第二十屆旺宏科學獎

創意說明書

參賽編號：　SA20-450

作品名稱：多人循環賽局策略之研究

姓名：蔡平樂

關鍵字：納許均衡、不等式、遞迴

壹、研究動機

P_1、P_2、P_3三名參賽者進行決鬥，以 P_1、P_2、P_3的順序，每位參賽者輪流射擊一次，目標自由選擇，被射中的參賽者退出賽局，剩下一人決鬥即結束。P_1、P_2、P_3每次射擊各有$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$的機率命中目標，問這時使 P_1勝率最高的策略為何。令人意想不到的是，此時 P_1的最佳行動是放棄自己的射擊機會，等 P_2、P_3互相射擊過後，P_1再射擊留下來的參賽者。我們好奇若在三名參賽者之命中率不固定為$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$時，他們該如何做出最佳決策?

貳、研究目的

一、分析兩人弓箭手賽局中，參賽者的平衡決策及勝率。
二、分析三人弓箭手賽局的特性。
三、對於一場三人弓箭手賽局，若每個參賽者的命中率給定，分析該場賽局的平衡策略。
四、對於無法得知任何資訊的弓箭手賽局，分析發生機率最高的平衡策略。

參、研究設備

Google Colaboratory、紙、筆、電腦。

肆、研究流程

一、名詞解釋

(一) 三人弓箭手賽局

P_1、P_2、P_3三名參賽者進行弓箭手賽局，依 P_1、P_2、P_3的順序，每位參賽者輪流射擊。每個參賽者能決定「射擊別的參賽者」或「不射擊」。若參賽者 P_i 決定射擊，他有 p_i的機率射中目標，目標若被射中即退出賽局。若被輪到的參賽者已退出或該參賽者策略為「不射擊」則跳過。每位參賽者輪流執行自己的策略，最後留下的參賽者即為獲勝者。

此外我們將只有兩人進行決鬥的弓箭手賽局稱為兩人賽局，每位參賽者只能決定「射擊另一名參賽者」或「不射擊」。

我們本次探討的遊戲增加了一條規則:「在參賽者決定策略後，只要場上的參賽者組成不變，就不能改變自己的策略」。也就是說若 P_1第一次射擊時選擇射擊 P_2，那在他第二次射擊前只要沒有人死亡，P_1就只能選擇射擊 P_2。

此賽局符合馬可夫性質，也就是每個參賽者當下的勝率與時間點無關，只與目前場上的參賽者、目前執行策略的人及各參賽者的策略有關。

(二) 參賽者(Pi)

我們依行動的先後順序，將參與決鬥的參賽者分別以 P_1、P_2、P_3 表示。

(三) 命中率(pi)

我們將 P_1、P_2、P_3 的命中率以 p_1、p_2、p_3 表示。而為了簡化算式，P_1、P_2、P_3 沒射中目標的機率$(1-p_1)$、$(1-p_2)$、$(1-p_3)$我們以 $\overline{p_1}$、$\overline{p_2}$、$\overline{p_3}$表示。

(四) 策略(L)

每位參賽者所選定並執行的策略，必須是「射擊另一名參賽者」或「不射擊」。我們以 $P_i \rightarrow P_j$ 表示「Pi 射擊 Pj」的策略，若 Pi 的策略為不射擊，我們以 $P_i \rightarrow X$ 表示。我們將該場賽局所有參賽者的策略合稱為「策略集」(與集合無關)。以「(P_1的射擊目標,P_2的射擊目標,P_3的射擊目標)」的方式表示。代號為 L。例如一場 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$、P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_3$、P_3 策略為 $P_3 \rightarrow X$ 的賽局，我們就以(2,3,X)表示此賽局的策略集。若我們要表示策略集 L 中某參賽者 Pi 選擇的策略，我們以 L(Pi)表示，例如 L=(2,3,X)的賽局中，$L(P_1)=(P_1 \rightarrow P_2)$，$P_2$、$P_3$ 的策略以此類推。討論兩人賽局時，我們以(P_1 的射擊目標,P_2 的射擊目標)表示兩人賽局的策略集。

(五) 勝率(W)

對於一場策略集為 L 的弓箭手賽局，我們以 $W_{Pi}(L)$表示參賽者 P_i 的勝率。此外，當某策略集中所有參賽者的策略都為「放棄」，我們定義此策略集下個參賽者的勝率皆為 0。也就是 $W_{P1}(X,X,X)=W_{P2}(X,X,X)=W_{P3}(X,X,X)=0$。同樣的，在兩人賽局中，我們定義 $W_{P1}(X,X)=W_{P2}(X,X)=0$。

(八)平衡策略(BL)(Blance poLicy) :

假設任意參賽者 P_i 都能夠知道所有參賽者行動造成的結果，且 $P_i \rightarrow P_j$ 是所有 P_i 的策略中，可使 P_i 在該情況下勝率最大的策略，則 $P_i \rightarrow P_j$ 便稱為 P_i 的局部平衡策略。某些參賽者策略固定、其他參賽者皆選擇其局部平衡策略，所產生的策略集，稱為局部平衡策略集。以更嚴格的定義來說(以三人賽局為例):

1、若 $P_3 \rightarrow P_{t_3}$ 是 P_1、P_2 策略分別固定為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$、$P_2 \rightarrow P_{t_2}$ 時的局部平衡策略 $(t_1,t_2,t_3 \in \{1,2,3,X\})$，則對於任何非 $P_3 \rightarrow P_{t_3}$ 的 P_3 策略 $P_3 \rightarrow P_{t_3'}$$(t_3 \in \{1,2,X\})$，$W_{P3}(t_1,t_2,t_3) > W_{P3}(t_1,t_2,t_3')$，也就是說 P_{t_3} 是所有 P_3 的行動中可使 P_3 勝率最高的一個。也稱(t_1,t_2,t_3)為此時的局部平衡策略集，寫作 $ABL(t_1,t_2)=(t_1,t_2,t_3)$。

2、若 $P_2 \rightarrow P_{t_2}$ 是 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$ 時的局部平衡策略$(t_1,t_2 \in \{1,2,3,X\})$，則對於任何非 $P_2 \rightarrow P_{t_2}$ 的 P_2 策略 $P_2 \rightarrow P_{t_2'}$ $(t_2 \in \{1,3,X\})$，$W_{P2}(t_1,t_2,t_3) > W_{P2}(t_1,t_2',t_3')$ ($P_{t_3'}$是 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$、P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_{t_2'}$時 P_3 的局部平衡策略集)。也可稱(t_1,t_2,t_3)為 P_2 在$(P_1 \rightarrow P_{t_1})$時的平衡策略集，寫作 $ABL(t_1)=(t_1,t_2,t_3)$。

3、若 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$ 是 P_1 的平衡策略$(t_1 \in \{2,3,X\})$，則對於任何非 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$ 的 P_1 策略 $P_1 \rightarrow P_{t_1'}$，$W_{P1}(t_1,t_2,t_3) > W_{P1}(t_1',t_2',t_3)$ ((t_1',t_2',t_3')是$(P_1 \rightarrow P_{t_1'})$時的局部平衡策略集)。也可稱$(t_1,t_2,t_3)$為整場賽局的平衡策略集，寫作 $BL=(t_1,t_2,t_3)$。

四人以上賽局的定義以此類推。事實上，平衡策略就類似於此賽局的納許均衡解。若我們要表示 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$，P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow P_{t_2}$ 之下的局部平衡策略集($t_1,t_2 \in \{X,1,2,3\}$)，我們以 $ABL(t_1,t_2)$表示;若我們要表示 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_{t_1}$ 之下的局部平衡策略集($t_1 \in \{X,2,3\}$)，我們以 $ABL(t_1)$表示。此研究的主要目的便是尋找各種不同命中率組合下的平衡策略

二、兩人賽局

因三人賽局過於複雜，因此我們由分析兩人賽局的平衡策略、勝率開始，再推至三人賽局。以下分析參賽者只有 P_1、P_2 時，兩人的平衡策略及勝率:

(一)策略分析

每位參賽者的策略都只有「不射擊」或「射擊另一名參賽者」兩種。因此我們直接列舉所有狀況，觀察 P_1、P_2 的平衡策略。

1、P_1 策略固定時，P_2 的局部平衡策略

我們分別假設 P_1 的策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 和 $P_1 \rightarrow P_2$，推導 P_2 的局部平衡策略，再合併兩種狀況，推導 P_1 的平衡策略。

(1) P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2 的策略

我們列舉不同的 P_2 策略，再選擇其中使 P_2 勝率較高者:

a、 P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow X$ 時

此時 P_2 的勝率 $W_{P2}(X,X)=0$(由定義)

b、 P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow P_1$ 時

此時 P_2 的勝率 $W_{P2}(X,1)=1$:

由於 P_1 不進行任何行動，因此整場賽局只有 P_2 不斷射擊 P_1。且當時間延長至無限，P_2 必能夠射中 P_1，P_2 必勝。

綜合 a、b，$W_{P2}(X,1) > W_{P2}(X,X)$，$P_2$ 選擇策略 $P_2 \rightarrow P_1$ 的勝率大於 P_2 選擇策略 $P_2 \rightarrow X$ 的勝率。又由定義可知，P_2 的局部平衡策略為所有 P_2 的策略中使 P_2 勝率最高者。P_2 局部平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$。

(2) P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2 的策略

我們列舉不同的 P_2 策略，再選擇其中使 P_2 勝率較高者:

a、P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow X$ 時

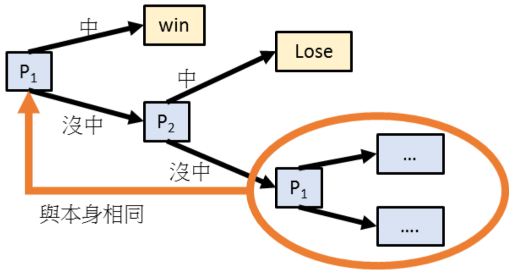
此時 P_2 勝率 $W_{P2}(2,X)=0$:

由於 P_2 不進行任何行動，因此整場賽局只有 P_1 不斷射擊 P_2。且當時間延長至無限，P_1 必能夠射中 P_2，P_1 必勝。

b、P_2 策略固定為 $P_2 \rightarrow P_1$ 時

此時 P_2 勝率 $W_{P2}(2,1)=\frac{\overline{p1}p_2}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_2}}$:

我們將賽局以樹狀圖表示(圖一):



圖(一)

$W_{P_2}(2,1)$即是此樹狀圖中所有分支勝率的總和:

$$W_{P_2}(2,1) = p_1 \times 0 + (1-p_1)p_2 \times 1$$
$$+(1-p_1)(1-p_2) \times W_{P_2}(2,1)$$
$$\rightarrow (1-(1-p_1)(1-p_2)) \times W_{P_2}(2,1) = (1-p_1)p_2$$
$$\rightarrow W_{P_2}(2,1) = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}$$

綜合 a.、b.，當 $0<p_1<1$ 且 $0<p_2$時，$W_{P_2}(2,1)>0=W_{P_2}(2,X)$，$P_2$選擇策略 $P_2 \rightarrow P_1$的勝率大於 P_2選擇 $P_2 \rightarrow X$ 的勝率。又由定義可知，P_2的局部平衡策略為所有 P_2的策略中使 P_2勝率最高者。此時 P_2的局部平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$。

綜合(1)、(2)，無論 P_1策略為何，P_2局部平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$。

2、P_1的平衡策略

由 1、可知無論 P_1策略為何，P_2必選擇策略 $P_2 \rightarrow P_1$。因此我們只要觀察 P_1選擇不同策略下的勝率即可:

(1) P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時:

此時 P_1勝率 $W_{P_1}(X,1)=0$

(2) P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow P_2$時:

此時 P_1勝率 $W_{P_1}(2,1)=\frac{p_1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}$:

P_1、P_2勝率和為 1

$$\rightarrow W_{P_1}(2,1) + W_{P_2}(2,1) = 1$$
$$\rightarrow W_{P_1}(2,1) = 1 - \frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}} = \frac{1-\overline{p_1}\overline{p_2}-\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}} = \frac{p_1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}$$

當$0<p_1$且 $0<p_2$，$W_{P_1}(2,1) = \frac{p_1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}} > 0 = W_{P_1}(X,1)$，$P_1$選擇策略 $P_1 \rightarrow P_2$的勝率大於 P_1選擇策略 $P_1 \rightarrow X$ 的勝率。又由定義可知，P_1平衡策略為所有 P_1策略中使 P_1勝率最高者。P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$。

綜合 1、2，由 P_1、P_2進行的兩人賽局平衡策略集必為(2,1)，即互相射擊。

(二)對手命中率對參賽者勝率的影響

$W_{P_1}(2,1)=\frac{p_1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}$，$\frac{dW_{P_1}(2,1)}{d(p_2)} = \frac{-p_1\overline{p_1}}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})^2}$，在 $0<p_1,p_2<1$ 時，$\frac{dW_{P_1}(2,1)}{d(p_2)}<0$，也就是 P_2命中率越大，P_1勝率越低。

$W_{P_2}(2,1)=\frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}p_2}$，$\frac{dW_{P_2}(2,1)}{d(p_1)}=\frac{-p_2(1-\overline{p_1}p_2)-(\overline{p_1}p_2)(\overline{p_2})}{(1-\overline{p_1}p_2)^2}$，在 $0<p_1,p_2<1$ 時，$\frac{dW_{P_2}(2,1)}{d(p_1)}<0$，

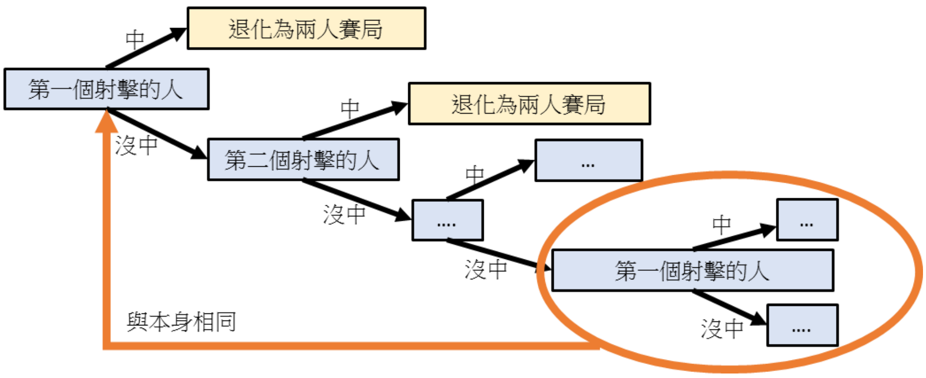
也就是 P_1 命中率越大，P_2 勝率越低。

三、三人賽局

三人賽局不同於二人賽局，參賽者的行動只有「射」或「不射」兩種，還能選擇不同的射擊目標。由於策略的可能性非常多，因此參賽者的勝率也會受到不同策略影響。我們先找出三人賽局計算勝率的方式，並尋找賽局的特性，再尋找平衡策略。

(一)給定策略集後，各參賽者的勝率

對於一場策略集為 L 的弓箭手賽局，我們可以繪出樹狀展開表示賽局進行(圖二)。每個策略為「射擊某人」的參賽者若射擊成功，三人賽局便會退化為兩人賽局。我們可以發現，只要分析賽局的前三回合 (從開始到 P_1 第二次被輪到之間的賽局)，我們便可求出三人的勝率:



圖二，以樹狀圖表示賽局進行

由馬可夫性質我們可得:若三人輪流執行策略一回合後場上依然沒有人退出(此時回到 P_1 的回合)，三人的勝率會與遊戲一開始相同。我們設在策略集為 L 時 Pi 的勝率為 $W_{P_i}(L)$，可列出下式:

$$W_{P_i}(L)=$$

$$\sum_{j=1}^{3}(\text{在第 j 回合退化為兩人的機率})*(\text{在第 j 回合退化後，}P_i\text{的勝率})$$
$$+(\text{前三回合賽局都沒有退化的機率})*W_{P_i}(L)$$

可解得

$$W_{P_i}(L)=\frac{\sum_{j=1}^{3}(\text{在第 j 回合退化為兩人的機率})*(\text{在第 j 回合退化後，}P_i\text{的勝率})}{1-(\text{前三回合賽局都沒有退化的機率})}$$

因此我們只需求得「在第 j 回合退化為兩人賽局的機率」、「在第 j 回合退化後，Pi 的勝率」、「前三回合賽局都沒有退化的機率」在進行合，即可求得勝率一般式(以下分析中的 $j\leq3$):

1.在第 j 回合，且該回合參賽者策略不為「放棄」時，賽局退化的機率

在第 j 回合時執行策略的是參賽者 Pj。若 Pj 策略為「放棄」，則該回合賽局退會的機率必為 0。因此以下僅討論 Pj 策略不為「放棄」時的退化機率:

若輪到他時場上依然有三個參賽者，那在 Pj 前策略為「射擊」的參賽者都不能射中目標

➔策略集為 L，賽局在第 j 回合前場上皆有三名參賽者的機率(以下以 L(Pk)表示參賽者 Pk 在策略集 L 中的策略)=

$$\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}$$

且除了前 j-1 回合中的參賽者不能命中目標，P_j 也須射中目標:

➔策略集為 L，賽局在第 j 回合退化為兩人的機率=

$$\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j$$

2.在第 j 回合退化後，Pi 的勝率

對於不同的 Pj 射擊所轉移至的兩人賽局，Pi 的勝率會有所不同:

(1)若 Pi=Pj，那 Pi 勝率為$\frac{\overline{p_k}*p_i}{1-\overline{p_i}\,\overline{p_k}}$(Pk 是三人中，除了 Pi 與 Pi 射擊目標以外的第三人)。因場上只剩 Pi 與 Pk，且由 Pk 先射擊

(2)若 Pi≠Pj 且 Pj 的射擊目標是 Pi，那 Pi 在轉移後的賽局勝率為 0(因為 Pi 已退出賽局)

(3)若 Pi≠Pj 且 Pj 的射擊目標不是 Pi，那 Pi 在轉移後的賽局勝率為$\frac{p_i}{1-\overline{p_i}\,\overline{p_j}}$。因場上只剩 Pi 與 Pj，且由 Pi 先射擊

我們可知(前三回合賽局都沒有退化的機率)=$\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}$。且結合

1.、2.的內容代入 $W_{Pi}(L)=\frac{\sum_{j=1}^{3}(\text{在第 j 回合退化為兩人的機率})*(\text{在第 j 回合退化後，}P_i\text{的勝率})}{1-(\text{前三回合賽局都沒有退化的機率})}$

可得一般式為:

$W_{Pi}(L)=$

$$\frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\begin{cases}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)\neq(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)=(P_j\to X)\end{cases}\right)*\left(\begin{cases}\frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_i}\,\overline{p_k}} & P_j=P_i\\ 0 & L(P_j)=(P_j\to P_i)\\ \frac{p_i}{1-\overline{p_i}\,\overline{p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

其中 P_k 為 P_i、P_i 射擊目標以外的第三名參賽者

(二)三人賽局的特性

我們發現三人賽局中，無論 P_1,P_2,P_3 的數值，都會有一些共同的特性:

1、只有一人策略改變時，勝率的大小關係

對於兩組 P_1,P_2 策略相同的策略集$(t_1,t_2,1)$與$(t_1,t_2,2)$$(t_1,t_2\in\{X,1,2,3\})$:

(1)若$p_1 < p_2$，則 $W_{P3}(t_1,t_2,1)<W_{P3}(t_1,t_2,2)$。

(2)若$p_1 > p_2$，則 $W_{P3}(t_1,t_2,1)>W_{P3}(t_1,t_2,2)$。

簡單來說，如果 P_1、P_2 策略固定，P_3 射擊命中率較大的目標時，P_3 的勝率比 P_3 射命中率較低的目標時的勝率大。例如在 $p_1<p_2$ 時，$W_{P3}(X,3,1)$必小於 $W_{P3}(X,3,2)$。證明由於篇幅因素，放置於附錄一。

而對於 P_1 與 P_2，我們也可發現類似的特性:

若有兩組不同策略$(2,t_2,t_3)$與$(3,t_2,t_3)$$(t_2,t_3\in\{X,1,2,3\})$:

(1)若$p_2 < p_3$，則 $W_{P1}(2,t_2,t_3)<W_{P1}(3,t_2,t_3)$。

(2)若$p_2 > p_3$，則 $W_{P1}(2,t_2,t_3)>W_{P1}(3,t_2,t_3)$。

若有兩組不同策略$(t_1,1,t_3)$與$(t_1,3,t_3)$$(t_2,t_3\in\{X,1,2,3\})$:

(1)若$p_1 < p_3$，則 $W_{P2}(t_1,1,t_3))<W_{P2}(t_1,3,t_3)$。

(2)若$p_1 > p_3$，則 $W_{P2}(t_1,1,t_3)>W_{P2}(t_1,3,t_3)$。

也就是若某參賽者 Pi 決策不影響另外兩名參賽者策略時，Pi 射擊在場命中率最高者(去除自己後)的勝率必比射擊在場命中率次高者的勝率高。

由此特性，我們可以發現在平衡策略集中，P_3 的策略只有兩種可能:「放棄」或「射擊在場命中率最高者」，因為 P_1 和 P_2 決定好最佳策略後，在出現陣亡者之前都不會改變策略，相當於固定策略。因此 P_3 射擊命中率最高者得到的勝率必大於射擊命中率較低者。也就是說在平衡策略集中，P_3 不會射擊另外兩人中命中率較低者。

2、若某參賽者的策略不為「放棄」，則該參賽者的勝率必不為 0

當某參賽者的策略不為「放棄」，則該參賽者的勝率必不為 0。且可由此發現:若某參賽者 P_i 選擇策略 $P_i\rightarrow X$ 時勝率為 0，則 $P_i\rightarrow X$ 必不為 P_i 的平衡策略。

四、三人賽局的平衡策略

我們以樹狀展開的方式，先探討 P_1 策略固定為 $P_1\rightarrow P_3$、$P_1\rightarrow P_2$、$P_1\rightarrow X$ 三種狀況下 P_2、P_3 的局部平衡策略，最後再進行合併。

(一) P_1 策略固定為 $P_1\rightarrow X$ 時，P_2、P_3 的決策分析

我們先分析此前提下，P2、P3 的決策特性，再利用決策特性化簡平衡策略判斷。

1、P_1 策略固定為 $P_1\rightarrow X$ 時，P_2、P_3 決策的特性

我們發現，若 P_1 策略固定為 $P_1\rightarrow X$ 時，P_2、P_3 的決策有以下特性(證明由於

篇幅限制，放至附錄二-(一)):

(1) 在 $p_1<p_3$ 時，若 ABL(X,1)不為(X,1,X)，則 $P_2 \rightarrow P_1$ 不為 P_2 的平衡策略

我們可以使用上述特性化簡下列判斷。

2、P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3 的決策

(1)$p_1<p_2$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

因 $p_1<p_2$，ABL(X,X)=(X,X,2)。又 $W_{P2}(X,X,2)=0$，由三-(二)-2 可知 $P_2 \rightarrow X$ 必不為 P_2 的平衡策略。且由於 $W_{P3}(X,3,X)=0$ 且 $p_1<p_2$，此時 ABL(X,3)=(X,3,2)。而 P_2、P_3 的詳細決策我們依據 p_1、p_3 大小關係分類:

a.$p_1<p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

根據四-(一)-1-(1)，我們可得:

(a)若 ABL(X,1)=(X,1,X)且 $W_{P2}(X,1,X)>W_{P2}(X,3,2)$，局部平衡策略為 (X,1,X)

(b)若 ABL(X,1)不為(X,1,X)或 $W_{P2}(X,1,X)<W_{P2}(X,3,2)$，局部平衡策略為 (X,3,2)

b.$p_1>p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

因 $W_{P2}(X,3,2)<W_{P2}(X,1,2)<W_{P2}(X,1,X)$

$\rightarrow$ P_2 平衡策略不為 $P_2 \rightarrow P_3$

且 P_2 平衡策略也必不為 $P_2 \rightarrow X$

$\rightarrow$ P_2 平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$

而 P_3 平衡策略則不一定:

(a)若 $W_{P3}(X,1,X)<W_{P3}(X,1,2)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_2$

(b)若 $W_{P3}(X,1,X)>W_{P3}(X,1,2)$，$P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$

(2)$p_1>p_2$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

$p_1>p_2$ 時 ABL(X,1)僅(X,1,1),(X,1,X)兩種可能，ABL(X,X)僅(X,X,1)一種可能。因 $W_{P2}(X,1,X)<W_{P2}(X1,1)< W_{P2}(X,X,1)$

$\rightarrow$ ($P_2 \rightarrow P_1$)必不為 P_2 的平衡策略。

$\rightarrow$ P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$ 或 $P_2 \rightarrow P_3$

$\rightarrow$ 由於 $W_{P3}(X,X,X)=0$，$W_{P3}(X,3,X)=0$，P_3 平衡策略必不為 $P_3 \rightarrow X$

$\rightarrow$ P_3 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_1$

而 P_2 策略則不一定:

a.$p_1<p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

(a).若 $W_{P2}(X,X,1)>W_{P2}(X,3,1)$，平衡策略集為(X,X,1)

(b).若 $W_{P2}(X,X,1)<W_{P2}(X,3,1)$，平衡策略集為(X,3,1)

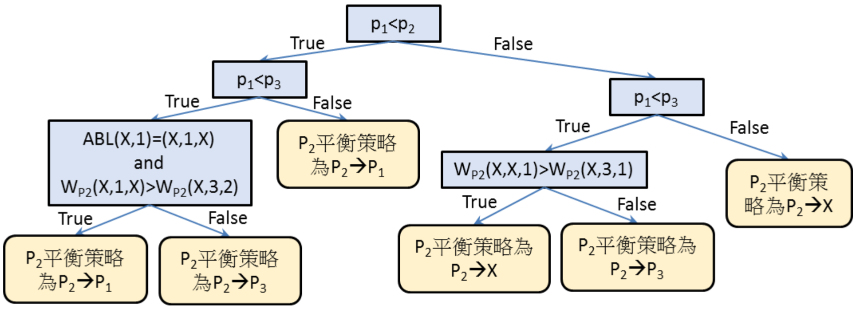
b.$p_1>p_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

因 $p_1>p_2$，$p_1>p_3$ 時 $W_{P2}(X,3,1)< W_{P2}(X,X,1)$，$P_2$ 平衡策略不為 $P_2 \rightarrow P_3$。

$\rightarrow$ P_2 平衡策略必為 $P_2 \rightarrow X$

我們可將四-(一)-2 中，判斷 P_2 平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如

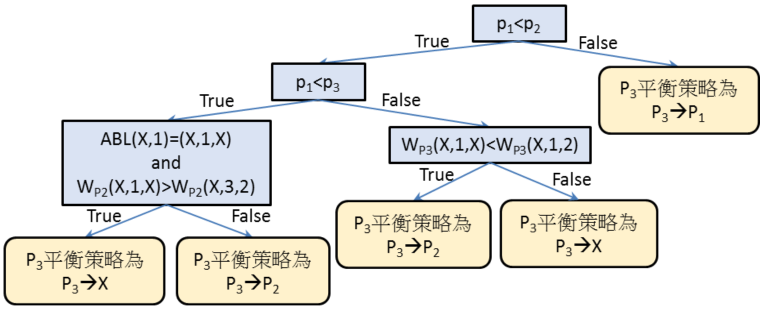
下所示(圖三):



圖三

上圖以多個含不等式的節點、「True」、「False」兩條邊與對應不同平衡策略的葉節點構成。代表若 $p_1 < p_2$ 不等式成立，那 P_2 的平衡策略由左子樹(根節點為 $p_1 < p_3$ 的子樹)判斷，若 $p_1 < p_2$ 且 $p_1 > p_3$，則平衡策略為左子樹根節點的右葉節點(P_2 平衡策略為 P_2→P_1)。若 $p_1 < p_2$ 不成立，那 P_2 的平衡策略由右子樹判斷，以此類推。

此外，我們可將判斷 P_2 平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖四):



圖四

(二)P_1 策略為 P_1→P_2 時，P_2、P_3 的決策分析

1、P_1 策略為 P_1→P_2 時，P_2、P_3 決策的特性

當 P_1 策略固定為 P_1→P_2，P_2、P_3 決策有以下特點(以下證明由於篇幅限制，放至附錄二-(二)):

(1)若 P_2 策略固定為 P_2→P_3 時，P_3 的局部平衡策略為 P_3→X，則 P_2 策略為 P_2→X 或 P_2→P_1 時，P_3 的局部平衡策略也都必為 P_3→X。

(2)當 $p_1<p_3$ 時，若 ABL(2,1)不為(2,1,X)，則 P_2→P_1 必不是 P_2 的平衡策略

(3)若 $p_1>p_2$ 且 $p_1<p_3$，則 P_2→P_1 必不為 P_2 的平衡策略

(4)當 $p_1>p_3$ 時，若 ABL(2,3)不為(2,3,1)，則 P_2→P_3 必不為 P_2 的平衡策略

我們可使用以上特性簡化 P_2、P_3 的策略判斷。

2、P_1策略為$P_1 \rightarrow P_2$時，P_2、P_3的平衡策略

我們以P_1與P_2的大小關係、P_1與P_3的大小關係為所有狀況分類:

(1)$p_1<p_2$時，P_2、P_3的平衡策略

根據三-(二)-1，此時P_3平衡策略只有$P_3 \rightarrow X$、$P_3 \rightarrow P_2$兩種可能。由於$W_{P2}(2,X,X)=0$，$W_{P2}(2,X,2)=0$，由三-(二)-2 得知此時$P_2 \rightarrow X$必不為P_2的平衡策略。而P_2、P_3的詳細決策我們依據p_1、p_3大小關係分類:

a.$p_1<p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

(a)若$ABL(2,1)=(2,1,X)$且$W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$平衡策略為$P_2 \rightarrow P_1$，平衡策略集為(2,1,X)

(b)若$ABL(2,1)$不為(2,1,X) 或$W_{P2}(2,1,X)<W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$平衡策略必為$P_2 \rightarrow P_3$。而$P_3$的策略則不一定:

若$W_{P3}(2,3,2)>W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$平衡策略為$P_3 \rightarrow P_2$

若$W_{P3}(2,3,2)<W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$平衡策略為$P_3 \rightarrow X$

b.$p_1>p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

由三-(二)-1 得知$p_1<p_2$時，$P_3 \rightarrow P_1$不可能是P_3的平衡策略，因此$ABL(2,3)$不可能是(2,3,1)，根據四-(二)-1-(4)，$P_2 \rightarrow P_3$不可能是P_2的平衡策略。又由前所述得知$P_2 \rightarrow X$必不為P_2的平衡策略

$\rightarrow$$P_2$平衡策略必為$P_2 \rightarrow P_1$

P_3的策略則不一定:

(a)若$W_{P3}(2,1,2)>W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$平衡策略必為$P_3 \rightarrow P_2$

(b)若$W_{P3}(2,1,2)<W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$平衡策略必為$P_3 \rightarrow X$

(2)$p_1>p_2$時，P_2、P_3的平衡策略

根據三-(二)-1，此時P_3平衡策略必為$P_3 \rightarrow X$或$P_3 \rightarrow P_1$，而P_2、P_3的詳細決策我們依據p_1、p_3大小關係分類:

a.$p_1<p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

根據四-(二)-1-(3)， 此時$P_2 \rightarrow P_1$不可能是P_2的平衡策略。又根據四-(二)-1-(2):

(a)若$ABL(2,X)=(2,X,1)$且$W_{P2}(2,X,1)>W_{P2}(ABL(2,3))$，局部平衡策略集為(2,X,1)

(b)若$ABL(2,X)$不為(2,X,1)或$W_{P2}(2,X,1)<W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2$平衡策略必為$P_2 \rightarrow P_3$。而$P_3$的策略則不一定:

若$W_{P3}(2,3,2)>W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$平衡策略為$P_3 \rightarrow P_2$

若$W_{P3}(2,3,2)<W_{P3}(2,3,X)$，$P_3$平衡策略為$P_3 \rightarrow X$

b.$p_1>p_3$時，P_2、P_3的平衡策略

(a)若$W_{P2}(2,X,1)> W_{P2}(ABL(2,X)),W_{P2}(ABL(2,3)$:

P_2的平衡策略為$P_2 \rightarrow P_1$，而P_3的策略則不一定:

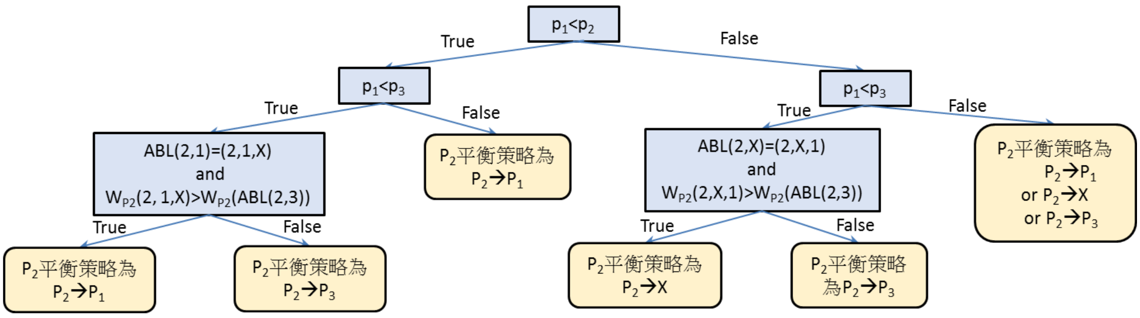
若$W_{P3}(2,1,1)>W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$平衡策略為$P_3 \rightarrow P_1$

若$W_{P3}(2,1,1)<W_{P3}(2,1,X)$，$P_3$平衡策略為$P_3 \rightarrow X$

(b)若 ABL(2,X)為(2,X,1)且 $W_{P2}(2,X,1) > W_{P2}(ABL(2,1)), W_{P2}(ABL(2,3))$，此時平衡策略集為(2,X,1)

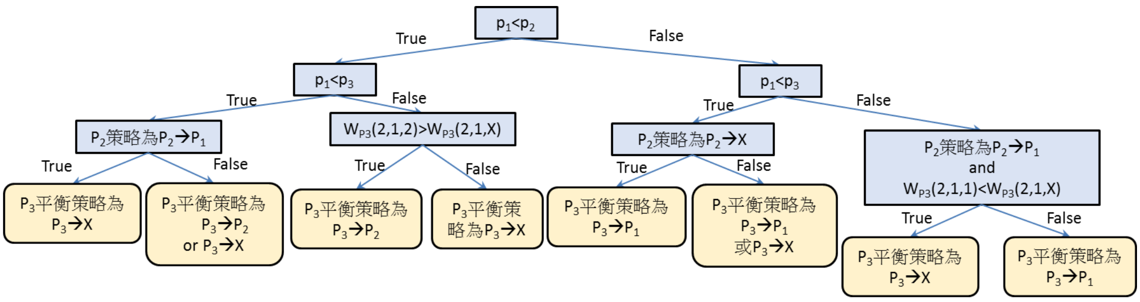
(c)若 ABL(2,3)為(2,3,1)且 $W_{P2}(2,3,1) > W_{P2}(ABL(2,1)), W_{P2}(ABL(2,X))$，此時平衡策略集為(2,3,1)

我們可將四-(二)-2 中判斷 P2、P3 平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖五、圖六):



圖五，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2 的平衡策略判斷

由於 $p_1>p_2$ and $p_1>p_3$ 狀況中判斷 P_2 平衡策略的方式幾乎無法化簡，因此僅列出 P_2 的可能平衡策略。



圖六，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_3 的平衡策略判斷

(三)、P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 的決策分析

1、P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 決策的特性

當 P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 的局部平衡策略有以下幾個特點 (以下證明由於篇幅限制，放至附錄二-(三)):

(1) P_3 平衡策略必不為 $P_3 \rightarrow X$

(2)當 $p_1<p_2$，P_2 策略必不為 $P_2 \rightarrow X$

我們可透過上述性質簡化 P_2、P_3 的平衡策略分析。

2、P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略

我們發現 P_2、P_3 的決策受到 P_1 與 P_2 的大小關係、P_1 與 P_3 的大小關係影響。因此我們以這兩者為所有狀態進行分類，再分別求出平衡策略。

(1) $p_1<p_2$ 時 P_2、P_3 的平衡策略

根據四-(三)-1-(1)，此時 P_3 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_2$

又根據四-(三)-1-(2)，P_2平衡策略必為「射擊命中率大者」。因此:

$p_1<p_3$時，P_2平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_3$

$p_1>p_3$時，P_2平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$

(2) $p_1>p_2$時 P_2、P_3的平衡策略

根據四-(三)-1-(1)，此時 P_3平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_1$

且此時無論 P_2策略為何，P_3平衡策略都不變，根據三-(二)-1，P_2平衡策略必不為「射擊命中率小者」。因此可歸納出以下結果:

a. $p_1<p_3$時，P_2的平衡策略

此時 $P_2 \rightarrow P_1$必不為 P_2的平衡策略，因此:

(a)若 $W_{P2}(3,X,1)<W_{P2}(3,3,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_3$

(b)若 $W_{P2}(3,X,1)>W_{P2}(3,3,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$

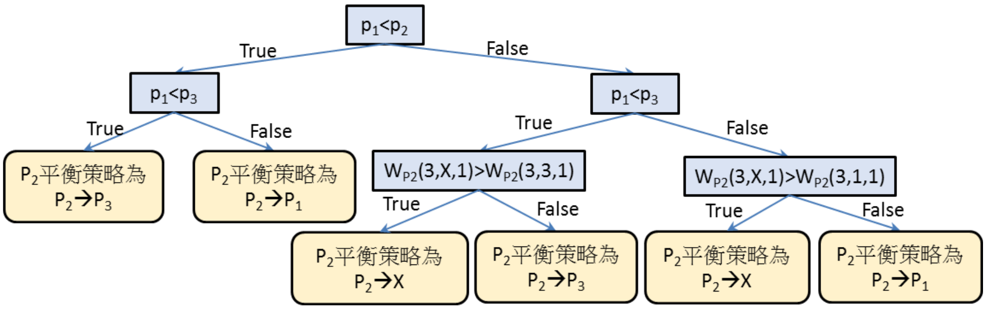
b. $p_1>p_3$時，P_2的平衡策略

此時 $P_2 \rightarrow P_3$必不為 P_2的平衡策略，因此:

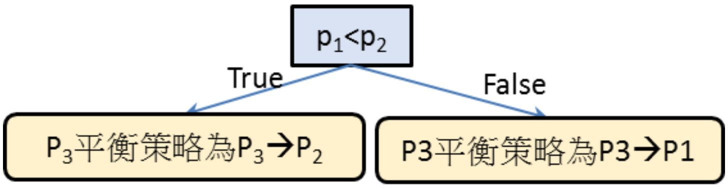
(a)若 $W_{P2}(3,X,1)<W_{P2}(3,1,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$

(b)若 $W_{P2}(3,X,1)>W_{P2}(3,1,1)$，$P_2$平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$

我們可將四-(三)-2 中判斷 P_2、P_3平衡策略的方式彙整為樹狀圖，如下所示(圖七、圖八):



圖七，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_2的平衡策略判斷



圖八，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_3的平衡策略判斷

(四)P_1的決策分析

由於 P_1的決策牽涉 P_2、P_3的決策太多，我們能整理的 P_1決策特性相當有限，因此 P1 大部分僅能先列舉自己的不同策略，並觀察 P_2、P_3決策，最後再選擇使自己勝率較大者。

1、P_1決策的特性

(1)當 $p_1>p_2$且 $p_1>p_3$時，$P_1 \rightarrow X$ 必不為 P_1的平衡策略

當 $p_1 > p_2$ 且 $p_1 > p_3$，根據(二)-2-(2)，$P_1 \rightarrow X$ 的平衡策略必為(X,X,1)，$W_{P1}(X,X,1)=0$，$P_1 \rightarrow X$ 必不為 P_1 的平衡策略

2、P_1 的平衡策略

(1)若 $p_1 > p_2$ 且 $p_1 > p_3$

P_1 平衡策略有 $P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow P_3$ 兩種可能

(2)若 $p_1 < p_2$ 或 $p_1 < p_3$

P_1 平衡策略有 $P_1 \rightarrow X$、$P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow P_3$ 三種可能

五、以 Python 估計各平衡策略出現機率

我們使用 Python 模擬三人賽局中各參賽者的決策，程式碼於附錄三呈現。隨機決定 10000 組不同的 p_1、p_2、p_3，利用程式計算各分支發生機率。結果於研究結果呈現。

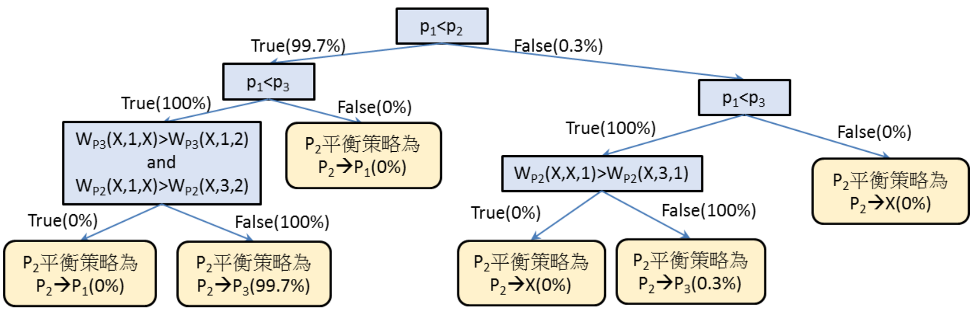
伍、研究結果

一、各平衡策略發生機率

根據研究流程，我們得出了在 P_1 策略分別固定為 $P_1 \rightarrow X$、$P_1 \rightarrow P_2$、$P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 判斷平衡策略的方式，並繪製成了樹狀圖的形式。接著我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，並使這 200000 組命中率中 P_1 的平衡策略皆固定，接著計算樹狀圖中各分支發生的機率。以下呈現(小數點 2 位以下採四捨五入):

(一)、P_1 平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3 的平衡策略及發生機率:

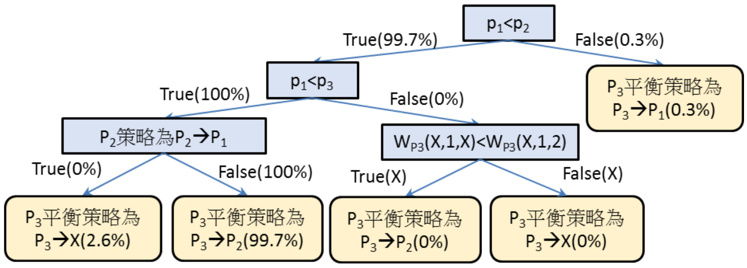
我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，且這 200000 組命中率中 P_1 的平衡策略皆必為 $P_1 \rightarrow X$。將其帶入程式，觀察判斷 P_2 策略的樹狀圖(P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$)中，中各分支的發生機率，如下圖呈現(圖九)



圖九，P_1 平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2 的平衡策略與發生機率

與四-(三)中的圖相比，圖九中的每個「True」、「False」後都有以機率標記，代表的是到達該節點的所有前提條件都成立時，該節點某事件發生的機率。例如節點「$p_1 < p_2$」左方「True」中的(99.7%)代表在模擬中所有 P_1 平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的(p_1,p_2,p_3)，有 99.7%滿足 $p_1 < p_2$。節點「$p_1 < p_2$」左方「$p_1 < p_3$」左方「True」中的 100%，代表在模擬中所有滿足 $p_1 < p_2$ 的(p_1,p_2,p_3)，有 100%滿足 $p_1 < p_3$(也代表若 $p_1<p_2$ 且 $p_1>p_3$，則 P_1 的平衡策略必不為 $P_1 \rightarrow X$)。我們也可以同樣的方式表示 P_3 的平衡策略發生機

率(圖十):



圖十，P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_3的平衡策略與發生機率

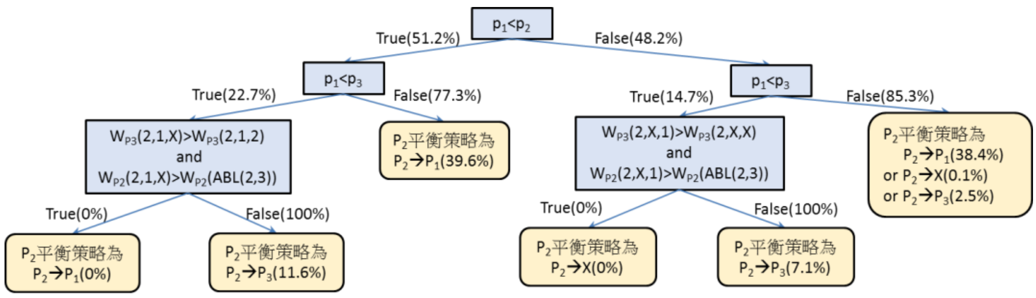
在某些參賽者僅知部分資訊的賽局中，我們便可使用上圖協助判斷。例如 P_1得知三人命中率但 P_2無法得知時，則可由上表發現若 P_1選擇 $P_1 \rightarrow X$，則 P_3有 99.7%的機率選擇策略 $P_3 \rightarrow P_2$對自己較有利。此外，透過累加葉節點機率，我們可得到 P_1策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3選擇各平衡策略的機率(表一):

表一，P_1選擇策略 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3選擇各策略的機率

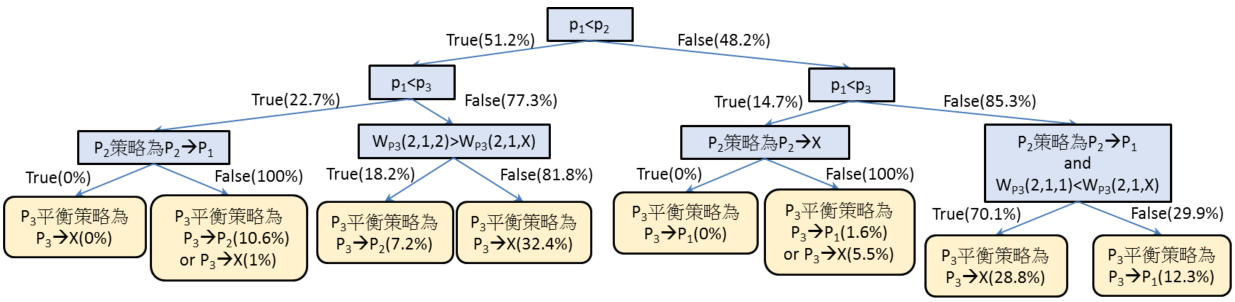
策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_2	0	0	100%	0
P_3	0.3%	99.7%	0%	0

(二)、P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_2$時，P_2、P_3的平衡策略及發生機率:

我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，且這 200000 組命中率中 P_1的平衡策略皆必為 $P_1 \rightarrow P_2$。將其帶入程式，觀察判斷 P_2、P_3策略的樹狀圖(P_1策略固定為 $P_1 \rightarrow X$)中，中各分支的發生機率，如下圖呈現(圖十一、圖十二)



圖十一，P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$時，P_2的平衡策略與發生機率



圖十二，P_1平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$時，P_3的平衡策略與發生機率

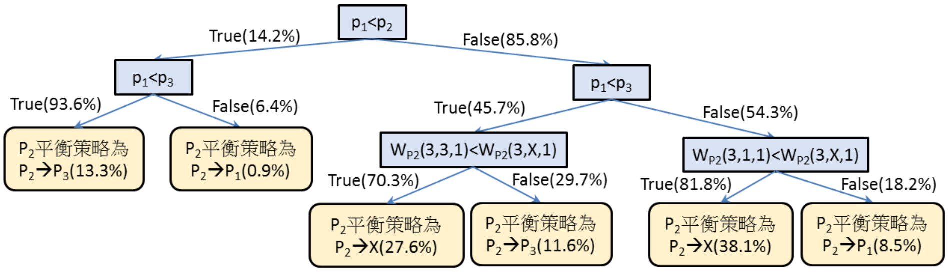
此外，透過累加葉節點機率，我們可得到 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2、P_3 選擇各平衡策略的機率(表二):

表二，P_1 選擇策略 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2、P_3 選擇各策略的機率

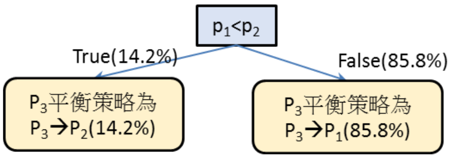
策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_2	78%	0	21.2%	0.1%
P_3	13.9%	17.8%	0	67.7%

(三)、P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 的平衡策略及發生機率:

我們利用 Python 程式隨機產生 200000 組 p_1、p_2、p_3，且這 200000 組命中率中 P_1 的平衡策略皆必為 $P_1 \rightarrow P_3$。將其帶入程式，觀察判斷 P_2、P_3 策略的樹狀圖(P_1 策略固定為 $P_1 \rightarrow X$)中，中各分支的發生機率，如下圖呈現(圖十三、圖十四)



圖十三，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2 的平衡策略與發生機率



圖十四，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2 的平衡策略與發生機率

此外，透過累加葉節點機率，我們可得到 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 選擇各平衡策略的機率(表三):

表三，P_1 選擇策略 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2、P_3 選擇各策略的機率

策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	放棄射擊
P_2	9.4%	0	24.9%	65.7%
P_3	85.8%	14.2%	0	0

(四)、P_1 的平衡策略及發生機率

我們使用了程式隨機給出 200000 組 p_1、p_2、p_3，觀察 P_1 各策略出現次數，最終換算出 P_1 選擇不同策略的機率，結果如表四:

表四，P_1 選擇各策略的機率

P_1 策略	$P_1 \rightarrow X$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_1 \rightarrow P_3$
發生機率	24%	41.3%	34.7%

(五)、P_1、P_2、P_3 不同平衡策略的發生機率

綜合(一)、(二)、(三)、(四)，我們可將 P_1 選擇不同策略的機率與表一、表二、表三相乘，計算出不同參賽者選擇各策略的機率，得出以下結果(表五):

表五，P_1、P_2、P_3 選擇各參賽者的機率

策略 參賽者	**射擊** P_1	**射擊** P_2	**射擊** P_3	放棄射擊
P_1	0	41.3%	34.7%	24%
P_2	35.5%	0	41.4%	22.8%
P_3	35.6%	36.2%	0	28%

此外，我們也用程式直接模擬方式計算出 P_1、P_2、P_3 選擇各策略的機率，得出以下結果(表六):

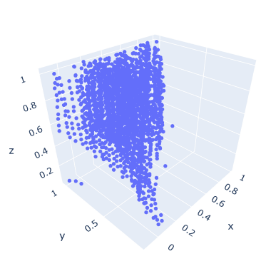
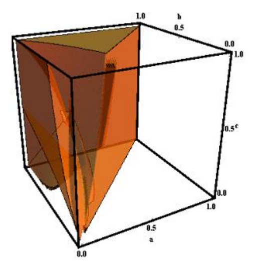
策略 參賽者	**射擊** P_1	**射擊** P_2	**射擊** P_3	放棄射擊
P_1	0	41.2656%	34.7530%	23.9814%
P_2	35.7724%	0	41.3559%	22.8717%
P_3	35.6981%	36.0971%	0	28.2048%

可以發現，表五與表六的各機率大致相等。

二、各策略的分布

對於某組 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的命中率組合(p_1,p_2,p_3)，我們可將其視為空間座標中的一點(x,y,z)。將所有 P_1 策略為 $P1 \rightarrow X$ 的(p_1,p_2,p_3)以散點圖方式於空間座標標示，我們即可觀察 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 下的命中率分布。此作法最初於參考資料一的科展報告實現(平震傑，Shoot？or not？—以全決策盒分析循環賽局之最佳策略)，並以 mathematica 實現。我們以 Plotly 重現此結果，並與其進行比較(表七):

表七，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的三人命中率分布

以 Plotly 實現的結果	參考資料一的結果
	

由於 Plotly 本身的限制，無法清楚看出圖形的陰影等細節，但可大致看出圖形的分布約在空間左半部，且類似一三角柱。其餘比較放置於附錄四。

三、以命中率大小關係觀察各策略出現機率:

由研究結果一，我們發現參賽者中命中率最高者與次高者平衡策略剛好是互射的機率特別高，因此我們好奇，若不是根據射擊順序，而是改成根據命中率大小關係觀測賽局， 是否能發現新的特性。我們先隨機產生三個遞增的隨機數，再列舉這三組數字的

每一種排列，每種排列對應一組命中率組合，並分別計算六種排列下的平衡策略，最後再將計算出的策略映射回原排列的策略，計算各策略出現機率。結果如表八(我們將命中率最高者稱為「強」、命中率最低者稱為「弱」、剩下的一人稱為「中」):

表八

策略	出現機率
弱 → X,中 → 強,強 → 中	72.1%
弱 → 中,中 → 強,強 → 弱	0.5%
弱 → 中,中 → 強,強 → 中	0.7%
弱 → 強,中 → 弱,強 → 中	1.4%
弱 → 強,中 → 弱,強 → X	2.3%
弱 → 強,中 → X,強 → 弱	0.1%
弱 → 強,中 → X,強 → 中	0.5%
弱 → 強,中 → 強,強 → 中	22.2%

我們可以發現，有超過 72%的機率平衡策略為最弱者不射，強、中互射。且剩下的約 30%中，也有接近 20%的機率平衡策略為弱、中射強，強射中。因此若各參賽者只知道彼此命中率大小關係，不知道具體數值，則最弱者選擇不射，另外兩人互射會是三人的最佳策略。

陸、討論

一、閃避賽局

假設每位槍手射中 P_1、P_2、P_3的機率都是$(1-e_1)$、$(1-e_2)$、$(1-e_3)$，即 P_1、P_2、P_3各有 e_1、e_2、e_3的機率閃躲過其他人的射擊，我們令 e 為閃避率，此機率與射擊者無關，只與被射擊者有關。以此為基礎，我們討論 P_1、P_2、P_3的決策:

(一)閃避賽局與一般賽局的相異之處

在一般賽局中，當 P_1、P_2策略固定，P_3射擊命中率高者勝率必定比射擊命中率低者勝率高，但在閃避賽局中則不一定。在閃避賽局中，P_3射擊誰勝率較大與 P_1、P_2策略有關:

1、當 $Pt_1=P_2$ 或 $Pt_2=P_1$:

P_3策略為「射擊閃避率較高者」時勝率較高

2、當 Pt_1、Pt_2一個為 P_3、另一個為 X:

P_3策略為 $P_3 \rightarrow P_1$、$P_3 \rightarrow P_2$時勝率皆相同

3、當 $Pt_1=P_3$、$Pt_2=P_3$:

P_3策略為「射擊閃避率較低者」時勝率較高

證明由於篇幅因素，放至附錄五

(二)閃避賽局與一般賽局的相同之處

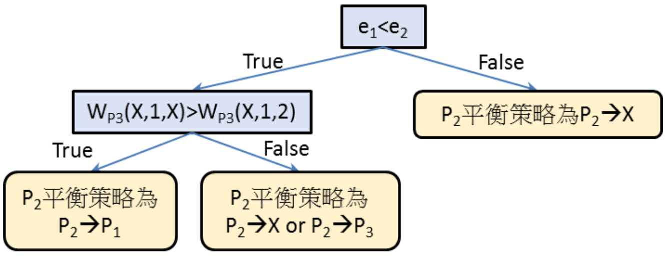
我們發現，有些在一般賽局出現過的特性，在閃避賽局也會出現:

1、在 P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_2$時，若 P_2策略為 $P_2 \rightarrow P_3$時 P_3策略為 $P_3 \rightarrow X$，則 P_2策略為 $P_2 \rightarrow X$

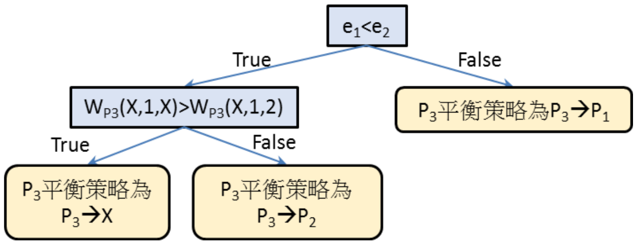
或 $P_2 \rightarrow P_1$ 時 P_3 策略也必為 $P_3 \rightarrow X$

2、在 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，無論 P_2 策略為何，P_3 策略必不為 $P_3 \rightarrow X$

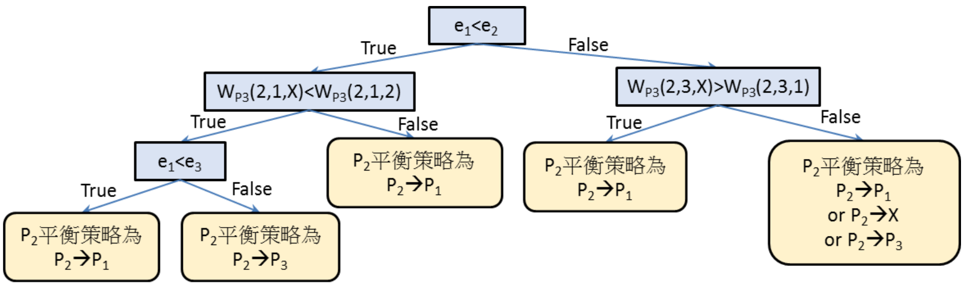
此外，我們找出了在給定不同 e_1、e_2、e_3 下的平衡策略，並整理成樹狀圖(詳細證明放置於附錄六):



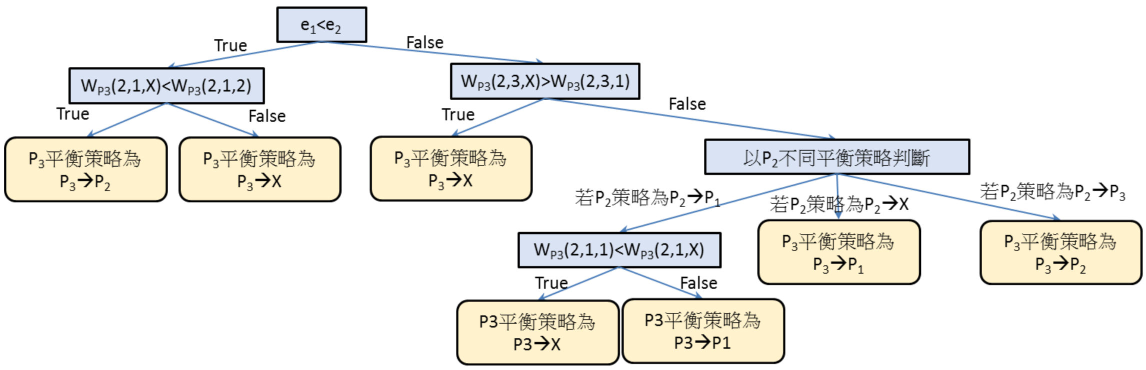
圖十五，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2 的平衡策略判斷



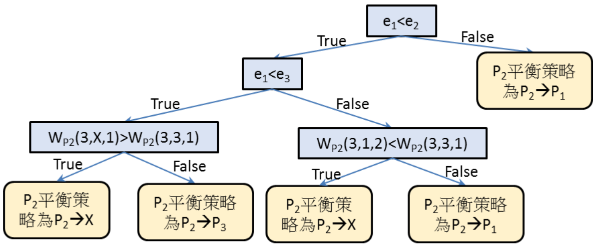
圖十六，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時， P_3 的平衡策略判斷



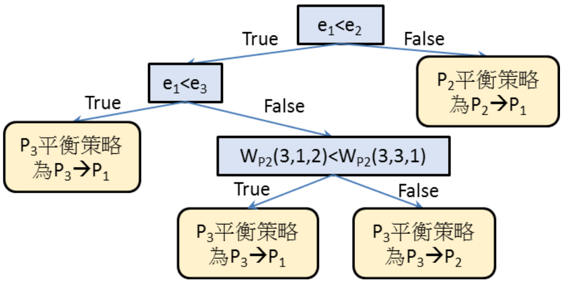
圖十七，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_2 的平衡策略判斷



圖十八，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 時，P_3 的平衡策略判斷



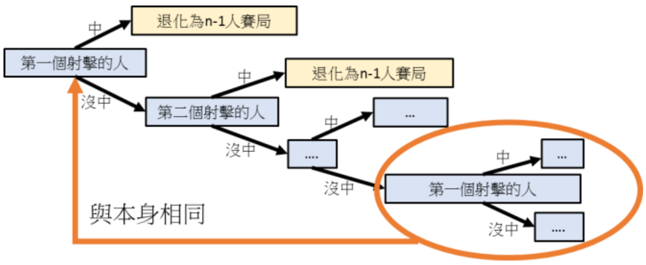
圖十九，P_1策略為 $P_1\to P_3$時，P_2的平衡策略判斷



圖二十，P_1策略為 $P_1\to P_3$時， P_3的平衡策略判斷

二、使用遞迴解多人弓箭手賽局

在肆-三-(一)我們推導了三人賽局的平衡策略。對於四人以上的賽局，我們也可用類似的方式推導勝率。對於一場策略集為 L 的 n 人賽局，我們可以下列樹狀圖表示 n 人弓箭手賽局(圖二十一):



圖二十一

以推導三人賽局勝率的類似方式，我們知道在 n 人賽局中 Pi 的勝率為各分支總和，且「第一個射擊的人」第二次被輪到時，Pi 的勝率與賽局開頭相同。設 Pi 勝率為 $W_{Pi}(L)$，我們可得

$$W_{Pi}(L)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_k)=(P_k\to X)\\ \overline{p_k} & \text{else}\end{cases}\right)*p_j*\left(\begin{matrix}\text{因}P_j\text{命中目標退化為 } n-1 \text{ 人賽局後}\\ P_i\text{的勝率}\end{matrix}\right)+$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\begin{cases}1 & L(P_k)=(P_k\to X)\\ \overline{p_k} & \text{else}\end{cases}\right)*W_{Pi}(L)$$

$$\Rightarrow W_{Pi}(L)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_k)=(P_k\to X)\\ \overline{p_k} & \text{else}\end{cases}\right)*p_j*\left(\begin{matrix}\text{因}P_j\text{命中目標退化為 } n-1 \text{ 人賽局後}\\ P_i\text{的勝率}\end{matrix}\right)}{1-\left(\prod_{k=1}^{n}\begin{cases}1 & L(P_k)=(P_k\to X)\\ \overline{p_k} & \text{else}\end{cases}\right)}$$

我們可利用遞迴方式計算上述勝率一般式，並用 Python 實作程式，結果放置於附錄七。使用此程式，我們可計算任意 n 人賽局的平衡策略。由此程式，我們透過模擬 10000 組不同命中率，得到四人賽局中，各參賽者選擇不同策略的機率(表九):

表九，四人賽局中各參賽者選擇不同策略的機率

策略 / 參賽者	射擊 P_1	射擊 P_2	射擊 P_3	射擊 P_4	放棄射擊
P_1	0	33.60%	30.44%	30.91%	5.05%
P_2	31.40%	0	32.55%	30.76%	5.29%
P_3	30.05%	31.77%	0	33.10%	5.08%
P_4	31.73%	30.70%	32.29%	0	5.28%

以上表觀測，可發現各參賽者選擇「放棄」的機率皆最低，且涉及不同參賽者的機率差異不大。但四人賽局狀態較多，也許必須再提高模擬次數才能得到較精確的結果。

雖此程式可模擬任意人數弓箭手賽局，但實作複雜度極高，無法大量模擬五人以上賽局。未來希望可再優化算法複雜度，或利用平行處理等方式提高模擬次數。

柒、結果與未來展望

一、在參賽者有兩人 P_1、P_2的兩人弓箭手賽局中，P_1平衡策略必為 $P_1 \rightarrow P_2$、P_2策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$。

二、在參賽者有三人 P_1、P_2、P_3的三人弓箭手賽局中，對於任意參賽者 P_i，射擊場上命中率較高者的勝率必大於射擊命中率較低者的勝率。

三、在參賽者有三人 P_1、P_2、P_3的三人弓箭手賽局中:

(一)P_1出現機率最高的平衡策略為 $P_1 \rightarrow P_2$

(二)P_2出現機率最高的平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_3$

(三)P_3出現機率最高的平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_2$

在三人無法得知彼此命中率時，選擇上述策略較易使參賽者勝率提高。

四、在已知三人命中率大小順序的三人弓箭手賽局中，出現機率最高的平衡策略為最弱者不射擊，另外兩人互射。

五、未來展望

(一)將賽局推廣到四人以上

(二)優化演算法時間複雜度

(三)利用平行處理提高模擬次數

捌、參考資料

一、平震傑（2011）・Shoot？or not？一以全決策盒分析循環賽局之最佳策略・中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

二、Len Fisher（2019）・剪刀石頭布-生活中的賽局理論・臺北市：天下文化。

三、楊佩璐、宋強・科學運算 Python 程式理論與應用・上奇資訊。

附錄

一、「P3 射擊命中率大者勝率必比射擊命中率小者勝率高」證明

假設 P_1 策略為 $P_1 \rightarrow Pt_1$，P_2 策略為 $P_2 \rightarrow Pt_2$ (t_1、$t_2 \in \{1,2,3,X\}$)，若 P_3 策略為 $P_3 \rightarrow P_1$，則此時 P_3 的勝率為:

$W_{P3}(t_1,t_2,1)=$

$$\frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\left\{\begin{array}{ll}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)=(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)\neq(P_j\to X)\end{array}\right.\right)*\left(\begin{cases}0 & L(P_i)=P_j\\ \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1p_k}} & L(P_i)\neq X \text{ and } P_j=P_i\\ \frac{p_j}{1-\overline{p_1p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

$=$

$$\frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\left\{\begin{array}{ll}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)=(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)\neq(P_j\to X)\end{array}\right.\right)*\left(\begin{cases}0 & L(P_i)=P_j\\ \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1p_k}} & L(P_i)\neq X \text{ and } P_j=P_i\\ \frac{p_j}{1-\overline{p_1p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)+\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*p_3*\frac{\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_2p_3}}}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

若 P_3 策略為 $P_3 \rightarrow P_2$，則此時 P_3 的勝率為:

$W_{P3}(t_1,t_2,2)=$

$$\frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\left\{\begin{array}{ll}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)=(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)\neq(P_j\to X)\end{array}\right.\right)*\left(\begin{cases}0 & L(P_i)=P_j\\ \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1p_k}} & L(P_i)\neq X \text{ and } P_j=P_i\\ \frac{p_j}{1-\overline{p_1p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

$=$

$$\frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\left\{\begin{array}{ll}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)=(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)\neq(P_j\to X)\end{array}\right.\right)*\left(\begin{cases}0 & L(P_i)=P_j\\ \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1p_k}} & L(P_i)\neq X \text{ and } P_j=P_i\\ \frac{p_j}{1-\overline{p_1p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)+\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*p_3*\frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1p_3}}}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

計算 $W_{P3}(t_1,t_2,1) - W_{P3}(t_1,t_2,2)$:

$W_{P3}(t_1,t_2,1) - W_{P3}(t_1,t_2,2)=$

$$\frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\left\{\begin{array}{ll}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)=(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)\neq(P_j\to X)\end{array}\right.\right)*\left(\begin{cases}0 & L(P_i)=P_j\\ \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1p_k}} & L(P_i)\neq X \text{ and } P_j=P_i\\ \frac{p_j}{1-\overline{p_1p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)+\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*p_3*\frac{\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_2p_3}}}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

$$-\frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\left\{\begin{array}{ll}\left(\prod_{t=1}^{j-1}\begin{cases}1 & L(P_t)=Pt\to X\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq P_t\to X\end{cases}\right)*p_j & L(P_j)=(P_j\to X)\\ 0 & L(P_j)\neq(P_j\to X)\end{array}\right.\right)*\left(\begin{cases}0 & L(P_i)=P_j\\ \frac{\overline{p_k}p_i}{1-\overline{p_1p_k}} & L(P_i)\neq X \text{ and } P_j=P_i\\ \frac{p_j}{1-\overline{p_1p_j}} & \text{else}\end{cases}\right)+\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*p_3*\frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1p_3}}}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

$$=\frac{\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*p_3*\left(\frac{\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_2p_3}}-\frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1p_3}}\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}=\frac{\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*p_3*\left(p_3*\frac{\overline{p_2}-\overline{p_1}}{(1-\overline{p_2p_3})(1-\overline{p_1p_3})}\right)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

$$=\frac{\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*\frac{(p_3)^2}{(1-\overline{p_2}\overline{p_3})(1-\overline{p_1}\overline{p_3})}*(p_1-p_2)}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$$

由於$\frac{\left(\prod_{t=1}^{2}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)*\frac{(p_3)^2}{(1-\overline{p_2}\overline{p_3})(1-\overline{p_1}\overline{p_3})}}{1-\left(\prod_{t=1}^{3}\begin{cases}1 & L(P_t)=(Pt\to X)\\ \overline{p_t} & L(P_t)\neq(P_t\to X)\end{cases}\right)}$ >0，因此 $W_{P3}(t_1,t_2,1)-W_{P3}(t_1,t_2,2)$ 的正負取決於(p_1-p_2):

(1)當$p_1>p_2$，$W_{P3}(t_1,t_2,1)-W_{P3}(t_1,t_2,2)>0$

(2)當$p_1<p_2$，$W_{P3}(t_1,t_2,1)-W_{P3}(t_1,t_2,2)<0$

二、P_1不同策略下P_2、P_3決策特性的證明

(一) P_1策略為$P_1\to X$下P_2、P_3決策特性的證明

(1)在$p_1<p_3$時，若 ABL(X,1)不為(X,1,X)，則$P_2\to P_1$不為P_2的平衡策略

設P_{t_3}為P_1、P_2中命中率較大者($t_3\in\{1,2\}$)。當P_2策略為$P_2\to P_3$時，P_3平衡策略必為$P_3\to P_{t_3}$。若P_2策略為$P_2\to P_1$時，P_3平衡策略為$P_3\to P_{t_3}$，此時$W_{P2}(X,1,t_3)<W_{P2}(X,3,t_3)$，$P_2\to P_1$不為$P_2$的平衡策略。

(二) P_1策略為$P_1\to P_2$下P_2、P_3決策特性的證明

(1)若P_2策略固定為$P_2\to P_3$時，P_3的局部平衡策略為$P_3\to X$，則P_2策略為$P_2\to X$或$P_2\to P_1$時，P_3的局部平衡策略也必為$P_3\to X$。

以下我們設P_{t_3}是P_1、P_2中命中率較大者($t_3\in\{1,2\}$)。並設P_3射中P_{t_3}後，P_3勝率為 W3(若$P_{t_3}=P_1$,W3=$\frac{\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_2}\overline{p_3}}$，若$P_{t_3}=P_2$,W3=$\frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}$)。此時$P_3$的平衡策略只有$P_3\to X$、$P_3\to P_{t_3}$兩種可能。接著觀察$P_2$平衡策略不同時$P_3$平衡策略為$P_3\to X$的條件:

a.若P_2的行動為$P_2\to P_1$

P_3平衡策略為$P_3\to X$的充要條件為:

$W_{P3}(2,1,X)>W_{P3}(2,1,t_3)$

$$\to\frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}\left(p_1\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}+\overline{p_1}p_2\frac{p_3}{1-\overline{p_2}\overline{p_3}}\right)>$$

$$\frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3}}\left(p_1*\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}+\overline{p_1}p_2\frac{p_3}{1-\overline{p_2}\overline{p_3}}+\overline{p_1}\overline{p_2}p_3\times W3\right)$$

$$\to\frac{\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}{(1-\overline{p_1}\overline{p_2})(1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3})}\left(p_1\times\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}+\overline{p_1}p_2\times\frac{p_3}{1-\overline{p_2}\overline{p_3}}\right)>$$

$$\frac{\overline{p_1}\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3}}(W3)$$

$$\rightarrow \frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2}\,\overline{p_3}}\right) > (W3)$$

b.若 P_2 的行動為 $P_2 \rightarrow X$

P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$ 的充要條件為:

$W_{P3}(2,X,X) > W_{P3}(2,X,t_3)$

$$\rightarrow \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) > \frac{1}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_3 \times W3\right)$$

$$\rightarrow \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) \times \frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}} > \frac{\overline{p_1}p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}(W3)$$

$$\rightarrow \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) > (W3)$$

c.若 P_2 的行動為 $P_2 \rightarrow P_3$

P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow X$ 的充要條件為:

$W_{P3}(2,3,X) > W_{P3}(2,3,t_3)$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_2}}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) > \frac{1}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_2}\,\overline{p_3}}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}} + \overline{p_1}\,\overline{p_2}p_3 \times W3\right)$$

$$\rightarrow \frac{\overline{p_1}\,\overline{p_2}p_3}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2}\,\overline{p_3})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) > \frac{\overline{p_1}\,\overline{p_2}p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_2}\,\overline{p_3}}(W3)$$

$$\rightarrow \frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) > (W3)$$

由上述 a.、b.、c.，我們可以發現，對於各種 P_2 的決策，可以把 $P_3 \rightarrow X$ 為平衡策略的條件整理為「某數 $>$ (W3)」。

由於 $\frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) < \frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_2 \frac{p_3}{1-\overline{p_2}\,\overline{p_3}}\right)$，

且 $\frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) = \frac{p_1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right) < \left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right)$

，因此當 $W3 < \frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right)$，W3也必定比

$\frac{1}{(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2})}\left(p_1 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}} + \overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2}\,\overline{p_3}}\right)$和$\left(\frac{p_3}{1-\overline{p_1}\,\overline{p_3}}\right)$小，也就是:

若 $P_2 \rightarrow P_3$ 時，$P_3 \rightarrow X$ 為 P_3 的最佳策略，則在 $P_2 \rightarrow P_1$ 和 $P_2 \rightarrow X$ 時，$P_3 \rightarrow X$ 也是 P_3 的最佳策略。

(2)當 $p_1<p_3$ 時，若 ABL(2,1)不為(2,1,X)，則 $P_2 \rightarrow P_1$ 必不是 P_2 的平衡策略

設 Pt_3 為 P_1、P_2 中命中率較大者($Pt_3 \in \{P_1,P_2\}$)。由(二)-(1)我們得知若 ABL(2,1)=(2,1,t_3)，則 ABL(2,3)=(2,3,t_3)。又在 $p_1<p_3$ 時，$W_{P2}(2,3,t_3)>W_{P2}(2,1,t_3)$，$P_2 \rightarrow P_1$ 不是所有 P_2 策略中使 P_2 勝率最大者，P_2 平衡策略不為 $P_2 \rightarrow P_1$。

(3)若 $p_1>p_2$ 且 $p_1<p_3$，則 $P_2 \rightarrow P_1$ 必不為 P_2 的平衡策略

$p_1>p_2$時，P_3平衡策略只有$P_3 \rightarrow X$或$P_3 \rightarrow P_1$兩種可能。由(二)-(2)我們得知若$p_1<p_3$，只有ABL(2,1)=(2,1,X)時$P_2 \rightarrow P_1$才有可能是P_1的平衡策略。但$p_1<p_3$時$W_{P2}(2,1,X)<W_{P2}(2,3,X)$必成立，且當$p_1<p_3$時$W_{P2}(2,1,X)< W_{P2}(2,3,1)$也必成立。$W_{P2}(2,1,X)<W_{P2}(ABL(2,3))$，$P_2 \rightarrow P_1$必不為$P_2$的平衡策略。

(4)當$p_1>p_3$時，若ABL(2,3)不為(2,3,1)，則$P_2 \rightarrow P_3$必不是P_2的平衡策略

我們分ABL(2,3)=(2,3,2)、ABL(2,3)=(2,3,X)兩種狀況:

a.若ABL(2,3)=(2,3,2)

此時ABL(2,1)有(2,1,X)和(2,1,2)兩種可能。由於$W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,1,2)$，又在$p_1>p_3$時$W_{P2}(2,1,2)>W_{P2}(2,3,2)$，結合上述兩式我們可發現$W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,1,2)>W_{P2}(2,3,2)$，$W_{P2}(ABL(2,1))>W_{P2}(ABL(2,3))$。$P_2 \rightarrow P_3$不是所有$P_2$的策略中使$P_2$勝率最大者，$P_2$平衡策略不為$P_2 \rightarrow P_3$。

b.若ABL(2,3)=(2,3,X)

由(二)-(1)我們得知此時ABL(2,1)=(2,1,X)。又在$p_1>p_3$時，$W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,3,X)$，$P_2 \rightarrow P_3$不是所有$P_2$策略中使$P_2$勝率最大者，$P_2$平衡策略不為$P_2 \rightarrow P_3$。

綜合a.、b.，當ABL(2,3)為(2,3,2)或(2,3,X)時，$P_2 \rightarrow P_3$必不為P_2的平衡策略。

(三) P_1策略為$P_1 \rightarrow P_3$下P_2、P_3決策特性的證明

(1)P_3平衡策略必不為$P_3 \rightarrow X$

我們假設在場P_3以外的參賽者中，命中率最高的是Pt_3($t_3 \in \{1,2\}$)，並假設P_3射中Pt_3後P_3勝率=W3(若$Pt_3=P_1$，$W3=\frac{\overline{P_2}P_3}{1-\overline{P_2}\,\overline{P_3}}$。若$Pt_3=P_2$，$W3=\frac{\overline{P_1}P_3}{1-\overline{P_1}\,\overline{P_3}}$)，此時$P_3$可能的平衡策略只有$P_3 \rightarrow Pt_3$、$P_3 \rightarrow X$兩種。接著列舉不同的$P_2$策略，觀察$P_3$平衡策略變化情形:

a.P_2策略固定為$P_2 \rightarrow P_1$時

P_3選擇策略$P_3 \rightarrow Pt_3$的充要條件為

$W_{P3}(3,1,t_3)>W_{P3}(3, 1,X)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}}\left(\overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{P_2}\,\overline{P_3}} + \overline{p_1}\,\overline{p_2}p_3 \times W3\right) > \frac{1}{1-\overline{P_1}\,\overline{P_2}}\left(\overline{p_1}p_2 \times \frac{p_3}{1-\overline{p_2}\,\overline{p_3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}}(\overline{p_1}\,\overline{p_2}p_3 \times W3) >$$

$$\left(\frac{1}{1-\overline{p_1p_2}}-\frac{1}{1-\overline{p_1p_2p_3}}\right)\left(\overline{p_1}p_2\times\frac{p_3}{1-\overline{p_2p_3}}\right)$$

$$\rightarrow\frac{\overline{p_1p_2}p_3}{1-\overline{p_1p_2p_3}}(W3)>\left(\frac{\overline{p_1p_2}p_3}{(1-\overline{p_1p_2})(1-\overline{p_1p_2p_3})}\right)\left(\overline{p_1}p_2\times\frac{p_3}{1-\overline{p_2p_3}}\right)$$

$$\rightarrow(W3)>\left(\frac{1}{(1-\overline{p_1p_2})}\right)\left(\overline{p_1}p_2\times\frac{p_3}{1-\overline{p_2p_3}}\right)$$

根據 P_1、P_2 大小關係，W3 會有所不同:

(a)當 $P_1>P_2$ 時，$Pt_3=P_1$，$W3=\frac{\overline{P_2}P_3}{1-\overline{P_2P_3}}$:

$$(W3)>\left(\frac{1}{(1-\overline{P_1P_2})}\right)\left(\overline{P}_1P_2\times\frac{P_3}{1-\overline{P_2P_3}}\right)$$

$$\rightarrow\frac{\overline{P_2}P_3}{1-\overline{P_2P_3}}>\left(\frac{P_2}{(1-\overline{P_1P_2})}\right)\left(\frac{\overline{P_1}P_3}{1-\overline{P_2P_3}}\right)$$

由兩人賽局研究可知當 $P_1>P_2$ 時，$\frac{\overline{P_2}P_3}{1-\overline{P_2P_3}}>\frac{\overline{P_1}P_3}{1-\overline{P_1P_3}}$。且 $\frac{P_2}{1-\overline{P_1P_2}}<1$，不等式必成立。

(b)當 $P_1<P_2$ 時，$Pt_3=P_2$， $W3=\frac{\overline{P_1}P_3}{(1-\overline{P_1P_3})}$:

$$\frac{\overline{P_1}P_3}{1-\overline{P_1P_3}}>\left(\frac{1}{(1-\overline{P_1P_2})}\right)\left(\overline{P}_1P_2\times\frac{P_3}{1-\overline{P_2P_3}}\right)$$

$$\rightarrow\frac{P_3}{1-\overline{P_1P_3}}>\left(\frac{P_2}{(1-\overline{P_1P_2})}\right)\left(\frac{P_3}{1-\overline{P_2P_3}}\right)$$

由兩人賽局研究可知當 $P_1<P_2$ 時，$\frac{P_3}{1-\overline{P_1P_3}}>\frac{P_3}{1-\overline{P_2P_3}}$。且 $\frac{P_2}{1-\overline{P_1P_2}}<1$，不等式必成立。

綜合 a.、b.，不等式 $W_{P3}(3,1,t_3)>W_{P3}(3,1,X)$ 必成立，P_3 平衡策略必不為 $P_3\rightarrow X$。

b.P_2 策略固定為 $P_2\rightarrow X$ 時:

使 P_3 選擇 $P_3\rightarrow Pt_3$ 的充要條件為

$$W_{P3}(3,X,t_3)>W_{P3}(3,X,X)$$

由於 $W_{P3}(3,X,t_3)>0=W_{P3}(3,X,X)$，不等式必成立。$P_3$ 平衡策略必為「射擊在場命中率較高者」

c.P_2 策略固定為 $P_2\rightarrow P_3$:

使 P_3 選擇 $P_3\rightarrow Pt_3$ 的充要條件為

$$W_{P3}(3,3,t_3)>W_{P3}(3,3,X)$$

由於 $W_{P3}(3,3,t_3)>0=W_{P3}(3,3,X)$，不等式必成立。$P_3$ 平衡策

略必不為 $P_3 \rightarrow X$。

綜合 a.、b.、c.，我們發現無論 P_2 策略為何，P_3 平衡策略必不為 $P_3 \rightarrow X$。

(2)當 $p_1<p_2$，P_2 策略必不為 $P_2 \rightarrow X$

當 $p_1<p_2$，P_3 策略必為 $P_3 \rightarrow P_2$。設 Pt_2 是 P_1、P_3 中命中率較高者，則 P_2 的平衡策略只有 $P_2 \rightarrow X$、$P_2 \rightarrow Pt_2$ 兩種可能。而在此前提下，P_2 選擇策略 $P_2 \rightarrow Pt_2$ 的充要條件為:

$W_{P2}(P_3,Pt_2,P_2)>W_{P2}(P_3,X,P_2)$

設 P_2 射中 Pt_2 後勝率為 W2，則上式可寫為:

$$\frac{1}{1-\overline{P_1}\overline{P_2}\overline{P_3}}\left(p_1 \times \frac{p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}+\overline{p_1}p_2 \times W2\right) > \frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}\left(p_1 \times \frac{p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\overline{P_1}\overline{P_2}\overline{P_3}}(\overline{p_1}p_2 \times W2) > \left(\frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_3}}-\frac{1}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3}}\right)\left(p_1 \times \frac{p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\overline{p_1}p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}\overline{p_3}}(p_2 \times W2) > \left(\frac{\overline{p_1}p_2\overline{p_3}}{(1-\overline{p_1}\overline{p_3})(1-\overline{p_1}\,\overline{p_2}\,\overline{p_3})}\right)\left(p_1 \times \frac{p_2}{1-\overline{p_1}\overline{p_2}}\right)$$

$$\rightarrow (W2) > \left(\frac{1}{(1-\overline{p1}\overline{p3})}\right)\left(\overline{p3}p1 \times \frac{p2}{1-\overline{p1}\overline{p2}}\right)$$

接下來根據 p_1、p_3 大小關係，W2 會有所不同:

a.若 $p_1>p_3$，此時 $Pt_2=P_1$，$W2=\frac{\overline{p3}p2}{(1-\overline{p3}\overline{p2})}$:

$$\frac{\overline{p3}p2}{(1-\overline{p3}\overline{p2})} > \left(\frac{\overline{p3}p2}{(1-\overline{p1}\overline{p3})}\right)\left(\frac{p1}{1-\overline{p1}\overline{p2}}\right) = \left(\frac{1}{(1-\overline{p1}\overline{p3})}\right)\left(\overline{p3}p1 \times \frac{p2}{1-\overline{p1}\overline{p2}}\right)$$，

不等式必成立

b.若 $p_1<p_3$，此時 $Pt_2=P_2$，$W2=\frac{\overline{p1}p2}{(1-\overline{p1}\overline{p2})}$:

$$\frac{\overline{p1}p2}{(1-\overline{p1}\overline{p2})} > \left(\frac{p1}{(1-\overline{p1}\overline{p3})}\right)\left(\frac{\overline{p3}p2}{1-\overline{p1}\overline{p2}}\right) = \left(\frac{1}{(1-\overline{p1}\overline{p3})}\right)\left(\overline{p3}p1 \times \frac{p2}{1-\overline{p1}\overline{p2}}\right)$$，不等式必成立

綜合 a.、b.，不等式 $W_{P2}(3, t_2,2)>W_{P2}(3,X,2)$ 必成立。P_3 策略為 $P_3 \rightarrow P_2$ 時，P_2 平衡策略必不為 $P_2 \rightarrow X$。

三、使用程式輔助觀察賽局

程式分為計算特定策略的勝率、尋找平衡策略兩部分。我們以陣列方式表示三人命中率與策略，參賽者 P_i 命中率以 p[i]存取，P_i 的策略 $P_i \rightarrow P_j$ 以 pol[i]=j 表示。且在程式中我若某參賽者 Pi 策略為「放棄」，則 pol[i]=i:

(一) 計算勝率部分

使用 Python 模擬四-(一)的勝率一般化公式

```
def w(pi,p,pol):#s 是命中率陣列，此函數可求出三人命中率分別為
                 (s[0],s[1],s[2])，策略集為 pol 下 Pi 的勝率
  if(pol[0]==0 and pol[1]==1 and pol[2]==2):
    return 0
  ret=0
  r=1
  for i in range(3):
    i1=(i)
    if(pol[i1]==i1):
      continue
    if(i1==pi):
      k=3-pi-pol[pi]
      ret+=r*p[pi]*(1-p[k])*(p[pi])/(1-(1-p[pi])*(1-p[k]))
    elif (pol[i1]!=pi):
      ret+=r*(p[i1])*(p[pi])/(1-(1-p[pi])*(1-p[i1]))
    r*=(1-p[i1])
  ret/=(1-r)
  return ret
```

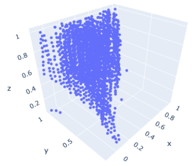
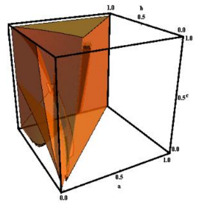
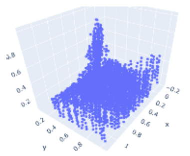
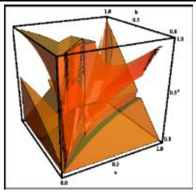
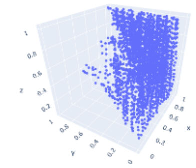
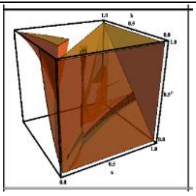
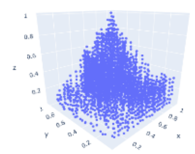
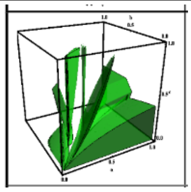
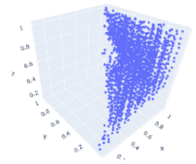
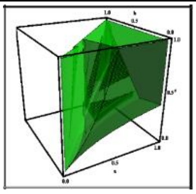
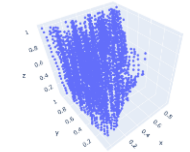
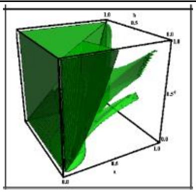
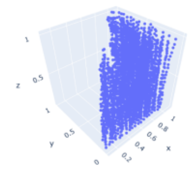
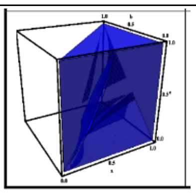
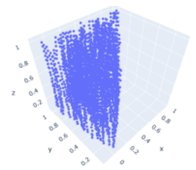
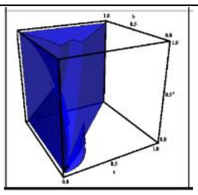
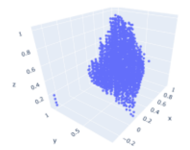
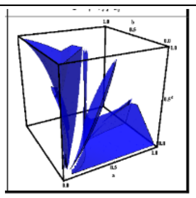
(二) 尋找平衡策略部分

使用 Python 根據定義尋找平衡策略

```
def ABL(p,cur=[]):#計算命中率組合為 p，且前數名參賽者策略固定為
                   cur 時的局部平衡策略
  if(len(cur)==len(p)): #若所有人都決策完畢，則直接返回 cur
    return cur
  pi=len(cur)#由於程式編號以 0 開始，目前決定策略的人(Pi)編號為 (已
             決定好策略的人數)
  abl=[]#目前找到的勝率最高策略，先設定為空
  for pli in range(len(p)):#列舉不同的 Pi 策略
    abl2=ABL(p,cur+[pli]) #觀察 pi 選擇策略 Pi→Pli 所得到的局部
                            平衡策略
    if (abl==[]):#若 abl 為空，則先將 abl2 當作局部平衡策略
      abl=abl2
    elif (w(pi,p,abl2)>w(pi,p,abl)): #若目前的策略比之前的
      abl=abl2                        好，則更新平衡策略
  return abl
```

四、勝率分布比較

此處列出參考資料一報告中的勝率分布，以及本研究以 Plotly 畫出的勝率分布散點圖。

P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的策略分布		P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 的策略分布		P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 的策略分布	
 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現
P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_1$ 的策略分布		P_2 策略為 $P_2 \rightarrow X$ 的策略分布		P_2 策略為 $P_2 \rightarrow P_3$ 的策略分布	
 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現
P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 的策略分布		P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_2$ 的策略分布		P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 的策略分布	
 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現	 以 Plotly 實現	 參考資料一實現

五、閃避賽局 P_3 策略證明

設 P1 目標為 Pt1、P2 目標為 Pt2(Pt1、Pt2∈(P1,P2,P3,X))，P1 射中 Pt1 後 P3 勝率為 W1，P2 射中 Pt2 後 P3 勝率為 W2，則

$$W_{P3}(t1,t2,1)=\frac{1}{1-e_{t1}e_{t2}e_1}\left(\overline{e_{t1}}*\mathrm{W1}+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2+e_{t1}e_{t2}\bar{e}_1*\frac{e_3\overline{e_2}}{1-e_2e_3}\right)$$

$$W_{P3}(t1,t2,2)=\frac{1}{1-e_{t1}e_{t2}e_2}\left(\overline{e_{t1}}*\mathrm{W1}+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2+e_{t1}e_{t2}\bar{e}_2*\frac{e_3\overline{e_1}}{1-e_1e_3}\right)$$

計算 $W_{P3}(t1,t2,1)-W_{P3}(t1,t2,2)$:

$$\frac{1}{1-e_{t1}e_{t2}e_1}\left(\overline{e_{t1}}*\mathrm{W1}+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2+e_{t1}\times e_{t2}\times\overline{e_1}\,\frac{\mathrm{e}_3\overline{e_2}}{1-e_2e_3}\right)-$$

$$\frac{1}{1-e_{t1}e_{t2}e_2}\left(\overline{e_{t1}}*\mathrm{W1}+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2+e_{t1}\times e_{t2}\times\overline{e_2}\,\frac{\mathrm{e}_3\overline{e_1}}{1-\mathrm{e}_1e_3}\right)$$

$$=(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2))\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1}-\frac{1}{1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2}\right)$$

$$+\mathrm{e}_{t1}\times e_{t2}\times\overline{e_1}\,\overline{e_2}e_3\left(\frac{1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)}-\frac{1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)$$

因為

$$\left(\frac{1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)}-\frac{1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)=\left(\frac{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)-(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)$$

$$=\left(\frac{-e_{t1}e_{t2}e_1-e_1e_3+e_{t1}e_{t2}e_1+e_2e_3}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)=$$

$$\left(\frac{(e_1-e_2)(e_{t1}e_{t2}-e_3)}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)$$

且

$$\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1}-\frac{1}{1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2}\right)=\frac{1-e_{t1}e_{t2}e_2-1+e_{t1}e_{t2}e_1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_{t1}e_{t2}e_2)}$$

$$=\frac{\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}(\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_2)}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_{t1}e_{t2}e_2)}$$

故

$$(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2))\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1}-\frac{1}{1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2}\right)+\mathrm{e}_{t1}\times e_{t2}\times$$

$$\overline{e_1}\,\overline{e_2}e_3\left(\frac{1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)}-\frac{1}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)$$

$$=(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)\,\frac{\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}(\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_2)}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_{t1}e_{t2}e_2)}$$

$$+\mathrm{e}_{t1}e_{t2}\overline{e_1}\,\overline{e_2}e_3\left(\frac{(e_1-e_2)(e_{t1}e_{t2}-e_3)}{(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_2e_3)(1-e_{t1}e_{t2}e_1)(1-e_1e_3)}\right)$$

$$=\frac{(\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_2)}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}\left[\left(\frac{\overline{e_1}\,\overline{e_2}e_3(e_{t1}e_{t2}-e_3)}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)+(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)\right]$$

$$=\frac{(\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_2)}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}\left[(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)-\left(\frac{\overline{e_1}\,\overline{e_2}e_3(e_3-e_{t1}e_{t2})}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]$$

又$\left(\frac{\overline{e_1}\,\overline{e_2}e_3(e_3-e_{t1}e_{t2})}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)=\mathrm{e}_3(\mathrm{e}_3-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2})\left(\frac{\overline{e_1}}{1-e_1e_3}\right)\left(\frac{\overline{e_2}}{1-e_2e_3}\right)$

接著我們將不同的 Pt1、Pt2 分類討論:

(一)、Pt1=P2:

$$\overline{e_{t1}}*W1=\overline{e_2}*\frac{\overline{e_1}}{1-e_1e_3}>\mathrm{e}_3(\mathrm{e}_3-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2})\left(\frac{\overline{e_1}}{1-e_1e_3}\right)\left(\frac{\overline{e_2}}{1-e_2e_3}\right)$$

$$\frac{\left[(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3(e_3-e_{t1}e_{t2})}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}>0$$

當 e1>e2 時，W_{P3}(t1,t2,1)>W_{P3}(t1,t2,2)，P_3 攻擊 P_1 較有利

當 e1<e2 時，W_{P3}(t1,t2,1)<W_{P3}(t1,t2,2)，P_3 攻擊 P_2 較有利

綜合以上兩點，當 Pt1=P_2，P_1 攻擊閃避率高者較有利

(二)、當 Pt1≠P_1 and Pt2==P_1:

$$e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2=1*\overline{e_1}*\frac{\overline{e_2}}{1-e_2e_3}\ or\ \mathrm{e}_3*\overline{e_1}\,\overline{\frac{e_2}{1-e_2e_3}}$$

又$\overline{e_2}*\frac{\overline{e_1}}{1-e_1e_3}>\mathrm{e}_3(\mathrm{e}_3-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2})\left(\frac{\overline{e_1}}{1-e_1e_3}\right)\left(\frac{\overline{e_2}}{1-e_2e_3}\right)$

$$\frac{\left[(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3(e_3-e_{t1}e_{t2})}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}>0$$

當 e1>e2 時，W_{P3}(t1,t2,1)>W_{P3}(t1,t2,2)，P3 攻擊 P1 較有利

當 e1<e2 時，W_{P3}(t1,t2,1)<W_{P3}(t1,t2,2)，P3 攻擊 P2 較有利

綜合以上兩點，當 Pt1=P2，P1 攻擊閃避率高者較有利

(三)、當 Pt1、Pt2 一個為 P3、另一個為 X:

此時 et1、et2 其中一個為 e3，另一個為 1，W1=W3=0

$$\frac{\left[(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3(e_3-e_{t1}e_{t2})}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}$$

$$=\frac{\left[(\overline{e_{t1}}*0+e_{t1}\overline{e_{t2}}*0)-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3(e_3-1*e_3)}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}=\frac{\left[(0)-\left(\frac{0}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}=0$$

W_{P3}(t1,t2,1)=W_{P3}(t1,t2,2)

(四)、當 Pt1=P3、Pt2=P3:

此時 et1=et2=e3，W1=W3=0

$$\frac{\left[(\overline{e_{t1}}*W1+e_{t1}\overline{e_{t2}}*W2)-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3(e_3-e_{t1}e_{t2})}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}=\frac{\left[(\overline{e_{t1}}*0+e_{t1}\overline{e_{t2}}*0)-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3(e_3-(e_3)^2)}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}$$

$$=\frac{\left[-\left(\frac{\overline{e_1}\overline{e_2}e_3e_3(1-e_3)}{(1-e_2e_3)(1-e_1e_3)}\right)\right]}{(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_1)(1-\mathrm{e}_{t1}\mathrm{e}_{t2}\mathrm{e}_2)}<0$$

當 e1>e2 時，W_{P3}(t1,t2,1)<W_{P3}(t1,t2,2)，P3 攻擊 P2 較有利

當 e1<e2 時，W_{P3}(t1,t2,1)>W_{P3}(t1,t2,2)，P3 攻擊 P1 較有利

綜合以上兩點，當 Pt1=P2，P1 攻擊閃避率高者較有利

根據(一)、(二)、(三)、(四)得證。

六、閃避賽局的平衡策略推導

(一)P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2、P_3 的平衡策略:

我們可依據 e_1、e_2 的大小關係為所有狀況分類:

1.$e_1<e_2$ 時 P_2、P_3 的平衡策略:

我們結合 P_3 的決策特性，可簡單發現:

ABL(X,1)=(X,1,X) or (X,1,2)

ABL(X,X)=(X,X,2)

但 $W_{P3}(X,3,1)=W_{P3}(X,3,2)$，因此 ABL(X,3)需考量 P_2 的策略進行分析:

當 P_2 選擇 $P_2 \rightarrow P_3$ 時，P_3 不管選擇 $P_3 \rightarrow P_1$、$P_3 \rightarrow P_2$ 勝率都一樣。但 $P_2 \rightarrow P_3$ 是所有 P_2 的策略中帶給 P_3 最低勝率的 ($W_{P3}(ABL(X,3))< W_{P3}(ABL(X,2)), W_{P3}(ABL(X,1))$)，**因此 P_3 想盡量讓 P_2 不去選 $P_2 \rightarrow P_3$，必須降低 P_2 選 $P_2 \rightarrow P_3$ 的勝率**，因此 P_3 選擇策略 $P_3 \rightarrow P_2$

$\rightarrow$ABL(X,3)=(X,3,2)

此外，我們發現 $e_1<e_2$ 時，P_2 有以下決策特性:

(1).對於 P_2 來說，$W_{P2}(X,X,2)=0$，因此 $P_2 \rightarrow X$ 不為 P_2 平衡策略

(2).$W_{P2}(X,1,X)>W_{P2}(X,3,2)$，因此只要 ABL(X,1)=(X,1,X)，$P_2 \rightarrow P_1$ 就必為 P_2 的平衡策略。

綜合以上特性，我們可發現:

(1).若 ABL(X,1)=(X,1,X)，局部平衡策略集必為(X,1,X)

(2).若 ABL(X,1)=(X,1,2)，則 P_2 選擇 $P_2 \rightarrow P_1$、$P_2 \rightarrow P_3$ 勝率皆相同，因此策略無法確定

$\rightarrow P_3$ 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_2$

2.$e_1>e_2$ 時 P_2、P_3 的平衡策略:

我們結合 P_3 的決策特性，可簡單發現:

ABL(X,1)=(X,1,X)

ABL(X,X)=(X,X,1)

且與 1.的部分相同，ABL(X,3)=(X,3,2)

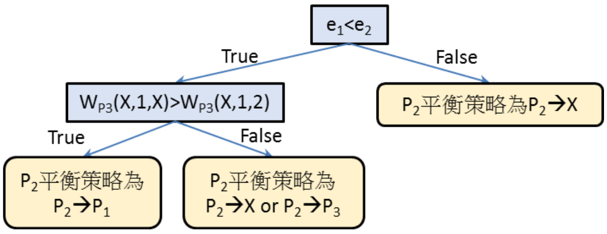
但由於 $W_{P2}(X,X,1)>W_{P2}(X,1,X)>W_{P2}(X,3,2)$

$\rightarrow P_2$ 平衡策略必為 $P_2 \rightarrow X$

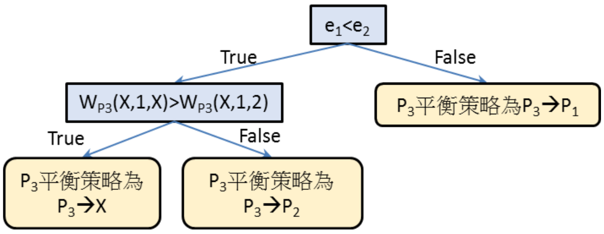
$\rightarrow P_3$ 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_1$

$\rightarrow e_1>e_2$ 時，局部平衡策略集必為(X,X,1)

我們可將所有(一)的結果統整為樹狀圖(圖(一)-1、圖(一)-2):



圖(一)-1，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_2 的平衡策略判斷



圖(一)-2，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow X$ 時，P_3 的平衡策略判斷

(二) P1 策略為 P1→P2 時，P2、P3 的平衡策略

我們可依據 e_1、e_2 的大小關係為所有狀況分類:

1.$e_1<e_2$ 時 P_2、P_3 的平衡策略:

我們結合 P_3 的決策特性，可簡單發現:

ABL(2,1)=(2,1,X) or (2,1,2)

ABL(2,X)=(2,X,X)

ABL(2,3)=(2,3,X) or (2,3,2)

綜合以上結果，我們發現:

(1).若 ABL(2,1)=(2,1,X)，由於 $W_{P2}(2,1,X)>W_{P2}(2,3,2)$，$P_2$ 策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$，P_3 策略必為 $P_3 \rightarrow X$

(2).若 ABL(2,1)=(2,1,2)，因為 $W_{P2}(2,1,2)>W_{P3}(2,3,2)$的充要條件為 $e_1<e_3$:

a.若 $e_1<e_3$，P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$

b.若 $e_1>e_3$，P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_3$

2.$e_1>e_2$ 時 P_2、P_3 的平衡策略

我們結合 P_3 的決策特性，可簡單發現:

ABL(2,1)=(2,1,X) or (2,1,1)

ABL(2,X)=(2,X,X) or (2,X,1)

ABL(2,3)=(2,3,X) or(2,3,1)

此外，我們發現

(1).若(ABL(2,3)=(2,3,X)):

此時 ABL(2,1)=(2,1,X)，ABL(2,X)=(2,X,X)

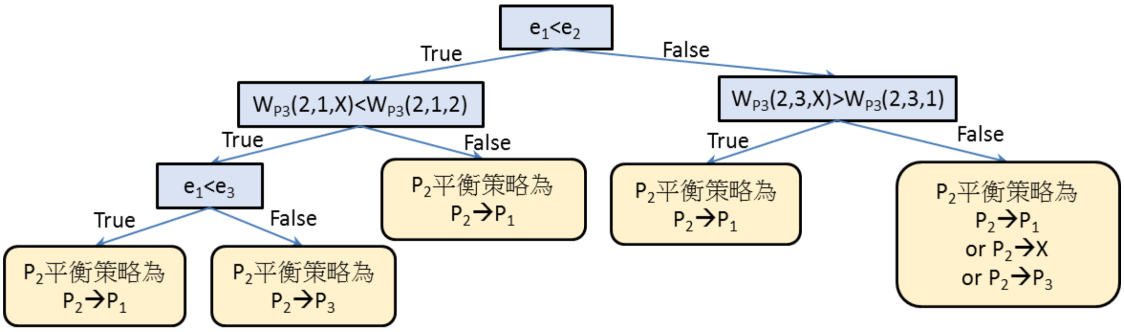
$WP_2(2,1,X)=WP_2(2,3,X)>0=WP_3(2,X,X)$

由於 ABL(2,3)=(2,3,X)時，$P_1 \rightarrow P_2$ 是所有 P_1 策略中使 P_2 勝率最小的，P_2 想讓 P_1 盡量避免選擇此策略，因此 P_2 選擇策略 $P_2 \rightarrow P_1$

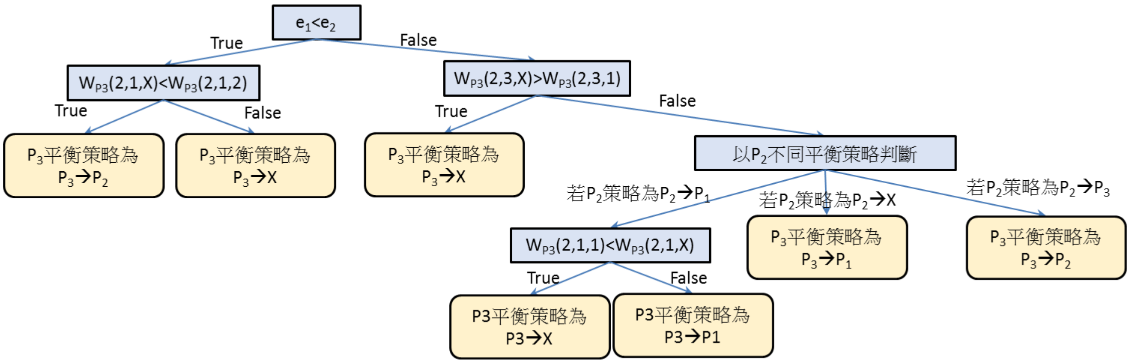
(2).若 ABL(2,3)=(2,3,1)，能化簡判斷式的方式相當有限，因此不寫

出詳細過程。

我們可將所有(二)的結果統整為樹狀圖(圖(二)-1、圖(二)-2):



圖(二)-1，P_1 策略為 $P_1\rightarrow P_2$ 時，P_2 的平衡策略判斷



圖(二)-2，P_1 策略為 $P_1\rightarrow P_2$ 時，P_3 的平衡策略判斷

(三)P1 策略為 P1→P3 時，P2、P3 的平衡策略

我們先分析 P_2 選擇各策略時，P_3 的策略:

1. 若 P_2 選擇 $P_2\rightarrow P_1$，則 P_3 必射擊 P_1、P_2 中閃避率大者
2. 若 P_2 選擇 $P_2\rightarrow P_3$，則 P_3 必射擊 P_1、P_2 中閃避率小者
3. 若 P_2 選擇 $P_2\rightarrow X$:

(1).

若 $W_{P2}(ABL(2,3))>W_{P2}(ABL(2,1))$，則 P_2 只有 $P_2\rightarrow X$、$P_2\rightarrow P_3$ 兩種可能策略。在這兩種中，P_3 較希望 P_2 選 $P_2\rightarrow X$，因此 P_3 盡量增加 P_2 選 $P_2\rightarrow X$ 時的勝率。P_3 選 $P_3\rightarrow P_1$

(2).

若 $W_{P2}(ABL(2,3))<W_{P2}(ABL(2,1))$，則 P_2 只有 $P_2\rightarrow X$、$P_2\rightarrow P_1$ 兩種可能策略。在這兩種中，P_3 較希望 P_2 選 $P_2\rightarrow P_1$，因此 P_3 盡量降低 P_2 選 $P_2\rightarrow X$ 時的勝率。P_3 選 $P_3\rightarrow P_2$

我們可依據 e_1、e_2 的大小關係為所有狀況分類:

1.$e_1<e_2$ 時 P_2、P_3 的平衡策略:

我們結合 P_3 的決策特性，可簡單發現:

ABL(3,1)=(3,1,2)

ABL(3,3)=(3,3,1)

而 ABL(3,X)則需視 W_{P2}(3,1,2)、W_{P2}(3,3,1)的大小關係而定:

若 W_{P2}(3,1,2)>W_{P2}(3,3,1)，ABL(3,X)=(3,X,1)

若 W_{P2}(3,1,2)<W_{P2}(3,3,1)，ABL(3,X)=(3,X,2)

接著我們可依據 e_1、e_3 大小關係為所有狀況分類:

(1).e_1<e_3 時 P_2、P_3 的平衡策略:

由於 W_{P2}(3,1,2)<W_{P2}(3,3,1)，因此可能的平衡策略只有(3,X,1)、(3,3,1):

a.若(W_{P2}(3,X,1)<W_{P2}(3,3,1))，P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_3$、P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_1$

b.若(W_{P2}(3,X,1)>W_{P2}(3,3,1))，P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$、P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_1$

(2).e_1<e_3 時 P_2、P_3 的平衡策略:

a.若 W_{P2}(3,1,2)<W_{P2}(3,3,1))，此時 ABL(3,X)=(3,X,1)

由於 W_{P2}(3,X,1)>W_{P2}(3,3,1)，P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow X$、P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_1$

b.若 W_{P2}(3,1,2)>W_{P2}(3,3,1)，此時 ABL(3,X)=(3,X,2)

由於 W_{P2}(3,1,2)>W_{P2}(3,X,2)，P_2 平衡策略為 $P_2 \rightarrow P_1$、P_3 平衡策略為 $P_3 \rightarrow P_2$

2.e_1>e_2 時 P_2、P_3 的平衡策略:

我們結合 P_3 的決策特性，可簡單發現:

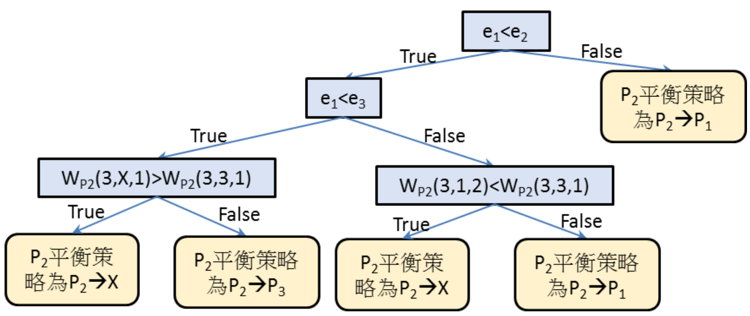
ABL(3,1)=(3,1,1)

ABL(3,3)=(3,3,2)

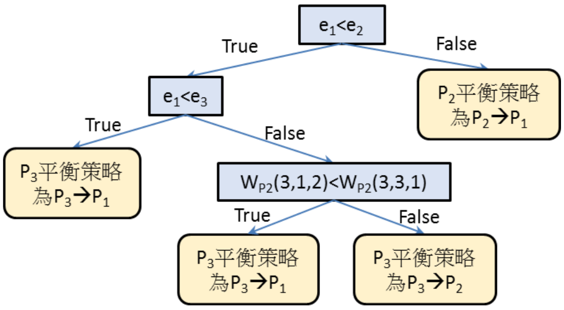
由於 W_{P2}(3,1,1)>W_{P2}(3,3,2)，ABL(3,X)=(3,X,2)

又 W_{P2}(3,1,1)>W_{P2}(3,X,2)，P_2 平衡策略必為 $P_2 \rightarrow P_1$、P_3 平衡策略必為 $P_3 \rightarrow P_1$

我們可將所有(三)的結果統整為樹狀圖(圖(三)-1、圖(三)-2):



圖(三)-1，P_1 策略為 $P_1 \rightarrow P_3$ 時，P_2 的平衡策略判斷



圖(三)-2，P_1策略為 $P_1 \rightarrow P_3$時，P_3的平衡策略判斷

七、實作任意 n 人賽局計算程式

使用兩個函式 w(pi,p,pol)、ABL(p)相互遞迴呼叫，w 計算給定參賽者命中率=p、策略集=pol 下參賽者 Pi 的勝率，ABL(p)計算參賽者命中率=p 賽局的策略集。以陣列方式表示參賽者的命中率與策略，參賽者 P_i 命中率以 p[i]存取，P_i 的策略 $P_i \rightarrow P_j$ 以 pol[i]=j 表示。且在程式中我若某參賽者 Pi 策略為「放棄」，則 pol[i]=i:

(一)、函式 w

```
def w(pi,p,pol):#pi=要計算勝率的參賽者，p 為一陣列，p[i]=參賽者 Pi 的命中率，pol 為策略集，pol[i]為 Pi 的策略，若 pol[i]=i 則代表該參賽者策略為放棄
  global tot
  tot+=1

  n=len(p)

  if(n==1):#若場上剩下參賽者一人，則該參賽者勝利
    return 1

  #檢查是否所有人策略都為放棄
  ok=False
  for i in range(n):
    if(pol[i]!=i):
      ok=True
      break
  if(not ok):
    return 0


  r=1#紀錄「到目前為止，前一名參賽者都沒有射中目標的機率」
```

```
ret=0#記錄勝率
per=[i for i in range(n)]

for j in range(n):#一般式中的sigma
  if(pol[j]==j):#若該參賽者放棄射擊則直接跳過
    continue
  if(pol[j]!=pi):#若該參賽者策略不為「射擊 Pi」，則 Pi 勝率可累加上退化
                 後賽局中的勝率
    p2=p[j+1:]+p[:j+1]#將命中率陣列以退化後的射擊順序重排
    per2=list(range(j+1,n))+list(range(j+1))#退化賽局中，參賽者的
                                            排列

    #刪除遭射中的參賽者
    for k in range(n):
      if(per2[k]==pol[j]):
        del p2[k]
        del per2[k]
        break

    pi2=-1#Pi 在退化後賽局的位置

    #尋找 pi2 的值
    for k in range(n-1):
      if(per2[k]==pi):
        pi2=k
        break
    pl2=ABL(p2)#尋找退化後賽局的平衡策略
    ret+=r*p[j]*w(pi2,p2,pl2)#將退化後賽局的勝率累加

  r*=(1-p[j])

ret/=(1-r)
return ret
```

(二)、函式 ABL

與三人賽局中的 ABL 函式幾乎完全相同。

```
def ABL(p,cur=[]):#計算命中率組合為 p，且前數名參賽者策略固定為
                 cur 時的局部平衡策略
```

```
if(len(cur)==len(p)): #若所有人都決策完畢，則直接返回 cur
  return cur
pi=len(cur)#由於程式編號以 0 開始，目前決定策略的人(Pi)編號為 (已
                决定好策略的人數)
abl=[]#目前找到的勝率最高策略，先設定為空
for pli in range(len(p)):#列舉不同的 Pi 策略
  abl2=ABL(p,cur+[pli]) #觀察 pi 選擇策略 Pi→Pli 所得到的局部
                          平衡策略
  if (abl==[]):#若 abl 為空，則先將 abl2 當作局部平衡策略
    abl=abl2
  elif (w(pi,p,abl2)>w(pi,p,abl)): #若目前的策略比之前的
    abl=abl2                          好，則更新平衡策略
return abl
```