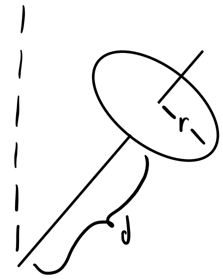
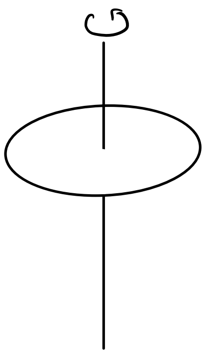
a)



Para calcular el momento de inercia del trompo debemos calcular el momento de inercia del disco y desplazarlo por la ligadura hasta el eje de rotación. Aquí la ligadura es la barra, con lo cual desplazamos la inercia de disco D, entonces:

Sabemos que el momento de inercia de un disco es:



$$I = \frac{1}{4}mr^2$$

Ahora movemos este momento de inercia hacia el eje con el teorema de ejes paralelos. Partimos de que la distancia que movemos al disco es la longitud de la ligadura d. Entonces:

$$I = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$$

b)

$$I_z = \frac{1}{2}mr^2 \; ; \quad m = 0.1kg \; ; \quad r = 0.1m$$

$$I_z = 0.0005 \ kg\,m^2$$

c)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} I_o \left(2 \dot{\phi} \sin^2 \theta\right) + \frac{1}{2} I_z \, 2 \left(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}\right) \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_o \dot{\phi} \sin^2\theta + I_z \dot{\phi} \cos^2\theta + I_z \dot{\psi} \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \left(I_o \sin^2\theta + I_z \cos^2\theta\right) + I_z \dot{\psi} \cos\theta = p_\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{2} I_z \, 2 \left(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta\right) = p_\psi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} I_o \left(2\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \, 2 \sin\theta \cos\theta\right) + \frac{1}{2} I_z \, 2 \left(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}\right)\left(-\dot{\phi} \sin\theta\right) + mgd \sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_o \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - I_z \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta - I_z \dot{\phi} \dot{\psi} \sin\theta + mgd \sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \left(I_o - I_z\right) - I_z \dot{\phi} \dot{\psi} \sin\theta + mgd \sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_o \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_o \ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$I_o \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \left(I_o - I_z\right) - I_z \dot{\phi} \dot{\psi} \sin\theta + mgd \sin\theta$$