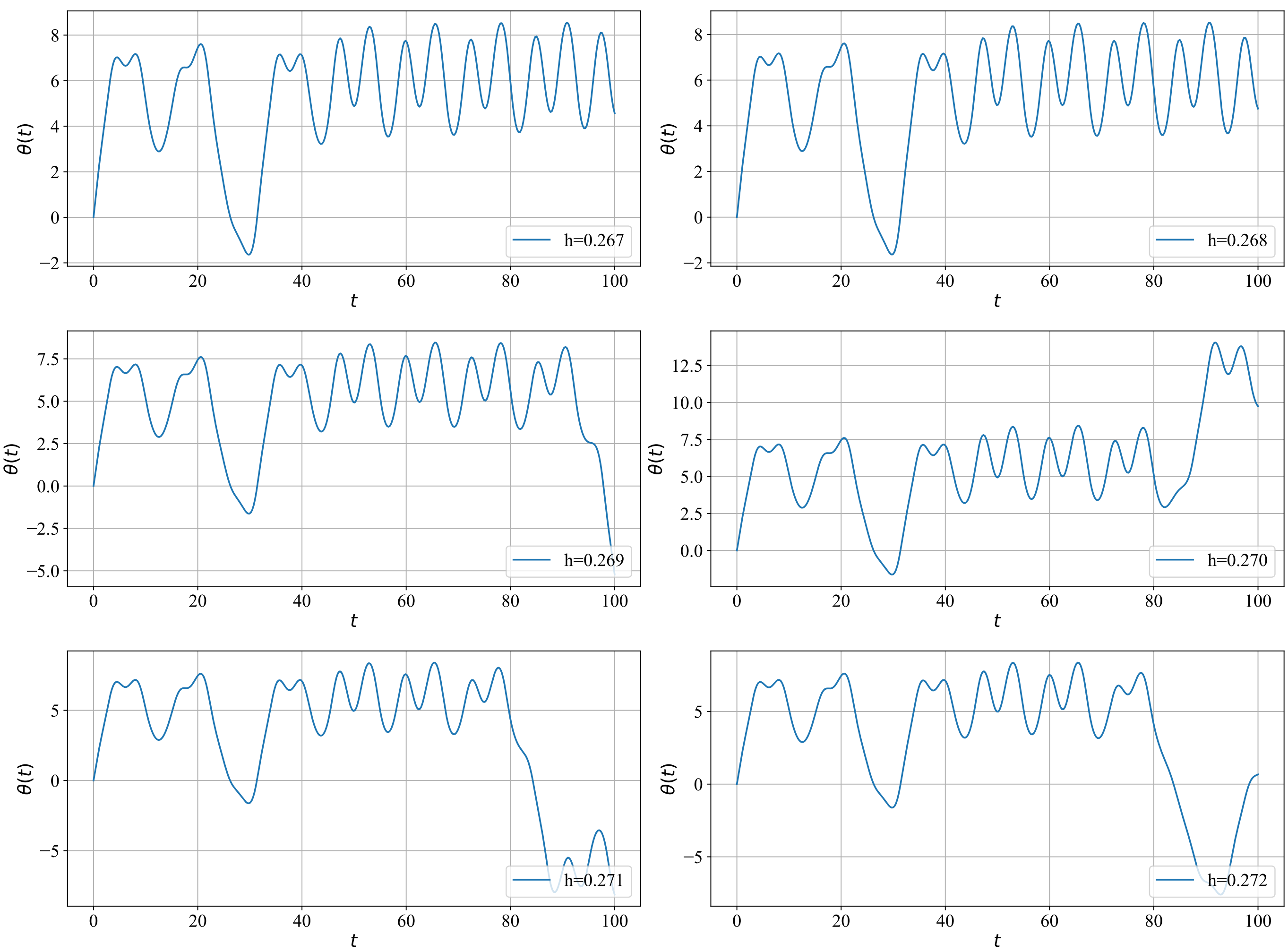

Рис. 5. График траекторий при $h \in [0.267; 0.272]$ и $w_0 = 2.06$ заданной динамической системы для метода Адамса-Моултона

При $h \geq 0.269$ схема метода Адамса-Моутона становится неустойчивой.

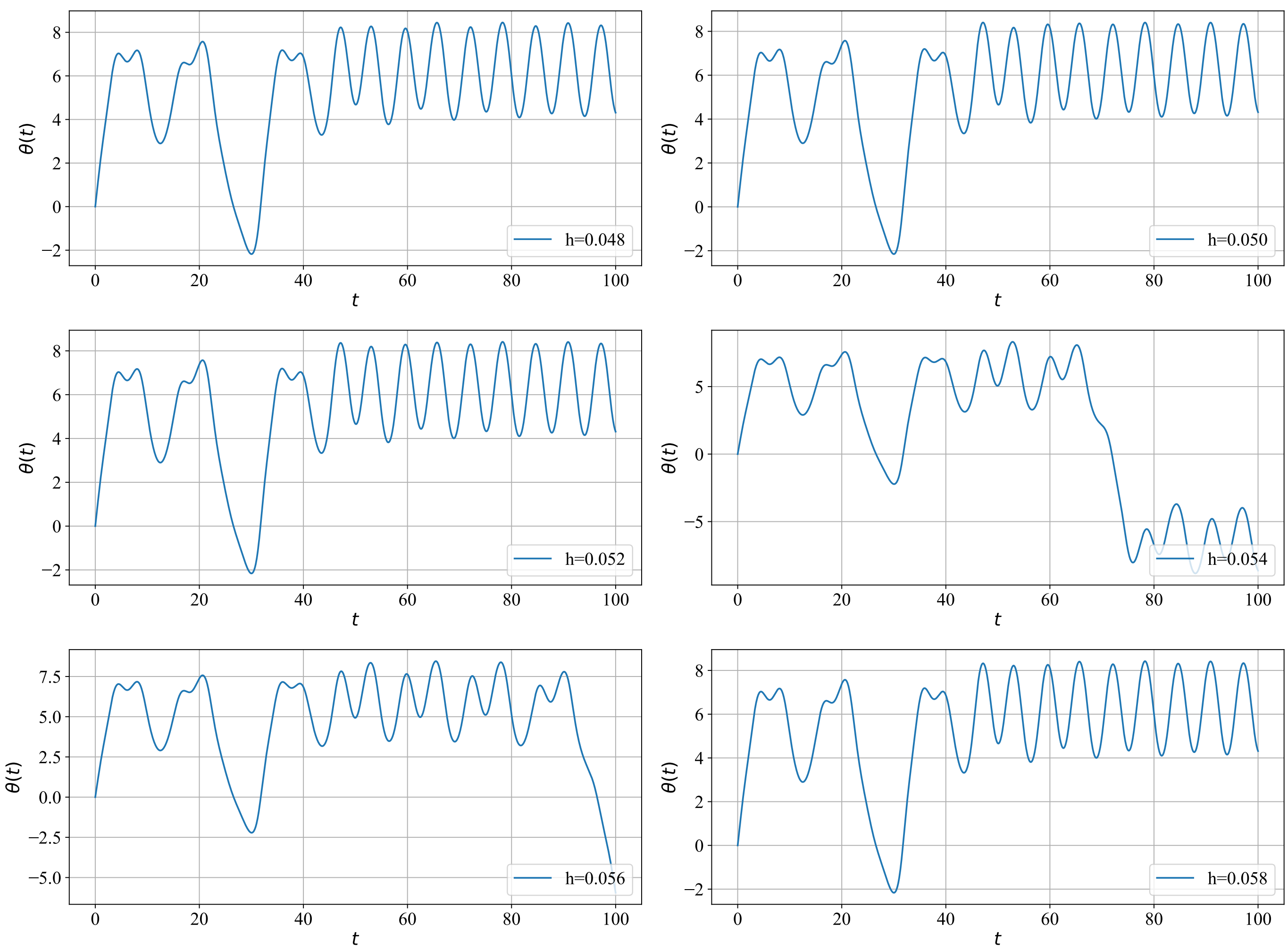

Рис. 6. График траекторий при $h \in [0.048; 0.058]$ и $w_0 = 2.06$ заданной динамической системы для метода Милна-Симпсона

При $h \geq 0.054$ схема метода Милна-Симпсона становится неустойчивой.

6 Получение фазовых траекторий при различных начальных условиях

Фазовая траектория в динамических системах представляет собой путь, который описывает состояние системы в фазовом пространстве с течением времени. В контексте колебательной системы, такой как маятник, фазовая траектория отображает угол отклонения (θ) и его производную по времени $(\frac{d\theta}{dt})$, предоставляя полную картину динамического поведения системы.

На двумерных графиках, представленных на рисунках 7-9, различными цветами выведены фазовые траектории при различных начальных условиях.

- для метода Рунге-Кутты:

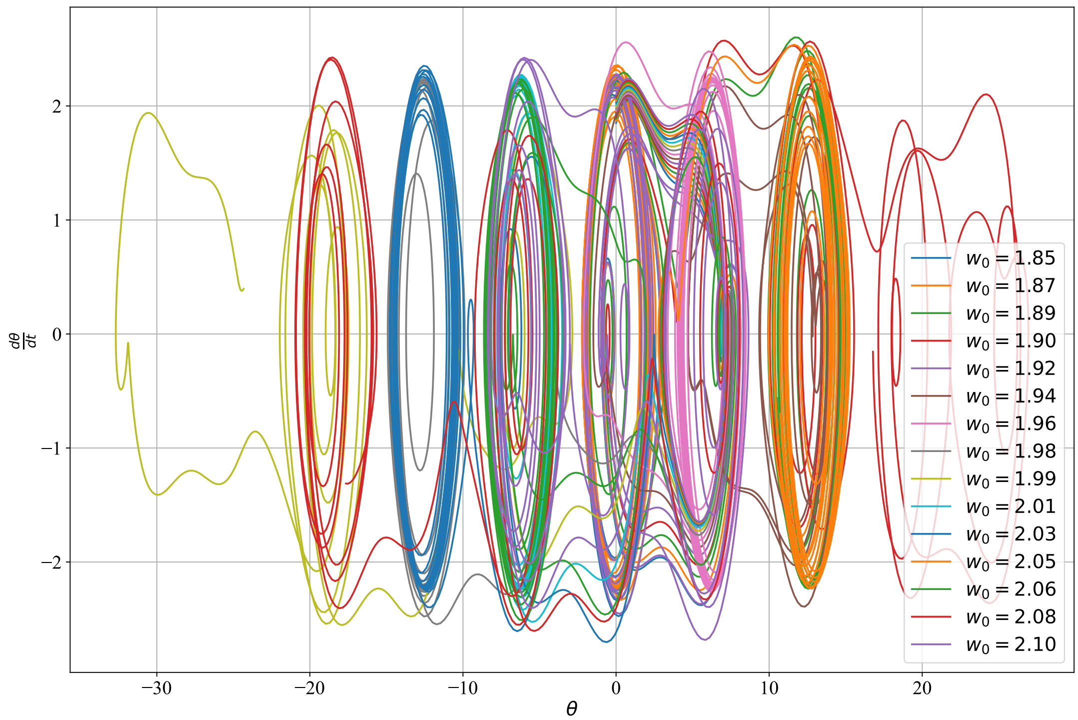

Рис. 7. График фазовых траекторий при различных начальных условиях заданной динамической системы для метода Рунге-Кутты

• для метода Адамса-Моултона:

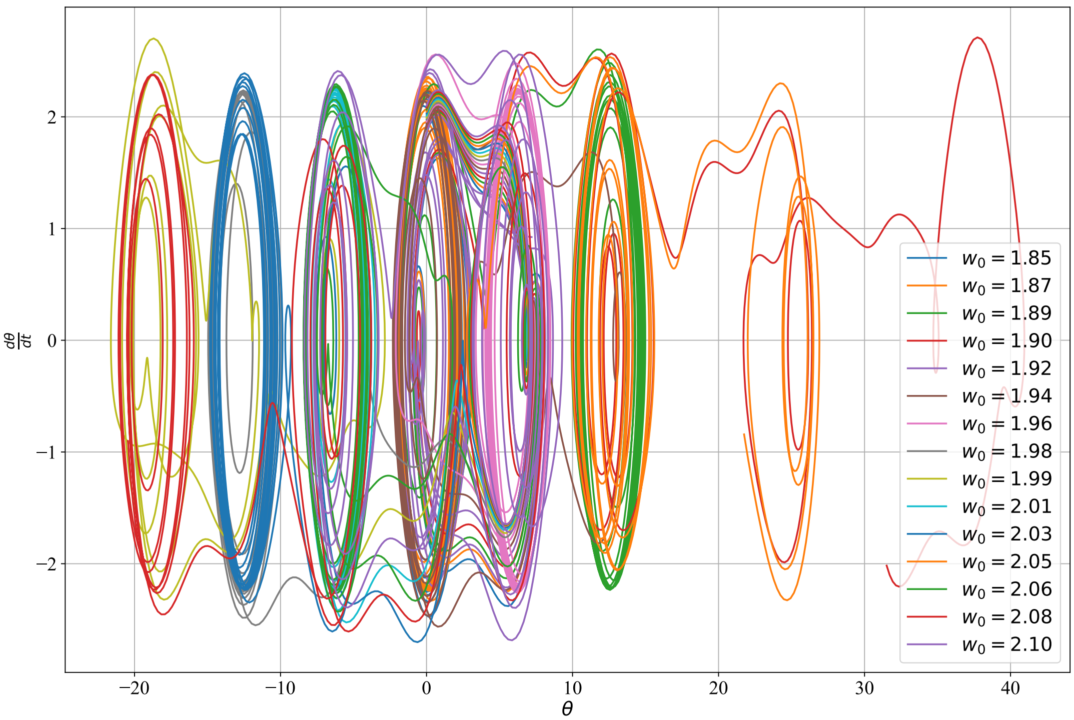

Рис. 8. График фазовых траекторий при различных начальных условиях заданной динамической системы для метода Адамса-Моултона

- для метода Милна-Симпсона

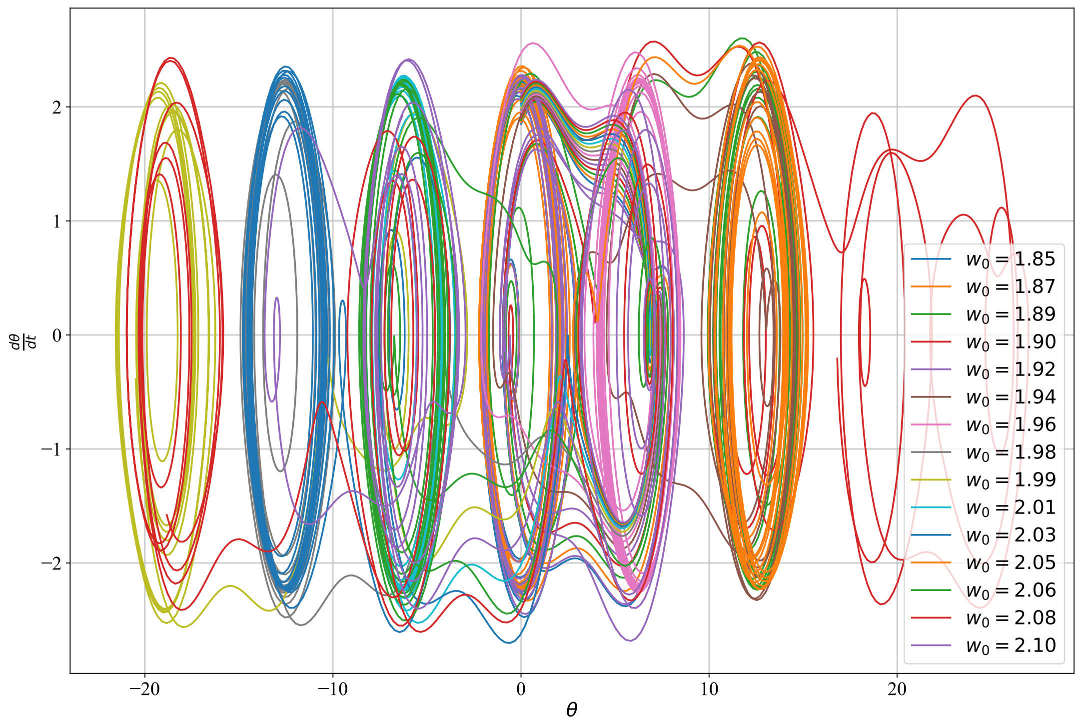

Рис. 9. График траекторий при различных начальных условиях заданной динамической системы для метода Милна-Симпсона

Фазовые траектории показывают различные динамические режимы системы, включая затухающие колебания и более сложные, возможно, хаотические режимы. Это подчеркивает сложность и нелинейность рассматриваемой системы.

7 Получение фазовых траекторий при зафиксированном начальном условии

Для анализа чувствительности систем к начальным условиям рассматриваются графики фазовых траекторий при зафиксированных начальных условиях, представленные на рисунках 10 и 11.

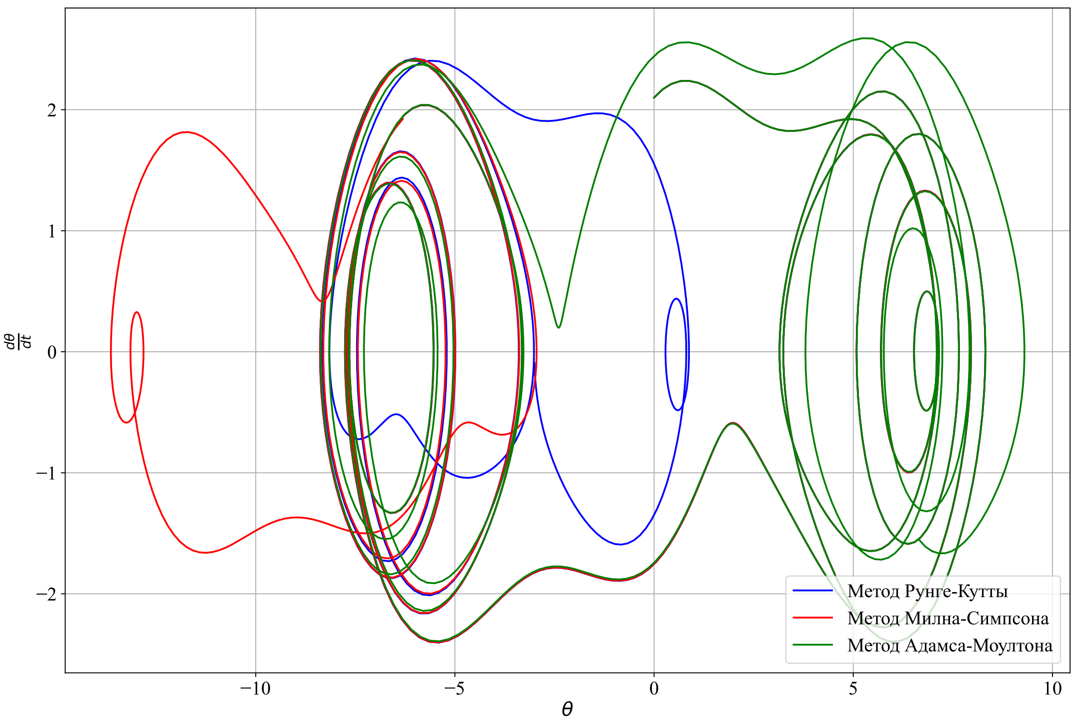

Рис. 10. График траекторий при зафиксированном начальном условии $w_0 = 2.1$ заданной динамической системы для метода Милна-Симпсона

Различия в траекториях свидетельствуют о чувствительности системы к выбранному методу или о потенциальных ограничениях применяемых алгоритмов.

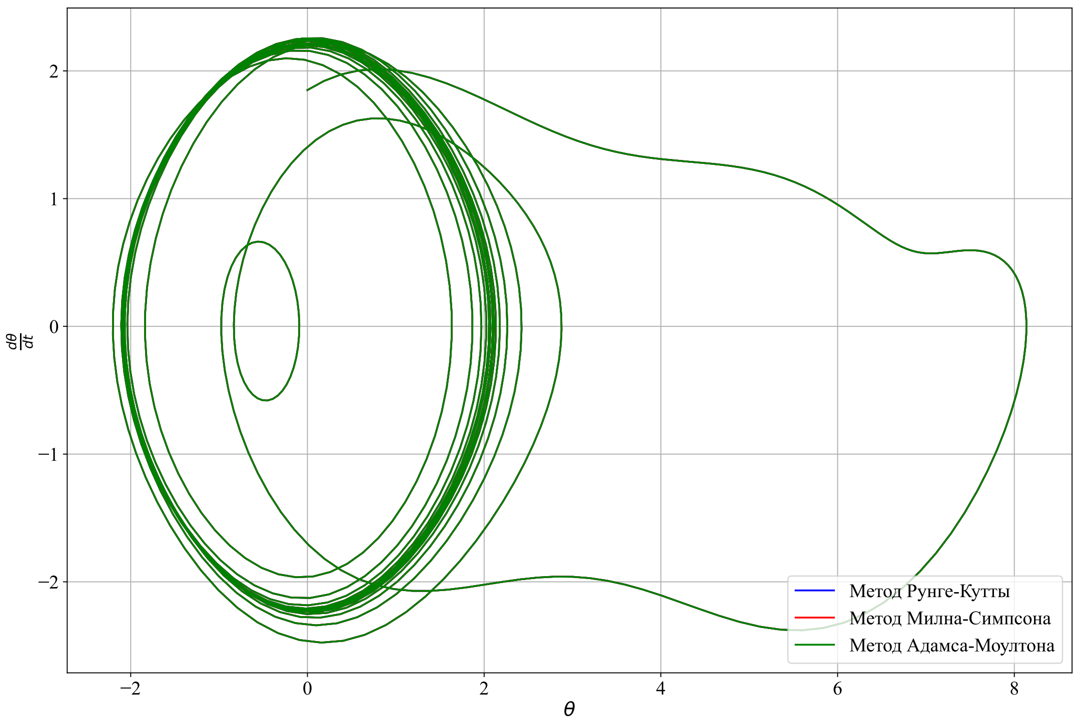

Рис. 11. График траекторий при зафиксированном начальном условии $w_0 = 1.85$ заданной динамической системы для метода Милна-Симпсона

Совпадения фазовых траекторий указывают на высокую надежность и точность этих методов для данной динамической системы.

8 Анализ схем с точки зрения времени вычислений

С помощью графиков, представленных на рисунке 12, проанализировано время выполнения каждой схемы при различных шагах.

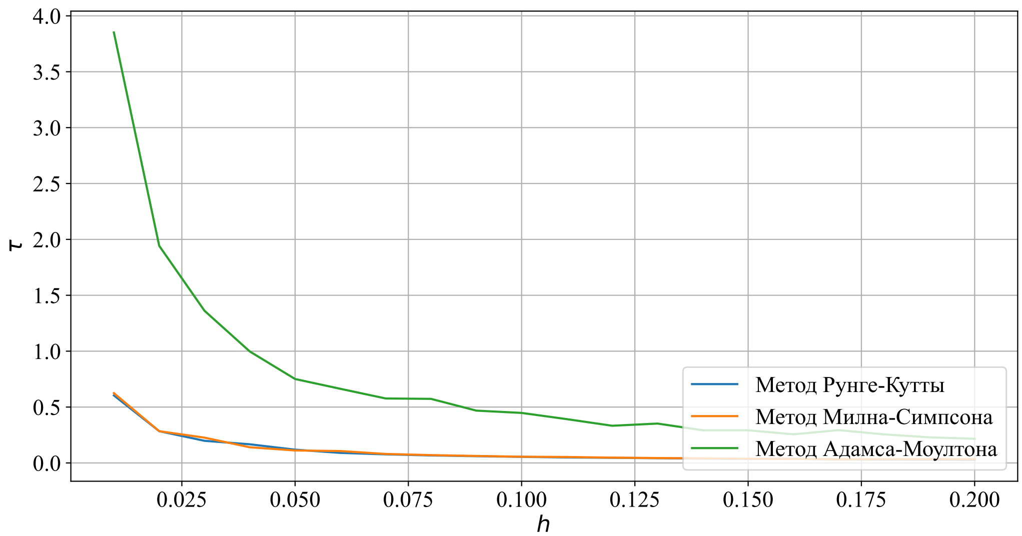

Рис. 12. График зависимости времени вычислений τ от шага h для каждой из схем

Самой затратной схемой с точки зрения времени вычислений является метод Адамса-Моултона, а наименее затратными — методы Милна-Симпсона и Рунге-Кутты.

Метод Адамса-Моултона требует больше времени для вычислений из-за его неявного характера, который подразумевает необходимость итеративного решения нелинейного уравнения на каждом шаге. В отличие от этого, методы Рунге-Кутты и Милна-Симпсона являются явными, что обеспечивает более прямолинейный и быстрый процесс вычислений.

9 Характеристика асимптотических состояний

Асимптотическое состояние решения дифференциального уравнения в зависимости от начальных условий описывает поведение системы и указывает на различные режимы колебаний или стабилизацию системы.

Физический смысл асимптотических состояний можно описать следующим образом:

1. Затухающие колебания: если решение сходится к некоторому постоянному значению или серии значений, это может указывать на затухающие колебания, где амплитуда колебаний уменьшается со временем из-за демпфирования (например, из-за трения или сопротивления среды).

2. Стабилизация: если решение сходится к постоянной величине, это может указывать на стабилизацию системы в определенном состоянии.

3. Постоянные колебания: если решение колеблется между определенными значениями, это может указывать на установившиеся колебания системы с постоянной

амплитудой и частотой.

Заключение

В ходе лабораторной работы были выполнены следующие задачи:

1. Выполнено преобразование ОДУ 2-го порядка (1) в систему ОДУ 1-го порядка (2).
2. Реализованы три численных метода: явный метод Рунге–Кутта 4-го порядка, неявный трёхшаговый метод Адамса–Моултона и метод Милна–Симпсона (схема предиктор-корректор).
3. Найдены траектории заданной динамической системы с шагом $h = 0.1$ при 15 различных начальных условий. Полученные траектории для каждого метода визуализированы на графиках (рисунки 1- 3).
4. Проанализированы принципиальные отличия и сходства реализованных методов. Результаты анализа приведены в таблице 1.
5. Исследована устойчивость каждой из схем в зависимости от шага вычисления. Для каждого метода выбран шаг, при котором схема становится неустойчивой:
   - $h \geq 0.054$ для метода Рунге-Кутты,
   - $h \geq 0.269$ для метода Адамса-Моултона,
   - $h \geq 0.054$ для метода Милна-Симпсона.
6. Получены графики фазовых траекторий при различных начальных условиях (рисунки 7-9).
7. Получены графики фазовых траекторий при различных начальных условиях (рисунки 10 и 11).
8. Оценены временные затраты на вычисления для каждой схемы (рисунок 12).
9. Проведено исследование асимптотических состояний системы в зависимости от начальных условий, что дало возможность понять физический смысл наблюдаемых явлений.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 42–71. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.
2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Першин А.Ю., Соколов А.П., Гудым А.В. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2023. С. 24–25. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Рогалева Ю.А.Отчет о выполнении лабораторной работы №3 по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2023. — 23 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка: *аспирант кафедры РК-6, Гудым А.В.*

Решение и вёрстка: *студент группы РК6-52Б, Рогалева Ю.А.*

2023, осенний семестр