Numerov

$$y''(x) = -g(x)\,y(x) + s(x)$$

$$y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!}y^{IV}(x_0) + \frac{(x-x_0)^5}{5!}y^{V}(x_0) + O(h^6)$$

Sea $h = x - x_0$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{IV}(x_0) + \frac{h^5}{5!}y^{V}(x_0) + O(h^6)$$

tomando x_0 como el punto actual y h como un pequeño paso, entonces $x_0 \to y_N$ $\quad x_0+h \to y_{N+1}$

$$y_{N+1} = y_N + hy'(x_N) + \frac{h^2}{2!}y''(x_N) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_N) + \frac{h^4}{4!}y^{IV}(x_N) + \frac{h^5}{5!}y^{V}(x_N) + O(h^6)$$

Similarmente podemos retroceder un paso h

$$y_{N-1} = y_N - hy'(x_N) + \frac{h^2}{2!}y''(x_N) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_N) + \frac{h^4}{4!}y^{IV}(x_N) - \frac{h^5}{5!}y^{V}(x_N) + O(h^6)$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos

$$y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1} = h^2 y''_N + \frac{h^4}{12}y^{IV}_N + O(h^6)$$

Usando $y''_N = -g_N y_N + s_N$, tenemos

$$y^{IV}_N = \frac{d^2}{dx^2}\left(-g_N y_N + s_N\right)$$

$$h^2 y^{IV}_N = -g_{N+1}y_{N+1} + s_{N+1} + 2g_N y_N - 2s_N - g_{N-1}y_{N-1} + s_{N-1} + O(h^4)$$

Sustituyendo tenemos

$$y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1} = h^2(-g_N y_N + s_N) + \frac{h^2}{12}\left(-g_{N+1}y_{N+1} + s_{N+1} + 2g_N y_N - 2s_N - g_{N-1}y_{N-1} + s_{N-1}\right) + O(h^6)$$

Reordenando

$$y_{N+1}\left(1 + \frac{h^2}{12}g_{N+1}\right) - 2y_N\left(1 - \frac{5h^2}{12}g_N\right) + y_{N-1}\left(1 + \frac{h^2}{12}g_{N-1}\right) = \frac{h^2}{12}\left(s_{N+1} + 10s_N + s_{N-1}\right) + O(h^6)$$

Vale la pena aclarar que esta demostración fue hecha para $y''(x) = -g(x)y(x) + s(x)$, nuestro problema tiene la forma $y''(x) = g(x)y(x) + s(x)$, por lo cual tiene una pequeña diferencia en signos. Cambiando los signos obtenemos precisamente.

$$y_{N+1}\left(1 - \frac{h^2}{12}g_{N+1}\right) - 2y_N\left(1 + \frac{5h^2}{12}g_N\right) + y_{N-1}\left(1 - \frac{h^2}{12}g_{N-1}\right) = \frac{h^2}{12}\left(s_{N+1} + 10s_N + s_{N-1}\right) + O(h^6)$$