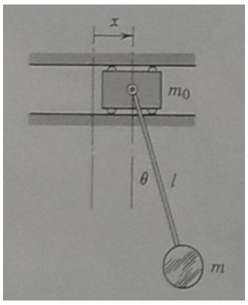
Entrega N° 3

Modelos Físicos

Farizano, Juan Ignacio   Mellino, Natalia   Prato, Valentina

Enunciado

El péndulo simple de masa m y longitud l está suspendido de la masa m_0 que puede moverse libremente según la horizontal. El péndulo se suelta desde una posición desplazada, y tiene lugar un movimiento acoplado de ambas masas. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento acoplado del sistema. Determinar el período τ del péndulo para pequeñas oscilaciones, tómese $\sin\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$, y $\theta^2 \approx 0$.



Resolución

Primero, fijamos nuestro sistema de referencia: el eje x es positivo hacia la derecha y el eje y es positivo hacia abajo: el origen está situado a la altura del centro de la masa m_0 y en en el lado izquierdo del gráfico, donde la distancia x que se ve en el gráfico es la distancia en el eje horizontal desde el origen hacia el centro de la misma masa.

Ahora procedemos a plantear la ecuación de posición de la masa m, y a partir de ella su vector velocidad:

$$r = (x + l\sin\theta; l\cos\theta)$$
$$\dot{r} = (\dot{x} + \dot{\theta}l\cos\theta; -l\dot{\theta}\sin\theta)$$

Sabemos que la lagrangiana viene dada por:

$$L = T - V$$

Donde T es la energía cinética y V es la energía potencial.

Calculamos T:

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\dot{r}^2 &= (\dot{x} + \dot{\theta}l\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2 \\
&= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta + \dot{\theta}^2 l^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \\
&= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2
\end{aligned}$$

Luego, calculamos V:

$$V = m_0 g \underbrace{h_x}_{=0} + mgh_r = mg(-l\cos\theta)$$

Unimos todo

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

Como en este sistema la única fuerza que actúa es la de la gravedad que es conservativa, podemos afirmar:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Calculamos para θ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2}m(2\dot{x}\dot{\theta}l\sin\theta) - mgl\sin\theta \\
&= -ml\sin\theta(\dot{x}\dot{\theta} + g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2}m(2\dot{x}l\cos\theta + 2th\dot{e}tal^2) \\
&= ml(\dot{x}\cos\theta + \dot{\theta}l)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) = ml(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\theta}l)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ml(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\theta}l) + ml(\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta) \\
&= ml(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\theta}l + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + g\sin\theta) \\
&= ml(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{\theta}l + g\sin\theta) \\
&= 0 \\
&\underbrace{\Longleftrightarrow}_{ml\neq 0} \\
&\ddot{x}\cos\theta + \ddot{\theta}l + g\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar:

$$\ddot{x}\cos\theta + \ddot{\theta}l + g\sin\theta = 0 \underbrace{\iff}_{\cos\theta\approx 1, \sin\theta\approx\theta} \ddot{x} + \ddot{\theta}l + g\theta = 0 \iff \ddot{x} = -\ddot{\theta}l - g\theta \tag{1}$$

Y calculamos para x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_0\dot{x} + \frac{1}{2}m(2\dot{x} + 2\dot{\theta}l\cos\theta) \\ &= \dot{x}(m_0 + m) + ml\dot{\theta}\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) &= \ddot{x}(m_0 + m) + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ &= \ddot{x}(m_0 + m) + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0 \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{\cos\theta\approx 1, \theta^2\approx 0} \\ &\ddot{x}(m_0 + m) + ml\ddot{\theta} = 0 \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Ecuación (1)}} \\ &(-l\ddot{\theta} - \theta g)(m_0 + m) + ml\ddot{\theta} = 0 \\ &- l\ddot{\theta}m_0 - l\ddot{\theta}m - \theta g(m_0 + m) + ml\ddot{\theta} = 0 \\ &l\ddot{\theta}m_0 + \theta g(m_0 + m) = 0 \\ &l\ddot{\theta}m_0 = -\theta g(m_0 + m) \\ &\ddot{\theta} = -\theta\frac{g}{l}\frac{m_0 + m}{m_0} \\ &\ddot{\theta} + \theta\frac{g}{l}\frac{m_0 + m}{m_0} = 0\end{aligned}$$

A partir de reemplazar según los datos dados en el enunciado, obtenemos una ecuación que se trata de la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple.

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\frac{m_0 + m}{m_0}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{m_0 + m}\frac{l}{g}}$$