# Categorías Cartesianas cerrdas

Mauro Jaskelioff - 6/6/2022

# Cálculo Lambda Simplemente Tipado

El **cálculo lambda simplemente tipado** ($\lambda_{\to}$) consiste de:

- Tipos. $B$ es un conjunto de tipos base.

$$
\begin{aligned}
T ::= {} & B \\
\mid {} & T \to T
\end{aligned}
$$

- Pre-términos. Los $c$ son constantes.

$$
\begin{aligned}
t ::= {} & x \\
\mid {} & c \\
\mid {} & \lambda x.\, t \\
\mid {} & t\ t
\end{aligned}
$$

Los términos son los pre-términos bien tipados.

# Reglas de Tipado

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \qquad \text{(T-Var)}$$

$$\frac{\Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash \lambda x.\, t_2 : T_1 \to T_2} \qquad \text{(T-Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_2 : T_1 \to T_2 \quad \Gamma \vdash t_1 : T_1}{\Gamma \vdash t_2\ t_1 : T_2} \qquad \text{(T-App)}$$

- Adicionalmente, se agregan reglas para las constantes.
- Notar que en realidad cuando uno habla de $\lambda$-cálculo simple tipado, en realidad está hablando de una **familia** de cálculos.

# Modelando lenguajes en una categoría

- Vimos el modelo básico de un lenguaje en una categoría:
  - Los tipos son objetos
  - Los términos son morfismos
  - Modelar pares con productos
  - Modelar opciones con coproductos

# Modelando lenguajes en una categoría

- Vimos el modelo básico de un lenguaje en una categoría:
    - Los tipos son objetos
    - Los términos son morfismos
    - Modelar pares con productos
    - Modelar opciones con coproductos
- ¿Podemos usar este modelo básico para $\lambda_{\to}$?
- Para modelar un término (y no un pre-término) debemos modelar entornos y tipos.

# Modelando lenguajes en una categoría

- Vimos el modelo básico de un lenguaje en una categoría:
  - Los tipos son objetos
  - Los términos son morfismos
  - Modelar pares con productos
  - Modelar opciones con coproductos
- ¿Podemos usar este modelo básico para $\lambda_{\rightarrow}$?
- Para modelar un término (y no un pre-término) debemos modelar entornos y tipos.
  - ¿Cómo modelar los tipos función?
  - ¿Cómo modelar los entornos?

# Modelo de Lambek y Scott

Utilizando el modelo de Lambek y Scott, modelamos $\lambda_{\to}$:

- Un término $\Gamma \vdash t : T$ se modela como un morfismo

$$[\![\Gamma]\!] \to [\![T]\!]$$

- Los entornos se modelan como productos:

$$\begin{array}{rcl} [\![\epsilon]\!] & = & 1 \\ [\![\Gamma; x : T]\!] & = & [\![\Gamma]\!] \times [\![T]\!] \end{array}$$

- El tipo función $A \to B$ se modela como un *exponencial* $B^A$.

# Exponencial

Un objeto $B$ es exponenciable, si para todo objeto $A$ existe un objeto $B^A$ y un isomorfismo natural

$$curry_{A,C} : Hom(C \times B, A) \cong Hom(C, A^B) : uncurry_{A,C}$$

# Exponencial

Un objeto $B$ es exponenciable, si para todo objeto $A$ existe un objeto $B^A$ y un isomorfismo natural

$$curry_{A,C} : Hom(C \times B, A) \cong Hom(C, A^B) : uncurry_{A,C}$$

O sea, para todo morfismo $f : C \times B \to A$ tenemos un morfismo

$$curry\ f : C \to A^B$$

y para todo $g : C \to A^B$ tenemos un morfismo

$$uncurry\ g : C \times B \to A$$

donde $curry\ f$ y $curry\ g$ son transformaciones naturales en $A$, y $C$, y

$$uncurry\ (curry\ f) = id \qquad curry\ (uncurry\ g) = id$$

# Exponenciales

- Definimos $apply = uncurry\ id_{A^B} : A^B \times B \to A$.
- $(\_^B)$ define un (endo)functor.
- Es posible caracterizar los exponenciales sin hacer uso del producto (usando adjunciones)

# Categorías cartesianas cerradas

- Una categoría con objeto final y productos se dice *cartesiana*.
- Una categoría con todos los exponenciales se dice *cerrada*.
- Cuando cumple con las dos condiciones se dice *Categoría cartesiana cerrada* y se abrevia como CCC.
- En una CCC podemos modelar $\lambda_{\to}$.
- Además, $\lambda_{\to}$ es la *lógica interna* de una CCC.

# Referencias


- Introduction to Higher-Order Categorical Logic. J. Lambek y P.J. Scott. 1988.
- Algebra of Programming. R. Bird y O. de Moor. 1997.
- Category Theory. S. Awodey. 2010.