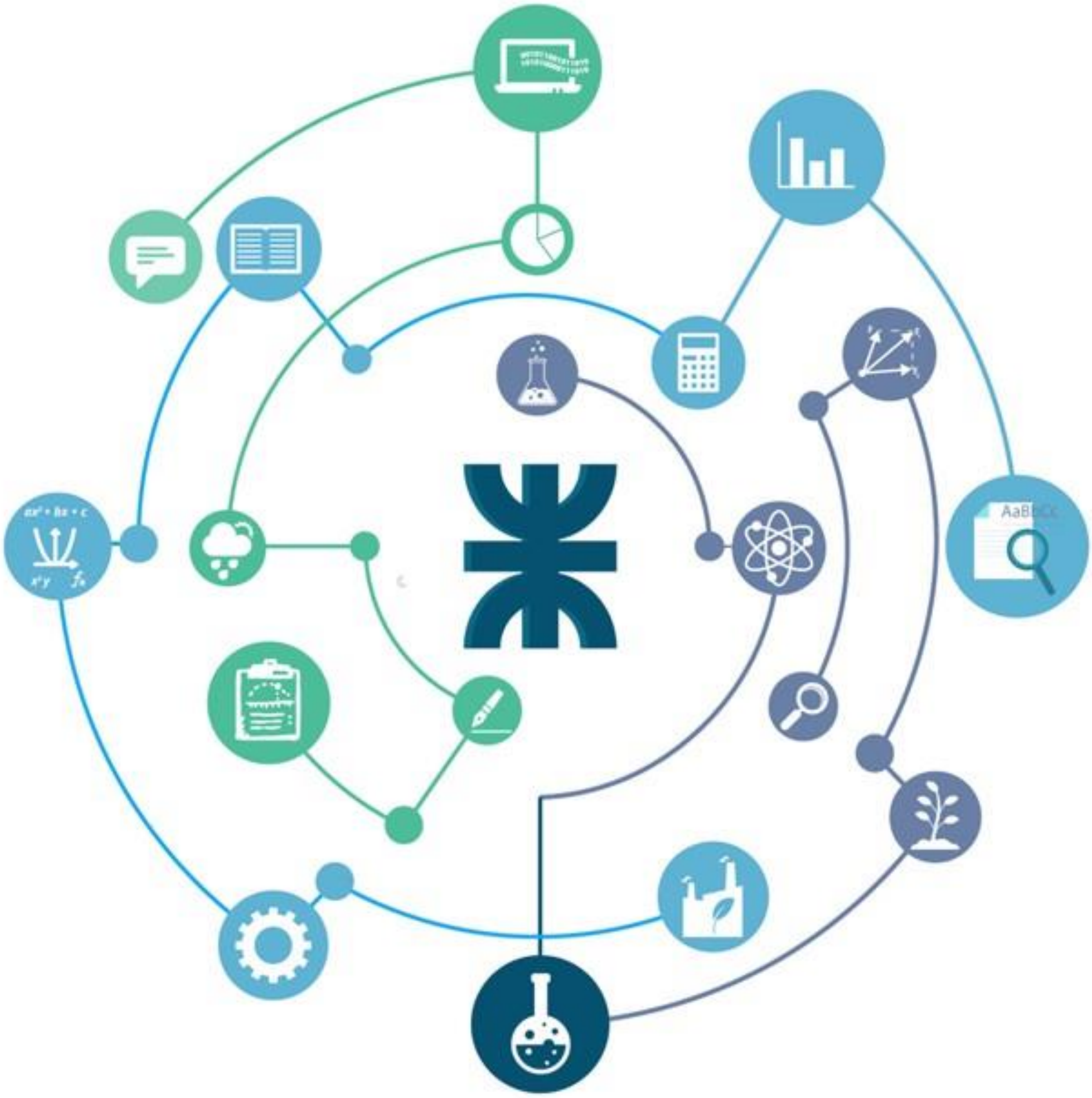


Matemática
Sistemas de Ecuaciones Lineales

PROYECTO DE MEJORA DE FORMACIÓN EN
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIRECCIÓN DE PLANEAMIENTO ACADÉMICO
SEMINARIO UNIVERSITARIO

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

Decana
Mg. Ing. Liliana R. Cuenca Pletsch

Vicedecano
Ing. Gustavo Alberto Bernaola

Secretario Académico
Ing. Fernando H. Soria

Directora de Planeamiento Académico
Mg. María del Carmen Maurel

Coordinación Seminario Universitario
Ing. Claudia R. García

Equipo de Diseño y Producción de contenidos
Matemática: Ing. Claudia García
Física: Prof.ª Mariana Cancián
Química: Ing. Yanina Zuazquita

Corrección de textos
Prof. Pablo F. Garrido

Resistencia, Octubre 2016.

ÍNDICE

I. Contenidos

Función Lineal. Ordenada al origen. Pendiente. Gráfica de la función lineal. Condición de paralelismo y perpendicularidad. Ceros, conjunto de positividad y conjunto de negatividad.

II. Destinatarios

Este material está destinado a estudiantes de 2°- 3° año de nivel secundario de todas las modalidades.

III. Competencias

Interpretar, modelizar y resolver una situación problemática a través del lenguaje algebraico.
Indicadores de logro:

- Encuentra y reconoce las relaciones entre los datos de un problema y las expresa mediante el lenguaje algebraico para su resolución.
- Reconoce una ecuación de primer grado con dos incógnitas y halla sus soluciones representándolas en unos ejes cartesianos.
- Clasifica un sistema según sus soluciones
- Analiza los resultados de la resolución de sistemas y toma soluciones adecuadas a la situación planteada.

INTRODUCCIÓN

Diseñamos este material didáctico para apoyar el proceso de aprendizaje de alumnos de nivel secundario, con el fin de afianzar saberes necesarios para el ingreso al nivel universitario y, en especial, a las carreras de ingeniería.

Desarrollamos los contenidos con el apoyo de videos y ejercicios de comprobación de lo aprendido. Además, los presentamos de manera tal que puedan ser utilizados tanto en formato impreso como en soporte digital.

Al resolver problemas en la vida cotidiana generalmente se utilizan herramientas de modelización matemática. Partiendo de considerar a un modelo como una representación selectiva y simplificada de la realidad que la sustituye.

Este primero se construye en la mente de la persona, y a partir de la percepción del sistema real puede ser volcado a un esquema, una maqueta, fórmulas matemáticas, enunciados verbales, entre otros.

Generalmente luego de modelizar un problema de ingeniería, se utilizan las ecuaciones, las funciones, la geometría, como una herramienta para hallar las posibles soluciones. Por ello es necesario abordar el concepto de **sistemas de ecuaciones** y los métodos de solución de los mismos y su uso para la modelización de problemas.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un grupo de alumnos de jardín de infantes va al cine junto con algunas madres y la maestra. La entrada de los adultos cuesta \$7 y la de los niños, \$4,50. A la salida van todos a tomar algo a una confitería. Todos los adultos toman café, que cuesta \$1,50; los niños toman una gaseosa, que cuesta \$2,50. Si pagaron \$153 en el cine y \$63,50 en la confitería, ¿cuántos niños y cuántos adultos fueron al cine?

Analicemos en principio qué queremos averiguar: necesitamos saber cuántos adultos y cuántos niños hay.

Llamamos:

x: a la cantidad de adultos

y: a la cantidad de niños

Sobre ***x*** e ***y*** tenemos ciertas condiciones:

"La entrada de los adultos cuesta \$7 y la de los niños, \$4,50". Si pagaron \$153 en el cine, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\mathbf{7x + 4,50y = 153}$$

"Todos los adultos toman café, que cuesta \$1,50, y los niños toman gaseosa, que cuesta \$2,50". Pagaron en la cafetería \$63,50. Con estos datos podemos plantear otra ecuación:

$$\mathbf{1,50x + 2,50y = 63,50}$$

Como tenemos un par de **ecuaciones lineales con dos incógnitas** (en nuestro ejemplo **x** e **y**), que consideramos simultáneamente, decimos que forman un **sistema**.

$$\begin{cases} 7x + 4,50y = 153 \\ 1,50x + 2,50y = 63,50 \end{cases}$$

Al modelizar nuestro problema, tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que son consideradas simultáneamente. Por ello decimos que forman un **sistema de ecuaciones.**

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas significa hallar, si es que existen, todos los puntos que tienen en común las rectas del sistema.

Visualiza el siguiente video para profundizar lo desarrollado hasta este punto:

Sistemas de ecuaciones: troles y peajes (parte 1 de 2)

1.1 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero en este capítulo sólo consideramos los siguientes: *método de igualación*, *método de sustitución* y *método de reducción*.

El siguiente video te ayudara a comprender el significado de solución de un sistema de ecuaciones lineales

Probando soluciones en un sistema de ecuaciones

1.1.1 Método de igualación

En nuestro problema planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 7x + 4,50y = 153 \\ 1,50x + 2,50y = 63,50 \end{cases}$$

Se indican a continuación los pasos a seguir para resolver este sistema, empleando el **método de igualación.**

1°) Se despeja la misma incógnita en cada ecuación:

$$\begin{cases} y = \dfrac{153 - 7x}{4.5} \\ y = \dfrac{63,50 - 1,50x}{2,5} \end{cases}$$

2º) Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación con una incógnita que se formó.

$$\frac{153 - 7x}{4.5} = \frac{63,50 - 1,50x}{2,5}$$

$$153 - 7x = (63,50 - 1,50x).1.8$$
$$153 - 7x = 114.3 - 2.7x$$
$$-7x + 2.7x = 114.3 - 153$$
$$-4,3x = -38,7$$
$$x = 9$$

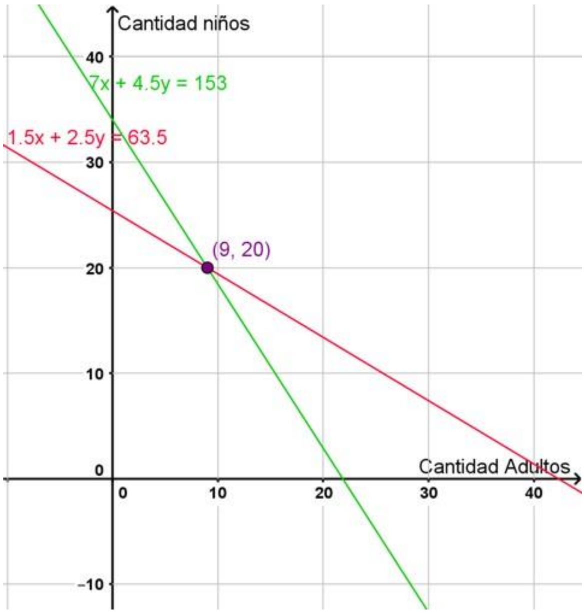
3º) Se reemplaza el valor obtenido de la variable **x**, en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el primer paso, con el valor de la incógnita que se ha determinado. De este modo, se calcula el valor de la otra incógnita, como se muestra a continuación:

$$y = \frac{153 - 7x}{4.5}$$
$$y = \frac{153 - 7.9}{4.5}$$

$$y = 20$$

La solución del sistema es el par ordenado **(9; 20)**. Esto quiere decir que asistieron 9 adultos y 20 niños.

Gráficamente, el punto donde se cortan ambas rectas está dado por las coordenadas que nos indican la solución al sistema de ecuaciones.



En el siguiente video te presentamos un ejemplo de resolución con el método de igualación.

Método de igualación

Comprobamos lo aprendido

A partir de los siguientes enunciados, te proponemos que realices el modelo matemático y lo resuelvas utilizando el método de igualación:

a. Un joyero ha vendido 18 pulseras de plata y 13 de oro por $3500. Una pulsera de oro cuesta cuatro veces lo que cuesta una de plata. ¿Cuál es el precio de una pulsera de cada clase?

b. Esteban pagó una cuenta de $300 con billetes de $2 y de $5. En total empleó 90 billetes para hacer el pago. ¿Cuántos billetes de cada valor utilizó?

c. Entre dos estantes de una librería hay 90 libros. Si se pasan 10 libros del segundo al primer estante, ambos quedan con la misma cantidad de libros. ¿Cuántos libros había inicialmente en cada estante?

1.1.2 Método de sustitución

Matías le dijo a Paula: "Pensé un número de dos cifras. Lo único que te voy a decir es que la suma de sus dígitos es 13 y que, si invertís las cifras, el número que se forma es 45 unidades mayor que el número que pensé." [1]

A partir de eso, planteamos el modelo matemático:

Las variables que intervienen son:

$$x\text{: } primer\ dígito\ del\ número\ que\ pensó\ Matías$$

$$y\text{: } segundo\ dígito\ del\ número\ que\ pensó\ Matías$$

Presentamos las ecuaciones que modelan la situación:

$$\begin{cases} 10x + y + 45 = 10y + x \\ x + y = 13 \end{cases}$$

Se aplicará el **método de sustitución** para resolver el sistema.
El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en alguna de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

1º) En este ejemplo se despeja **y** en la primera ecuación:

$$\mathbf{10x + y + 45 = 10y + x}$$

[1] Problema extraido de Kaczor, P. J. *et al.* (2000), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana, pag: 62

$$y - 10y = x - 10x - 45$$
$$-9y = -9x - 45$$
$$y = x + 5$$

2º) En la otra ecuación se sustituye **y** por $x + 5$ y se resuelve:

$$\boldsymbol{x + y = 13}$$
$$x + x + 5 = 13$$
$$2x = 13 - 5$$
$$x = 4$$

3º) Se sustituye en la expresión $\boldsymbol{y = x + 5}$ el valor obtenido para x y se calcula el valor de la otra incógnita:

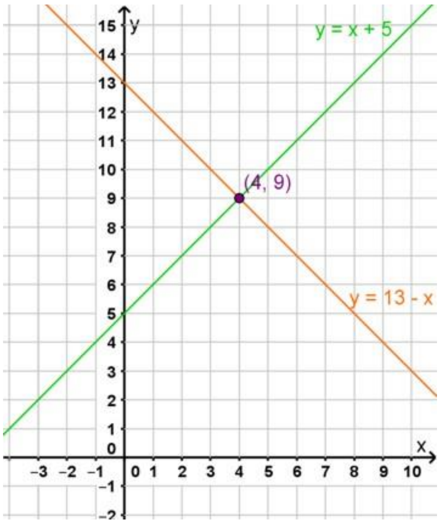
$$\boldsymbol{y = x + 5}$$
$$y = 4 + 5$$
$$y = 9$$

La solución del sistema es el par ordenado (4; 9). Los dos dígitos que cumplen con las condiciones son 4 y 9.

Lo comprobamos:

- Sumamos ambos dígitos y obtenemos 13.
- El número que pensó Matías es 49 y si los invertimos es 94 que es 45 unidades mayor que el número pensado.

En la gráfica podemos observar que el punto donde se cortan ambas rectas es la solución a nuestro sistema.



En el siguiente video te presentamos un ejemplo de resolución con el método de sustitución.

Método de sustitución

Comprobamos lo aprendido

A partir de los siguientes enunciados, construí el modelo matemático y resolvelo utilizando el medido de sustitución:

a. Un número de dos cifras es tal que la cifra que ocupa el lugar de las decenas es el duplo de la que ocupa el lugar de las unidades, y la diferencia de las dos cifras, aumentada en 12, es igual a 15. Calculá ese número.

b. Laura es 17 años mayor que Pablo y la suma de sus edades es 75 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

c. En un grupo de 560 personas asistentes a un espectáculo, la razón entre hombres y mujeres es 2/5. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres concurrieron?

d. La edad de María más el duplo de la edad de Pedro es 14. El duplo de la edad de María dentro de 4 años será la de Pedro dentro de 6 años. Calculá la edad de ambos.

1.1.3 Método de reducción

Martín es estudiante de Agronomía y debe preparar una mezcla de avena y maíz para alimentar el ganado. Cada onza de avena contiene 4 g de proteínas y 18 g de carbohidratos. Una onza de maíz contiene 3 g de proteínas y 24 g de carbohidratos. Indiquen cuántas onzas de cada cereal debe incluir la mezcla para cumplir con los requisitos nutricionales de 200 g de proteínas y 1320 g de carbohidratos por comida.[2]

Definamos las variables que intervienen para obtener la solución:

m = una onza de maíz.
a = una onza de avena.

Tenemos que combinar las onzas de maíz y de cereal de manera tal que se cumplan con los requisitos nutricionales establecidos. Podemos confeccionar primeramente una tabla nutricional:

Cereal	**Proteínas en 1 onza**	**Carbohidratos en 1 onza**
Maíz	4 g	18 g
Avena	3 g	24 g
Total requerido	200 g	1320 g

La ecuación que modela la cantidad de proteínas que se deben reunir con la combinación de cereales y maíz es la siguiente:

$$4m + 3a = 200$$

La ecuación que modela la cantidad de carbohidratos que se deben reunir con la combinación de cereales y maíz es la siguiente:

$$18m + 24a = 1320$$

[2] Problema extraido de Kaczor, P. J. *et al.* (2000), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana, pag: 63

Esto nos permite conformar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4m + 3a = 200 & (I) \\ 18m + 24a = 1320 & (II) \end{cases}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones usaremos el **método de reducción**:

Este método consiste en:

- ✓ Multiplicar cada ecuación del sistema por un número no nulo, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales en las dos ecuaciones.
- ✓ Luego, se restan las ecuaciones obtenidas para eliminar esa incógnita y poder despejar la otra.

1º) En nuestro sistema de ecuaciones podemos observar que ninguna de las incógnitas tienen el mismo coeficiente. Seleccionamos una de ellas para eliminarla y procedemos de la siguiente manera:

Vamos a eliminar la incógnita **a**; entonces a la ecuación (*I*) la multiplicamos por 8:

$$\begin{cases} 4m + 3a = 200 & (I).8 \\ 18m + 24a = 1320 & (II) \end{cases}$$

Y obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\begin{cases} 32m + 24a = 1600 & (I).8 \\ 18m + 24a = 1320 & (II) \end{cases}$$

Con esta operación logramos que la incógnita **a** tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones.

2º) Se restan miembro a miembro las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{array}{rl} & 32m + 24a = 1600 \quad (I) \\ - & \underline{18m + 24a = 1320 \quad (II)} \\ & 14m + 0a \;\; = 280 \end{array}$$

3º) Se resuelve la ecuación que quedó:

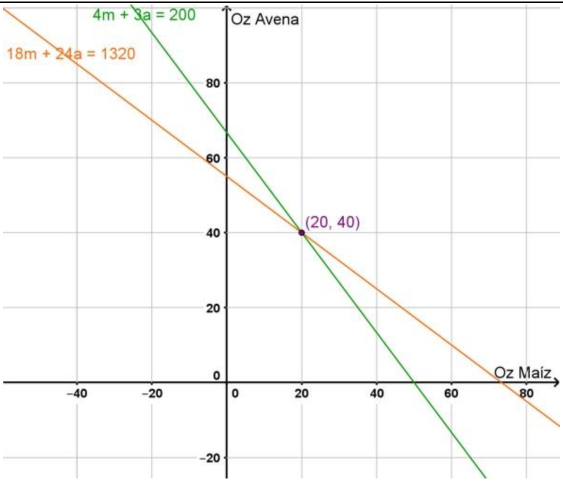
$$14m \;\; = 280$$

$$m \;\; = \frac{280}{14}$$

$$\boldsymbol{m} \;\; = \mathbf{20}$$

4º) Se sustituye el valor de ***m*** en alguna de las ecuaciones originales y se despeja la otra incógnita:

$$32\boldsymbol{m} + 24a = 1600$$
$$32.\mathbf{20} + 24a = 1600$$
$$640 + 24a = 1600$$
$$a = \frac{1600 - 640}{24}$$
$$\boldsymbol{a} = \mathbf{40}$$



La **solución** al sistema es el par ordenado **(20; 40),** que nos indica que se deberán mezclar **20 onzas de maíz** y **40 onzas de avena** para alcanzar las cantidades de proteínas y carbohidratos requeridas por comida.

En los siguientes videos te presentamos una serie de ejemplos de resolución con el método de reducción.

Método de reducción Caso 1

Método de reducción Caso 2

Método de reducción Caso 3

Comprobamos lo aprendido

A partir de los siguientes enunciados, te proponemos que realices el modelo matemático y lo resuelvas utilizando el medido de reducción.

a. Un comerciante compra dos objetos por \$2100 y los vende por \$2202. Si en la venta de uno de los objetos gana el 10% y en el otro pierde el 8%, ¿cuánto pagó por cada uno de los objetos?

b. En un triángulo isósceles, la suma de la base y de la altura es igual a 40 cm. Si se agregan 12 cm a la base, se obtiene 9/4 de la altura. Calculá el área.

c. Si se aumenta en 2 m tanto el ancho como el largo de un rectángulo, el perímetro mide 30 m. Si el largo se disminuye en 2 m, resulta un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

1.2 CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se vio que si al representar gráficamente las dos ecuaciones lineales de un sistema, las rectas resultantes se cortan en un punto, entonces el sistema tiene única solución.

Sin embargo, hay sistemas que tienen infinitas soluciones y otros que no tienen solución.

Los ejemplos que siguen muestran estas dos últimas situaciones:

Caso 1

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = 6} \\ \boldsymbol{2x = 12 + 4y} \end{cases}$$

Se despeja **y** de la primera ecuación:

$$x - 2y = 6$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 3 \quad (I)}$$

Se despeja **y** de la segunda ecuación:

$$\boldsymbol{2x = 12 + 4y}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 3 \quad (II)}$$

Se observa que las expresiones (I) y (II) son iguales. Esto significa que las ecuaciones del sistema corresponden a la misma recta. Cada punto (x; y) de esa recta es solución del sistema.

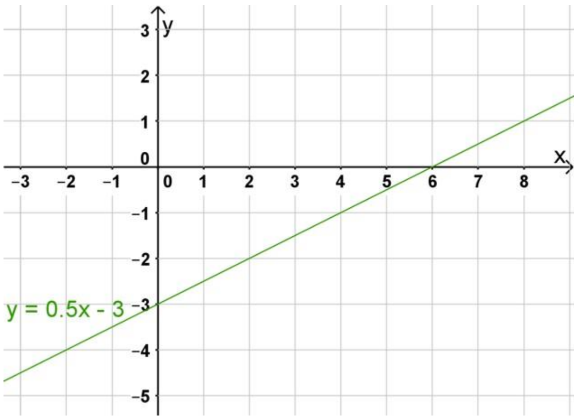
El sistema tiene infinitas soluciones.

El conjunto solución es:

$$S = \left\{(x, y)/y = \boldsymbol{\frac{1}{2}x - 3}\right\} \text{ entonces } S = \infty$$

Gráficamente, como vemos en la figura, la solución queda determinada por la recta de ecuación:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 3}$$



Caso 2

$$\text{Sea} \begin{cases} 2x + y = -3 & (I) \\ 2y = -4x + 2 & (II) \end{cases}$$

Se despeja **y** de la primera ecuación:

$$y = -3 - 2x \quad (I)$$

Se despeja **y** de la segunda ecuación:

$$y = -2x + 1 \quad (II)$$

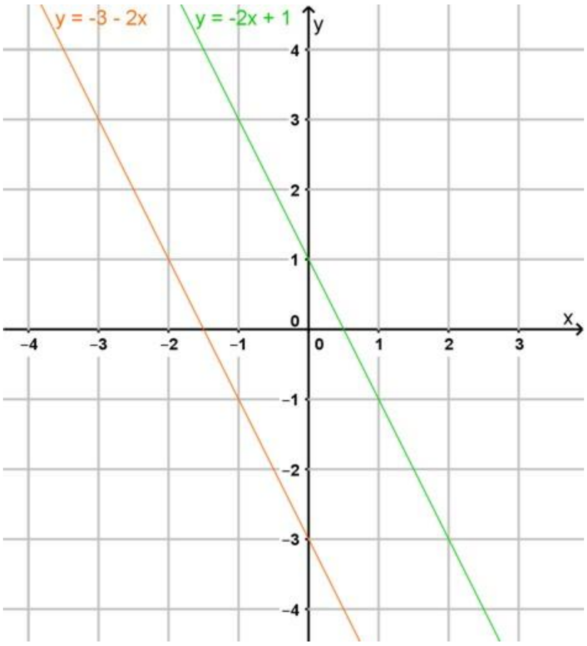
Las expresiones (I) y (II) corresponden a las ecuaciones de dos rectas que tienen igual pendiente, pero distinta ordenada al origen. Esas rectas son paralelas y no tienen ningún punto en común.

El sistema no tiene solución.

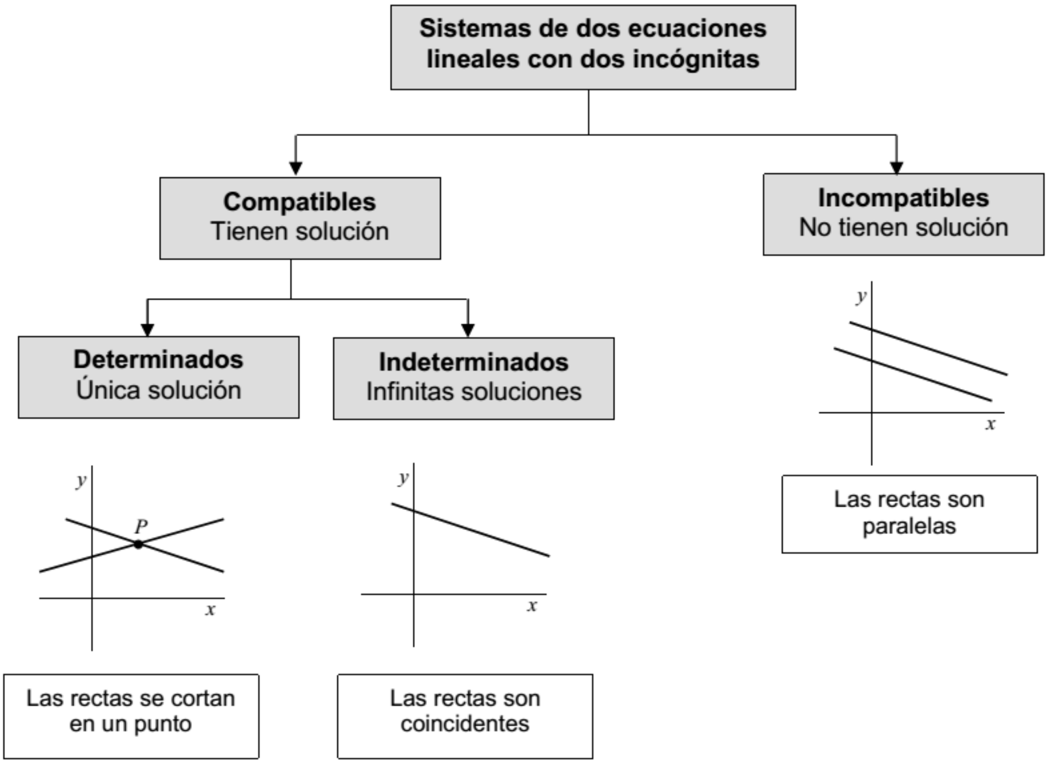
El conjunto solución es vacío:

$$S = \varnothing \text{ y } |S| = 0.$$

Esto lo comprobamos al realizar la gráfica donde se evidencian dos rectas paralelas:



En el siguiente organizador gráfico se presenta una clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales:

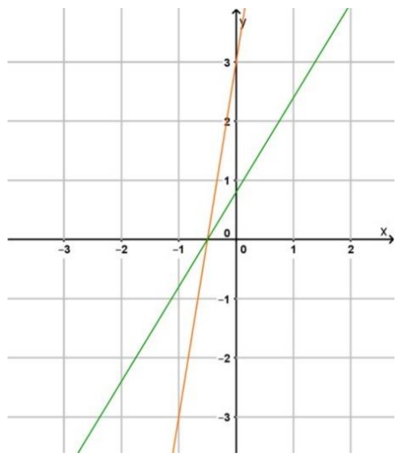
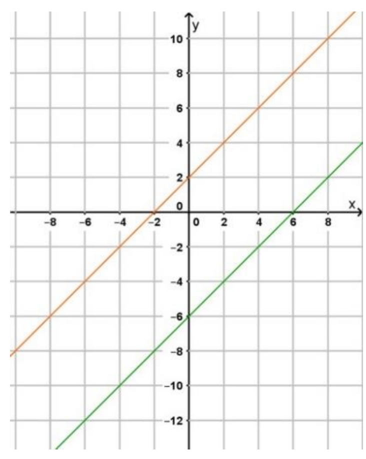
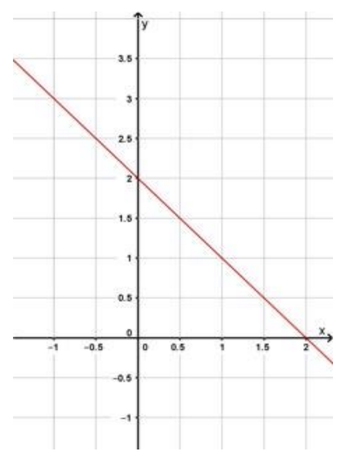


Comprobamos lo aprendido

1) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones:

A) $\begin{cases} y - 6x = 3 \\ \dfrac{5}{4}y - 2x = 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 6 + y = x \end{cases}$ C) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

a. Clasificalos.
b. Determiná cuál de las siguientes gráficas se corresponde con cada sistema de ecuaciones:

I.	II.	III.
		

2) Determiná un valor de **k** para que los siguientes sistemas sean compatibles determinados. Después, encontrá, si fuere posible, un valor de **k** para que sean compatibles indeterminados y otro para que sean incompatibles:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + ky = 4} \\ \boldsymbol{kx + 3y = 8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{x + ky = 1} \\ \boldsymbol{kx + y = k} \end{cases}$

ACTIVIDADES DE CIERRE

1) Dado el sistema:

$$\begin{cases} px - 6y = 3 \\ -2x - 2q + 4y = 0 \end{cases}$$

Indicá los valores de **p** y **q** para que el sistema sea:

a. Incompatible.
b. Compatible determinado.
c. Compatible indeterminado.

2) A partir de los siguientes planteos, proponé un modelo matemático y resolvelo por el método indicado:[3]

a. Método de igualación

Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones, de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres o cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores, ¿cuántos aviones de tres motores y cuántos de cuatro motores hay?

[3] Problemas extraidos de Kaczor, P. J. *et al.* (2000), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana, pag: 72

b. Método de sustitución

Un número de cuatro cifras es capicúa. La suma de las dos primeras cifras es 8 y la diferencia entre los números formados por los dos primeros dígitos y por los dos últimos es de 18. Indicá cuál es ese número capicúa de cuatro cifras.

c. Método de reducción

Un grupo de alumnos decide juntar cierta cantidad de dinero para depositar en un banco, con vistas a su viaje de egresados. Luego de conversar y analizar el asunto, se dan cuenta de que las mellizas Torres son las únicas ausentes en el día de la fecha. Alguien dice: “Si las mellizas están de acuerdo con nosotros, debemos colocar $270 cada uno; en caso contrario, $300”.

¿Cuánto alumnos tiene el curso y cuál es el monto de dinero que van a juntar?

BIBLIOGRAFÍA

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2003), *Matemática: Funciones 1*, Buenos Aires, Longseller.

Bocco, M. (2010), *Funciones Elementales para construir modelos matemáticos*, Buenos Aires, INET, Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática”.

Dure, D. A. (2011), Capítulo III: “Funciones - Introducción”, Resistencia, Seminario Universitario UTN-FRRE.

Kaczor, P. J. *et al.* (2000), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana.

Sitios web recomendados

https://es.khanacademy.org/

http://math2me.com/playlist/pre-calculo

http://www.academiavasquez.com/