Entrega N° 1
Modelos Físicos

Farizano, Juan Ignacio   Mellino, Natalia   Prato, Valentina

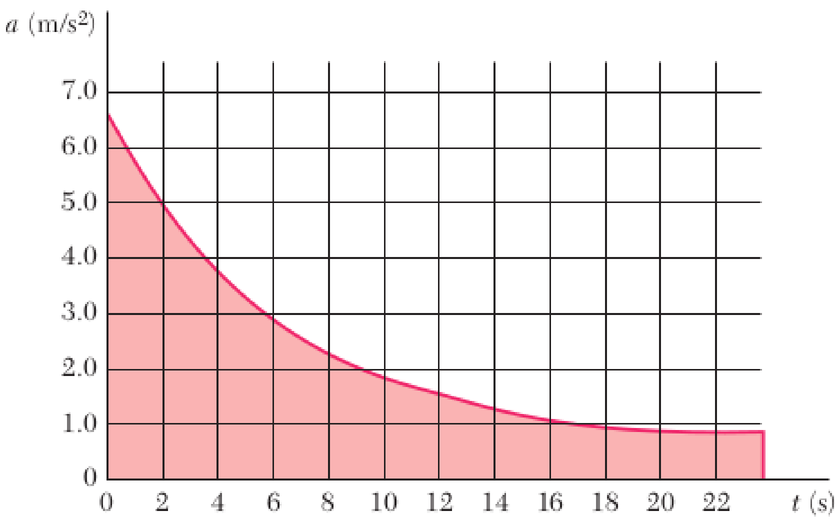
Ejercicio 11.81

Enunciado

El registro de aceleración que se muestra en la figura se obtuvo durante las pruebas de rapidez de un automóvil deportivo. Si se sabe que el automóvil inicia desde el reposo, determine de manera aproximada:

a) La velocidad del automóvil en $t = 8s$

b) La distancia recorrida por el automóvil en $t = 20s$



Resolución

Apartado a)

El gráfico está dividido en rectángulos de anchos $\Delta t = t_{k+1} - t_k = 2s$

Sabemos que $v_0 = 0$ y $v_i = v_0 + \sum_{k=0}^{i-1} a_p(t_k, t_{k+1})\Delta t$ con $a_p(t_k, t_{k+1}) = \frac{a(t_k)+a(t_{k+1})}{2} \Rightarrow v_i = 2s \cdot \sum_{k=0}^{i-1} a_p(t_k, t_{k+1})$

Para calcular v_8, tenemos que calcular a_p para los intervalos $(0,2),(2,4),(4,6),(6,8)$

$$\begin{aligned}
a_p(0,2) =& \frac{a(0)+a(2)}{2} \approxeq \frac{6.5m/s^2+5m/s^2}{2} = 5.75m/s^2 \\
a_p(2,4) \approxeq& \frac{5m/s^2+3.75m/s^2}{2} = 4.375m/s^2 \\
a_p(4,6) \approxeq& \frac{3.75m/s^2+3m/s^2}{2} = 3.375m/s^2 \\
a_p(6,8) \approxeq& \frac{3m/s^2+2.25m/s^2}{2} = 2.625m/s^2 \\
\Rightarrow v_8 =& 2s\cdot(5.75+4.375+3.375+2.62)m/s^2 = 32.25m/s
\end{aligned}$$

$\therefore$ La velocidad del auto en el tiempo $t=8s$ es igual a $v_8 = 32.25m/s$

Apartado b)

También sabemos que $x_i = x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} v_p(t_k,t_{k+1})\Delta t$ con $v_p(t_k,t_{k+1}) = \frac{v(t_k)+v(t_{k+1})}{2}$.
Para calcular la distancia recorrida hasta los 20s se puede suponer que $x_0 = 0$ y simplemente calcular x_{20}.

Para esto se debe calcular a_p para los 10 intervalos de 2s entre 0s y 20s, y con esto calcular v_p para cada intervalo.

El del intervalo siguiente se puede obtener añadiendo el próximo $a_p\Delta t$ al del intervalo actual.

Sabiendo que $v_0 = 0$ calculamos.

$$\begin{aligned}
v_2 =& a_p(0,2)\cdot t = 5.72m/s^2\cdot 2s = 11.5m/s \Rightarrow v_p(0,2) = \frac{v_0+v_2}{2} = 5.75m/s \\
v_4 =& v_2 + a_p(2,4)\cdot t = 11.5m/s + 4.375m/s^2\cdot 2s = 20.25m/s \Rightarrow v_p(2,4) = 15.875m/s \\
v_6 =& 27m/s \Rightarrow v_p(4,6) = 23.625m/s \\
v_8 =& 32.25m/s \Rightarrow v_p(6,8) = 29.625m/s \\
a_p(8,10) =& \frac{2.25m/s^2+1.75m/s^2}{2} = 2m/s^2 \Rightarrow v_{10} = 36.25m/s \Rightarrow v_p(8,10) = 34.25m/s \\
a_p(10,12) =& \frac{1.75m/s^2+1.5m/s^2}{2} = 1.625m/s^2 \Rightarrow v_{12} = 39.5m/s \Rightarrow v_p(10,12) = 37.875m/s \\
a_p(12,14) =& \frac{1.5m/s^2+1.25m/s^2}{2} = 1.375m/s^2 \Rightarrow v_{14} = 42.25m/s \Rightarrow v_p(12,14) = 40.875m/s \\
a_p(14,16) =& \frac{1.25m/s^2+1m/s^2}{2} = 1.125m/s^2 \Rightarrow v_{16} = 44.5m/s \Rightarrow v_p(14,16) = 43.375m/s \\
a_p(16,18) =& \frac{1m/s^2+1m/s^2}{2} = 1m/s^2 \Rightarrow v_{18} = 46.5m/s \Rightarrow v_p(16,18) = 45.5m/s \\
a_p(18,20) =& \frac{1m/s^2+0.75m/s^2}{2} = 0.875m/s^2 \Rightarrow v_{20} = 48.25m/s \Rightarrow v_p(18,20) = 47.375m/s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{20} = 0 + 2s\cdot(5.75m/s \quad &+15.875m/s + 23.625m/s + 29.625m/s + 34.25m/s + 37.875m/s + 40.875m/s \\
&+43.375m/s + 45.5m/s + 47.375m/s) \\
= 648.25m&
\end{aligned}$$

$\therefore$ La distancia recorrida por el automóvil en el tiempo $t = 20s$ es igual a $x_{20} = 648.25m$

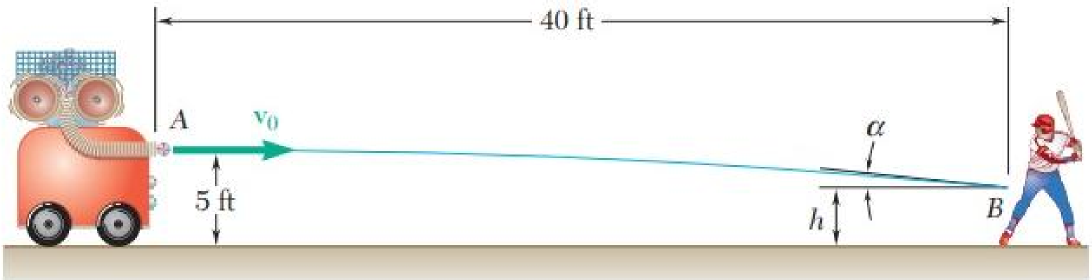
Ejercicio 11.100

Enunciado

Una máquina lanzadora "dispara" pelotas de béisbol con una velocidad horizontal v_0 . Si se sabe que la altura h varía entre 31 in. y 42 in., determine:

a) El rango de valores de v_0.

b) Los valores de α correspondientes a $h = 31$ in. y $h = 42$ in.



Resolución

Para resolver el problema, primero fijamos nuestro sistema de referencia. Situamos el origen en el punto A donde parte la pelota. El eje x es positivo hacia la derecha, y el eje y es positivo hacia abajo.

Recordemos las siguientes ecuaciones que nos serán de utilidad:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \tag{1}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \tag{2}$$

Ahora trabajamos por separado para cada valor de h

- $h = 31in = 2.58ft$:

Tenemos entonces que nuestra **posición inicial** es $(0, 0)$ y nuestra **posición final** será dada por $(40, 5 - h) = (40, 2.42)$. Ahora, queremos hallar nuestro vector de velocidad inicial $v_0 = ((v_x)_0, (v_y)_0)$. Podemos deducir que el valor para $(v_y)_0$ es $(v_y)_0 = 0ft/s$. Luego, con este dato, podemos usar la ecuación 2 y despejar el tiempo t en y:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 + (v_y)_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\
2.42ft &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\
2.42ft &= \frac{1}{2} \cdot (32.17ft/s^2) \cdot t^2 \\
2.42ft &= 16.085ft/s^2 \cdot t^2 \\
\frac{2.42ft}{16.085ft/s^2} &= t^2 \\
0.387s &= t
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que el tiempo que tarda la pelota en llegar al final de su recorrido es $t = 0.387s$. Ahora, podemos reemplazar este valor en la ecuación 2 y despejar la $(v_x)_0$ para x.

$$\begin{aligned} 40ft &= 0 + (v_x)_0 \cdot (0.387s) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 \\ 40ft &= (v_x)_0 \cdot (0.387s) \\ 103.359ft/s &= (v_x)_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hallamos que $v_0 = (103.359, 0)$.

Ahora queremos hallar nuestro ángulo α. Recordemos que:

$$|v_f| \cdot \cos\alpha = (v_x)_f \tag{3}$$

$$|v_f| \cdot \sin\alpha = (v_y)_f \tag{4}$$

Donde v_f es nuestro vector de velocidad final y debemos hallar sus componentes. Como la velocidad en x siempre es constante, tenemos que $(v_x)_f = 103.359ft/s$. Para hallar la $(v_y)_f$ utilizamos la ecuación 1 y sustituimos t por el tiempo final, asi obtenemos la velocidad final.

$$\begin{aligned} v_y(t) &= (v_y)_0 + a \cdot t \\ v_y(t) &= 0 + (32.17ft/s^2) \cdot 0.387s \\ v_y(t) &= 12.44ft/s \end{aligned}$$

Ahora, calculamos $|v_f| = |(103.359, 12.44)| = \sqrt{103.359^2 + 12.44^2} = 104.104$.

Reemplazando en la ecuación 3, podemos despejar α:

$$\begin{aligned} 104.104ft/s \cdot \cos\alpha &= 103.359ft/s \\ \cos\alpha &= \frac{103.359ft/s}{104.104ft/s} \\ \cos\alpha &= 0.992 \\ \alpha &= \arccos 0.992 \\ \alpha &= 0.126rad \end{aligned}$$

- $h = 42in = 3.5ft$

El razonamiento es completamente análogo, solamente hay que reemplazar los valores de h.

- Posición inicial: (0, 0)
- Posición final: $(40, 5 - 3.5) - (40, 1.5)$
- $(v_0)_y = 0$

Despejamos el tiempo t para y en la ecuación 2:

$$\begin{aligned} 1.5ft &= \frac{1}{2} \cdot (32.17ft/s^2) \cdot t^2 \\ 1.5ft &= 16.085ft/s^2 \cdot t^2 \\ \frac{1.5ft}{16.085ft/s^2} &= t^2 \\ 0.305s &= t \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de t en la ecuación de $x(t)$ y hallamos $(v_x)_0$:

$$\begin{aligned} 40ft &= 0 + (v_x)_0 \cdot (0.305s) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 \\ 40ft &= (v_x)_0 \cdot (0.305s) \\ 131.147ft/s &= (v_x)_0 \end{aligned}$$

Para hallar el ángulo α seguimos el mismo procedimiento que antes. Hallamos v_f: tenemos que $(v_x)_f = 131.147ft/s$, pues en x la velocidad es constante. Para hallar la $(v_y)_f$ utilizamos la ecuación 1 y sustituimos t por el tiempo final, asi obtenemos la velocidad final.

$$\begin{aligned} v_y(t) &= (v_y)_0 + a \cdot t \\ v_y(t) &= 0 + (32.17ft/s^2) \cdot 0.305s \\ v_y(t) &= 9.811ft/s \end{aligned}$$

Luego: $v_f = (131.147, 9.811) \Rightarrow |v_f| = \sqrt{131.147^2 + 9.811^2} = 131.513$

Finalmente utilizando la ecuación 3:

$$\begin{aligned} 131.513ft/s \cdot \cos\alpha &= 131.147ft/s \\ \cos\alpha &= \frac{131.147ft/s}{131.513ft/s} \\ \alpha &= \arccos 0.997 \\ \alpha &= 0.074rad \end{aligned}$$

Por todo lo analizado anteriormente podemos concluir que:

a) El rango de valores de v_0 es $103.359ft/s \leq v_0 \leq 131.147ft/s$

b) Los valores de α para $h = 31in$ y $h = 42in$ son $\alpha = 0.126rad$ y $\alpha = 0.074rad$ respectivamente.

Ejercicio 11.153

Enunciado

Un satélite viajará de manera indefinida en una órbita circular alrededor de un planeta si la componente normal de la aceleración del satélite es igual a $g(\frac{R}{r})^2$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta, R es el radio del planeta, y r es la distancia desde el centro del planeta al satélite. Determine la rapidez de un satélite relativa al planeta indicado, si el satélite se desplaza de manera indefinida en una órbita circular a 160 km sobre la superficie del planeta.

Resolución

El planeta dado es Venus. Luego:

$$g = 8.53m/s^2, R = 6161km \Rightarrow r = 160km + R = 6321km$$

Del enunciado sabemos que la componente normal de la aceleración a_n es $a_n = g(\frac{R}{r})^2$ y por teoría sabemos que $a_n = \frac{v^2}{r}$. A partir de esto, despejamos v:

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{v^2}{r} = g\frac{R^2}{r^2} &\Rightarrow v^2 = g\frac{R^2}{r} \\
\Rightarrow v = R\sqrt{\frac{g}{r}} & \\
&= 6161km \cdot \sqrt{\frac{8.53m/s^2}{6321km}} \\
&= 6161000m \cdot \sqrt{\frac{8.53m/s^2}{6321000m}} \\
&= \frac{6161000m}{860.9s} \\
&= 7156.46m/s \\
&= 25763.26km/h
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Por lo tanto la rapidez de un satélite relativa a Venus estando en órbita circular a 160km sobre la superficie del planeta es igual a $v = 25763.26km/h$