Farizano, Juan Ignacio   Parcial 1 MN

Pregunta 2

b) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$ con $a_n = \frac{4+3^n}{2^n}$

Puedo descomponer a la sucesión a_n como la suma de dos sucesiones b_n y c_n

$$a_n = \frac{4+3^n}{2^n} = \frac{2^2}{2^n} + \frac{3^n}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2^{n-2}}}_{=b_n} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^n}_{=c_n}$$, luego por T3 $\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0 \\ \text{d) } \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \infty = \infty \neq 0 \quad (*)$$

$\therefore$ Por $(*)$ y Teorema 7, la serie diverge.

a) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ donde $a_n = \frac{1}{n^2+4n+3}$

Sea la función real $f(n)$ tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con f definida en $[1, +\infty)$

¿$f(x)$ es estrictamente decreciente? $f(x)$ estrictamente decreciente $\Leftrightarrow f(x+1) < f(x)$ (trabajamos con $x \in \mathbb{N}$)

$$\frac{1}{(x+1)^2+4(x+1)+3} < \frac{1}{x^2+4x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+6x+8} - \frac{1}{x^2+4x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x+3-(x^2+6x+8)}{\underbrace{(x^2+6x+8)}_{\geq 0 \text{ ya que } x\geq 1}\underbrace{(x^2+4x+3)}_{\geq 0}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \overset{\leq 0}{-2x} \overset{\leq 0}{-5} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es estrictamente decreciente.}$$

Luego, las raíces del polinomio x^2+4x+3 son -3 y -1, descompongo en fracciones parciales

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x+3)}{(x+3)(x+1)} \Rightarrow Ax+A+Bx+3B = 0x+1$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \Rightarrow A = -B \\ A+3B = 1 \Rightarrow -B+3B = 1 \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Farizano, Juan Ignacio

Parcial 1 MN

$$\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+3)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_a^b \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+3|)\Big|_a^b \underset{x>0}{=} \frac{1}{2}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{2}\cdot\ln(x+3)\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\Big|_b^a$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) - \frac{1}{2}\ln(1/2) = 0 - \frac{1}{2}.\ln(1/2) = \underline{\frac{1}{2}\cdot\ln(2)}$$

$$\circ)\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+3}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\circ)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+3}\ \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ Como la integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge y f es estrictamente decreciente, por Teorema 15 la Serie Converge