Trabajo Práctico: Unidad 5

Mellino, Natalia   Farizano, Juan Ignacio

Ejercicio 1:

Apartado a):

Sabemos que como f es una función de densidad de probabilidad se debe cumplir la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$$

Es decir, debemos ver que:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} k(2-x)dx &= 1 \\
k \cdot \int_{-2}^{2} 2dx - k \cdot \int_{-2}^{2} x \cdot &= 1 \\
8k - k\Big(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\Big) &= 1 \\
8k &= 1 \\
k &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra función nos queda de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2-x) & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Apartado b):

Función de distribución acumulada:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{8}(2-x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{x} \frac{1}{8}(2-x)dx &= \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}\int_{-2}^{x} tdt \\
&= \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}\Big(\frac{x^2}{2} - 2\Big) \\
&= \frac{-x^2}{16} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{16} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Apartado c):

Queremos hallar $P(-1 \leq X \leq 1)$, para ello planteamos:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(2-x)dx \\ &= \frac{1}{4}(2) - \frac{1}{8}\Big(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el termómetro cometa un error es de $\frac{1}{2}$.

Apartado d):

$$\begin{aligned}P(X > c) &= 1 - P(X \leq c) \\ &= 1 - F(c) \\ &= 1 - \Big[\frac{-c^2}{16} + \frac{1}{4}c + \frac{3}{4}\Big]\end{aligned}$$

Luego queremos hallar c tal que:

$$\Big[\frac{c^2}{16} - \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}\Big] = 0.1$$

Esto ocurre sí y sólo sí:

$$c \simeq 3.2649 \;\text{ ó }\; c \simeq 0.735$$

Como se debe cumplir que $-2 \leq c \leq 2$ tomamos $c \simeq 0.735$.

Por lo tanto el valor de c para el cual $P(X > c) = 0.1$ es $c \simeq 0.735$.

Ejercicio 2:

Definimos la variable aleatoria:

X: tiempo de vida de un marcapasos.

Nuestra función f de densidad de probabilidad tiene una distribución exponencial con media de 16 años, por lo tanto, nuestro parámetro α viene dado por: $\alpha = \frac{1}{16}$. Entonces nuestra función f nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}e^{(-1/16)x} - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Y nuestra Función de Distribución Acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{(-1/16)x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

1) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado el marcapasos se le deba reimplantar otro antes de los 20 años?

Para esto debemos calcular

$$\begin{aligned} P(X < 20) &= F(20) \\ &= 1 - e^{(-1/16)20} \\ &\simeq 0.7134 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad es de 0.7134.

2) Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25 años?

Queremos hallar $P(X \leq 25|X \geq 5) = \frac{P(5 \leq X \leq 25)}{P(X \geq 5)}$:

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 25) &= F(25) - F(5) \\ &= (1 - e^{(-1/16)25}) - (1 - e^{(-1/16)5}) \\ &\simeq 0.522 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) \\ &= 1 - F(5) \\ &= 1 - (1 - e^{(-1/16)5}) \\ &\simeq 0.7316 \end{aligned}$$

Luego:

$$P(X \leq 25|X \geq 5) = \frac{P(5 \leq X \leq 25)}{P(X \geq 5)} \simeq \frac{0.522}{0.7316} \simeq 0.7135$$

Por lo tanto, la probabilidad de que haya que reemplazarlo antes de los 25 años es de 0.7135.

Ejercicio 3:

Apartado a):

Definimos la variable aleatoria:

X : duración en horas de un láser

X tiene una **distribución normal** con parámetros $\mu = 7000$ y $\sigma = 600$. Queremos hallar $P(X < 5000)$, para ello debemos convertir esta variable X que tiene una distribución normal, en una nueva variable Z con distribución normal **estandarizada**:

$$\begin{aligned} P(X < 5000) &= P(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5000 - \mu}{\sigma}) \\ &= P(\frac{X - 7000}{600} < \frac{5000 - 7000}{600}) \\ &= P(Z < -3.\widehat{3}) \rightarrow (\text{llamamos a Z} = \frac{X - 7000}{600}) \end{aligned}$$

Ahora, como la variable aleatoria Z tiene una distribución normal estandarizada, observamos la tabla y hallamos que: $P(Z < -3.\widehat{3}) = 0.0004$.

Por lo tanto, la probabilidad de que el láser falle antes de las 5000hs es de 0.0004.

Apartado b):

En este caso, queremos hallar el k para el cual $P(X > k) = 0.95$.

$$P(X > k) = 0.95 \iff P(X < k) = 0.05$$

$$\begin{aligned} P(X < k) &= P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{k-\mu}{\sigma}) \\ &= P(\frac{X-7000}{600} < \frac{k-7000}{600}) \\ &= P(Z < \frac{k-7000}{600}) \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

Observando la tabla, vemos que se debe tomar $z = -1.65$, y luego:

$$\begin{aligned} -1.65 &= \frac{k-7000}{600} \\ 600 \cdot -1.65 &= k - 7000 \\ -990 &= k - 7000 \\ 6010 &= k \end{aligned}$$

Apartado c):

Definimos una variable aleatoria:

X' : n° de láseres que siguen funcionando después de 7000 hs.

X' tiene una **distribución binomial** de parámetros $n = 3$ y $p = P(X \geq 7000)$. Ahora calculamos p:

$$\begin{aligned} P(X \geq 7000) &= 1 - P(X < 7000) \\ &= 1 - P(Z < \frac{7000-7000}{600}) \\ &= 1 - P(Z < 0) \\ &= 1 - 0.5 \to \text{observando la tabla} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Luego resulta, $p = 0.5$. Ahora queremos hallar:

$P(X' = 3) = \binom{3}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^0 = (0.5)^3 = 0.125$

Por lo tanto, la probabilidad de que los 3 láseres sigan funcionando después de 7000 hs es de 0.125.

Ejercicio 4:

Sea X: temperatura en celsius.

X tiene una distribución uniforme en el intervalo (15, 21), por lo tanto, su su fdp viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}$$

Luego tenemos la variable aleatoria:

Y: temperatura en farenheit.

Y también se tiene que $H(X) = Y = \frac{9}{5}X + 32$. Queremos hallar la fdp f_Y.

Observemos que por teorema tenemos que:

$$f_Y(x) = f_X(x) \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

Donde $x = H^{-1}(y) = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9}$. Por lo tanto:

$$f_Y(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{54}$$

Y observemos que, de hecho, f_y es una fdp ya que:

- $f_Y(x) \geq 0 \ \forall x \mid 59 \leq x \leq 69.8$ (Obs. que si $15 \leq X \leq 21$ entonces $59 \leq H(X) = Y \leq 69.8$)
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{54} dx = \int_{59}^{69.8} \frac{5}{54} dx = (69.8 - 59) \cdot \frac{5}{54} = 1$