7. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \left(\frac{u_{\ell,i+1} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1}}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(u_{\ell+1,i} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1})}{(\Delta t)^2} = \frac{\alpha^2}{(\Delta x)^2}(u_{\ell,i+1} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1})$$

Note que, usando la variación espacial de los componentes de Fourier se obtiene:

$$(u_{\ell,i+1} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1}) = (e^{jk\Delta x} - 2 + e^{-jk\Delta x})\, u_{\ell,i}$$

Además note el resultado de la siguiente cuenta:

$$\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) = \left(\frac{e^{j\frac{k\Delta x}{2}} - e^{-j\frac{k\Delta x}{2}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{jk\Delta x} - 2 + e^{-jk\Delta x}}{4}\right)$$

Luego concluimos que:

$$(u_{\ell,i+1} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1}) = 4\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) u_{\ell,i}$$

Reemplazando en la ecuación inicial:

$$u_{\ell+1,i} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1} = \frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{(\Delta x)^2} \cdot 4\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) u_{\ell,i}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_{\ell+1,i} - 2u_{\ell,i} + u_{\ell,i-1}}_{4} = \left(4\frac{(\Delta t)^2\alpha^2}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right) u_{\ell,i}$$

$$4 > 4\frac{(\Delta t)^2\alpha^2}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \leftarrow$$ Condición de Estabilidad

Como $\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$ está acotado por 1, obtenemos

$$4 > 4\frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{(\Delta x)^2} \Rightarrow 1 > \frac{(\Delta t)^2 \alpha^2}{(\Delta x)^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow 1 > \frac{\Delta t \, \alpha}{\Delta x}}$$