

Matemática

Ecuaciones e Inecuaciones

PROYECTO DE MEJORA DE FORMACIÓN EN
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIRECCIÓN DE PLANEAMIENTO ACADÉMICO
SEMINARIO UNIVERSITARIO



UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA



Objetivos específicos:

Cuando el alumno haya finalizado este eje temático estará en condiciones de:

- Reconocer los distintos tipos de ecuaciones e inecuaciones y resolverlas.
- Clasificar las ecuaciones según el conjunto solución.
- Resolver problemas con distintos tipos de ecuaciones.

Contendidos:

Ecuaciones y Resolución de problemas: Ecuaciones de primer grado. Ecuaciones de segundo grado. Conjunto solución. Propiedades. Clasificación de ecuaciones de acuerdo al conjunto solución. Ecuaciones racionales.

Inecuaciones: Concepto. Conjunto solución. Propiedades.

CONTENIDO

Ecuaciones	3
1. Ecuaciones algebraicas	3
2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita	3
Propiedades	4
Ejemplos de resolución:	5
¿Siempre existe la solución?	6
Resolución de problemas con ecuaciones	7
PRÁCTICA Ecuaciones lineales	9
3. Ecuaciones cuadráticas	11
Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita	11
Tipos de soluciones de una ecuación cuadrática	12
PRÁCTICA Ecuaciones cuadráticas	15
4. Ecuaciones Fraccionarias	17
Solución de una ecuación fraccionaria	17
5. Inecuaciones	19
¿Qué significa resolver una inecuación?	19
Resolución de problemas con inecuaciones	21
PRÁCTICA Ecuaciones Fraccionarias e Inecuaciones	22
PRÁCTICA Para Profundizar	23
6. Bibliografía	25



ECUACIONES

1. ECUACIONES ALGEBRAICAS

Una *ecuación algebraica* es una igualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante operaciones algebraicas. Las letras cuyos valores son desconocidos se llaman *incógnitas*.

Ejemplo

$$E_1: x + 3 = 8 \quad E_2: x^2 - 1 = 3 \quad E_3: x + y = 9$$

Resolver una ecuación significa encontrar los valores de las incógnitas que verifican la igualdad. Estos valores constituyen lo que se llama *conjunto solución* de la ecuación.

Por ejemplo, en el caso de E_1 :

$x = 5$ es solución, porque verifica la igualdad, es decir $5 + 3 = 8$.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Plantear una ecuación para el siguiente problema

En una competencia internacional, los nadadores deben nadar tres estilos. De la longitud total (medida en metros) que deben nadar para completar la prueba: $\frac{3}{8}$ lo deben hacer en estilo mariposa, $\frac{1}{3}$ en croll y 700m en espalda. ¿Cuántos metros recorren los nadadores que completan la prueba?

¿Cómo escribir en lenguaje algebraico el enunciado del problema?

Longitud
recorrida en

Longitud
recorrida en

700 m en
estilo espalda

Longitud de
la prueba

La longitud (en m) de la prueba es la incógnita y se designará con x .

La longitud recorrida en estilo mariposa es $\frac{3}{8}$ de x , es decir $\frac{3}{8} \cdot x$

La longitud recorrida en estilo croll es $\frac{1}{3}$ de x , es decir $\frac{1}{3} \cdot x$

Por lo tanto, la ecuación que modela el problema resulta:

$$\frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + 700\text{m} = x$$

Dado que el mayor exponente al que está elevada la incógnita x es 1, la ecuación planteada recibe el nombre de ecuación de primer grado o ecuación lineal con una incógnita.



Se llama *ecuación de primer grado con una incógnita* a una expresión de la forma:

$$a x + b = 0 \text{ con } a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

Conjunto solución.

Para resolver una ecuación de este tipo, es decir, para encontrar el **único** valor de x que la satisface (llamado también *raíz de la ecuación lineal*), es necesario tener en cuenta las siguientes propiedades de la relación de igualdad:

Propiedades

Propiedad uniforme

Si sumamos o restamos un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Si multiplicamos o dividimos por un mismo número o expresión algebraica (distinta de cero) a los dos miembros de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

$$\left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow a+c=b+d \qquad \left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot c=b \cdot d \qquad \left. \begin{array}{l} a=b \\ c \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Propiedad cancelativa

Si sumamos y restamos un mismo número o expresión algebraica a un miembro de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Si multiplicamos y dividimos un término de una ecuación por un número distinto de cero obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Se recuerda que se llaman *ecuaciones equivalentes* a aquellas que tienen el mismo conjunto solución.

$$a+c=b+c \Rightarrow a=b \qquad a \cdot d = b \cdot d \Rightarrow a=b \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a=b$$

Ejemplo:

Resolución de la ecuación que modela el Problema

$$\frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + 700m = x$$

Con la finalidad de reunir en el primer miembro todos los términos en los que figura la incógnita x , y dejar en el segundo miembro sólo el término independiente, se suma a ambos miembros de la igualdad la expresión $-x - 700m$

$$\frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + 700m - x - 700m = x - x - 700m$$

Cancelando los términos que corresponda, se obtiene:



$$\frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x - x = -700m$$

Operando, resulta:

$$\frac{-7}{24} \cdot x = 700m$$

Se multiplican ambos miembros por el inverso de $\frac{-7}{24}$

$$\frac{-7}{24} \cdot x \cdot \left(\frac{-24}{-7}\right) = 700m \cdot \left(\frac{-24}{-7}\right)$$

y simplificando se obtiene: $x = 2400m$

La ecuación presenta una única solución $x = 2400m$ y por lo tanto el conjunto solución es $S = \{2400m\}$.

La respuesta a la pregunta planteada en el problema es: **"Los nadadores deben recorrer 2400m para completar la prueba"**

Comprobación:

Para verificar si el valor de x obtenido es efectivamente la solución del problema, se reemplaza dicho valor en la ecuación original comprobando si satisface la igualdad.

$$\frac{3}{8} \cdot 2400m + \frac{1}{3} \cdot 2400m + 700m = 2400m$$

Ejemplos de resolución:

Ejemplo 1

$$-12y + 22 = -y$$

$$-12y + y + 22 + (-22) = -y + y + (-22)$$

$$-11y = -22$$

$$-\frac{1}{11}(-11y) = \frac{1}{11}(-22)$$

$$y = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow S = \{2\}$$

Sumamos a ambos miembros y , y -22

Multiplicamos a ambos miembros por $-1/11$

Ejemplo 2

Determinar el valor de x que verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{2-3x}{3} - \frac{3 \cdot (x-4)}{4} = 4 - \frac{1+3x}{2}$$

Se mostrará, a modo de guía, la resolución de esta ecuación que presenta varias de las dificultades que usted deberá superar. Se indican los posibles pasos a seguir, aclarando que no es ésta la única forma correcta de resolver el ejercicio.



En primer lugar se separan términos y se efectúan las operaciones indicadas, teniendo en cuenta la jerarquía, en lo que a orden de ejecución se refiere. Considerando que la ecuación dada, también puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{1}{3} \cdot (2 - 3x) - \frac{3}{4} \cdot (x - 4) = 4 - \frac{1}{2} \cdot (1 + 3x)$$

Si se aplica propiedad distributiva:

$$\frac{2}{3} - x - \frac{3}{4} \cdot x + 3 = 4 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot x$$

Se agrupan en un miembro todos los términos que contienen la incógnita x y en el otro, todos los términos independientes.

$$-x - \frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot x = 4 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 3$$

Se efectúan las sumas indicadas en ambos miembros.

$$-\frac{1}{4} \cdot x = -\frac{1}{6}$$

Se despeja la incógnita obteniéndose la solución de la ecuación.

$$x = -\frac{1}{6} : \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6} \cdot (-4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

La solución de la ecuación es $x = \frac{2}{3}$

Comprobación:

$$\frac{2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{3} - \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3} - 4\right)}{4} = 4 - \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{2}$$

$$0 + \frac{5}{2} = 4 - \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

¿Siempre existe la solución?

Primer caso:

$$x + 3 = x + 7$$

$$x - x = 7 - 3$$

$$0x = 4 \Rightarrow \text{absurdo}$$

La ecuación no tiene solución. El conjunto solución es el conjunto vacío. $S = \{\emptyset\}$

Segundo Caso:

$$3(4 - 2x) = -2(3x - 6)$$

$$12 - 6x = -6x + 12$$

$$-6x + 6x = 12 - 12$$

$$0x = 0$$

En este caso la ecuación tiene infinitas soluciones ya que la identidad se satisface para cualquier valor de x .



Resolución de problemas con ecuaciones.

Pasos a tener en cuenta

Primero: LEER atentamente el problema. ¿Qué debo encontrar? ¿Con qué datos cuento? ¿He resuelto con anterioridad un problema semejante?

Segundo: Elaborar y llevar a cabo un PLAN. ¿Qué estrategias podría seguir para resolver el problema? ¿Cómo podría llevar a cabo correctamente las estrategias que he seleccionado?

Tercero: Encontrar la RESPUESTA Y COMPROBARLA. ¿Es correcta la solución propuesta? ¿Cuál es la respuesta al problema? ¿Parece razonable? ¿Se ha expresado con toda claridad la respuesta?

Veamos un ejemplo:

De un depósito lleno de líquido se saca la cuarta parte del contenido; después la mitad del resto y quedan aún 1500 litros. Calculemos la capacidad del depósito.

¿Qué datos tengo?

Las cantidades de líquido que se extrajo y la cantidad final que queda: 1500 litros. La incógnita es la capacidad del depósito que la podemos llamar x .

¿Cómo lo resolvemos?

Al ser la incógnita una sola podemos plantear una ecuación lineal para lo cual traducimos a lenguaje algebraico la descripción del problema.

- Capacidad del depósito: x
- Se saca la cuarta parte del contenido: $x - \frac{1}{4}x$
- La mitad del resto: $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}x)$
- Aún quedan 1500 litros: 1500
- Expresión de la ecuación correspondiente: $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}x) + 1500$



Resolución de la ecuación:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x + 1500 \\x &= \frac{2x+4x-x}{8} + 1500 \\x &= \frac{5x}{8} + 1500 \\x - \frac{5x}{8} &= 1500 \\\frac{3x}{8} &= 1500 \\x &= 4000\end{aligned}$$

Planteamos la solución:

La capacidad del depósito es de 4000 litros.

Verificamos el resultado:

$$4000 = \frac{1}{4}4000 + \frac{1}{2} \cdot \left(4000 - \frac{1}{4} \cdot 4000\right) + 1500$$



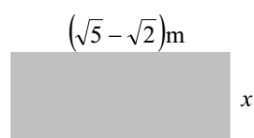
PRÁCTICA Ecuaciones lineales

- 1) Comprobar que $x = -12$ es solución de la ecuación $3x - 10 = 5x + 2 - x$
- 2) Calcular el valor de x que verifica cada una de las siguientes ecuaciones.
 - a. $5(x+1) - 3 = x - (2+x)$
 - b. $(x+10) - (x-2) = 4 \cdot (x-1)$
 - c. $2x - \frac{1}{6} + 3x - 2 = \frac{x+4}{3}$
 - d. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x}{2}\right) = x - 1$
 - e. $\frac{3}{5}(x-1) - \frac{2}{3}(2x-4) = \frac{1}{2} - x$
 - f. $\frac{2x-3}{9} + x + \frac{x-1}{3} = \frac{12x+4}{9}$
 - g. $\frac{4x+1}{5} - \frac{3(x+5)}{6} = \frac{2-2x}{4}$
 - h. $\frac{4x-6}{12} - \frac{3x-8}{4} = \frac{2x-9}{3} - \frac{x-4}{8}$
- 3) Resolver los siguientes problemas
 - a. La suma de dos números consecutivos da como resultado el cuadrado de 5. ¿Cuáles son dichos números?
 - b. La suma de dos números pares consecutivos es 74. ¿Cuáles son dichos números?
 - c. Hallar tres números consecutivos tales que el primero, más la mitad del segundo, más la tercera parte del tercero, sea igual a 58.
 - d. Averiguar un número tal que el duplo del mismo disminuido en 1 es a 8, como la mitad del número es a 3.
 - e. María tiene que subir rollos de tela en un ascensor en el que se pueden cargar hasta 350Kg. ¿Cuál es el mayor número de rollos que puede subir en cada viaje, si ella pesa 55kg y cada rollo pesa 18kg?
 - f. Un padre tiene 36 años y su hija 6. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble que la edad de la hija?
 - g. Eduardo salió el sábado con sus amigos. La mitad del dinero que llevaba lo gastó en comer, la mitad de lo que le quedó lo gastó en ir a bailar y aún le sobraron \$13. ¿Con cuánto dinero salió de su casa?
 - h. Después de recorrer $\frac{7}{15}$ de un camino aún quedan $\frac{1}{3}$ km para completar la mitad del recorrido. ¿Qué longitud tiene el camino?
 - i. El abuelo de Victoria se dedica a la cría de canarios. La semana pasada, distribuyó sus 250 pájaros en tres jaulas grandes: en la primera hay 30 menos que en la segunda, y en ésta, 10 menos que en la tercera. ¿Cuántos canarios hay en cada jaula?

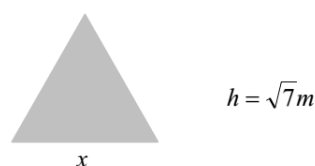


- j. Si gasté $\frac{5}{8}$ del dinero que tenía y \$20 más; me quedé con la cuarta parte de lo que tenía y \$16 más. ¿Cuánto dinero tenía?
- k. ¿Cuál es el ancho de un rectángulo que mide 16 cm de largo si su área es equivalente al área de un cuadrado de 12 cm de lado?
- l. En un rectángulo, el largo excede en 8 cm al ancho. Si el perímetro mide 72 cm. ¿Cuál es su área?
- m. El perímetro de un cuadrado de lado 2m es igual al perímetro de un rectángulo cuyo largo es el triple del ancho. ¿Cuál es la superficie del rectángulo?
- n. Todas las figuras tienen área 1m^2 . Hallar el valor de x . Expresar todos los resultados sin radicales en el denominador.

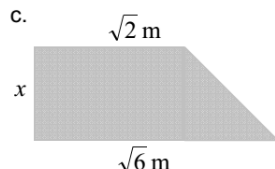
a.



b.



c.



- o. El señor López retiró el 25% de sus ahorros para comprarse una campera cuyo costo es de \$250. ¿Cuántos pesos tenía ahorrados?
- p. Se vende mercadería en \$77,60 perdiendo el 3% de lo que costó. ¿Cuál es el costo?



3. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Se pide plantear y resolver el siguiente problema:

Un diagramador debe definir las dimensiones de un folleto turístico. El área de cada página debe ser de 360cm^2 y se requiere que el largo sea 9cm mayor que el ancho. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones del folleto para que se cumplan ambas condiciones?

Resolución:

Planteamos los datos en este caso hacemos un diagrama.

Considerando que la incógnita es el ancho de la página que llamamos x podemos hacer un modelo de una página

El área de una página es igual al ancho por el alto, por lo podemos plantear la siguiente ecuación:

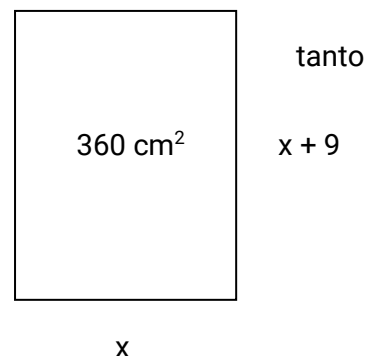
$$x \cdot (x + 9\text{cm}) = 360\text{cm}^2$$

Se aplica propiedad distributiva

$$x^2 + 9\text{cm } x = 360\text{cm}^2$$

También se la puede expresar de la siguiente manera:

$$x^2 + 9\text{cm } x - 360\text{cm}^2 = 0$$



La ecuación planteada se llama ecuación de segundo grado con una incógnita o ecuación cuadrática ya que el mayor exponente al que está elevada la incógnita es igual a 2.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita, una vez simplificada y ordenada, adopta la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Las soluciones de la ecuación general se obtienen aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo que aparece en la fórmula proporciona las dos soluciones x_1 y x_2 que tiene la ecuación.

Las soluciones x_1 y x_2 se llaman también raíces de la ecuación cuadrática.

Dicho esto podemos dar solución al problema planteado:

$$x^2 + 9\text{cm } x - 360\text{cm}^2 = 0$$

Donde $a = 1$, $b = 9$ y $c = -360$, podemos utilizar entonces la fórmula



$$x_1 x_2 = \frac{-9\text{cm} \pm \sqrt{9^2\text{cm}^2 - 4 \cdot 1.360\text{cm}}}{2.1}$$

Tenemos entonces

$$x_1 x_2 = \frac{-9\text{cm} \pm \sqrt{1521\text{cm}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9 + 39}{2} = \mathbf{15\text{ cm}}$$

$$x_1 = \frac{-9 - 39}{2} = \mathbf{-24\text{ cm}}$$

La solución $x = -24\text{ cm}$ se descarta porque no tiene sentido en este problema, ya que el ancho de la página no puede tener un valor negativo.

Por lo tanto la solución al problema será:

La página del folleto tendrá un ancho de 15 cm y el largo será de 24 cm

Tipos de soluciones de una ecuación cuadrática

Considerando el valor del discriminante $b^2 - 4ac$ se pueden destacar las siguientes consecuencias:

$b^2 - 4ac > 0$	La ecuación tendrá dos soluciones diferentes
$b^2 - 4ac = 0$	La ecuación tendrá dos soluciones iguales
$b^2 - 4ac < 0$	La ecuación no tendrá solución

Ejemplos

Ecuación	Discriminante	Soluciones
$2x^2 + 5x - 3 = 0$	$b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$	$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$ $x_1 = \frac{1}{2} \text{ y } x_2 = -3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$	$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$ $x_1 = x_2 = 1$
$x^2 - 4x + 13 = 0$	$b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$	No tiene soluciones reales



1. Ecuaciones de segundo grado incompletas

Para que $ax^2 + bx + c = 0$ sea una ecuación de segundo grado, debe ser $a \neq 0$, pero puede faltar el término lineal, o el término independiente. Esto da lugar a ecuaciones incompletas de fácil solución.

✓ Si $b = 0$, se tiene $ax^2 + c = 0$

Ejemplo

$$3x^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{3}$$

$$x = \sqrt[2]{2}$$

✓ Si $c = 0$, se tiene $ax^2 + bx = 0$

Ejemplo

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x \cdot (x - 4) = 0$$

Esta igualdad se cumple si

$$x = 0 \quad o \quad x - 4 = 0$$

Soluciones

$$x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 4$$

2. Ecuaciones de segundo grado factorizadas

En este caso la ecuación aparece descompuesta en factores e igualada a cero.

Ejemplo:

$$4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$$

El primer miembro de la ecuación aparece como producto de tres factores y la igualdad se verifica cuando alguno de ellos es cero.

Es evidente que, de los tres factores, sólo pueden anularse el segundo y el tercero.

Por lo tanto:

$$4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0 \quad si \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ o \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

En este caso las soluciones serán

$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -3$$

Si se aplica la propiedad distributiva obtenemos la forma polinómica de la ecuación cuadrática.



$$4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$$

$$(4x - 8) \cdot (x + 3) = 0$$

$$4x^2 + 12x - 8x - 24 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 24 = 0$$

Si $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces o soluciones x_1, x_2 entonces

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$



PRÁCTICA Ecuaciones cuadráticas

1. Calcular los valores de x , v , t o z que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $2x^2 + 8 = 0$

b. $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

c. $t^2 + 4t = 0$

d. $2x^2 - 12x = 0$

e. $(v+7)(v-3) = 0$

f. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

g. $5x^2 - 3x + 1 = 0$

h. $2x^2 - \frac{9}{2}x = 0$

i. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

j. $\frac{3}{2}(\sqrt{t^2 - 3} + 1) = 3$

k. $\sqrt{21x - 6} = 3x$

l. $\frac{1}{5}\sqrt{25x^2 + \frac{3}{4}} = 5^{-1}$

m. $\frac{1}{3}(5 - \sqrt{t^2 + 3}) = 1$

2. Utilizar el discriminante para determinar qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a. $4x^2 - 9 = 0$

b. $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

c. $\frac{x^2}{4} - x - 3 = 0$

d. $2(x-2)^2 = -4$

e. $2t^2 - 4t + 1 = 0$

f. $2x^2 + x + 9 = (x+4) \cdot (x+1)$

g. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x - 1) = 0$

3. ¿Para qué valor de k la ecuación $kx^2 - 2kx + 1 = 0$ tiene raíces reales iguales?

4. Calcular el o los valores de k para los cuales las siguientes funciones tienen dos(2) raíces o soluciones reales iguales, escribir su fórmula y verificarlas:

1) $f(x) = x^2 + 2kx + k$

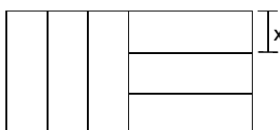
2) $f(x) = x^2 + (k-1)x - k$

5. Resolver los siguientes problemas

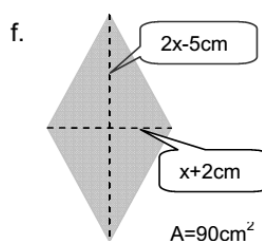
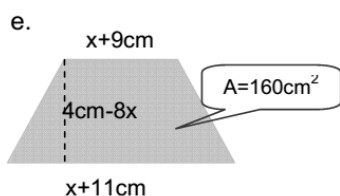
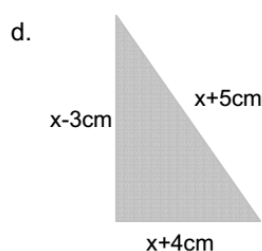
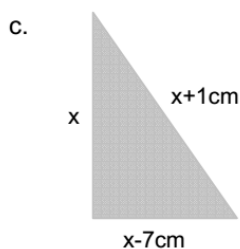
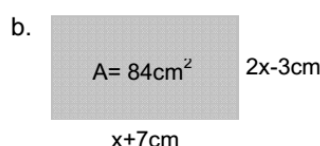
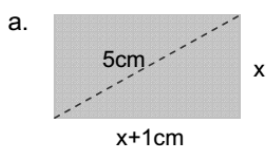
- a. ¿Cuál es el número natural cuyo cuadrado menos su duplo es igual a 15?



- b. Calcular los números que cumplen: la suma entre el número y la mitad de su cuadrado es igual a 60.
- c. Calcular un número tal que el producto entre la mitad de dicho número y su cuarta parte, más la tercera parte de su antecesor es igual a 37.
- d. Calcular la edad de Lorena si sabemos que el cuadrado de su edad menos las tres cuartas partes del cuadrado de lo que va a tener el año que viene es igual a la edad que tenía el año pasado más 43 años.
- e. Una sección de un piso de madera mide 450 cm^2 de área. Esta sección está formada por 6 piezas rectangulares idénticas ubicadas como indica la figura. Calcular las dimensiones de cada pieza



- f. Calcular el perímetro de cada una de las siguientes figuras.





4. ECUACIONES FRACCIONARIAS

Dados dos polinomios $Q(x)$ y $P(x)$ tales que $Q(x) \neq 0$, se denomina ecuación fraccionaria a toda expresión del tipo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad \text{siendo} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x}$$

Solución de una ecuación fraccionaria

Como sabemos la división por cero no es posible, por lo que excluirémos como posibles soluciones a los valores que anulan el denominador. En el caso de nuestro ejemplo $x \neq 0$ y $x \neq 1$

Resolvemos:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2x}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} = 0$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 2 + x^2 - x}{2x^2(x-1)} = 0$$

$$\frac{3x^2 + x - 2}{2x^2(x-1)} = 0$$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

Igualamos a cero

Obtenemos el denominador común y operamos

¿Cuál será la solución de la ecuación?

Los valores que anulan al numerador

$$x_1 x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Aplicamos la formula resolvente

Como puede observarse no es necesario descartar ninguna de las soluciones obtenidas, ya que son distintas de 0 y 1, valores de la incógnita que al comenzar el ejemplo dijimos que anulan el denominador.



Ejemplo

Resolver

$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$$

Los valores que no se pueden tomar como solución porque anulan al denominador son $x = 1$ y $x = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= 1 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} - 1 &= 0 \\ \frac{x \cdot (x-1) + (x+1) - (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - x + x + 1 - x^2 + 1}{(x+1) \cdot (x-1)} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x+1) \cdot (x-1)} &= 0 \\ 2 &= 0 \end{aligned}$$

Absurdo por lo tanto la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{1-x}{4} = 0$$

Los valores que no se pueden tomar como solución porque anulan al denominador son $x = -1$

$$\frac{(x+3) \cdot (x+1) - 4(x-1) + (1-x) \cdot (x+1)}{4(x+1)} = 0$$

$$\frac{(x+3) \cdot (x+1) - 4(x-1) + (1-x) \cdot (x+1)}{4(x+1)} = 0$$

$$\frac{0}{4(x+1)} = 0$$

$$0 = 0$$

La ecuación no tiene solución



5. INECUACIONES

En la vida cotidiana utilizamos desigualdades. Al planear una compra, ya sea de una prenda de vestir, un regalo o un automóvil, no determinamos previamente cuánto vamos a gastar con exactitud, establecemos límites para ese gasto.

- ✓ Por ejemplo, la expresión "voy a comprar una remera, pero sólo tengo \$30", si llamamos x al precio, equivale a la desigualdad: $x < 30$.
- ✓ bien, "compraremos un regalo, podemos gastar entre \$30 y \$50' llamando x al precio, equivale a la desigualdad: $30 < x < 50$.

- ✓ Las inecuaciones son desigualdades que contienen incógnitas
- ✓ Las desigualdades que contienen variables se llaman inecuaciones.

Las expresiones algebraicas que están formadas por desigualdades, reciben el nombre de inecuaciones. En ellas también puede haber una o más variables.

A diferencia de las ecuaciones que se traducen mediante igualdades, las inecuaciones se traducen mediante desigualdades, es decir que ambos miembros estarán relacionados por medio de los signos mayor ($>$), mayor o igual (\geq), menor ($<$) o menor o igual (\leq).

¿Qué significa resolver una inecuación?

Las soluciones de una inecuación son todos los números reales que hacen que dicha inecuación sea cierta.

Ejemplo 1

Resolver

$$3x - 2 < 1$$

Despejando

$$3x - 2 < 1$$

$$3x < 1 + 2$$

$$3x < 3$$

$$x < 3 : 3$$

$$x < 1$$

Aplicando propiedades

$$3x - 2 < 1$$

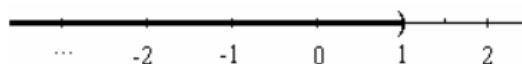
$$3x - 2 + 2 < 1 + 2$$

$$\frac{1}{3} 3x < \frac{1}{3} 3$$

$$x < 1$$

Solución $S = (-\infty; 1)$

Representación gráfica





Ejemplo 2

Resolver

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

Despejando

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

$$x+1 > 4 \cdot 2$$

$$x+1 > 8$$

$$x > 8 - 1$$

$$x > 7$$

Aplicando propiedades

$$\frac{x+1}{2} > 4$$

$$\frac{x+1}{2} \cdot 2 > 4 \cdot 2$$

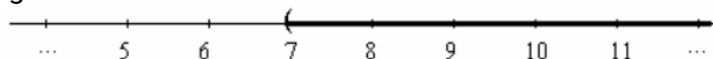
$$x+1 > 8$$

$$x+1+(-1) > 8+(-1)$$

$$x > 7$$

Solución $S = (7; +\infty)$

Representación gráfica



Ejemplo 3

Resolver

$$-2x + 1 \leq x - 3$$

Despejando

$$-2x + 1 \leq x - 3$$

$$-2x - x \leq -3 - 1$$

$$-3x \leq -4$$

$$x \geq -4 : (-3)$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

Aplicando propiedades

$$-2x + 1 \leq x - 3$$

$$-2x + 1 + (-x) \leq x - 3 + (-x)$$

$$[-2x + (-x)] + 1 \leq [x + (-x)] - 3$$

$$-3x + [1 + (-1)] \leq -3 + (-1)$$

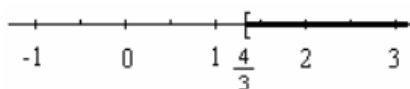
$$-3x \leq -4$$

$$-\frac{1}{3} \cdot (-3)x \geq -\frac{1}{3} \cdot (-4)$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

Solución $S = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$

Representación gráfica:





Resolución de problemas con inecuaciones

Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

$$\begin{array}{c} \text{Peso de la furgoneta} - \text{peso de 4 cajones} \quad \text{no es menor que 415 kg} \\ \hline 875 - 4 \cdot x \geq 415 \end{array}$$

Una forma de resolver la inecuación es seguir los siguientes pasos:

Restamos 875 a ambos miembros de la desigualdad	$-4x \geq 415 - 875$
Hacemos el cálculo en el segundo miembro	$-4x \geq -460$
Para despejar x , multiplicamos a ambos miembros por $\frac{-1}{4}$ Cuidado: como multiplicamos por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad	$x \leq \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (-460)$
Hacemos el cálculo	$x \leq 115$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$.

Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo $(0, 115]$. Graficamos la solución en la recta real:





PRÁCTICA Ecuaciones Fraccionarias e Inecuaciones

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{x^2-5}{x^2-1}$

b. $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x^2-2x} = 1$

c. $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-1} = 1$

d. $\frac{2}{x^2-1} = \frac{-12}{4x-4} - \frac{3x^2+6x+3}{3x^2-3}$

e. $\frac{1}{x^3+4x^2+4x} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{x^2+4x+4}$

2. Resolver las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:

a) $2x - 3 < 4 - 2x$

b) $5 + 3x \leq 4 - x$

c) $4 - 2t > t - 5$

d) $x + 8 \leq 3x + 1$

e) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) > 3x$

f) $\frac{a+2}{4} \leq \frac{a-1}{3}$

g) $3x - 12 \leq \frac{5x-6}{4}$

i) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > 5 - \frac{x}{6}$

j) $-\frac{x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$

k) $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} > \frac{x+14}{2} - 2$

l) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} - x + 2 < 0$

m) $\left(2 - \frac{1}{3}x\right)(-3) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) > 0$

h) $3 \cdot (4 - x) > 18x + 5$ n) $x - \sqrt{2} > 0$

3. Resolver los siguientes problemas

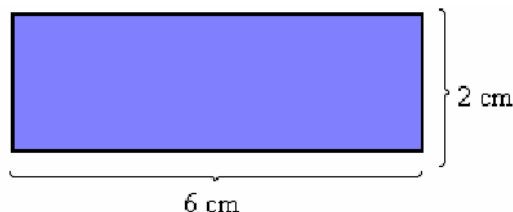
a. ¿Cuáles son los números cuyo triplo excede a su duplo en más de 20?

b. ¿Cuál es el menor número entero múltiplo de 4, que satisface la siguiente inecuación: $x + 2 < 3x + 1$?

c. Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7. ¿Qué se puede decir de su perímetro p?



- d. El perímetro de un cuadrado no supera el perímetro del rectángulo de la figura. ¿Qué se puede asegurar acerca de la superficie S del cuadrado?



- e. Un padre y su hijo se llevan 22 años. Determinar en qué período de sus vidas, la edad del padre excede en más de 6 años al doble de la edad del hijo.
- f. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 100 Km/h y 150 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 3 horas?

PRÁCTICA Para Profundizar

1. Resolver las siguientes ecuaciones

1) $-6x + 2x = -5x + 5$

2) $5x + 15 + 4x + 2 - 2x = 3x + 20 + 5$

3) $\frac{x+4}{2} = \frac{2 \cdot (x-1)}{3} - \frac{2}{3}$

4) $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{3} = \frac{x}{2}$

5) $\frac{x-6}{3} + \frac{2x+3}{5} = \frac{2x-6}{7} + \frac{4}{5}$

6) $\frac{4x}{5} = 6(2x+2) + 100$

7) $\frac{2}{1-x} + \frac{8}{x+1} = \frac{45}{1-x^2}$

8) $\frac{-x}{5(x+1)} + \frac{4}{x+3} = -\frac{1}{5}$

9) $\frac{2x-2}{4x-1} + 3 = \frac{7x-3}{2x-2}$

10) $\frac{x}{x+1} - \frac{3x}{x+2} + 2 = 0$

11) $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} = -\frac{3-2x}{x-1}$

12) $\frac{6x-6}{x^2-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x}{x-1}$

13) $\frac{4x^2}{2x^2-8} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{3x-1}{3x-6}$

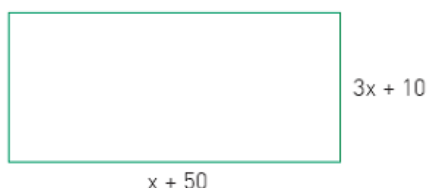
14) $\frac{3x+2}{1-x} + \frac{6x+3}{x-1} = \frac{3x^2+2x+1}{1-2x+x^2}$

2. Resolver los siguientes problemas

- a. Un farmacéutico debe preparar 15ml de gotas especiales para un paciente con glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero solo tiene disponibles soluciones al 10% y al 1%. ¿Qué cantidad de cada solución debe usar para completar la receta?
- b. Un corredor inicia en el principio de una pista y corre a velocidad constante de 10Km/h. Cinco minutos después, un segundo corredor comienza en el mismo punto, y su velocidad es de 13 Km/h, siguiendo por la misma pista. ¿Cuánto tiempo tardara el segundo corredor en alcanzar al primero?



- c. Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de \$6 por unidad y costos fijos de \$80. Cada unidad tiene un precio de venta de \$10. Determinar el número de unidades que deben vender para que la compañía obtenga utilidades de \$60 y calcular el margen por unidad.
- d. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si un lado mide 2 cm menos que el otro.
- e. Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?.
- f. Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 metros, y la longitud de un cateto es igual a $\frac{3}{4}$ del otro. Halla sus lados.
3. Hallar el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:
- a) $3x - 7 < 5$ d) $1 - 5x \leq -8$ g) $\frac{x-4}{4} + 1 \leq \frac{x+4}{8}$
- b) $2 - x > 3$ e) $\frac{2(x+2)}{3} < 2x$ h) $1 - x \leq \frac{x}{3}$
- c) $8x - 5 \leq 7$ f) $\frac{x-1}{2} > x+1$
4. Resolver los siguientes problemas
- a. Hallar los valores de x para los cuales la base es mayor que la altura.



- b. Una empresa de telefonía cobra mensualmente \$33 en concepto de abono y \$0,045 por cada minuto que se utilice el servicio. ¿Cuántos minutos puede hablar, a lo sumo, una persona que no quiere pagar más de \$50 mensuales?.
- c. Adriana dispone de \$50 para comprarse ropa. No le alcanza para comprarse dos pantalones, pero si compra dos remeras del mismo precio y un pantalón que cuesta \$29 le sobra. ¿Cuál puede ser, como máximo, el precio de cada remera?
- d. Roberto trabaja como personal de maestranza en una editorial. Tiene que bajar paquetes con libros en un montacargas en el que puede cargar hasta 500 kg. Sabiendo que Roberto pesa 85 kg y que cada paquete de libros pesa 25 kg, ¿Cuántos paquetes puede bajar, a lo sumo, en cada viaje?



6. BIBLIOGRAFÍA

- Pablo J. Kaczor, Ruth A. Schaposchnik, Eleonora Franco, Rosa A. Cicala, Bibiana H. Diaz, (2000). "Matemática I". Editorial Santillana.
- Susana N. Etchegoyen, Enrique D. Fagale, Silvia A. Rodriguez, Marta Avila de Kalan, Maria Rosario Alonso, (2000). "MATEMATICA 1". Editorial Kapelusz.
- Dure Diana Analía, Capítulo III: Ecuaciones. Seminario Universitario 2011. UTN-FRRE.

Sitios Web recomendados:

<https://es.khanacademy.org/>

<http://www.math2me.com/>

<http://webdelmaestrocmf.com/portal/>