2.89. Por Taylor tenemos:

$$r(t+\Delta t) = r(t) + v(t)\Delta t + \tfrac{1}{2} a(t)\Delta t^2$$

Realizando lo mismo para la velocidad se obtiene:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t + \tfrac{1}{2}\dot{a}(t)\Delta t^2 + \ldots O(\Delta t^3)$$

Por último, si se aplica una aproximación lineal a $\dot{a}(t)$, se tiene:

$$a(t+\Delta t) = a(t) + \dot{a}(t)\Delta t \Rightarrow \dot{a}(t) = \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t}$$

Reemplazando obtenemos:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t}\right)\Delta t^2$$

$$= v(t) + \tfrac{1}{2}\left(a(t+\Delta t) + a(t)\right)\Delta t$$

2.90.

Las coordenadas iniciales en r_0 deben ser:

$$\vec{r}_0 = (d, 0)$$

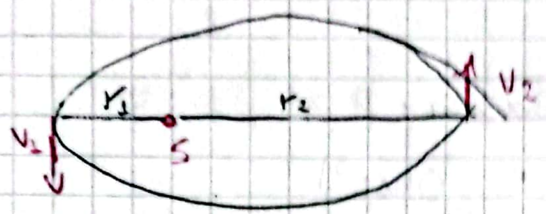
Donde d es la distancia entre un foco de la elipse y su extremo opuesto (afelio).

Esto se puede escribir como:

$$d = \underbrace{c}_{\text{distancia entre centro y foco}} + \underbrace{a}_{\text{distancia entre centro y afelio}} = (e \cdot a) + a = a(1+e)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_0 = (a(1+e), 0)$$

Para la velocidad en el afelio, tenemos:



Por conservación de momento angular:

$$m V_1 \cdot r_1 \cdot \sin 90^\circ = m V_2 r_2 \sin 90$$

$$\Rightarrow V_1 r_1 = V_2 r_2$$

Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{G \cancel{M} m}{r_1} = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{G \cancel{M} m}{r_2}$$

Teniendo en cuenta que $r_1 = a(1-e)$ y $r_2 = a(1+e)$, al despejar obtenemos:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} (V_1^2 - V_2^2) = G \cancel{m} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_2 r_2}{r_1} \right)^2 - V_2^2 = 2G \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow V_2^2 \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1 \right) = 2G \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \ldots\ldots$$

Al despejar, se obtiene:

$$V_2 = \sqrt{\frac{G}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)}$$