

# Economía Política Formal

Handout 1

Arrow y Gibbard-Satterhwaite

Jorge Fábrega

# Arrow

- **N** personas
- Set de alternativas: **A**={**a,b,c,...**}
- Ranking individual,  $L_i = (a,c,b,d,...)$
- Ranking social:  $L^*=(L_1, L_2 ,..., L_N )$
- Función de Bienestar Social  $F:L^N \rightarrow L^*$

# Propiedades deseables de la función de bienestar social

- Si todos prefieren una alternativa sobre otra, entonces, la función social ubica esa alternativa sobre la otra (Pareto eficiencia, **PE**)
- Ranking de dos alternativas sólo depende de comparar esas dos alternativas (independencia de alternativas irrelevantes, **IAI**)
- Las preferencias de nadie están por sobre las preferencias de los demás (no dictatorial, **ND**)

# Pareto eficiente

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	.	.		.	.
b	b		b	b	b		b	b
a	a		a	a	a		a	a
.	.		.	.	.		.	.

- Si todos rankean una alternativa **b** sobre otra **a**, entonces **b** debe estar ubicada sobre **a** en la función de bienestar social

# Independencia de Alternativas Irrelevantes

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
c	c		.	.	.		.	.
<b>b</b>	<b>b</b>		<b>b</b>	<b>b</b>	<b>b</b>		<b>b</b>	<b>b</b>
.	.		c	c	c		.	.
<b>a</b>	<b>a</b>		<b>a</b>	<b>a</b>	<b>a</b>		<b>a</b>	<b>a</b>
.	.		.	.	.		c	.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
<b>b</b>	<b>b</b>		.	.	.		c	.
c	c		c	c	c		<b>b</b>	<b>b</b>
.	.		<b>b</b>	<b>b</b>	<b>b</b>		.	.
<b>a</b>	<b>a</b>		<b>a</b>	<b>a</b>	<b>a</b>		<b>a</b>	<b>a</b>
.	.		.	.	.		.	.

- Toda la información relevante para ordenar **b** y **a** se obtiene de comparar **b** y **a**, sin importar otras alternativas

# No dictatorial

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
c	c		c	a	c		c	a
b	b		b	c	b		b	c
.	.		.	b	.		.	b
a	a		a	.	a		a	.

- No existe un individuo cuyo ranking sobre las alternativas en el set **A** sean reproducidas por la función social de modo tal que siempre que el cambia el ordenamiento de las alternativas en su ranking, la función social también lo hace.

# Teorema de Arrow

- Cuando existen al menos 3 alternativas y una función de bienestar social satisface **PE** e **IAI**...
- Entonces, dicha función de bienestar social es dictatorial (no cumple **ND**)
- En otras palabras, ninguna función de bienestar social puede satisfacer al mismo tiempo las tres condiciones deseables

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
a	a		a	a	a		a	a
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
b	b		b	b	b		b	b

Alternativa **a** es preferida por todos

Alternativa **b** es la peor para todos



# Demostración

Método: Demostración por contradicción

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
a	a		a	a	a		a	a
.	.		.	.	.		.	.
b	.		.	.	.		.	.
.	b		b	b	b		b	.

Subamos **b** en el ranking del individuo  
1

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
a	a		a	a	a		a	a
b	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	b		b	b	b		b	.

Subamos **b** en el ranking del individuo  
1

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Alternativa **a** sigue siendo la más preferida por  $N-1$  personas, pero ahora **b** es la alternativa más preferida por el individuo 1.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	a		a	a	a		a	?
a	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	b		b	b	b		b	.

→ 1ro: alternativa **a** o alternativa **b**?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2 ...

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		a	a	a		a	?
a	a		.	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	.		b	b	b		b	.

1ro: alternativa **a** o alternativa **b**?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo  $n-1$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	a	a		a	?
a	a		a	.	.		.	.
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	b	b		b	.

1ro: alternativa **a** o alternativa **b**?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo  $n-1$

¿Tiene que existir un individuo pivotal? ¿Por qué?

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	a	a		a	?
a	a		a	.	.		.	.
.	.		.	b	.		.	.
.	.		.	.	b		b	.

1ro: alternativa **a** o alternativa **b**?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo  $n-1$

Tiene que existir un individuo pivotal. Llamémoslo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	a	a		a	?
a	a		a	b	.		.	?
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	b		b	.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	b	a		a	b
a	a		a	a	.		.	a
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	b		b	.

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo n-1

Tiene que existir un individuo pivotal. Llamémoslo n

Por lo tanto, antes que n cambie de opinión en F: **a** es preferido a **b**

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	a	a		a	?
a	a		a	b	.		.	?
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	b		b	.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	b	a		a	b
a	a		a	a	.		.	a
.	.		.	.	.		.	.
.	.		.	.	b		b	.



# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **a** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	a	.		.	a
.	.		.	b	a		a	b
a	a		a	.	↓		↓	.
↓	↓		↓	.	b		b	.

Como no hemos cambiado el orden de **a** respecto de **b**, y dado que no hemos cambiado el orden de **b** con respecto a ninguna otra alternativa... entonces, **a** sigue siendo la alternativa mejor rankeada

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **a** en el ranking de todos menos el individuo  $n$




$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
b	b		b	a	.		.	a
.	.		.	b	.		.	b
.	.		.	.	a		a	.
a	a		a	.	b		b	.

Como no hemos cambiado el orden de **a** respecto de **b**, y dado que no hemos cambiado el orden de **b** con respecto a ninguna otra alternativa... entonces, **a** sigue siendo la alternativa mejor rankeada

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **b** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	a	.		.	a
b	b		b	b	.		.	b
				.	a		a	.
a	a		a	.	b		b	.

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **b** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	a	.		.	a
.	.		.	b	.		.	b
b	b		b	.	a		a	.
a	a		a	.	b		b	.

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Ahora, incorporamos en el análisis una tercera alternativa **c** que todos prefieren a la alternativa **b**

¿Cuál es el ordenamiento de **a**, **b** y **c**?

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	a	.		.	a
.	.		.	c	.		.	.
c	c		c	b	c		c	c
.	.		.	.	.		.	.
b	b		b	.	a		a	b
a	a		a	.	b		b	.

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Ahora, incorporamos en el análisis una tercera alternativa **c** que todos prefieren a la alternativa **b**

¿Cuál es el ordenamiento de **a**, **b** y **c** si cambia el orden de **b** y **a** como en la figura?

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	a	.		.	a/b
.	.		.	c	.		.	.
c	c		c	b	c		c	c
.	.		.		.		.	.
b	b		b	.	b		b	b
a	a		a	.	a		a	.



# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Ahora, incorporamos en el análisis una tercera alternativa **c** que todos prefieren a la alternativa **b**

¿Cuál es el ordenamiento de **a**, **b** y **c** si cambia el orden de **b** y **a** como en la figura?

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	a	.		.	a/b
.	.		.	c	.		.	.
c	c		c	b	c		c	c
.	.		.	.	.		.	.
b	b		b	.	b		b	b
a	a		a	.	a		a	.

Cambiamos **b** sobre **a** para todos los individuos  $i > n$

Por **IAI**: **a** es la alternativa más preferida de todas (quizás, excepto **b**)

Por **PE**: **c** > **b**

Por lo tanto, si **c** > **b**, entonces **a** > **c**

# Demostración

Método: Demostración por contradicción

Pese a que todos prefieren **b** sobre **a** excepto el individuo **n**, la función de bienestar social rankea **a** sobre **b**.

Por lo tanto, **n** dicta el orden de preferencias sociales de **a** y **b**.

Corolario: toda alternativa **a** en el set **A** tiene un dictador.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	F
.	.		.	a	.		.	a
.	.		.	c	.		.	.
c	c		c	b	c		c	c
.	.		.		.		.	.
b	b		b	.	b		b	b
a	a		a	.	a		a	.



# Respuestas del Millón de Dólares

- A las preguntas
  - ¿Cuál es el mejor mecanismo de decisiones que podemos utilizar para coordinar nuestra vida en común?

PREGUNTA DEBE REFORMULARSE

- ¿Es posible diseñar un sistema de decisiones colectivas que refleje fielmente las preferencias y sólo las preferencias de las personas que conforman el sistema?

NO

**LO ANTERIOR ASUMÍA VOTO SINCERO**  
**¿SI ESO NO SUCEDE QUÉ PASA?**

# Comportamiento estratégico, I

- Voto secuencial y equilibrio: 3 personas y 3 opciones
- Gibbard-Satterthwaite

# Gibbard-Satterthwaite

- No F (ordenamiento social), pero
  - ¿*f* (elección social)?
    - Manipulación
    - Mecanismos Institucionales

- **N** personas
- **A** alternativas
- Ranking individual,  $L_i$
- Ranking social:  $L^*$
- Función de Elección Social  $f: L^N \rightarrow L^*$ 
  - Ejemplo: Sea  $A = \{X_1, X_2, \dots, X_A\}$ 
    - $F_1 = (X_3, X_8, X_1, \dots)$  o  $F_2 = (X_5, X_6, X_A, \dots)$
    - $f_1 = (X_3), f_2 = (X_5)$

# Gibbard-Satterthwaite

- Cuando existen al menos 3 alternativas y una función de elección social es Pareto eficiente y monotónica...
- Entonces, la función de elección social debe ser dictatorial
- O bien, ninguna función de elección social puede satisfacer al mismo tiempo las tres condiciones deseables

# Demostración

La lógica es la misma, pero ahora cambios en la posición de las alternativas en cada ranking  $L_i$  obedecen a pensamiento estratégico y no a cambios exógenos

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	$f$
a	a		a	a	a		a	a
.	.		.	.	.		.	
.	.		.	.	.		.	
b	b		b	b	b		b	

La sociedad elige: a

# Demostración

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<i><b>f</b></i>
a	a		a	a	a		a	<i><b>a</b></i>
.	.		.	.	.		.	
b	.		.	.	.		.	
.	b		b	b	b		b	

La sociedad elige: a



# Demostración

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<i><b>f</b></i>
a	a		a	a	a		a	<i><b>a</b></i>
b	.		.	.	.		.	
.	.		.	.	.		.	
.	b		b	b	b		b	

La sociedad elige: a

# Demostración

Alternativa **a** sigue siendo la más preferida por  $N-1$  personas, pero ahora **b** es la alternativa más preferida por el individuo 1.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
b	a		a	a	a		a	<b>?</b>
a	.		.	.	.		.	
.	.		.	.	.		.	
.	b		b	b	b		b	

# Demostración

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2, 3,... hasta cierto individuo  $n-1$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b><i>f</i></b>
b	b		b	b	a		a	<b>b</b>
a	a		a	a	.		.	
.	.		.	.	.		.	
.	.		.	.	b		b	

La sociedad elige: b

# Demostración

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **a** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
b	b		b	a	.		.	<b>a</b>
.	.		.	b	a		a	
a	a		a	.	.		.	
.	.		.	.	b		b	

# Demostración

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **a** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
b	b		b	a	.		.	<b>a</b>
.	.		.	b	.		.	
.	.		.	.	a		a	
a	a		a	.	b		b	

Como no hemos cambiado el orden de **a** respecto de **b**, y dado que no hemos cambiado el orden de **b** con respecto a ninguna otra alternativa... entonces, **a** sigue siendo la elección social

# Demostración

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **b** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
.	.		.	a	.		.	<b>a</b>
b	b		b	b	.		.	
.	.		.	.	a		a	
a	a		a	.	b		b	

# Demostración

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, bajamos **b** en el ranking de todos menos el individuo  $n$

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
.	.		.	a	.		.	<b>a</b>
.	.		.	b	.		.	
b	b		b	.	a		a	
a	a		a	.	b		b	

# Demostración

Ahora:

- (i) Incorporamos en el análisis una tercera alternativa **c** que todos prefieren a la alternativa **b**
- (ii) Cambiamos **b** sobre **a** para todos los individuos  $i > n$   
¿Cuál es la elección social entre **a**, **b** y **c**?

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
.	.		.	a	.		.	<b>a</b>
.	.		.	c	.		.	
c	c		c	b	c		c	
.	.		.	.	.		.	
b	b		b	.	a		a	
a	a		a	.	b		b	

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
.	.		.	a	.		.	<b>?</b>
.	.		.	c	.		.	
c	c		c	b	c		c	
.	.		.	.	.		.	
b	b		b	.	b		b	
a	a		a	.	a		a	



# Demostración

Por **Monotonidad**, la elección social sólo puede ser **a** o **b**.  
 Pero **b** no puede ser la elección social porque **c > b** (por **PE b** no puede ser elegida), por ende la elección social debe seguir siendo **a**.

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
.	.		.	a	.		.	<b>a</b>
.	.		.	c	.		.	
c	c		c	b	c		c	
.	.		.	.	.		.	
b	b		b	.	a		a	
a	a		a	.	b		b	

$L_1$	$L_2$	...	$L_{n-1}$	$L_n$	$L_{n+1}$	...	$L_N$	<b>f</b>
.	.		.	a	.		.	<b>a</b>
.	.		.	c	.		.	
c	c		c	b	c		c	
.	.		.	.	.		.	
b	b		b	.	b		b	
a	a		a	.	a		a	

# Conclusión

- F: “Orden” Social → Imposibilidad Arrow
  - Arrow (1951)
- F: Elección Social → Manipulación
  - Gibbard (1971), Satterthwaite (1973)
- IMPLICANCIA: No existe “la” solución técnica a los problemas de decisión colectiva

# ¿Es posible el orden social basado en las preferencias de los individuos de un sistema social?

- Arrow
- Sí y sólo si se introducen + restricciones:
  - Sobre las preferencias (ej. unidimensionalidad)
  - Sobre el sistema de decisión (institucionales)

- **Corolario:**

**Decisiones colectivas =  $f(\text{Preferencias, Instituciones})$**

# Una ilustración – Sistema electoral

- $N = 55$
- Alternativas: a,b,c,d y e
- Preferencias:
  - 18 prefieren a
  - 12 prefieren b
  - 10 prefieren c
  - 9 prefieren d
  - 6 prefieren e

## Métodos - Ejemplos

- Elección en 2 vueltas
- Eliminar sucesivamente el menos votado
- Condorcet