Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №2

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Рогалева Юлия Александровна
Группа:	РК6-52Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Использование аппроксимаций для численной оптимизации

Студент	____________ подпись, дата	Рогалева Ю.А. Фамилия, И.О.
Преподаватель	____________ подпись, дата	____________ Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Использование аппроксимаций для численной оптимизации

Задание

уМетоды аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки $(x, y) = (0, 0)$ достигнет точки $(x, y) = (a, y_a)$ под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось y направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая *y(x)*, которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx, \tag{1}$$

где g обозначает ускорение свободного падения, и $y'(x) = dy/dx$.

Представленная задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $t \in [0; T]$ и $C,\ T$ являются константами, значения которых находятся из граничного условия.

В базовой части задания требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается $a = 2$ и $y_a = 1$. Константы циклоиды для этого граничного условия равны $C = 1.03439984, T = 1.75418438$.

1 Задание

Требуется (базовая часть):

1. Разработать функции `composite_simpson(a, b, n, f)` и `composite_trapezoid(a, b, n, f)` численного интегрирования некоторой функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций соответственно.

2. Рассчитать интеграл (1) для функции *y(x)*, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений $n \in [3; 9999]$.

3. На одной координатной плоскости постройте log-log графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.

4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.

5. Для обеих формул сравните известные аналитические порядки точности с порядками точности, получаемыми с помощью соответствующих графиков. Обоснуйте алгоритм сравнения.

6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для первой или второй формулы, минимизирующей достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ

   Требуется (продвинутая часть):

   (a) Используя кусочно-линейную интерполяцию с равноудалёнными узлами, преобразовать задачу о минимизации функционала (1) к полудискретной форме, где аргументами минимизации будут параметры кусочно-линейной интерполяции.

   (b) Далее, используя составную формулу Симпсона, преобразовать задачу к полностью дискретной форме.

   (c) Решить полученную задачу минимизации, используя различные конфигурации дискретизации: с шагом интерполяции и шагом интегрирования от 10^{-3} до 1.

   (d) Используя log-log графики и линии уровня, оценить зависимость погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: разработка и применение методов численного интегрирования и кусочно-линейной интерполяции для решения задачи о брахистохроне.

1 Разработка функций численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций

Численное интегрирование — это способ вычисления определённого интеграла по приближённой формуле, являющейся суммой взвешенных значений функции. В данной лабораторной работе рассматриваются два метода численного интегрирования: с помощью составной формулы Симпсона и с помощью составной формулы трапеций. Их реализация представлена в функциях composite_simpson(a, b, n, f) и composite_trapezoid(a, b, n, f) соответственно (листинг 1).

Теорема 1
Пусть $x_i = a + (i-1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$ и $i = 1, \ldots, n+1$, где n — четное число. Тогда существует такое $\xi \in (a;b)$ для $f(x) \in C^4[a;b]$, что составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi). \tag{3}$$

Теорема 2
Пусть $x_i = a + (i-1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$ и $i = 1, \ldots, n+1$, где $n \in \mathbf{N}$. Тогда существует такое $\xi \in (a;b)$ для $f(x) \in C^2[a;b]$, что составная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + f(x_{n+1})\right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \text{ [1]}. \tag{4}$$

Листинг 1. Реализация функций численного интегрирования с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций соответственно

```python
def composite_simpson(a, b, n, f):
    h = (b - a) / (n - 1)
    points = np.linspace(a, b, n)
    f_values = f(points)
    result = f_values[0] + f_values[-1]
    result += 2 * np.sum(f_values[2:-1:2])
    result += 4 * np.sum(f_values[1:-1:2])
    return result * h / 3


def composite_trapezoid(a, b, n, f):
    h = (b - a) / (n - 1)
    points = np.linspace(a, b, n)
    f_values = f(points)
    result = np.sum(f_values) - 0.5 * (f_values[0] + f_values[-1])
    return result * h
```

2 Вычисление интеграла функции кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций

Так как в условии рассматривается параметрическое описание кривой (2), то для расчёта интеграла (1) необходимо перейти от интегрирования функции y по x к интегрированию по t. Для этого нужно провести следующие преобразования:

(a) Найти производную функции, заданной параметрическим способом:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{5}$$

(b) Подставить (2) в (5):

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{C(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t))'}{C(t - \frac{1}{2}\sin(2t))'} = \frac{\sin(2t)}{1 - \cos(2t)}. \tag{6}$$

(c) Выполнить замену переменных с учетом (2) и (5), $t \in [0;T]$:

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^T \sqrt{\frac{1 + (\frac{y'(t)}{x'(t)})^2}{2gy(t)}}\, x'(t)dt. \tag{7}$$

(d) Подставить (5) в (7):

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^T \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sin(2t)}{1-\cos(2t)}\right)^2}{2gC(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t))}}\, C(1 - \cos(2t))dt =$$
$$= \int_0^T \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ctg}^2(t)}{gC(1 - \cos(2t))}}\, C(1 - \cos(2t))dt = \sqrt{\frac{2C}{g}} \int_0^T dt. \tag{8}$$

(e) Вычислить точное значение интеграла из выражения (8):

$$T\sqrt{\frac{2C}{g}}. \tag{9}$$

3 Построение log-log графиков зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования

Абсолютной погрешностью приближённого значения a^* называют величину $\Delta(a^*)$, которая определена как

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|, \tag{10}$$

где a — точное значение [1].

Приближенное значение определяется с помощью функций composite_simpson(a, b, n, f) и composite_trapezoid(a, b, n, f), а точное значение вычисляется по формуле (9).

На одной координатной плоскости построены log-log графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для составных формул Симпсона и трапеций построены (рисунок 1).

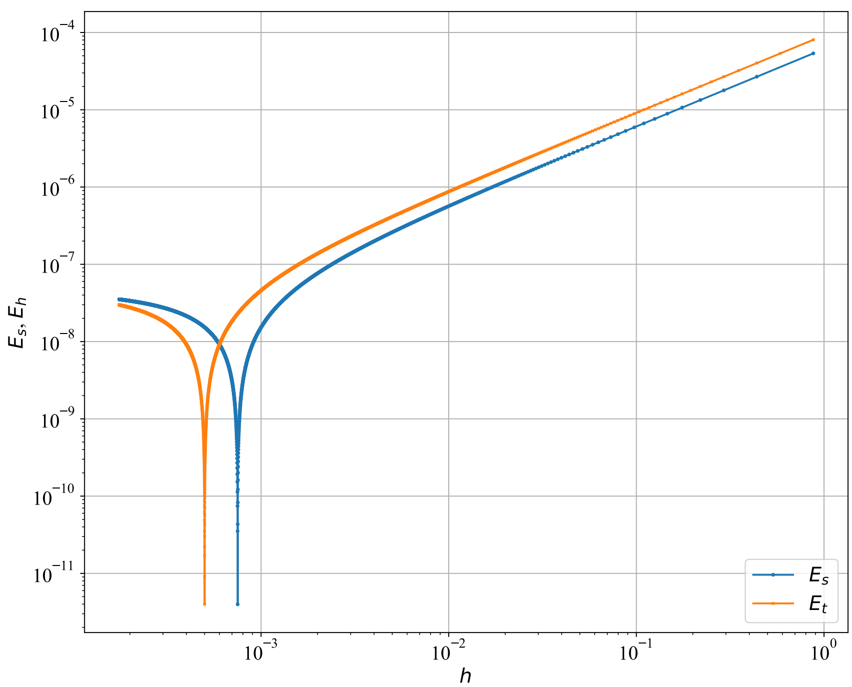

Рис. 1. Графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования с помощью составных формул Симпсона (E_s) и трапеций (E_t) от шага интегрирования (h)

4 Определение порядка точности численного метода

Определение порядка точности численного метода на log-log координатной плоскости основывается на анализе наклона линии, которая представляет зависимость ошибки от размера шага.

Уравнение такой линии будет иметь вид:

$$log(error) = k \cdot log(h) + C,$$

где k — наклон линии, а C — константа.

Код, вычисляющий коэффициент наклона линии, представлен в листинге 2.

Листинг 2. Определение порядка точности формулы путём вычисления наклона линии

```python
def calculate_slope(x, y):
    log_x = np.log(x)
    log_y = np.log(y)
    return (log_y[-1] - log_y[0]) / (log_x[-1] - log_x[0])
slope_trapezoid = calculate_slope(steps, trapezoid_errors)
slope_simpson = calculate_slope(steps, simpson_errors)
```

Ниже представлены порядки точности для составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций, вычисленные с помощью кода, представленного в листинге 2:

```
Порядок точности составной формулы Симпсона: 0.9035837674011571
Порядок точности составной формулы трапеций: 0.9740216873336017
```

5 Сравнение порядков точности

Аналитические порядки точности можно узнать из формул (3) и (4). Так, для составной формулы Симпсона он пропорционален $O(h^4)$, а для составной формулы трапеций — $O(h^2)$. Сравнение известных аналитических порядков точности с порядками точности, получаемыми в результате работы листинга 2, представлено на рисунке 2.

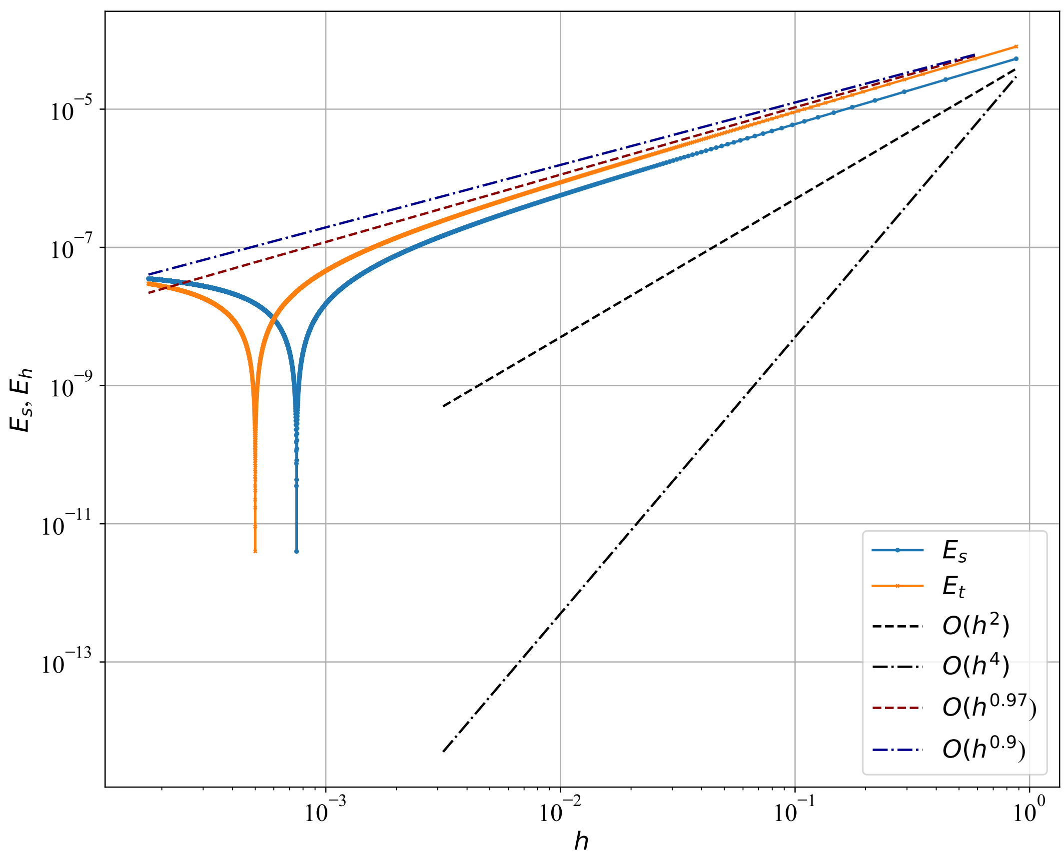

Рис. 2. Графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования (E_s, E_t) от шага интегрирования (h) с прямыми, определяющими порядки точности формул

6 Существование оптимального шага интегрирования

В ходе анализа графиков зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для составных формул Симпсона и трапеций можно заметить, что полученные и аналитические порядки точности не совпадают. Это связано с тем, что $\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}} \notin C^2[0;a]$ и $\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}} \notin C^4[0;a]$.

Полная погрешность округления, накапливаемая составной формулой Симпсона, может быть оценена следующим образом:

$$e(h) = \frac{h}{3}\left[e_1 + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} e_{2i+1} + 4\sum_{i=1}^{n/2} e_{2i} + e_{n+1}\right]$$
$$\le \frac{h}{3}\left[|e_1| + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} |e_{2i+1}| + 4\sum_{i=1}^{n/2} |e_{2i}| + |e_{n+1}|\right],$$

где $f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + e_i$, $i = 1, \dots, n+1$, e_i — погрешность округления.

Пусть погрешность округления ограничена машинным эпсилон $|e_i| \le \epsilon$, $i = 1, \dots, n+1$. Тогда полная погрешность оценивается как:

$$e(h) \le \frac{h\epsilon}{3}\left[1 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 4\frac{n}{2} + 1\right] =$$
$$= nh\epsilon =$$
$$= (b-a)\epsilon \ [1].$$

Оптимальный шаг интерполяции для составной формулы Симпсона равен $h_{s-opt} \approx 5 \cdot 10^{-4}$, а для составной формулы трапеций — $h_{t-opt} = 7.5 \cdot 10^{-4}$.

7 Преобразование задачи о минимизации функционала к полудискретной форме

Формула кусочно-линейной интерполяции для функции $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$:

$$F(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i),$$

где $x \in [x_i; x_{i+1}]$.

Тогда преобразование задачи о минимизации функционала (1) к полудискретной форме примет вид:

$$\mathcal{F}[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}}dx \approx \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{1 + (F'(x))^2}{2gF(x)}}dx,$$

где n — количество интерполяционных узлов.

8 Преобразование задачи о минимизации функционала к полностью дискретной форме

С помощью составной формуле Симпсона (3) можно преобразовать задачу о минимизации функционала (1) к полностью дискретной форме:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\sqrt{\frac{1+(F'(x))^2}{2gF(x)}}dx = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h}{3}\Bigg[\sqrt{\frac{1+(F'(x_1))^2}{2gF(x_1)}}+ + 2\sum_{i=1}^{n/2-1}\sqrt{\frac{1+(F'(x_{2i+1}))^2}{2gF(x_{2i+1})}} + 4\sum_{i=1}^{n/2}\sqrt{\frac{1+(F'(x_{2i}))^2}{2gF(x_{2i})}}+ + \sqrt{\frac{1+(F'(x_{n+1}))^2}{2gF(x_{n+1})}}\Bigg] - \frac{(x_{i+1}-x_i)h^4}{180}f^{(4)}(\xi), \quad (11)$$

где $x_i = a + (i-1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$ и $i = 1, \ldots, n+1$, n — чётное число.

9 Решение задачи минимизации с использованием различных конфигураций дискретизации

Чтобы решить задачу минимизации для (11) нужно использовать различные конфигурации дискретизации для выбора оптимальных. Оценить зависимость погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования можно с помощью вычисления евклидова расстояния для точек $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $q = (q_1, \ldots, d_n)$:

$$d(p,d) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + \cdots + (p_n-q_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(p_k-q_k)^2}.$$

Из-за высокой вычислительной сложности необходимо изменить конфигурации дискретизации: выбирать шаг интегрирования и шаг интерполяции от $10^{0.5}$ до 10.

Код, представленный в листинге 3, позволяет вычислить абсолютную погрешность в зависимости от шага интегрирования и шага интерполяции.

Листинг 3. Решение задачи минимизации с использованием различных конфигураций дискретизации

```
N_range, n_range = np.logspace(0.5, 1, 30, dtype=int), np.logspace(0.5, 1, 30,
    dtype=int)
interp_steps, simpson_steps = (b - a) / (N_range - 1), (b - a) / (n_range - 1)
errors = np.zeros((len(N_range), len(n_range)))
for i, N in enumerate(N_range):
    x_nodes, y_nodes = np.linspace(a, b, N), np.linspace(y_a, y_b, N)
    for j, n in enumerate(n_range):
        optim_result = get_optim_nodes_linear(y_nodes, y_a, y_b, x_nodes, n)
        num_integral = functional_linear(optim_result.x, x_nodes, n)
        error = l2_norm(num_integral, exact_value)
        errors[i, j] = error
```

10 Оценка зависимости погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования

На рисунке 3 представлена поверхность, которая характеризует зависимость ошибки решения при различных конфигурациях шагов интерполяции и шагов интегрирования.

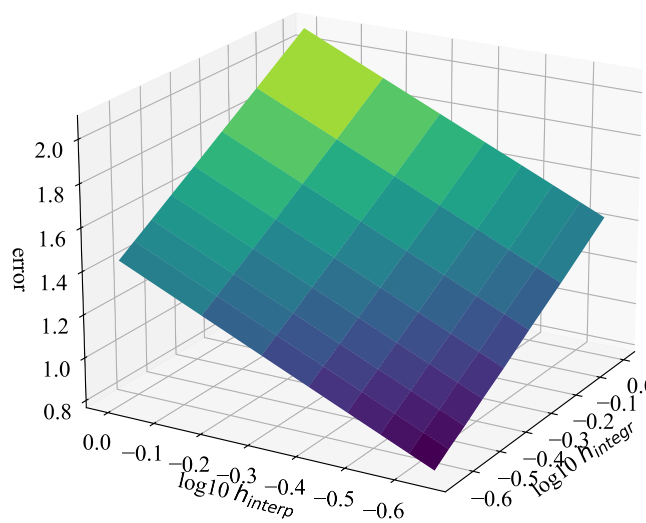

Рис. 3. График поверхности, характеризующий зависимости ошибки решения (error) от шагов интегрирования h_{integr} и интерполяции h_{interp}

Для большей наглядности на рисунке 4 изображены линии уровня, соответствующие графику, представленному на рисунке 3.

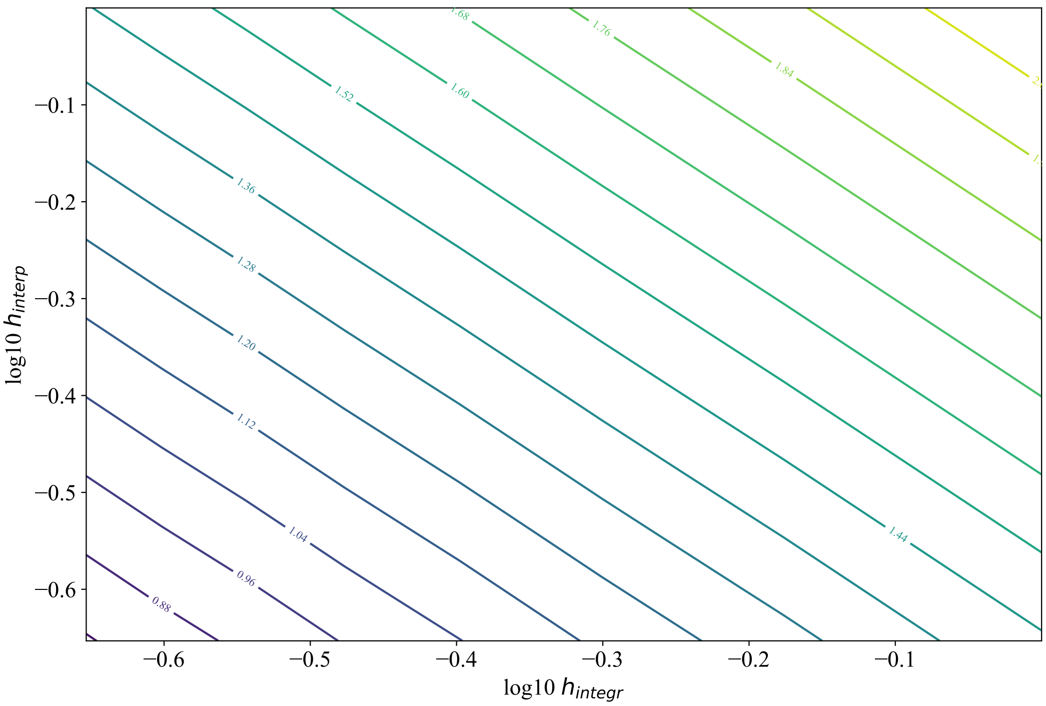

Рис. 4. График линий уровня, характеризующий зависимости ошибки решения (error) от шагов интегрирования h_{integr} и интерполяции h_{interp}

Из рисунков 3 и 4 видно, что при увеличении шагов интерполяции и интегрирования погрешность решения возрастает.

Заключение

В ходе лабораторной работы были выполнены следующие задачи:

(a) Разработаны функции `composite_simpson(a, b, n, f)` и `composite_trapezoid(a, b, n, f)` численного интегрирования некоторой функции f на интервале $[a; b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона (3) и составной формулы трапеций (4) соответственно.

(b) Рассчитан интеграл (1) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений $n \in [3; 9999]$ (7).

(c) На одной координатной плоскости построены log-log графики зависимостей абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул (рисунок 1).

(d) Определены порядки точности формулы по графику (рисунок 1) с помощью анализа наклона линии. Порядок точности составной формулы Симпсона равен 0.9035837674011571, составной формулы трапеций — 0.9740216873336017.

(e) Проведено сравнение аналитических порядков точности с порядками точности, получаемыми с помощью соответствующих графиков (рисунок 2).

(f) Выяснено, что оптимальный шаг для составной формулы Симпсона равен $h_{s-opt} \approx 5 \cdot 10^{-4}$, а для составной формулы трапеций — $h_{t-opt} = 7.5 \cdot 10^{-4}$.

(g) Задача о минимизации функционала (1) преобразована к полудискретной форме, где аргументами минимизации являются параметры кусочно-линейной интерполяции (7).

(h) Задача о минимизации функционала (1) преобразована к полностью дискретной форме, благодаря использованию составной формулы Симпсона (11).

(i) Полученная задача минимизации решена с использованием различных конфигураций дискретизации.

(j) Оценена зависимость погрешности решения от шага интерполяции и шага интегрирования.

Список использованных источников

(a) Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 42–71. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

(b) Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

(c) Першин А.Ю., Соколов А.П., Гудым А.В. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2023. С. 24–25. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Рогалева Ю.А.Отчет о выполнении лабораторной работы №2 по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2023. — 15 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

2023, осенний семестр