

Economía Política Formal

Handout 1
Arrow y Gibbard-Satterhwaite
Jorge Fábrega

Arrow

- **N** personas
- Set de alternativas: A={a,b,c,...}
- Ranking individual, **L**_i = (a,c,b,d,...)
- Ranking social: L*=(L₁, L₂,..., L_N)
- Función de Bienestar Social **F:L**^N→**L***

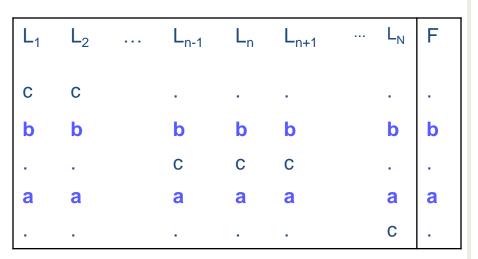
Propiedades deseables de la función de bienestar social

- Si todos prefieren una alternativa sobre otra, entonces, la función social ubica esa alternativa sobre la otra (<u>Pareto</u> <u>eficiencia</u>, **PE**)
- Ranking de dos alternativas sólo depende de comparar esas dos alternativas (<u>independencia de alternativas</u> <u>irrelevantes</u>, IAI)
- Las preferencias de nadie están por sobre las preferencias de los demás (no dictatorial, ND)

Pareto eficiente

 Si todos rankean una alternativa b sobre otra a, entonces b debe estar ubicada sobre a en la función de bienestar social

Independencia de Alternativas Irrelevantes



L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
						1
b	b				С	
С	С	С	С	С	b	b
b c . a		b	c b a	b	c b	
a	a	a	a	a	a	a

 Toda la información relevante para ordenar b y a se obtiene de comparar b y a, sin importar otras alternativas

No dictatorial

No existe un individuo cuyo ranking sobre las alternativas en el set A sean reproducidas por la función social de modo tal que siempre que el cambia el ordenamiento de las alternativas en su ranking, la función social también lo hace.

Teorema de Arrow

- Cuando existen al menos 3 alternativas y una función de bienestar social satisface PE e IAI...
- Entonces, dicha función de bienestar social es dictatorial (no cumple ND)
- En otras palabras, ninguna función de bienestar social puede satisfacer al mismo tiempo las tres condiciones deseables

Método: Demostración por contradicción

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
a	а	а	а	а	a b	a
	•	•		•	-	
					-	
b	b	b	b	b	b	b

Alternativa a es preferida por todos

Alternativa **b** es la peor para todos

Método: Demostración por contradicción

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
a	а	а	а	а	a	a
					•	
b					b	
	b	b	b	b	b	

Subamos b en el ranking del individuo 1

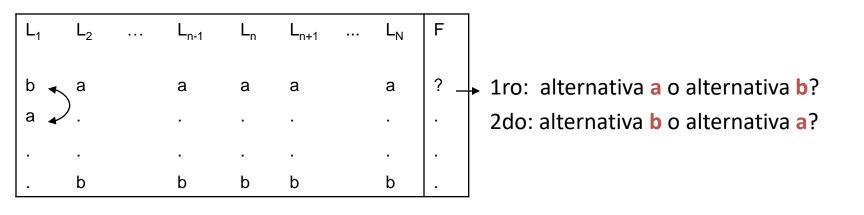
Método: Demostración por contradicción

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
а	а	а	а	а	a	a
a b						
1					b	
	b	b	b	b	b	

Subamos b en el ranking del individuo 1

Método: Demostración por contradicción

Alternativa a sigue siendo la más preferida por N-1 personas, pero ahora b es la alternativa más preferida por el individuo 1.



Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir b en el ranking, ahora del individuo 2 ...

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
b a	b	а	а	а	a	?
а	а					
		b	b	b	b	

1ro: alternativa a o alternativa b?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo n-1

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
b	b	b	а	а	а	?
b a	а				a	
			b	b	b	

1ro: alternativa a o alternativa b?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo n-1

¿Tiene que existir un individuo pivotal? ¿Por qué?

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
b a	b	b	а	а	a	?
а	а				•	
			b		b	
					b	

1ro: alternativa a o alternativa b?

2do: alternativa **b** o alternativa **a**?

Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo n-1

Tiene que existir un individuo pivotal. Llamémoslo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
b	b	L _{n-1} b a .	a	а	а	?
a	а	а	b	•	•	?
· .				b	b	

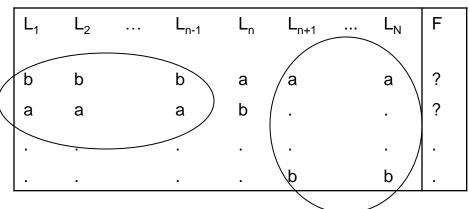
L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L_{n+1}	 L_N	F
b	b	b	b	а	a	b
b a	а	b a	а	•	. 🤇	а
	•				•	•
	-		•	b	b	

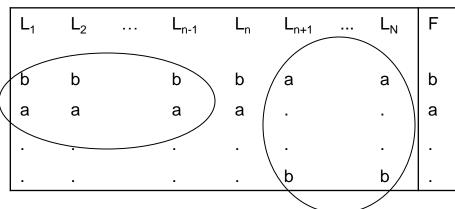
Método: Demostración por contradicción

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2... hasta cierto individuo n-1

Tiene que existir un individuo pivotal. Llamémoslo n

Por lo tanto, antes que n cambie de opinión en F: a es preferido a b





Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas a y b para ningún individuo, bajamos a en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
b	b	b	а			a
			b	а	а	b
a I	a ↓	a		\downarrow	a ↓ b	
↓	↓	.↓		b	b	

Como no hemos cambiado el orden de a respecto de b, y dado que no hemos cambiado el orden de b con respecto a ninguna otra alternativa... entonces, a sigue siendo la alternativa mejor rankeada

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas a y b para ningún individuo, bajamos a en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
b	b	b	а			a
			b		a b	b
					а	
а	а				b	

Como no hemos cambiado el orden de a respecto de b, y dado que no hemos cambiado el orden de b con respecto a ninguna otra alternativa... entonces, a sigue siendo la alternativa mejor rankeada

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas a y b para ningún individuo, bajamos b en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1} . b . a	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
			а			a
b	b	b	b			b
↓	↓	.↓		а	а	
а	а	а		b	b	

Método: Demostración por contradicción

Sin cambiar el orden entre las alternativas a y b para ningún individuo, bajamos b en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1} b a	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
			а			a
			b			b
b	b	b		а	а	
а	а	а		b	b	

Método: Demostración por contradicción

Ahora, incorporamos en el análisis una tercera alternativa c que todos prefieren a la alternativa b

¿Cuál es el ordenamiento de a, b y c?

							_
L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F	
			a			а	
			С				
С	С	С	b	С	С	С	
b	b	b		а	а	b	
а	а	а		b	b		

Método: Demostración por contradicción

Ahora, incorporamos en el análisis una tercera alternativa c que todos prefieren a la alternativa b

¿Cuál es el ordenamiento de a, b y c si cambia el orden de b y a como en la figura?

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}		L _N	F	
•			а				a/b	4
			С					Ì
С	С	С	b	С		С	С	
b	b	b	. 🗸	b	*	b	b	
а	а	а	. \	a	(а		

Método: Demostración por contradicción

Ahora, incorporamos en el análisis una tercera alternativa c que todos prefieren a la alternativa b

¿Cuál es el ordenamiento de a, b y c si cambia el orden de b y a como en la figura?

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}		L _N	F
			а				a/b
			С				
С	С	С	b	С		С	С
b	b	b	. /	≯b ≯a	*	b	b
а	а	а	. (→ a	<u></u>	а	

Cambiamos **b** sobre **a** para todos los individuos i>n

Por IAI: a es la alternativa más preferida de todas (quizás, excepto b)

Por PE: c>b

Por lo tanto, si c>b, entonces a>c

Método: Demostración por contradicción

Pese a que todos prefieren **b** sobre **a** excepto el individuo n, la función de bienestar social rankea **a** sobre **b**.

Por lo tanto, n dicta el orden de preferencias sociales de a y b.

Corolario: toda alternativa a en el set A tiene un dictador.

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	F
					•	a
c			С			.
С	С	С	b	С	С	С
						.
b a	b	b		b	b	a c b
а	а	а	•	а	а	

Respuestas del Millón de Dólares

- A las preguntas
 - ¿Cuál es el mejor mecanismo de decisiones que podemos utilizar para coordinar nuestra vida en común?

PREGUNTA DEBE REFORMULARSE

– ¿Es posible diseñar un sistema de decisiones colectivas que refleje fielmente las preferencias y sólo las preferencias de las personas que conforman el sistema?

NO

LO ANTERIOR ASUMÍA VOTO SINCERO ¿SI ESO NO SUCEDE QUÉ PASA?

Comportamiento estratégico, I

- Voto secuencial y equilibrio: 3 personas y 3 opciones
- Gibbard-Satterhwaite

Gibbard-Satterhwaite

- No F (ordenamiento social), pero
 - ¿f (elección social)?
 - Manipulación
 - Mecanismos Institucionales

- N personas
- A alternativas
- Ranking individual, L_i
- Ranking social: L*
- Función de Elección Social $f:L^N \rightarrow L^*$
 - \square Ejemplo: Sea A={X₁,X₂,...,X_A}
 - $F_1 = (X_3, X_8, X_1, ...)$ o $F_2 = (X_5, X_6, X_A, ...)$
 - $f_1 = (X_3), f_2 = (X_5)$

Gibbard-Satterthwaite

- Cuando existen al menos 3 alternativas y una función de elección social es Pareto eficiente y monotónica...
- Entonces, la función de elección social debe ser dictatorial
- O bien, ninguna función de elección social puede satisfacer al mismo tiempo las tres condiciones deseables

La lógica es la misma, pero ahora cambios en la posición de las alternativas en cada ranking **L**_i obeceden a pensamiento estratégico y no a cambios exógenos

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
а	а	а	а	а	a	a
-	-					
.						
b	b	b	b	b	b	

La sociedad elige: a

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
а	а	а	а	а	а	a
				•		
b				-	-	
	b	b	b	b	b	

La sociedad elige: a

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
a b	а	а	а	а	а	a
b		•	-			
	b	b	b	b	b	

La sociedad elige: a

Alternativa a sigue siendo la más preferida por N-1 personas, pero ahora b es la alternativa más preferida por el individuo 1.

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
b ⋆	a	а	а	а	a b	?
a ≁		•		•		
.						
	b	b	b	b	b	

Repetimos el ejercicio de subir **b** en el ranking, ahora del individuo 2, 3,... hasta cierto individuo n-1

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
b a	b	b	b	а	а	b
а	а	а	а			
	-			b	b	

La sociedad elige: b

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, <u>bajamos **a**</u> en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1} b . a	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
b	b	b	а		-	а
			b	а	а	
а	а	а				
				b	b	

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, <u>bajamos **a**</u> en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
b	b	b	а			а
			b		a	
а				а	а	
а	а	а		b	b	

Como no hemos cambiado el orden de a respecto de b, y dado que no hemos cambiado el orden de b con respecto a ninguna otra alternativa... entonces, a sigue siendo la eleccion social

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, <u>bajamos b</u> en el ranking de todos menos el individuo *n*

L ₁	L ₂	 L _{n-1} . b . a	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
			а			а
b	b	b	b	•		
				а	а	
а	а	а		b	b	

Sin cambiar el orden entre las alternativas **a** y **b** para ningún individuo, <u>bajamos b</u> en el ranking de todos menos el individuo n

L ₁	L ₂	 L _{n-1} b a	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
			а			а
			b		•	
b	b	b		а	а	
b a	а	а		b	b	

Ahora:

- (i) Incorporamos en el análisis una tercera alternativa c que todos prefieren a la alternativa b
- (ii) Cambiamos **b** sobre **a** para todos los individuos *i>n* ¿Cuál es la elección social entre **a**, **b** y **c**?

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
	•	•	а	-	•	а
-		•	С	•	•	
С	С	С	b	С	С	
b	b	b		а	а	
а	а	а		b	b	

						*
L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L_N	f
			а			?
			С			
С	С	С	b	С	С	
					 ·.	
b	b	b	. (b	b	
а	а	а		a	_a /	

Por **Monotonicidad**, la elección social sólo puede ser **a** o **b**. Pero **b** no puede ser la elección social porque **c**>**b** (por **PE b** no puede ser elegida), por ende la elección social debe seguir siendo **a**.

L ₁	L ₂	 L _{n-1}	L _n	L _{n+1}	 L _N	f
			а			a
-	•		С			
С	С	С	b	С	С	
b	b	b		a	а	
а	а	а	•	b	b	

L ₁	L_2	 L_{n-1}	L _n	L_{n+1}	 L_N	f
			а		-	а
			С			
С	С	С	b	С	С	
b	b	b	. (b	b	
а	а	а		а	a /	

Conclusión

- F: "Orden" Social → Imposibilidad Arrow
 - Arrow (1951)
- F: Elección Social

 Manipulación
 - Gibbard (1971), Satterthwaite (1973)

 IMPLICANCIA: No existe "la" solución técnica a los problemas de decisión colectiva

¿Es posible el orden social basado en las preferencias de los individuos de un sistema social?

- Arrow
- Sí y sólo si se introducen + restricciones:
 - Sobre las preferencias (ej. unidimensionalidad)
 - Sobre el sistema de decisión (institucionales)

Corolario:

Decisiones colectivas = f(Preferencias, Instituciones)

Una ilustración – Sistema electoral

- N = 55
- Alternativas: a,b,c,d y e
- Preferencias:
 - 18 prefieren a
 - 12 prefieren b
 - 10 prefieren c
 - 9 prefieren d
 - 6 prefieren e

<u>Métodos - Ejemplos</u>

- Elección en 2 vueltas
- Eliminar sucesivamente el menos votado
- Condorcet