

Entrega N° 3

Modelos Físicos

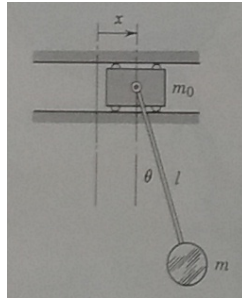
Farizano, Juan Ignacio

Mellino, Natalia

Prato, Valentina

Enunciado

El péndulo simple de masa m y longitud l está suspendido de la masa m_0 que puede moverse libremente según la horizontal. El péndulo se suelta desde una posición desplazada, y tiene lugar un movimiento acoplado de ambas masas. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento acoplado del sistema. Determinar el período τ del péndulo para pequeñas oscilaciones, tómese $\sin \theta \approx 0$, $\cos \theta \approx 1$, y $\theta^2 \approx 0$.



Resolución

Primero, fijamos nuestro sistema de referencia: el eje x es positivo hacia la derecha y el eje y es positivo hacia abajo: el origen está situado a la altura del centro de la masa m_0 y en el lado izquierdo del gráfico, donde la distancia x que se ve en el gráfico es la distancia en el eje horizontal desde el origen hacia el centro de la misma masa.

Ahora procedemos a plantear la ecuación de posición de la masa m , y a partir de ella su vector velocidad:

$$\begin{aligned} r &= (x + l \sin \theta; l \cos \theta) \\ \dot{r} &= (\dot{x} + \dot{\theta} l \cos \theta; -l \dot{\theta} \sin \theta) \end{aligned}$$

Sabemos que la lagrangiana viene dada por:

$$L = T - V$$

Donde T es la energía cinética y V es la energía potencial.

Calculamos T :

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Donde:

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= (\dot{x} + \dot{\theta}l \cos \theta)^2 + (-l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\ &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Luego, calculamos V :

$$V = m_0g \underbrace{h_x}_{=0} + mgh_r = mg(-l \cos \theta)$$

Unimos todo

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta$$

Como en este sistema la única fuerza que actúa es la de la gravedad que es conservativa, podemos afirmar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Calculamos para θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2}m(2\dot{x}\dot{\theta}l \sin \theta) - mgl \sin \theta \\ &= -ml \sin \theta(\dot{x}\dot{\theta} + g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{x}l \cos \theta + 2l\dot{\theta}^2) \\ &= ml(\dot{x} \cos \theta + \dot{\theta}l)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml(\ddot{x} \cos \theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\theta}l)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ml(\ddot{x} \cos \theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\theta}l) + ml(\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + g \sin \theta) \\ &= ml(\ddot{x} \cos \theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\theta}l + \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + g \sin \theta) \\ &= ml(\ddot{x} \cos \theta + \ddot{\theta}l + g \sin \theta) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\underbrace{\Longleftrightarrow}_{ml \neq 0}$$

$$\ddot{x} \cos \theta + \ddot{\theta}l + g \sin \theta = 0$$

Cálculo auxiliar:

$$\ddot{x} \cos \theta + \ddot{\theta} l + g \sin \theta = 0 \quad \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \theta} \ddot{x} + \ddot{\theta} l + g \theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x} = -\ddot{\theta} l - g \theta \quad (1)$$

Y calculamos para x :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_0 \dot{x} + \frac{1}{2} m (2\dot{x} + 2\dot{\theta} l \cos \theta) \\ &= \dot{x} (m_0 + m) + m l \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x} (m_0 + m) + m l \ddot{\theta} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ &= \ddot{x} (m_0 + m) + m l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \\ &\quad \underbrace{\Rightarrow}_{\cos \theta \approx 1, \theta^2 \approx 0} \\ &\ddot{x} (m_0 + m) + m l \ddot{\theta} = 0 \\ &\quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Ecuación (1)}} \\ &(-l\ddot{\theta} - \theta g)(m_0 + m) + m l \ddot{\theta} = 0 \\ &-l\ddot{\theta} m_0 - l\ddot{\theta} m - \theta g(m_0 + m) + m l \ddot{\theta} = 0 \\ &l\ddot{\theta} m_0 + \theta g(m_0 + m) = 0 \\ &l\ddot{\theta} m_0 = -\theta g(m_0 + m) \\ &\ddot{\theta} = -\theta \frac{g}{l} \frac{m_0 + m}{m_0} \\ &\ddot{\theta} + \theta \frac{g}{l} \frac{m_0 + m}{m_0} = 0 \end{aligned}$$

A partir de reemplazar según los datos dados en el enunciado, obtenemos una ecuación que se trata de la ecuación diferencial de un Movimiento Armónico Simple de frecuencia angular.

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \frac{m_0 + m}{m_0}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m} \frac{l}{g}}$$