

Matemática

Conjuntos Numéricos

PROYECTO DE MEJORA DE FORMACIÓN EN
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIRECCIÓN DE PLANEAMIENTO ACADÉMICO
SEMINARIO UNIVERSITARIO



UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

©Ing. Claudia R. Garcia - 2014



Conjuntos Numéricos

Objetivos específicos:

Cuando el alumno haya finalizado este eje temático estará en condiciones de:

- Operar con números reales y aplicar propiedades.
- Reconocer figuras y cuerpos geométricos y calcular áreas y volúmenes.
- Aplicar los distintos conjuntos numéricos a la resolución de problemas geométricos.

Contendidos:

- ▶ Conjuntos numéricos: Números naturales, racionales, irracionales y reales. Operaciones con conjuntos numéricos. Representación gráfica. Propiedades algebraicas de los números reales Intervalos. Potenciación. Radicación. Propiedades. Racionalización. Notación científica.
- ▶ Lenguaje matemático: Lenguaje coloquial y lenguaje simbólico. Resolución de problemas.



CONTENIDO

Conjuntos numéricos	4
1. Los Números reales	4
2. Los Números enteros	4
3. Los Números racionales	4
4. Los Números irracionales	6
5. Los Números reales	6
Representación gráfica de los números reales.....	6
Algunas operaciones para recordar	6
Propiedades de las operaciones definidas en \mathbb{R}	7
Propiedades de la potenciación y de la radicación.....	8
Jerarquía de las operaciones	8
PRÁCTICA Conjuntos Numéricos.....	9
6. Operaciones con números irracionales.	11
Radicales semejantes	11
Adición y sustracción de radicales	11
Multiplicación de radicales de igual índice.....	11
Racionalización de denominadores.	12
PRÁCTICA: Operaciones con números irracionales	14
7. Intervalos en la recta real.	16
PRÁCTICA: Intervalos en la recta real	17
8. Notación científica.....	18
¿Cómo hacemos para escribir un número en notación exponencial?	18
Operaciones matemáticas con notación científica	19
PRÁCTICA: Notación científica.	20
9. Bibliografía	21



CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. LOS NÚMEROS REALES

Los números naturales son aquellos que se usan para contar y numerar. Este conjunto numérico presenta el 1 como primer elemento, pero no tiene último elemento.

La notación que se emplea para identificar el conjunto de números naturales es:
 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Algunas propiedades importantes son:

- ▶ **N** es un conjunto discreto porque entre dos números naturales siempre hay un número finito de números naturales.
- ▶ Todo número natural a , tiene su sucesor $1 + a$.
- ▶ Tanto la suma como el producto de números naturales es un número natural, en cambio no sucede lo mismo con la resta y la división.
- ▶ Un número natural se puede expresar como producto de otros números naturales, que se llaman factores o divisores del primero.

Ejemplo: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

2. LOS NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto de los números naturales. La necesidad de restar $9 - 12$, por ejemplo, justificó la creación de los números negativos.

Al conjunto formado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero se lo llama conjunto de los números enteros.

La notación que se usa para identificar al conjunto de los números enteros es:
 $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Propiedades importantes:

- ▶ **Z** no tiene primero ni último elemento, cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- ▶ **Z** es un conjunto discreto.
- ▶ Todo número entero a tiene su opuesto $-a$, tal que $a + (-a) = 0$
- ▶ Al realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación de números enteros, siempre se obtiene como resultado un número entero.

3. LOS NÚMEROS RACIONALES

La necesidad de realizar la división $4/9$, por ejemplo, en la que el dividendo no es múltiplo del divisor, justificó la creación de los números fraccionarios. Para indicar la operación $4/9$ se usa la fracción $\frac{4}{9}$ y se lee cuatro novenos.

En un número fraccionario $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$; a recibe el nombre de numerador y b se llama denominador.



Al conjunto formado por los números enteros y los fraccionarios se lo llama conjunto de los números racionales y se lo designa con el símbolo Q .

Los números racionales son aquellos que se pueden escribir como cociente de dos números enteros. La única condición es que el denominador sea distinto de cero.

Propiedades importantes de este conjunto numérico:

- ▶ Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso se dice que Q es un conjunto denso. Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.
- ▶ Q no tiene primero ni último elemento.

Si efectuamos la división entre el numerador y el denominador de una fracción, obtenemos una expresión decimal.

Las expresiones decimales pueden ser:

- ▶ Cuando el numerador es múltiplo del denominador, se obtiene un número entero.
 $\frac{225}{45} = 5$
- ▶ Cuando se puede “terminar” la división llegando a un resto cero, se dice que la expresión es un decimal exacto. $\frac{3}{4} = 0,75$
- ▶ Cuando se no se puede “terminar” la división y el resto se repite, se dice que la expresión es un decimal periódico. $-\frac{2}{3} = 0,0\hat{6}$

Para escribir expresiones decimales como expresiones fraccionarias podemos utilizar los siguientes métodos:

Si una expresión decimal exacta, el numerador se forma considerando toda la expresión decimal sin coma, y el denominador surge de escribir la unidad (1) seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión.

Ejemplo: $3,9 = \frac{39}{10}$ $2,37 = \frac{237}{100}$ $0,007 = \frac{7}{1000}$

Si es una expresión decimal periódica, el numerador se forma considerando toda la expresión decimal sin coma, restándole la parte no periódica, y el denominador surge de escribir un nueve por cada cifra decimal periódica y un 0 por cada cifra decimal no periódica.

Ejemplo: Periódica pura $4,2\hat{1} = \frac{421-4}{99} = \frac{417}{99}$ $0,1\hat{4}2 = \frac{142}{999}$

Periódica Mixta $2,2\hat{5} = \frac{225-22}{90} = \frac{203}{90}$ $0,1\hat{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$



4. LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Hay números que se caracterizan porque tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números se llaman irracionales, ya que no se pueden expresar nunca como cociente o razón de dos números enteros.

El conjunto de los números irracionales se designa con la letra I .

Son números irracionales:

- ▶ Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$
- ▶ Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero. Por ejemplo: $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{-21}$
- ▶ Números de gran importancia en Matemática, como el número π , que se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia; el número e , base de los logaritmos naturales; etc.

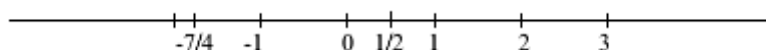
5. LOS NÚMEROS REALES

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo designa con R .

Representación gráfica de los números reales

El conjunto de los números reales se representa gráficamente sobre una recta que se conoce con el nombre de recta real o recta numérica.

Se fija un punto origen que representa el número 0 y se establece un segmento unidad. Los números reales positivos quedan representados a la derecha del cero y los reales negativos a la izquierda, tal como se muestra en la figura.



Algunas operaciones para recordar

Potenciación

Se recuerda que $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$, $n \in \mathbb{N}$

El número a recibe el nombre de base, y n es el exponente.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$



Radicación

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si y sólo si} \quad b^n = a, \quad n \in \mathbb{N}$$

El número a recibe el nombre de **radicando**, n es el **índice** y el símbolo $\sqrt{}$ se llama **radical**.

En la radicación de números reales, si el índice n es par, el radicando a debe ser mayor o igual que cero, de lo contrario el resultado no es un número real.

Se recuerda que:

- Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Propiedades de las operaciones definidas en \mathbb{R}

Se presenta a continuación un listado de las principales propiedades de las operaciones con números reales.

1.1.1.1 Propiedades de la suma

Conmutativa: $a + b = b + a$

Conmutativa: $a + b = b + a$

Elemento neutro: 0 (cero) tal que $a + 0 = a$

Opuesto aditivo: cada número real a tiene su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a + (-a) = 0$

1.1.1.2 Propiedades del producto

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Elemento neutro: 1 (uno) tal que $a \cdot 1 = a$

Recíproco: cada número real $a \neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o recíproco $\left(\frac{1}{a}\right)$ tal que

$$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

Propiedad distributiva que combina las operaciones de suma y producto

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

$$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$



Esta igualdad, considerando el recíproco de c , también puede expresarse como producto, del siguiente modo:

$$(a + b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

O bien

$$(a - b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Propiedades de la potenciación y de la radicación

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n, \quad b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ En particular } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$	

Jerarquía de las operaciones

1º	• Efectuar primero las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis, luego de los corchetes y por último de las llaves.
2º	• Calcular las potencias y las raíces.
3º	• Calcular los productos y los cocientes.
4º	• Calcular las sumas y las restas.



PRÁCTICA Conjuntos Numéricos

- 1) Marcar con una cruz el conjunto numérico o los conjuntos numéricos a los que pertenece cada uno de los siguientes números.

	3	-1	0,5	0	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{4}$	2,7	π	$-\frac{9}{8}$	$\frac{2}{3}$
N										
Z										
Q										
I										
R										

- 2) Resolver e identificar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado:

$$\begin{aligned}
 1) (3-2)^2 + 3 \cdot \sqrt{25} - \frac{4}{2} &= & 2) 43 - \left(\frac{16}{2}\right)^2 &= & 3) 8 + \frac{(5-2)^2}{4} - \sqrt{64} &= \\
 4) (12 - 4 \cdot 3)^4 &= & 5) \frac{3}{4} + \frac{4}{3} - 1 &= & 6) \frac{(15+6)^2}{7} - \sqrt{100-36} - 2 &= \\
 7) \frac{15}{(6-1)} - \frac{32}{2} + \frac{210}{7} &= & 8) \sqrt[3]{1-\frac{7}{8}} - \left(\frac{1}{2}-2\right)^3 + \left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} &= \\
 9) \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} &=
 \end{aligned}$$

- 3) Conviertan las siguientes expresiones decimales a fracciones irreducibles.

$$\begin{aligned}
 a. 3,4\hat{8} & & d. 0,\overline{29} & & h. 0,006 \\
 b. 11,\overline{06} & & e. 0,05 & & \\
 c. 0,\overline{38} & & f. 124,2 & & \\
 & & g. 4,37 & &
 \end{aligned}$$

- 4) Efectuar las siguientes operaciones convirtiendo previamente los decimales en fracciones:

$$\begin{aligned}
 1) (2,5)^{-1} + (0,3):9 - \frac{2}{5} + 0,2 &= & 2) \frac{\sqrt{0,5 - 0,34} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}}{1,1 \cdot (1-0,5)^{-1}} &= \\
 3) \frac{1,25 - 2}{(0,4)^{-1}} + \sqrt{0,5 - \frac{1}{4}} &= & 4) \left[(0,1 + 0,2)^{-2}\right]^{-1} - 0,625 + \frac{7}{8} &=
 \end{aligned}$$



5) Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$	<input type="checkbox"/>	d. $a^n + a^n = a^{2n}$	<input type="checkbox"/>
b. $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	<input type="checkbox"/>	e. $a^n \cdot a^n = a^{2n}$	<input type="checkbox"/>
c. $\sqrt{(-3)^2} = 3$	<input type="checkbox"/>	f. $a^n \cdot a^n = a^{n^2}$	<input type="checkbox"/>

6) Resolver aplicando propiedades y expresen la solución como una potencia.

a. $\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1^3}{2} \cdot 2^2 \right]^3 : \left[2^{-6} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-5} \right]^{-2}$

b. $\frac{9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-2}}{3^{-1} \cdot (3^{-5})^2}$

c. $\frac{\left[\left(\frac{1}{25} \right)^3 \cdot 2^{-4} \right]^2 \cdot 512 \cdot \left(\frac{1}{125} \right)^{-2}}{\frac{1}{10} \cdot (8 \cdot 5)^{-1}}$

d. $\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3^{-2}} \right)^3 : \frac{(3 \cdot 9 \cdot 27)^2}{\sqrt[3]{243 \cdot 81}}$

e. $\sqrt[3]{\sqrt{729}} \cdot \sqrt{\sqrt{625}} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{27} \right)^3$

f. $\frac{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[3]{9^2} \cdot \sqrt[5]{27^2}}{\sqrt[3]{9^2} \cdot 3^4}$

7) Aplicar las propiedades adecuadas y encontrar la forma más simple posible para expresar el resultado de:

a. $(p^2)^3 \cdot (p^3 p^5)^2 =$

b. $\left(\frac{0}{x^{11}} \right) + \left(\frac{x^9}{x^7} \right) + x^3 x - \frac{x^4}{3} =$

c. $\left[(u^{-8})^2 \mid (u^5)^{-3} \right] u^4 =$

d. $\sqrt[3]{(-81)y^9} \mid \sqrt[3]{(-3)y^6} =$

e. $\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}} x^9}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} =$

f. $\frac{x^2 (x^3)^{-1} x^{\frac{2}{3}}}{x \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{-2}} =$

g. $\frac{\sqrt[3]{25^{-1}} \mid \left(\frac{1}{5} \right)^{-1}}{\sqrt[3]{25 \cdot 5}} =$

h. $\frac{\sqrt{a b^2} \cdot \sqrt{a^3 b}}{\sqrt{a b}} =$



6. OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES.

Radicales semejantes

Dos radicales son semejantes cuando tienen igual índice y el mismo radicando.

Ejemplo:

- ▶ Radicales semejantes: $\sqrt{5}$ y $3\sqrt{5}$
- ▶ Radicales no semejantes: $-\sqrt{7}$ y $\sqrt[3]{7}$

Adición y sustracción de radicales

Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes.

Para sumar o restar radicales semejantes extraemos factor común el radical y después realizamos la suma algebraica.

Ejemplos

$$\text{a)} \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(3 + 5 - 1) = 7\sqrt{2}$$

$$\text{b)} \quad 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = \sqrt{3}(5 + 3) + \sqrt{5}(-2 + 7) = 8\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$$

Existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión.

Si los radicales no son semejantes, se deben extraer factores fuera de radical, para obtener radicales semejantes.

Ejemplos

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^4} + 7\sqrt{2^3} - 9\sqrt{5^2 \cdot 2} \\ &= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^4} \sqrt{2} + 7\sqrt{2^2} \sqrt{2} - 9\sqrt{5^2} \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} - 5 \cdot 2^2 \sqrt{2} + 7 \cdot 2 \sqrt{2} - 9 \cdot 5 \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}(3 - 20 + 14 - 45) = -48\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 4\sqrt{3} - 6\sqrt[4]{25} - 8\sqrt{27} + \sqrt{20} &= 4\sqrt{3} - 6\sqrt[4]{5^2} - 8\sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 5} \\ &= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{5} - 8 \cdot 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} \\ &= \sqrt{3}(4 - 24) + \sqrt{5}(-6 + 2) = -20\sqrt{3} - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Multiplicación de radicales de igual índice.

Para multiplicar o dividir radicales de igual índice se aplica la propiedad recíproca de la distributiva con respecto a la multiplicación (o división).

$$\sqrt[n]{a^4} \cdot \sqrt[n]{a^3} = \sqrt[n]{a^4 \cdot a^3} = \sqrt[n]{a^{4+3}} = \sqrt[n]{a^7} = a^{\frac{7}{n}} = a^{\frac{4}{n}} \cdot a^{\frac{3}{n}} = \sqrt[n]{a^4} \cdot \sqrt[n]{a^3}$$

Multiplicación y división de radicales de distinto índice.



Para efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, estos deben tener el mismo índice.

Para que los índices de dos o más radicales sean iguales se debe calcular el MCM de los índices de los radicales dados, obteniéndose así el mínimo común índice.

Ejemplo de reducción al mínimo común índice

a) $\sqrt[3]{5} y \sqrt[2]{7} \rightarrow \text{MCM}(2;3) = 6$; ambos radicales deben tener índice 6.

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{125} \quad y \quad \sqrt[2]{7} = \sqrt[6]{7^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{49}$$

b) $\sqrt[4]{a^3} y \sqrt[8]{x} \rightarrow \text{MCM}(4;8) = 8$; ambos radicales deben tener índice 8.

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[8]{a^{3 \cdot 2}} = \sqrt[8]{a^6} \quad y \quad \sqrt[8]{x}$$

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, se los debe reducir a mínimo común índice y luego aplicar las propiedades recíprocas de las distributivas de la radicación respecto de la multiplicación y división.

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c} \dots \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{abc \dots d} \quad \wedge \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos

$$a) \sqrt{2} \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^{1 \cdot 3}} \sqrt[6]{2^{2 \cdot 1}} = \sqrt[6]{2^3} \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{2^5}$$

$$b) \sqrt[3]{x^2} \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^{2 \cdot 4}} \sqrt[12]{x^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{x^8} \sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^8 \cdot x^9} = \sqrt[12]{x^{17}} = \sqrt[12]{x^{12} \cdot x^5} = x \sqrt[12]{x^5}$$

$$c) \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[12]{2^{3 \cdot 3}}}{\sqrt[12]{2^{5 \cdot 2}}} = \frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[5]{m^2}} = \frac{\sqrt[20]{m^{3 \cdot 5}}}{\sqrt[20]{m^{2 \cdot 4}}} = \frac{\sqrt[20]{m^{15}}}{\sqrt[20]{m^8}} = \sqrt[20]{\frac{m^{15}}{m^8}} = \sqrt[20]{m^7}$$

Racionalización de denominadores.

A veces, cuando se resuelven cálculos o problemas se obtienen fracciones con números irracionales en los denominadores, como por ejemplo $\frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{\sqrt{3+5}}, \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; etc.

Para transformar estas fracciones en otras equivalentes pero con denominadores racionales, se usa un procedimiento llamado racionalización.

A continuación se recordarán algunas reglas para racionalizar denominadores, aunque actualmente se utiliza cada vez menos este procedimiento debido a que se cuenta con calculadoras y computadoras que facilitan los cálculos.

Se considerarán los siguientes casos:

a. El denominador es un radical único irreducible de índice 2.

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



Se multiplica numerador y denominador de la fracción por el mismo radical del denominador.

b. El denominador es un radical único irreducible de índice distinto de 2.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3 \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{3 \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3 \sqrt[3]{4}}{2}$$

En general, para racionalizar una fracción de la forma $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ $b \neq 0$, se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

c. El denominador es un binomio de la forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ó $a \pm \sqrt{b}$ ó $\sqrt{a} \pm b$.

Para comprender el procedimiento a usar en este caso, se debe tener en cuenta que

$$(p+q) \cdot (p-q) = p^2 - p \cdot q + q \cdot p - q^2 = p^2 - q^2, \text{ con } p, q \in R$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})$$



PRÁCTICA: Operaciones con números irracionales

1) Resolver las siguientes adiciones y sustracciones.

a. $\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} =$

b. $\sqrt{9x} - \sqrt{25x} + \sqrt{49x} =$

c. $3\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{50} =$

d. $\sqrt[4]{9x^8} + \sqrt[6]{27y^{12}} =$

e. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{16}{27}} + \sqrt[3]{54} + 5 \sqrt[3]{\frac{2}{125}} =$

2) Resuelvan las siguientes multiplicaciones

a. $\left(5 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(5 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) =$

b. $\sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[4]{2ab} =$

c. $2\sqrt[5]{ab} : \left(-3\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}\right) =$

d. $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{24}) + \sqrt{98} =$

3) Realicen las siguientes multiplicaciones y divisiones

a. $\sqrt[5]{3x^3} \cdot \sqrt{3x} =$

b. $\sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt{m} \cdot \sqrt[4]{m^3} =$

c. $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[5]{a^2 \cdot b^3} =$

d. $\sqrt{4x} \cdot \sqrt[3]{4x^2} \cdot \sqrt[6]{6x^3} =$

4) Racionalizar

1) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{2a}{\sqrt{3a}}$

4) $\frac{4m^3}{\sqrt{2m}}$

5) $\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$

6) $\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$

7) $\frac{5}{1 - \sqrt{2}}$

8) $\frac{-4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

9) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$

10) $\frac{-16y}{4\sqrt{y} + 2}$

11) $\frac{20}{\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}$



- 5) Indicar si las siguientes igualdades son correctas o incorrectas. Justificar en cada caso la respuesta.

a. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{2}$

d. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = 0$

b. $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+3) = \sqrt{6}$

e. $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{6}$

c. $\frac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

- 6) Indicar con una cruz cuál es el resultado correcto y mostrar cómo llegar a él.

$$\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} =$$

$$5+4\sqrt{6} \quad \square$$

$$5+2\sqrt{6} \quad \square$$



7. INTERVALOS EN LA RECTA REAL.

La representación de los números reales en la recta numérica permite visualizar que este conjunto es totalmente ordenado.

Dados dos números reales distintos a y b , siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor o mayor.

Es decir, se verifica alguna de las siguientes desigualdades: $a < b$ ó $a \leq b$ ó $a > b$ ó $a \geq b$.

Con frecuencia, es necesario trabajar con subconjuntos de los números reales, expresados de acuerdo con alguna relación de orden, por ejemplo: "los números reales mayores que 5 y menores que 10".

La expresión anterior puede escribirse empleando la siguiente desigualdad: $5 < x < 10$.

El subconjunto al que se hace referencia es $A = \{x \in \mathbb{R} / 5 < x < 10\}$

Este subconjunto también puede indicarse a través del intervalo abierto $(2,4)$ cuya representación gráfica es la que se muestra en la figura.



El intervalo es abierto porque no contiene los extremos 5 y 10, lo que se indica con el uso de paréntesis.

En la siguiente tabla se muestran algunas desigualdades con los correspondientes intervalos.

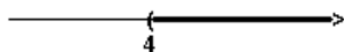
Desigualdades	Intervalo	Tipo de intervalo	Representación Grafica
$a < x < b$	$x \in (a, b)$	Abierto	
$a \leq x \leq b$	$x \in [a, b]$	Cerrado	
$a \leq x < b$	$x \in [a, b)$	Semiabierto	
$a \leq x$	$x \in [a, +\infty)$	Infinito	
$ x < a \Rightarrow -a < x < a$	$x \in (-a, a)$	Abierto	
$ x \geq a \Rightarrow x \leq -a \text{ o } x \geq a$	$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$	Unión de Intervalos infinitos	

En la notación $(a,b]$, el paréntesis "(" indica que a no pertenece al intervalo, mientras que el corchete "]" indica que b sí pertenece al intervalo.



PRÁCTICA: Intervalos en la recta real

- 1) Establecer una relación entre las desigualdades $>$ (mayor), $<$ (menor), \geq (mayor o igual), \leq (menor o igual) y los siguientes intervalos, escribiendo en cada caso $X \leq a$, $x < b$, $x > c$, etc.



- 2) a) Representa en la recta real los siguientes intervalos (cada uno en una recta distinta)

b) Indicar el tipo de intervalo.

$[-1, 3)$

a. $(-2, +\infty)$

b. $(-\infty, -2]$

c. $(-1, 1)$

d. $(-\infty, 3]$

e. $\left[\frac{-1}{5}, \frac{3}{5}\right]$



8. NOTACIÓN CIENTÍFICA.

En el mundo físico y de la química se presenta una variedad de números grandes o pequeños.

Por ejemplo:

La velocidad de la luz 300.000.000 m/s 3×10^8 m/s

Diámetro de un virus 0,00000001 m 1×10^{-8} m

El número de átomos de carbono que hay en un gramo 50 150 000 000 000 000 000 000 se lo representa por $5,015 \times 10^{20}$

Su manejo se simplifica usando potencias de diez (10) o Notación científica.

Repasaremos a continuación lo que significa la escritura de potencias de base 10 con exponente entero:

$$10^6 = 1.000.000$$

$$10^5 = 100.000$$

$$10^4 = 10.000$$

$$10^3 = 1.000$$

$$10^2 = 100$$

$$10^1 = 10$$

$$10^0 = 1$$

$$10^{-1} = 1 / 10 = 0,1$$

$$10^{-2} = 1 / 100 = 0,01$$

$$10^{-3} = 1 / 1000 = 0,001$$

$$10^{-4} = 1 / 10.000 = 0,0001$$

La notación exponencial o científica consiste en escribir un número a partir de un producto entre otros 2 números, uno llamado coeficiente y el otro, potencia de base 10, cuyo exponente es un número entero. El coeficiente debe cumplir con la condición de que sea mayor o igual a uno y menor que diez.

$$C \times 10^n$$

C= coeficiente ($1 \leq C < 10$).

n= número entero positivo o negativo

La principal ventaja de este tipo de notación, es que se simplifica la lectura, escritura y el trabajo algebraico de estos números.

¿Cómo hacemos para escribir un número en notación exponencial?

Se coloca un $n^o \neq 0$ a la izquierda del punto decimal:

$$4\,300\,000,0 = 4,3 \times 10^6$$

Para dejar expresado el número con un coeficiente mayor o igual a uno y menor que diez, se debe correr la coma 6 lugares a la IZQUIERDA, por lo que se lo multiplica por 10 con exponente +6 (indicando la cantidad de lugares que se corrió la coma a la izquierda).

Se coloca un $n^o \neq 0$ a la izquierda del punto

$$0,000348 = 3,48 \times 10^{-4}$$



Para dejar expresado el número con un coeficiente mayor o igual a uno y menor que diez, se debe correr la coma 4 lugares a la DERECHA, por lo que se lo multiplica por 10 el exponente -4 (indicando la cantidad de lugares que se corrió la coma a la derecha).

Repasando

- ▶ Si la coma se corre hacia la DERECHA el exponente "n" será NEGATIVO y su valor será igual a la cantidad de lugares que se corrió la coma para que $1 \leq C < 10$.
- ▶ Si la coma se corre hacia la IZQUIERDA el exponente "n" será POSITIVO y su valor será igual a la cantidad de lugares que se corrió la coma para que $1 \leq C < 10$.

Operaciones matemáticas con notación científica

Suma y resta

Siempre que las potencias de 10 sean las mismas, se deben sumar los coeficientes (o restar si se trata de una resta), dejando la potencia de 10 con el mismo grado. En caso de que no tengan el mismo exponente, debe convertirse el coeficiente, multiplicándolo o dividiéndolo por 10 tantas veces como se necesite para obtener el mismo exponente.

Ejemplos:

$$2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 = 5 \times 10^5$$

$$3 \times 10^5 - 0.2 \times 10^5 = 2.8 \times 10^5$$

$$2 \times 10^4 + 3 \times 10^5 - 6 \times 10^3 = (\text{tomamos el exponente 5 como referencia}) \\ = 0,2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 - 0,06 \times 10^5 = 3,14 \times 10^5$$

Multiplicación

Para multiplicar cantidades escritas en notación científica se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.

Ejemplo:

$$(4 \times 10^{12}) \times (2 \times 10^5) = 8 \times 10^{17}$$

División

Para dividir cantidades escritas en notación científica se dividen los coeficientes y se restan los exponentes.

Ejemplo:

$$(48 \times 10^{-10}) / (12 \times 10^{-1}) = 4 \times 10^{-9}$$

Potenciación

Se eleva el coeficiente a la potencia y se multiplican los exponentes.

Ejemplo:

$$(3 \times 10^6)^2 = 9 \times 10^{12}$$

Radicación

Se debe extraer la raíz del coeficiente y se divide el exponente por el índice de la raíz.

Ejemplos:



$$\sqrt{9 \cdot 10^{26}} = 3 \cdot 10^{13}$$
$$\sqrt[3]{27 \cdot 10^{12}} = 3 \cdot 10^4$$
$$\sqrt[4]{256 \cdot 10^{64}} = 4 \cdot 10^{16}$$

PRÁCTICA: Notación científica.

- 1) Expresar los siguientes valores en notación científica:

0,000000000345	
0,0006789	
345600000000	
2300000000	
0,0205	
0,12	
867034000000000000	
356	
0,000000000000000002	
23098	
0,0102	
1054678	
0,00100034	
15487056	

- 2) Expresar los siguientes valores que fueron obtenidos en notación científica

	$6,03 \times 10^{-7}$
	8×10^8
	$6,023 \times 10^5$
	$5,6 \times 10^{-1}$
	$2,45 \times 10^{-5}$
	$9,206 \times 10^{-3}$
	$8,134 \times 10^6$

- 3) Resolver las siguientes operaciones expresando los resultados en notación científica:

- $0,0000035 + 1,24 \times 10^{-4} =$
- $8567900 \cdot 4,5 \times 10^{-4} =$
- $0,0024 / 1230 =$
- $3,5 \times 10^7 - 8903456 =$
- $7,078 \times 10^{-6} \cdot 3,21 \times 10^{-10} =$
- $0,0012 - 0,0003 =$
- $1 / 6,023 \times 10^{23} =$
- $1,4 \times 10^{35} \cdot 4,7 \times 10^{-45} =$
- $456000000000 + 980000000000 =$



9. BIBLIOGRAFÍA

- Pablo J. Kaczor, Ruth A. Schaposchnik, Eleonora Franco, Rosa A. Cicala, Bibiana H. Diaz, (2000). "Matemática I". Editorial Santillana.
- Susana N. Etchegoyen, Enrique D. Fagale, Silvia A. Rodriguez, Marta Avila de Kalan, Maria Rosario Alonso, (2000). "MATEMATICA 1". Editorial Kapelusz.
- Dure Diana Analía, Capítulo I: Conjuntos Numéricos. Seminario Universitario 2011. UTN-FRRE.

Sitios Web recomendados:

<https://es.khanacademy.org/>

<http://www.math2me.com/>

<http://webdelmaestrocmf.com/portal/>