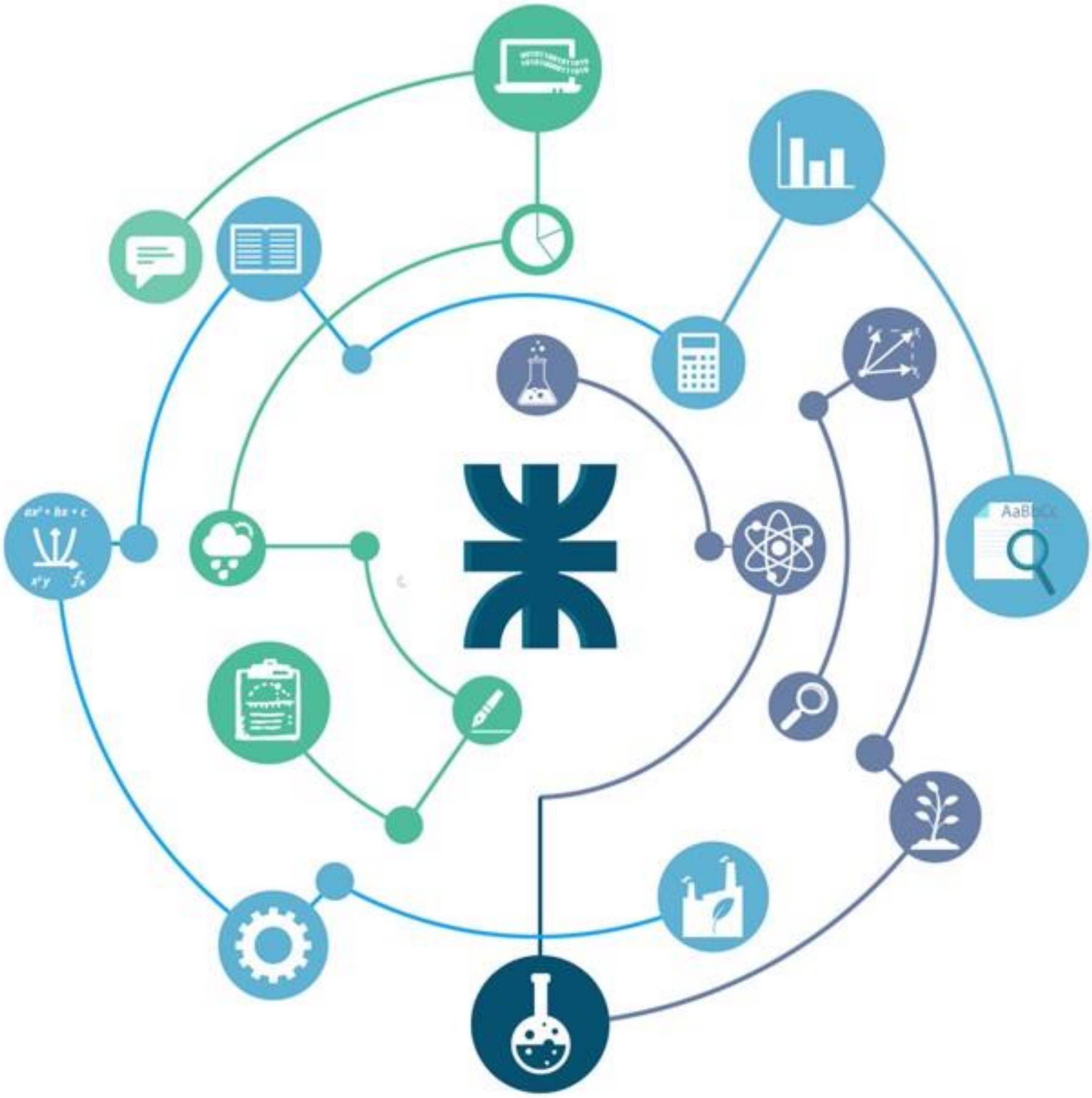


Matemática
Función Cuadrática

PROYECTO DE MEJORA DE FORMACIÓN EN
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIRECCIÓN DE PLANEAMIENTO ACADÉMICO
SEMINARIO UNIVERSITARIO

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

Decana
Mg. Ing. Liliana R. Cuenca Pletsch

Vicedecano
Ing. Gustavo Alberto Bernaola

Secretario Académico
Ing. Fernando H. Soria

Directora de Planeamiento Académico
Mg. María del Carmen Maurel

Coordinación Seminario Universitario
Ing. Claudia R. Garcia

Equipo de Diseño y Producción de contenidos
Matemática: Ing. Claudia García
Física: Prof.ª Mariana Cancián
Química: Ing. Yanina Zuazquita

Corrección de textos
Prof. Pablo F. Garrido

Resistencia, Octubre 2016.

ÍNDICE

I. CONTENIDOS

Función Lineal. Ordenada al origen. Pendiente. Gráfica de la función lineal. Condición de paralelismo y perpendicularidad. Ceros, conjunto de positividad y conjunto de negatividad.

II. DESTINATARIOS

Este material está destinado a estudiantes de 2°- 3° año de nivel secundario de todas las modalidades.

III. COMPETENCIAS

Caracterizar y reconocer las funciones cuadráticas como un medio para modelizar situaciones problemáticas propias de las matemáticas y de su aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.
Indicadores de logro:

- Relaciona las diferentes expresiones simbólicas con expresiones algebraicas que describen un problema
- Reconoce e interpreta los coeficientes de las expresiones estándar con el contexto de los problemas a resolver.
- Identifica e interpreta los principales elementos gráficos de una parábola: vértice, puntos de corte, eje de simetría.
- Interpretar gráficamente, las variaciones de los coeficientes en las expresiones simbólicas de una función cuadrática.
- Describe situaciones y contextos en los que se encuentran formas u objetos parabólicos.

INTRODUCCIÓN

Diseñamos este material didáctico para apoyar el proceso de aprendizaje de alumnos de nivel secundario, con el fin de afianzar saberes necesarios para el ingreso al nivel universitario y, en especial, a las carreras de ingeniería.

Desarrollamos los contenidos con el apoyo de videos y ejercicios de comprobación de lo aprendido. Además, los presentamos de manera tal que puedan ser utilizados tanto en formato impreso como en soporte digital.

Las funciones cuadráticas son ampliamente usadas en la ciencia, los negocios, y la ingeniería ya que pueden describir distintos fenómenos como ser la trayectoria de chorro de agua en una fuente, el recorrido de un lanzamiento de un objeto, o pueden ser incorporadas en estructuras como reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales.

Usamos ecuaciones cuadráticas en situaciones donde dos cosas se multiplican juntas y ambas dependen de la misma variable.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Desde un barco que se halla en situación de emergencia se efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales.

El destello podrá verse desde la base naval más cercana únicamente mientras se encuentre a una altura no menor de 195 m sobre el nivel del mar.

Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de las pistolas de señales y con las condiciones en que se dispara, la altura del destello estará dada por la siguiente fórmula:

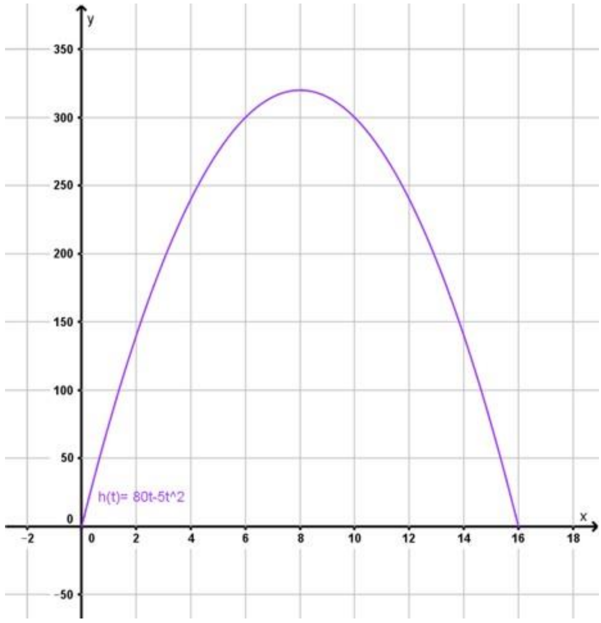
$$h(t) = 80t - 5t^2$$

En esta fórmula, **h** es la altura sobre el nivel del mar, en metros, cuando hayan transcurrido **t** segundos desde el momento del disparo.

Los técnicos han realizado una simulación y han obtenido el gráfico que aparece abajo y una tabla donde están expresadas las principales relaciones entre tiempo y altura:

Tiempo (seg)	Altura (m)
0	0
2	140
4	240
6	300
8	320
10	300
12	240
14	140
16	0

Tabla 1



De acuerdo con tales datos:

a) ¿Llegará a verse el destello desde la base naval?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la señal para alcanzar el punto más alto? ¿Cuánto tarda para caer al suelo?
c) ¿Durante qué período de tiempo el destello se puede ver desde la base naval?
d) ¿En qué momento cae al suelo?
e) ¿En qué momento alcanza, el destello, los 275 m, los 320 m y los 340 m?

La fórmula con la cual modelizamos este problema recibe el nombre de **función cuadrática.**

Llamamos **función cuadrática** a una función ***f*** que verifica:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c \quad o \quad y = ax^2 + bx + c}$$

Donde **a**, **b** y **c** son números reales, llamados *parámetros de la función cuadrática* y se verifica siempre a ≠ 0

La gráfica que representa a este tipo de funciones se denomina **parábola.**

Son ejemplos de funciones cuadráticas las siguientes expresiones:

1) $f(x) = -2x^2 + 3x + 1 \quad donde\ a = -2,\ b = 3\ y\ c = 1$

2) $g(x) = 2x^2 \quad en\ este\ caso\ a = 2,\ b = 0\ y\ c = 0$

3) $f\ (x) = -9x^2 + 2 \quad en\ este\ caso\ a = -9,\ b = 0\ y\ c = 2$

1. FUNCIÓN $f(x) = x^2$

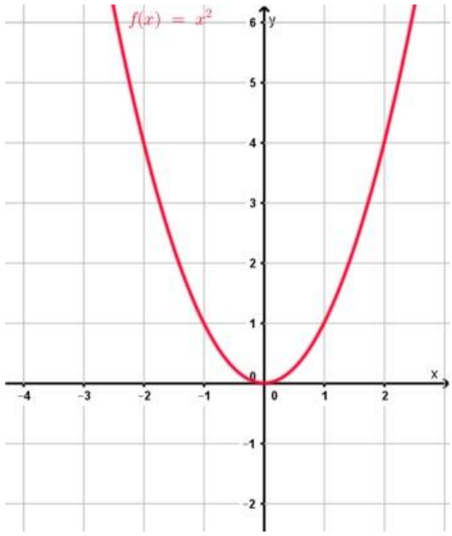
Vamos a analizar la función:

$$y = x^2 \;\; o \; f(x) = x^2 \, , \quad donde \quad a = 1, \qquad b = 0 \; y \; c = 0$$

Para ello realizamos una tabla de valores y su gráfica en sistema de coordenadas cartesianas:

x	f(x)
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Tabla 2

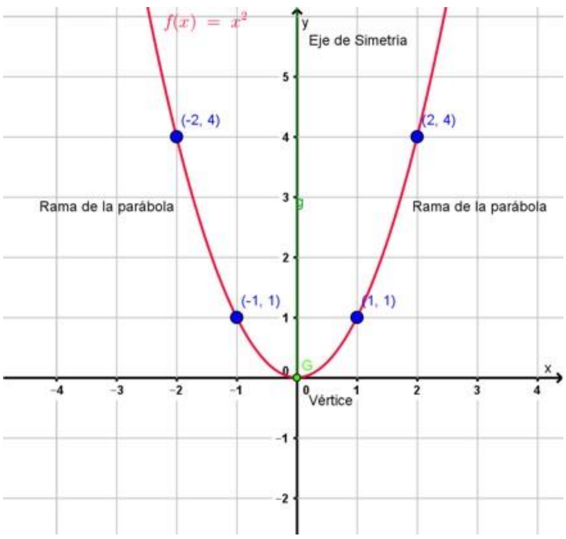


A partir del gráfico y de la tabla de valores, podemos analizar las características de la función. Entonces, deducimos que:

1) El ***dominio*** de las funciones cuadráticas, si no se plantea una restricción, queda determinado por el conjunto de los números reales **Dom f** = R.

2) Como para todo número x real, al resolver x^2, obtenemos un número real positivo, el conjunto ***imagen*** es

Img f = {y ∈ R/ y ≥ 0} = [0,+∞).



3) El origen de coordenadas (0; 0) pertenece al gráfico y es el mínimo valor que alcanza la función; este punto se denomina **vértice de la parábola**. En general, el vértice es el punto más extremo de la función.

4) En la Tabla 2, si consideramos dos valores opuestos de la variable independiente (por ejemplo, 1 y -1, 2 y -2, etc.), vemos que sus imágenes son iguales.

En general, para todo número real **x** y su opuesto **−x**, si calculamos sus imágenes para esta función cuadrática se verifica que:

$$f\ (x)\ =\ x2\ \ y\ f\ (-x)\ =\ (-x2)\ =\ x2\ \ entonces\ f\ (x)\ =\ f\ (-x)$$

Luego, la función y = x^2 tiene su gráfica simétrica respecto del eje y, este eje **y** se denomina **eje de simetría** de la parábola.

El siguiente video te permitirá profundizar el concepto de dominio e imagen en una función cuadrática

Dominio e Imagen función cuadrática

Comprobamos lo aprendido

PROBLEMA 1

Consideren la función $f(x) = x^2$

1. Calculen f(-4), f($\frac{1}{3}$) y f($\sqrt{7}$)
2. Indiquen, si es posible, los valores de **x** para los cuales:

   a. f(x) = 100   b. f(x) = 5   c. f(x) = -4   d. f(x) = f(5)

PROBLEMA 2

Consideren la función $f(x) = -x^2$. De acuerdo con eso:

a) Completen la siguiente tabla y construyan la gráfica.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
F(x)									

b) Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:
   a. El conjunto imagen es **Img f** = {y ∈ R/ y ≤ 0} = [0,-∞).
   b. La función no tiene punto extremo.
   c. El vértice es el punto (0, -1).
   d. En el punto (0, 0) existe un punto extremo cuya imagen es la mayor de todas las imágenes de la función.
   e. Son simétricos los puntos -4 y 4.

2. VÉRTICE

Volvamos al problema de inicio y respondamos a algunas de las preguntas que se plantearon allí:

¿Llegará a verse el destello desde la base naval?

El problema plantea que el destello debe encontrarse a una altura no menor a 195 m. El vértice de la parábola está en el punto (8,320): esto indica que a los 8 segundos estaba a 320 m, que es el punto máximo que alcanza.

Este dato lo obtenemos de la tabla y observando la gráfica, pero también podemos calcularlo.

Las coordenadas del vértice de una función cuadrática están dadas por:

$$V = (x_v, y_v)$$

Donde $x_v = \frac{-b}{2.a}$ y $y_v = f(x_v)$

El vértice divide en dos ramas simétricas a la gráfica de la función cuadrática y el valor de su abscisa determina una ecuación de una recta vertical (E), paralela al eje de las ordenadas, llamada **eje de simetría**.

Eje de simetría: $\boldsymbol{E = x_v}$

Nuestro problema está modelizado por la siguiente fórmula:

$$h(t) = 80t - 5t^2$$
$$donde\ a = -5, b = 80\ y\ c = 0$$

Si calculamos el vértice:

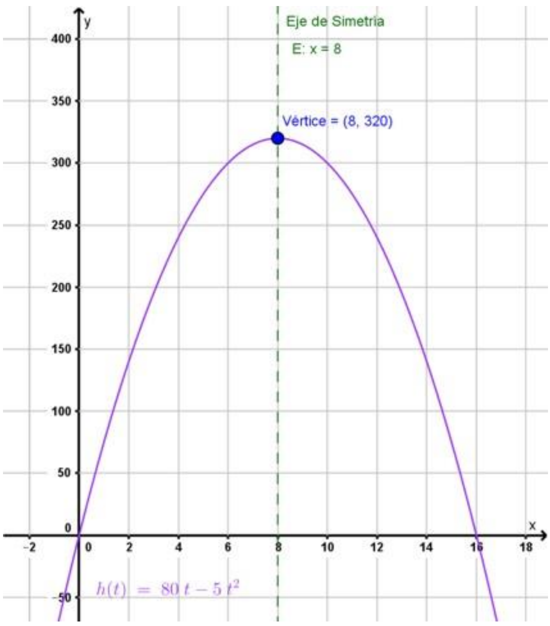
$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-80}{2.(-5)} = 8$$

$$y_v = f(8) = 320$$

Obtenemos que el **Vértice** es

$$\boldsymbol{V = (8, 320)}$$

Eje de simetría: $\boldsymbol{E = 8}$



El siguiente video te permitirá comprender como encontrar el vértice y eje de simetría

Vértice y eje de simetría

3. EXTREMO

El vértice de la función cuadrática es un punto extremo que puede ser máximo o mínimo. El tipo de extremo del vértice (máximo o mínimo) queda determinado por la orientación de las ramas de la parábola y esta, a su vez, está definida por el signo del coeficiente principal **a**:

Si a > 0

En la gráfica vemos $f(x) = x^2$ donde a > 0; por lo tanto:

Las **ramas van hacia arriba** o la concavidad es positiva.

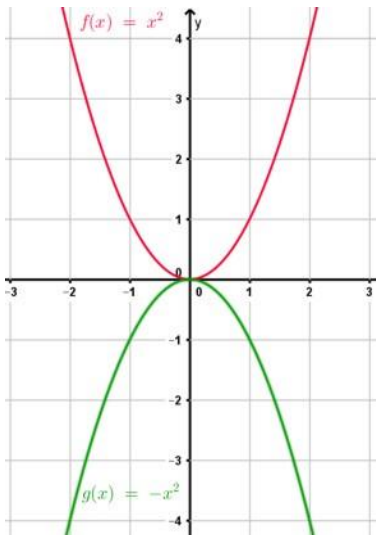
El vértice es un mínimo, ya que la imagen que toma el vértice es la menor de todas las imágenes.

Si a < 0

En la gráfica vemos $g(x) = -x^2$ donde a < 0; por lo tanto:

Las **ramas van hacia abajo** o la concavidad es negativa.

El vértice es un máximo, ya que la imagen que toma el vértice es la mayor de todas las imágenes.



Por la fórmula de nuestro problema podemos determinar que esta tendrá un máximo, ya que el coeficiente principal es menor que cero y por los cálculos del vértice obtuvimos que las coordenadas son (8,320). Esto significa que el destello alcanzará una altura máxima de 320 m, por lo que podrá ser visto desde la base naval.

Comprobamos lo aprendido

PROBLEMA 3

Consideren las funciones $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Para cada una de ellas:

1. Completen la tabla:

	a	b	c
$f(x) = 2x^2$			
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$			

2. Completen la siguiente tabla, marcando con una cruz la opción correspondiente:

	Las ramas van hacia arriba	Las ramas van hacia abajo	El vértice es un máximo	El vértice es un mínimo
$f(x) = 2x^2$				
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$				

3. Hallen una función simétrica a f(x) y otra simétrica a g(x) con respecto del eje x.

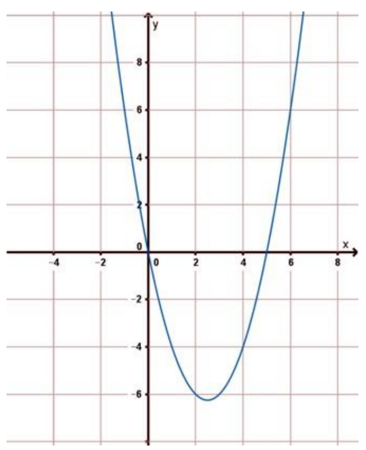
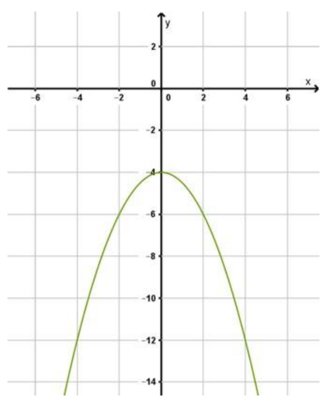
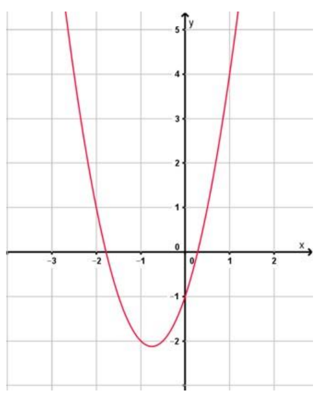
PROBLEMA 4

Para cada una de las siguientes funciones:

a) Completen la tabla y calculen el vértice

	a	b	c	Vértice	Eje de simetría
$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$					
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4$					
$h(x) = x^2 - 5x$					

b) Relacionen cada una de esas funciones con alguna de las siguientes gráficas:

I	II	II
		

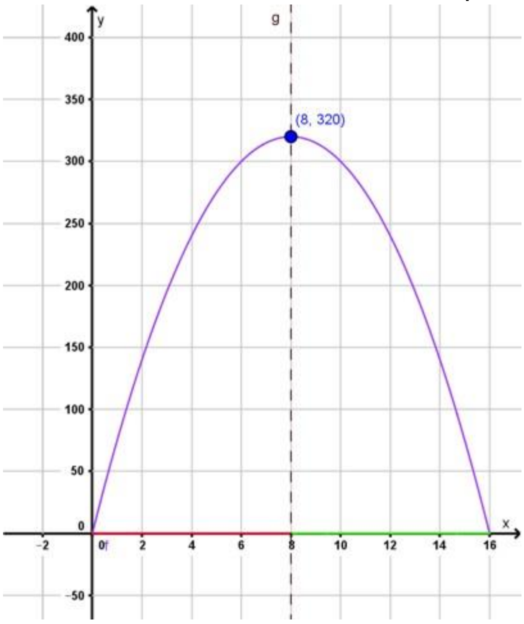
4. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

***Otra pregunta que nos planteamos es:* ¿Cuánto tiempo tarda la señal para alcanzar el punto más alto? ¿Cuánto tarda para caer al suelo?**

En la gráfica del problema podemos observar que para ciertos valores de la función, a medida que avanza el tiempo, la altura también crece. Esto sucede hasta que llega al punto máximo (vértice) y luego, a medida que sigue avanzando el tiempo, la altura comienza a decrecer.

Desde las coordenadas (0,0), la altura crece hasta la coordenada (8,320). Después de este punto, hasta la coordenada (16,0), comienza a decrecer.

Por lo tanto, podemos decir que desde el momento inicial hasta alcanzar el punto máximo tarda 8 segundos y también tarda 8 segundos en alcanzar el suelo nuevamente.



A estos intervalos de valores del dominio de la función donde las imágenes crecen y decrecen los llamamos **intervalos de crecimiento y decrecimiento**.

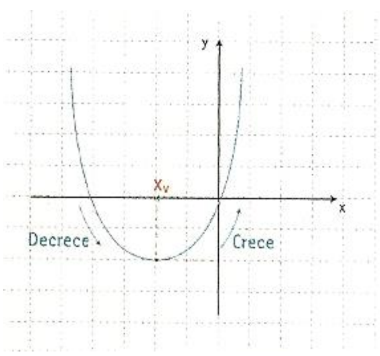
Diremos entonces que la función crece en el intervalo (0,8) y decrece en el intervalo (8,16).

De manera general, para una función cuadrática podemos decir que los intervalos de crecimiento y decrecimiento estarán determinados por el eje de simetría y por el signo del coeficiente principal de la función:

Si a > 0

Intervalo de crecimiento: $(x_v, +\infty)$

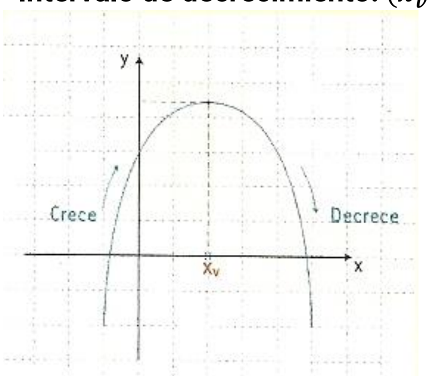
Intervalo de decrecimiento: $(-\infty, x_v)$



Si a < 0

Intervalo de crecimiento: $(-\infty, x_v)$

Intervalo de decrecimiento: $(x_v, +\infty)$



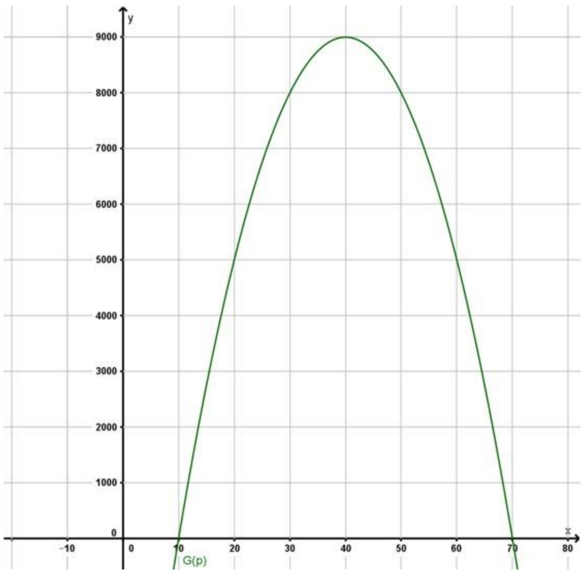
Comprobamos lo aprendido

PROBLEMA 5

Determinen los intervalos de crecimiento y decrecimiento para las funciones del Problema 4:

	Vértice	**Intervalo de crecimiento**	**Intervalo de decrecimiento**
$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$			
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4$			
$h(x) = x^2 - 5x$			

PROBLEMA 6



Para la realización de un festival musical con el que se busca recaudar fondos para el colegio, se determinó que los costos iniciales eran de $7000. A partir de los datos que se conocen de festivales anteriores, se construyó una función que relaciona el precio de la entrada ***p*** con las ganancias ***G(p)***, en pesos, con el propósito de realizar estimaciones:

$$G(p) = -10p^2 + 800p - 7000$$

a) Determinen cuál es el valor de la entrada que permitirá obtener la máxima ganancia.
b) Analicen la gráfica y con el dato anterior (punto a) determinen cuáles son los valores de entradas que harán maximizar las ganancias y cuáles son los valores de las entradas que harán minimizar las ganancias.

5. Ecuaciones cuadráticas

¿Durante qué período de tiempo el destello se puede ver desde la base naval?

Recordemos que para ver el destello desde la base naval este debía alcanzar una altura no menor a 195 m y que la fórmula del modelo es

$$h(t) = 80t - 5t^2$$

Por lo tanto, podemos comenzar buscando en qué momento alcanza la atura de 195 m. Para ello planteamos la siguiente ecuación:

$$80t - 5t^2 = 195$$

La ecuación planteada se denomina **ecuación cuadrática** o **ecuación de segundo orden**.

Antes de resolver esta ecuación en particular, analizaremos la resolución de las ecuaciones cuadráticas en general.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita, una vez simplificada y ordenada, adopta la forma general.

Una ecuación cuadrática tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \quad con \ \ a \neq 0; \ \ a, b, c \in \mathcal{R}}$$

Este tipo de ecuaciones puede presentarse de diferentes maneras, dependiendo de que los coeficientes **b** y **c** tomen como valor al cero. Por esto decimos que la ecuación puede presentarse completa, cuando todos los coeficientes son distintos de cero, o incompleta cuando **b** o **c** son iguales a cero.

Ejemplos:

En nuestro problema ejemplo la ecuación es completa:

$$\boldsymbol{x^2 + 9cm\, x - 360\, cm^2 = 0 \quad \text{donde a} = 1, \text{b} = 9 \text{ y c} = 360}$$

En cambio, las siguientes ecuaciones son incompletas

$$\boldsymbol{x^2 + 10 = 0 \qquad \text{a} = 1, \text{b} = 0 \text{ y c} = 10}$$

$$\boldsymbol{3x^2 - x = 0 \qquad \text{a} = 3, \text{b} = -1 \text{ y c} = 0}$$

$$-5\boldsymbol{x^2 = 0 \qquad \text{a} = -5, \text{b} = 0 \text{ y} \quad \text{c} = 0}$$

5.1 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Encontrar la solución de una ecuación de segundo grado significa hallar los valores de x de manera tal que satisfaga dicha igualdad.

Se pueden presentar distintas situaciones, dependiendo de las características de la ecuación. Veamos algunos casos.

5.1.1 Caso 1: El término lineal es nulo

Ejemplo 1: En la ecuación

$$x^2 - 9 = 0 \text{ donde } \mathbf{a = 1, b= 0 \text{ y } c = 9}$$

Podemos despejar simplemente la variable x:

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt[2]{9}$$

Por la definición de raíz cuadrada y del módulo, podemos expresar la solución de la siguiente manera:

$$|x| = 9$$
$$x_1 = 3 \;\; y \, x_2 = -3$$

Comprobamos:

Para x = 3

$$3^2 - 9 = 0$$
$$9 - 9 = 0$$

Para x = -3

$$(-3)^2 - 9 = 0$$
$$9 - 9 = 0$$

Ejemplo 2: Resolvemos la siguiente ecuación:

$$x^2 + 16 = 0 \text{ donde } \mathbf{a = 1, b= 0 \text{ y } c = 16}$$

Procedemos de la misma manera que en el ejemplo anterior, despejando la variable x:

$$x^2 + 16 = 0$$
$$x^2 = -16$$
$$x = \sqrt[2]{-16} \notin \mathbb{R}$$

En este caso decimos que la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

5.1.2 Caso 2: El término independiente es nulo

Tenemos el siguiente problema:
Supongamos que un jugador de fútbol patea un tiro libre, de modo tal que la trayectoria de la pelota, mientras se encuentra en el aire, es la parábola que corresponde a la siguiente ecuación:

$$y = -0.5x^2 + 0.7x$$

Donde **y** es la altura en metros de la pelota cuando esta se encuentra a **x** metros de distancia horizontal desde el punto en el que fue lanzada.

Para calcular cuál fue el “alcance” del tiro libre, es decir, a qué distancia tocará el suelo la pelota, planteamos la ecuación:

$$\mathbf{-0.5x^2 + 0.7x = 0}$$

Extraemos factor común x:

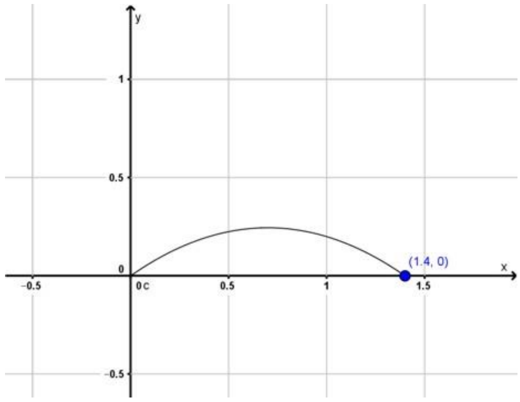
$$\mathbf{x.(-0.5x + 0.7) = 0}$$

Consideramos las dos posibilidades para que se cumpla la igualdad:

$$x = 0$$

o $\mathbf{-0.5x + 0.7 = 0}$

$\rightarrow$ $\mathbf{x = 1.4}$



Estos valores se corresponden a los puntos inicial y final de la trayectoria.

La gráfica representa el problema y la solución.

Entonces el tiro libre tiene un alcance de 1.4 metros.

5.1.3 Caso 3: La ecuación es completa

En la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$ $a = 1,\ b = 2\ y\ c = -3$ podemos aplicar la **fórmula resolvente.**

Cuando la ecuación tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0\ con\ a \neq 0$ se pueden obtener dos soluciones, x_1 y x_2 , reemplazando los coeficientes **a**, **b** y **c** en la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Para abreviar las reunimos en una sola fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{x_1 x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

El doble signo que aparece en la fórmula proporciona las dos soluciones x_1 y x_2 que tiene la ecuación.

Dicho esto, podemos dar solución al problema ejemplo planteado, según el cual queríamos encontrar en qué momento el destello alcanzaba la altura de 195 m:

$$80t - 5t^2\ = 195$$

Planteamos la ecuación:

$$-5t^2 + 80t - 195\ = 0$$

Donde a = -5 , b = 80 y c = -195. Podemos utilizar, entonces, la fórmula resolvente.

$$x_1 x_2 = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4.(-5).(-195)}}{2.(-5)}$$

Tenemos entonces:

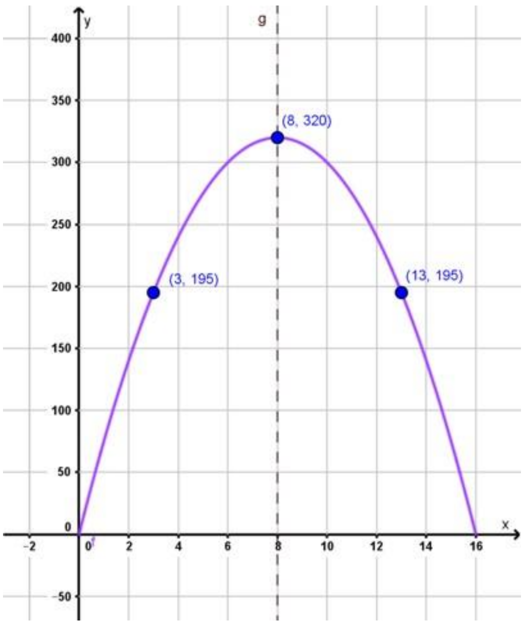
$$x_1 x_2 = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4.(-5).(-195)}}{2.(-5)}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-80 \pm \sqrt{2500}}{-10}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-80 \pm 50}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-80 + 50}{-10} = 3$$

$$x_2 = \frac{-80 - 50}{-10} = 13$$



Por medio de estos valores obtenemos las coordenadas para dar respuesta a nuestra pregunta del problema. Podemos decir que a partir de los 3 segundos, donde alcanza los 195 m de altura, el destello es visible en la base naval. Esto se mantiene hasta los 13 segundos; luego su altura es menor. En la gráfica podemos apreciar esto ya que las coordenadas de ambos puntos son simétricas.

Decimos que dos puntos de una parábola serán **simétricos** cuando tienen la misma imagen.

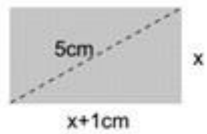
El siguiente video te permitirá comprender como resolver ecuaciones cuadráticas

Ecuación cuadrática

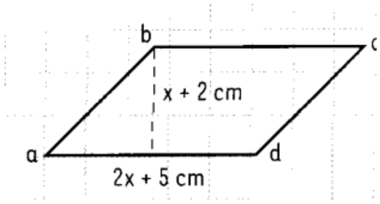
Comprobamos lo aprendido

Problema 7

a) Calculen el valor de los lados de la siguiente figura si su Area es igual a 20 cm^2



b) Hallar la base y la altura del paralelogramo abcd, cuya superficie es de 15 cm^2



5.2 RAÍCES O CEROS DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

¿En qué momento la señal cae al suelo?

Para dar respuesta a esta pregunta partimos de la fórmula de la función y la gráfica del problema:

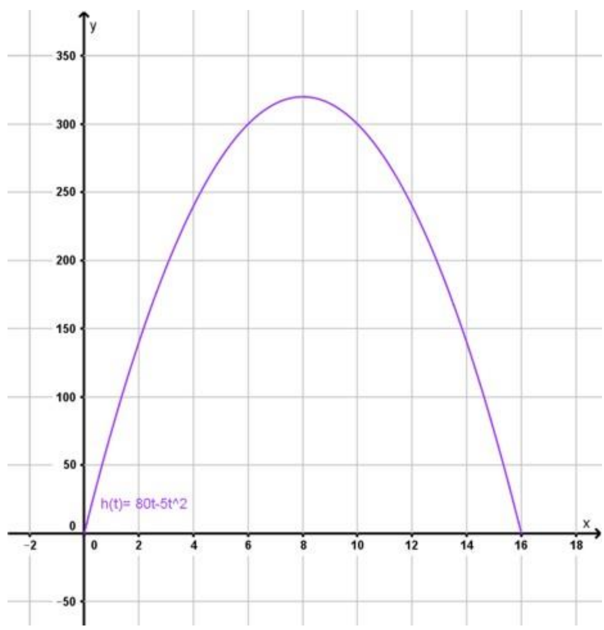
$$f(x) = 80t - 5t^2$$

Encontrar el momento en el que toca el suelo equivale a encontrar el valor del dominio cuya imagen es cero.

En nuestro problema, si observamos la gráfica tenemos dos coordenadas en las que la imagen es igual a cero.

El punto (0,0), que nos indica el punto de partida del disparo, y el punto (16,0), que nos indica el momento en que el destello toca el suelo nuevamente.

A estos puntos se los denomina **ceros o raíces de la función cuadrática.**



Los ceros de la función, también llamados *raíces*, representan los valores de x cuyas imágenes son cero. Gráficamente, estos puntos están representados por los pares ordenados (x;0) y son aquellos puntos donde la gráfica toca al eje de las abscisas.

Algebraicamente, encontrar los ceros o raíces equivale a resolver la ecuación:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Para nuestro ejemplo, deberemos resolver la siguiente ecuación:

$$80t - 5t^2 = 0$$

En este caso podemos sacar factor común de t:

$$t.(80 - 5t) = 0$$

Entonces: $t = 0 \quad \vee \quad 80 - 5t = 0 \ \rightarrow \ t = 16$

Estos valores obtenidos corroboran la gráfica, por lo que podemos dar respuesta a la pregunta diciendo que a los 16 segundos el destello toca el suelo.

5.3 TIPOS DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

¿En qué momento, el destello, alcanza los 275 m, los 320 m y los 340 m?

Planteamos las ecuaciones correspondientes partiendo de la función del problema:

$$f(x) = 80t - 5t^2$$

$$80t - 5t^2 = 275$$

Para 275 m planteamos la siguiente ecuación:

$$80t - 5t^2 = 275 \qquad \rightarrow \qquad -5t^2 + 80t - 275 = 0$$

Donde a = -5 , b = 80 y c = -275

$$\boldsymbol{x_1 x_2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4.(-5).(-275)}}{2.(-5)} = \frac{-80 \pm \sqrt{900}}{-10} = \frac{-80 \pm 30}{-10}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-80+30}{-10} = \mathbf{5} \qquad \boldsymbol{x_2} = \frac{-80-30}{-10} = \mathbf{11}$$

Obtuvimos **dos soluciones**, que se corresponden con el trayecto de ascenso y descenso del destello. A los 5 segundos y a los 11 segundos tendrá una altura de 275 m.

Para 320 m planteamos la ecuación:

$$80t - 5t^2 = 320 \qquad \rightarrow \qquad -5t^2 + 80t - 320 = 0$$

Donde a = -5 , b = 80 y c = -320

$$\boldsymbol{x_1 x_2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4.(-5).(-320)}}{2.(-5)} = \frac{-80 \pm \sqrt{0}}{-10} = \frac{-80 \pm 0}{-10}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-80+0}{-10} = 8 \qquad \boldsymbol{x_2} = \frac{-80-0}{-10} = 8$$

Obtuvimos **una única solución**: el destello estará a 320 m de altura solo a los 8 segundos.

Para 340 m planteamos la ecuación:

$$80t - 5t^2 = 340 \qquad \rightarrow \qquad -5t^2 + 80t - 340 = 0$$

Donde a = -5 , b = 80 y c = -340

$$\boldsymbol{x_1 x_2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4.(-5).(-340)}}{2.(-5)} = \frac{-80 \pm \sqrt{-400}}{-10} = \notin \mathcal{R}$$

Como el radicando es negativo, la ecuación **no tiene solución**; es decir que el destello nunca alcanzará los 340 m.

Podemos observar que la cantidad de soluciones de las ecuaciones está asociada con el valor que toma el radicando de la fórmula resolvente, o sea con el valor de $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$.

5.4 DISCRIMINANTE

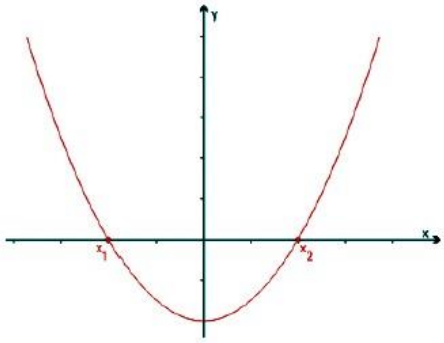
La expresión $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ nos permite establecer cuántas raíces tiene una ecuación de segundo grado y la llamamos *discriminante*.

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

La ecuación tendrá dos soluciones diferentes.

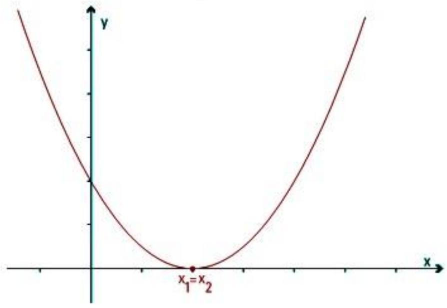
El gráfico atraviesa en dos puntos al eje de las abscisas.



$$b^2 - 4ac = 0$$

La ecuación tendrá dos soluciones iguales.

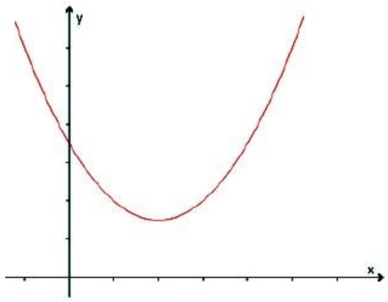
El gráfico toca en un punto al eje de las abscisas.



$$b^2 - 4ac < 0$$

La ecuación no tendrá solución.

La gráfica no toca al eje de las abscisas.



Comprobamos lo aprendido

PROBLEMA 8

¿Para qué valor de **k** la ecuación $k.x^2 - 2kx + 1 = 0$ tiene raíces reales iguales?

PROBLEMA 9

Calculen el o los valores de **k** para los cuales las siguientes funciones tienen dos (2) raíces o soluciones reales iguales. Además, escriban su fórmula y verifíquenlas:

a. $f(x) = x^2 - 2kx + k$
b. $f(x) = x^2 + (k-1)x - k$

5.5 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El gráfico de la función cuadrática f (x) = ax^2 - bx + c es una **parábola**.

Para hallar su representación gráfica no es necesario realizar una tabla; se deben usar las características particulares de la parábola.

A lo largo de este material hemos analizado distintos puntos particulares de la función cuadrática que nos permitirán realizar su gráfica.
Los puntos que necesitamos obtener son los siguientes:

Vértice
Tiene su vértice en el par ordenado **V=** $(\mathbf{x_v},\mathbf{y_v})$ donde $\mathbf{x_{v,}} = \frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$ $\mathbf{y_v} = \mathbf{f}(\mathbf{x_{v,}})$

Eje de simetría
La recta vertical que interseca al eje de las abscisas en **x =** $\mathbf{x_{v,}}$ es el eje de simetría de dicha parábola.

Ordenada al origen
El par ordenado **(0,c)** es el punto de intersección de la parábola con el eje de las ordenadas.

La orientación de las ramas de la parábola
Está dada por el signo del parámetro **a**.
Si a > 0 las ramas van hacia arriba y el vértice es un punto de mínimo de la función.
Si a < 0 las ramas van hacia abajo y el vértice es un punto de máximo de la función cuadrática.

Raíces de la función
Indican los puntos donde la gráfica corta al eje x; lo determina el *discriminante*:

$$\Delta = \sqrt{\boldsymbol{b^2 - 4ac}}$$

$\Delta > \mathbf{0}$ corta en dos puntos diferentes al eje x
$\Delta = \mathbf{0}$ corta en un puntos al eje x
$\Delta < \mathbf{0}$ no corta al eje x

Ejemplo
Una vez más tomamos la función de nuestro problema ejemplo:

$$h(t) = 80t - 5t^2$$
$$donde\ \ a = -5, \quad b = 80, \quad c = 0$$

Vértice

$$\mathrm{x_{v,}} = \frac{-\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x_{v,}} = \frac{-80}{2.(-5)} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x_{v,}} = 8$$

$$\mathrm{y_v} = \mathrm{f}(\mathrm{x_{v,}}) \rightarrow \ \mathrm{f}(8) = 320 \rightarrow \ \ \mathrm{y_v} = \ 320$$

∴ **Vértice =** $(\mathbf{8},\ \mathbf{320})$

Eje de simetría

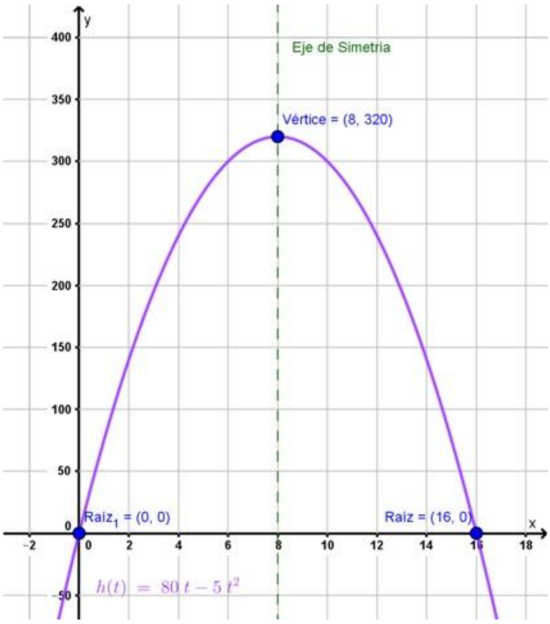
X = $\mathbf{8}$

Ordenada al origen (O.O.)

$f(0) = 80.0 - 50t^2 \quad \rightarrow \quad f(0) = 0 \; \rightarrow$ **O.O. = (0,0)**

La orientación de las ramas de la parábola

El parámetro a < 0; por lo tanto, las ramas van hacia abajo.



Raíces de la función

$$80t - 5t^2 = 0$$

En este caso podemos sacar factor común de t:

$$t.(80 - 5t) = 0$$

Entonces

$t = 0 \quad \vee \quad 80 - 5t = 0 \;\rightarrow\; t = 16$

$\boldsymbol{t_1 = 0 \quad y \quad t_2 = 16}$

5.6 CONJUNTOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

El **conjunto de positividad (C^+)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos.

El **conjunto de negatividad (C^-)** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

Para la función $h(t) = 80t - 5t^2$ diremos que el:

Conjunto de positividad: $C^+ = (0; 16)$, ya que para estos valores del dominio la función tiene solo imágenes positivas.

Conjunto de negatividad: $C^- = (-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$, ya que para estos valores del dominio la función tiene solo imágenes negativas.

Cabe aclarar que el contexto del problema ejemplo se desarrolla solo en el conjunto de positividad.

Comprobamos lo aprendido

PROBLEMA 10

Se patea una pelota desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza, medida desde el suelo en función del tiempo, está dada por la siguiente fórmula:

$$h(t) = -2t^2 + 6t + 8$$

donde h representa la altura, medida en metros, y t el tiempo, medido en segundos.

a) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al suelo?
b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?
c) Grafiquen la función.

PROBLEMA 11

Para conocer los resultados de una campaña publicitaria, una fábrica de bebidas gaseosas midió, a lo largo de 10 meses, la variación en las ventas, partiendo de un porcentaje de 100%. Las mediciones le permitieron establecer la siguiente fórmula:

$$y = -4x^2 + 32x + 100$$

donde x es el tiempo en meses e y es el porcentaje de ventas.

a) Determinen el dominio de la función.
b) Construyan la gráfica de la función.
c) Indiquen el porcentaje de demanda a los tres meses de iniciada la campaña.
d) Determinen el momento en que las ventas alcanzaron el máximo, y cuál fue ese máximo en porcentaje.
e) ¿A partir de qué momento la demanda cayó por debajo del nivel inicial?

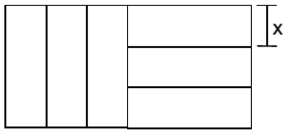
ACTIVIDADES DE CIERRE

PROBLEMA 1

a) ¿Cuáles pueden ser los valores de h para que la siguiente ecuación tenga dos soluciones?: $-3x^2 + 5x + h = 3$
b) Sea la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$. Hallen el valor de k para el cual la ecuación no tiene raíces reales.
c) ¿Cuál debe ser el valor de c para que la ecuación $\frac{1}{5}x^2 + 2x + c = 0$ tenga una raíz doble? ¿Cuál es el valor de esa raíz?

PROBLEMA 2

Una sección de un piso de madera mide 450 cm^2 de área. Esta sección está formada por 6 piezas rectangulares idénticas, ubicadas como indica la figura de abajo. Calculen las dimensiones de cada pieza.



PROBLEMA 3

La siguiente es información que publica la Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentos en su página *web*: http://www.sagpya.gov.ar/

La trucha arco iris (cuyo nombre científico es *Oncorhynchus mykiss*) pertenece a la familia *salmonidae*. En Argentina se encuentra en ríos y lagos de la Patagonia y en redes hidrográficas de Cuyo y NOA. Sus poblaciones provienen de siembras. En efecto, ee trata de una especie exótica, nativa de la costa este del Pacífico, que fue introducida en el país durante los primeros años del siglo XX, por acciones emprendidas por el gobierno nacional, que creó, para la obtención de desoves y alevinos, una Estación Base en San Carlos de Bariloche. Se la considera una especie carnívora: su alimentación es variada y consiste, principalmente, en invertebrados, sobre todo larvas de insectos y crustáceos. Como su manutención es por siembras, su pesca comercial está prohibida. En el marco del proceso de sembrado de truchas, en 1990 se introdujeron 100 individuos de esta especie en un lago ubicado en la zona cordillerana de Argentina, en el cual no había registros de su existencia. Al principio, la población comenzó a crecer rápidamente, pero luego distintos factores (entre ellos, la falta de alimentos) motivaron un decrecimiento. El número de estos salmónidos para cada año *t*, si consideramos t = 0, correspondiente al año 1990, se puede modelizar por:

$$\mathbf{S(t) = -1(t + 5)(t - 20)}$$

a) Grafiquen la función desde $t = -10$ hasta $t = 30$ ¿Qué años calendarios representan estos valores de *t*?
b) Indiquen, a partir del gráfico, el dominio de la función S para este problema.
c) ¿En qué año la población de truchas fue máxima? En ese año, ¿cuántos ejemplares había?
d) ¿En qué año comenzó a decrecer la población de truchas?
e) ¿En qué año se puede estimar que se extinguirá la población de truchas en el lago?

PROBLEMA 4

Un pub abre a las 20 h y cierra cuando todos los clientes se han ido. A partir de registros mensuales se obtuvo una función cuadrática que permite modelizar el número de personas que hay en el pub *t* horas después de su apertura. La función es la siguiente:

$$\mathbf{P(t) = 60t - 10t^2}$$

a) Determinen el número máximo de personas que van al pub una determinada noche e indiquen en qué horario se produce la máxima asistencia de clientes.

b) Si queremos ir al pub cuando haya al menos 50 personas, ¿a qué hora tendríamos que ir?

c) Si queremos estar sentados y el pub sólo tiene capacidad para 80 personas sentadas, ¿a partir de qué hora ya estamos seguros de que no conseguiremos sillas?

PROBLEMA 5

La disciplina del *snowboard* consiste en surfear por la nieve en una pendiente, realizando movimientos de zigzag. El *snowboard* es un deporte extremo y se convirtió en deporte olímpico en los Juegos de Invierno de 1998. En la práctica del *snowboard*, la altura de los saltos medida en metros que alcanza un deportista de elite en esta disciplina se puede representar por la siguiente función:

$$\mathbf{h(t) = -2t^2 + 8t}$$

Donde *t* son segundos y refiere al tiempo que dura el salto.

a) ¿Qué indica en el problema que el valor del parámetro ***c*** sea nulo?

b) Calculen la altura que alcanza el deportista al segundo de comenzado el salto.

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿A cuántos segundos de comenzado el salto ocurre?

d) ¿Cuánto tiempo duró el ascenso del snowboardista?

e) ¿Durante cuánto tiempo estuvo en el aire, sin tocar el agua?

BIBLIOGRAFÍA

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2003), *Matemática: Funciones 1*, Buenos Aires, Longseller.
Bocco, M. (2010), *Funciones Elementales para construir modelos matemáticos*, Buenos Aires, INET, Colección "Las Ciencias Naturales y la Matemática".
Dure, D. A. (2011), Capítulo III: "Funciones - Introducción", Resistencia, Seminario Universitario UTN-FRRE.
Kaczor, P. J. *et al.* (2000), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana.

Sitios web recomendados
https://es.khanacademy.org/
http://math2me.com/playlist/pre-calculo
http://www.academiavasquez.com/