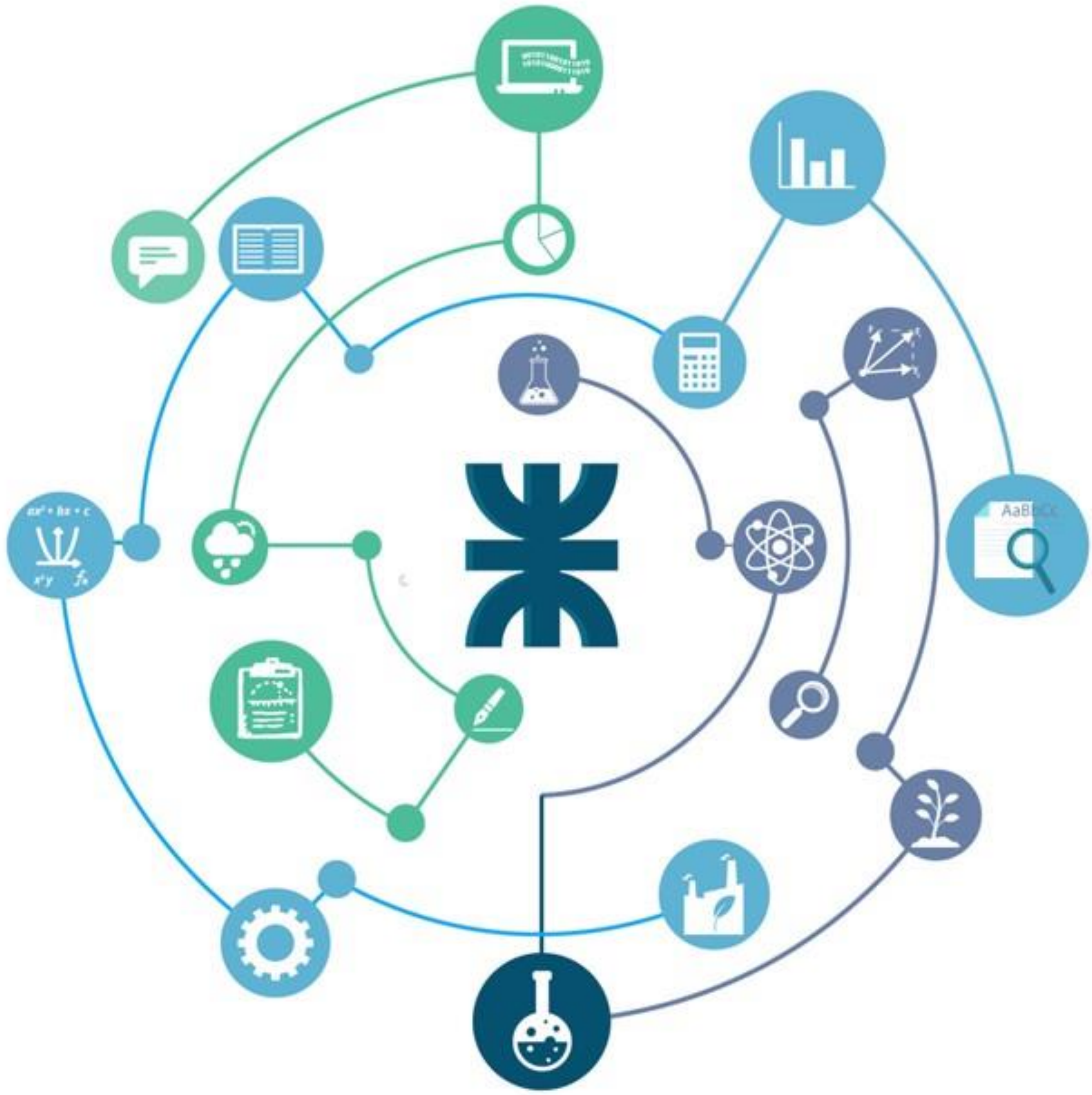


Matemática
Expresiones Algebraicas

PROYECTO DE MEJORA DE FORMACIÓN EN
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIRECCIÓN DE PLANEAMIENTO ACADÉMICO
SEMINARIO UNIVERSITARIO

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

Objetivos específicos:

- Reconocer los distintos tipos de ecuaciones e inecuaciones y resolverlas.
- Clasificar las ecuaciones según el conjunto solución.
- Resolver problemas con distintos tipos de ecuaciones.

Contendidos

Definición. Valor numérico. Clasificación. Valor numérico. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Regla de Ruffini. Raíces de un polinomio. Teorema del resto. Divisibilidad de polinomios. Factorización. Factor común .Diferencia de cuadrados. Trinomio cuadrado perfecto. Lema de Gauss. Suma y Resta de potencias de igual exponente. Expresiones algebraicas fraccionarias. Operaciones básicas.

ÍNDICE

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. ¿QUÉ ES UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA?

Se llama expresión algebraica a cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras, vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos de expresiones algebraicas.

$a)\ x^2 + 2xy$

$b)\ \sqrt{2x} + y^2x^3$

$c)\ \dfrac{x.y - 2x}{x^2 + 1}$

Clasificación de las expresiones algebraicas

Expresiones Fraccionarias

Racionales
No hay letras afectadas por el signo radical

Irracionales
Hay por lo menos una letra afectada por el signo radical
Ejemplo: $\sqrt{x} + 3x^2$

Fraccionarias
Hay por lo menos una letra en el divisor
Ejemplo: $2x + \frac{3}{x^2+3}$

Enteras
No hay letras en el divisor
Ejemplo: $2x^2y + xyz + 7$

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

Monomios

Los monomios son expresiones algebraicas de un solo término.

Ejemplo:

$2x^2y$

En el monomio $2x^2y$

- El número 2 recibe el nombre de coeficiente,
- x^2y constituye la parte literal.

Grado de un monomio

Se llama grado de un monomio a la suma de los exponentes de las letras que aparecen en él.

Ejemplo:
El monomio $2x^2y$ es de grado 3.

Monomios semejantes

Dos o más monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplo:
$2x^2y$ y $5x^2y$ son monomios semejantes.

Los monomios semejantes pueden sumarse o restarse dando por resultado otro monomio semejante a los anteriores.

Ejemplo:
$$2\boldsymbol{x^2y} + 5\boldsymbol{x^2y} = (2+5)\boldsymbol{x^2y} = 7\boldsymbol{x^2y}$$

Polinomios

Un polinomio es una suma algebraica de monomios de distinto grado.

Ejemplo:
$$x^2 + 3x^3 - 5y$$

En general definimos a los polinomios de la siguiente manera:

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Donde an,..., a0 son números reales constantes, llamados coeficientes, x es la indeterminada y los exponentes de cada una de las x (n, n-1, n-2, ..., 2, 1, 0) son números naturales constantes.

<u>Grado de un Polinomio.</u>

El exponente del monomio de mayor grado de un polinomio nos indica el grado de ese polinomio.
En particular $P(x) = 0x^n + \dots + 0x + 0$ se llama polinomio nulo y no tiene grado.

Características de los polinomios.

- El coeficiente del monomio de mayor grado es el **coeficiente principal (a_n).**
- El polinomio es **mónico** cuando su coeficiente principal es uno **($a_n = 1$).**
- Al término a_0 se lo llama **término independiente.**
- Un polinomio esta **ordenado** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. Nosotros ordenaremos los polinomios en forma decreciente.

Ejemplo:

$P(x) = -4x^6+5x^4 - x^2 +4x - 6$
Tiene grado 6, su coeficiente principal es –4 por lo que no es Mónico, el termino independiente es -6, y esta ordenado en forma decreciente.

$G(x) = 2$ es un polinomio de grado cero.

Funciones polinómicas

Cada polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene asociada una función polinómica f con dominio y codominio en R, definida por la formula:

$$\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

1.1.1.1 Valor numérico de un polinomio

Se llama valor numérico de un polinomio $P(x)$ en $x = k$, al valor que toma el polinomio cuando se reemplaza x por k.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, el valor de P(x) en x = k es

$P(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0$

Ejemplo:

$P(x) = -4x^6+5x^4 - x^2 +4x - 6$ con $x = 2$

Entonces $P(2) = -4.(2)^6+5.(2)^4 - (2)^2 +4.(2) - 6 = -178$

3. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma

La suma de dos polinomios P(x) y Q(x) es el polinomio P(x) + Q(x) que se obtiene sumando los monomios semejantes que se encuentran en P(x) y Q(x).
Para sumar polinomios resulta conveniente ordenarlos según potencias decrecientes de x y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente cero.

Ejemplo:
Dados $P(x) = 3x^2+ 2x+1$ y $Q(x) = -7x +5x^3+8$ Calcular P(x) + Q(x)

$$\begin{array}{r l}
P(x) = & \quad\quad 3x^2 + 2x + 1 \\
\underline{Q(x) =} & \underline{5x^3 + 0x^2 - 7x + 8} \\
P(x) + Q(x) = & \mathbf{5x^3 + 3x^2 - 5x + 9}
\end{array}$$

Resta

La resta de dos polinomios P(x) y Q(x) es el polinomio P(x) - Q(x) = P(x) + (-1). Q(x)

Ejemplo:
Dados $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x + 1$ y $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x - 2$ Calcular P(x) - Q(x)

$$\begin{array}{r l}
P(x) = & -2x^4 + 5x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \\
\underline{(-1).Q(x) =} & \underline{\quad\quad\quad - 3x^3 + 6x^2 + 5x + 2} \\
P(x) + (-1).Q(x) = & -2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 2x + 3
\end{array}$$

Producto de polinomios

Producto de un número real por un polinomio

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es un polinomio y k es un número real entonces

$$k.P(x) = k.a_n x^n + k.a_{n-1} x^{n-1} + ... + k.a_2 x^2 + k.a_1 x + k a_0$$

Ejemplo:

Dados $P(x) = -2x^4 + 5x^3 - 3x + 1$ y $k = 3$
Entonces $3. P(x) = 3.-2x^4 + 3.5x^3 - 3.3x + 3.1 = -6x^4 + 15x^3 - 9x + 3$

Producto de dos polinomios

Para realizar el producto de dos polinomios es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y las propiedades del producto y de la potenciación.

Ejemplo 1:

P(x) = $-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1$ y Q(x) = $5x$ Calcular P(x) . Q(x)
P(x) . Q(x) = P(x) = $(-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1).\,5x = -2x^4.\,5x + 5x^3.\,5x - 3x.\,5x + 1.\,5x$
$= \boxed{-10x^5 + 25x^4 - 15x^2 + 5x}$

Ejemplo 2:
P(x) = $-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1$ y Q(x) = $x - 2$ Calcular P(x) . Q(x)

P(x) . Q(x) = $(-2x^4 + 5x^3 - 3x + 1).\,(x - 2)$ =
$= -2x^4.x + 5x^3.x - 3x.x + 1.x - 2x^4.(-2) + 5x^3.(-2) - 3x.(-2) + 1.(-2) =$ (aplicamos propiedad distributiva)
$= -2x^5 + 5x^4 - 3x^2 + x + 4x^4 - 10x^3 + 6x - 2 =$ (sumamos términos semejantes)
$= 2x^5 + 9x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 7x - 2$

Productos especiales

Diferencia de cuadrados

$$(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

$$\boxed{(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - a^2}$$

Cuadrado de un binomio

$$(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2$$

$$\boxed{(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

$$(x-a)^2 = (x-a)\cdot(x-a) = x^2 - ax - ax + a^2$$

$$\boxed{(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2}$$

Trinomio Cuadrado

Cubo de un binomio

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a)\\ &= (x^2 + 2ax + a^2)\cdot(x+a)\\ &= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3\\ &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3\end{aligned}$$

$$\boxed{(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3}$$

$$\boxed{(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}$$

Catrinomio Cubo Perfecto

División de polinomios

Recordamos la división con números

Dividendo — 13 |5 — Divisor
Resto — 3   2 — Cociente

Comprobamos que 13 = 5.2 + 3 o sea Dividendo = Divisor . Cociente + Resto

Para dividir dos polinomios, el grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual al grado el polinomio divisor, y éste debe ser distinto de cero.

Dividendo — P(x) |Q(x) — Divisor
Resto — R(x)   C(x) — Cociente

El resto es R(x) es de grado menor que Q(x)o bien es el polinomio nulo

Simbólicamente: P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)

División de un monomio por otro monomio

La división de un monomio por otro monimio da como resultado un monomio.
Ejemplo:

$$8x^7 : (-2x^5) = [8 : (-2)].[x^7 : x^5] = -4x^2$$

El monomio cociente es el resultado de haber dividido el coeficiente del dividendo por el coeficiente del divisor, y cuyo grado es la diferencia de los grados del divisor y dividendo.

División entre polinomios

Se recuerda que es necesario ordenar los polinomios según las potencias decrecientes de x, y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente nulo.

Ejemplo:
Sean los polinomios D(x) = $4x^3 + 9x^2 - 5$ Q(x) = $x^2 - 1$

$P(x) = 4x^3 + 9x^2 + \mathbf{0x} - 5$ $Q(x) = x^2 - 1$	Ordenamos ambos polinomios según las potencias decrecientes de la variable (es este caso x) y se completa el polinomio dividendo, escribiendo los términos que faltan poniendo como coeficiente al número 0.

$\begin{array}{l\|l} 4x^3+9x^2+0x-5 & x^2-1 \\ \hline & 4x \end{array}$	Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, hallando así el primer término del cociente.
$\begin{array}{l\|l} 4x^3+9x^2+0x-5 & x^2-1 \\ -4x^3 \quad\quad +4x & 4x \\ 0x^3+9x^2+4x-5 & \end{array}$	Se multiplica este término por el divisor y el producto así obtenido, cambiado de signo, se suma al dividendo. Resolvemos y obtenemos un nuevo divisor.
$\begin{array}{l\|l} 4x^3+9x^2+0x-5 & x^2-1 \\ -4x^3 \quad\quad +4x & 4x+9 \quad \text{(cociente)} \\ 0x^3+9x^2+4x-5 & \\ \quad -9x^2 \quad\quad +9 & \\ \quad 0x^2+4x+4 \quad \text{(resto)} & \end{array}$	Se reiteran el 2º) y el 3º) paso tantas veces como sea necesario hasta que el dividendo sea de grado menor que el divisor, o igual a 0.
$4x^3+9x^2-5 = (x^2-1) \cdot (4x+9) + (4x+4)$	Se comprueba

Es importante tener en cuenta que:

- La división P(x) : Q(x) puede efectuarse siempre que el grado[P(x)] ≥ grado[Q(x)].
- Que P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)
- El grado del resto debe ser menor que el grado del divisor, o bien R(x) = 0 grado[R(x)] ≥ grado[Q(x)].
- grado[C(x)] = grado[P(x)] - grado[Q(x)].

Regla de Ruffini

Cuando el divisor es un polinomio de la forma x − a, donde a es un número real, la división puede realizarse de un modo más sencillo, empleando un algoritmo conocido como Regla de Ruffini.

Ejemplo:

Calcular P(x) : Q(x) donde $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 9$ y Q(x) = x + 2
Obsérvese que el polinomio divisor puede escribirse también como Q(x) = x − (-2) adoptando la forma x − a donde a = -2 .
Para realizar la división se emplea un cuadro.

En el primer renglón del cuadro se escriben los coeficientes del polinomio dividendo P(x), que debe estar ordenado y completo. $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 0x - 9$	$\begin{array}{r\|rrrr} & 3 & -2 & 0 & -9 \\ \hline & & & & \end{array}$
En la primera columna sólo se escribe el valor de a, que en este caso es -2	$\begin{array}{r\|rrrr} & 3 & -2 & 0 & -9 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$

Se coloca en el tercer renglón el primer coeficiente del dividendo y se lo multiplica por a, y se al resultado se lo coloca debajo del segundo coeficiente.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 3 & -2 & 0 & -9 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline x & 3 & & & \end{array}$

Se suma y se vuelve a multiplicar por a.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 3 & -2 & 0 & -9 \\ & + & & & \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -8 & & \end{array}$
Se repite el algoritmo con todos los coeficientes.	$\begin{array}{r\|rrrr} & 3 & -2 & 0 & -9 \\ & + & & & \\ -2 & & -6 & 16 & -32 \\ \hline & 3 & -8 & 16 & -41 \end{array}$ Resto Coeficientes de C(x)
El resto es -41. Los valores 3, -8 y 16 son los coeficientes de cociente $C(x) = 3x^2 - 8x + 16$, cuyo grado es una unidad menor que el polinomio dividendo. Según el algoritmo de la división, podemos escribir: P(x) = Q(x) . C(x) + R(x) $3x^3 - 2x^2 - 9 = (x + 2).(3x^2 - 8x + 16) + (-41)$	

4. TEOREMA DEL RESTO

Si se divide un polinomio P(x) por otro de la forma x - a, se verifica que:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

Si x = a resulta

$$\begin{aligned} P(a) &= (a - a) \cdot C(a) + R \\ &= 0 \cdot C(a) + R \\ &= R \end{aligned}$$

El resto R que resulta de dividir un polinomio P(x) por otro de la forma (x − a), es igual al valor numérico de P(x) en x = a, es decir P(a) = R

Ejemplo:

Para calcular el resto de la división entre $P(x) = 6x^3 - 17x^2 + 15x - 8$ y $Q(x) = x - 1$ basta con determinar el valor numérico de P(x) en x = 1.

$P(1) = 6.(1)^3 - 17.(1)^2 + 15.(1) - 8 = -4$

$P(1) = -4$

El resto es R = -4.

Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división entre dos polinomios P(x) y Q(x), ***el resto es nulo***, se dice que P(x) es divisible por Q(x), o que Q(x) divide a P(x), o que P(x) es múltiplo de Q(x).
En ese caso P(x) puede expresarse como:

P(x) = Q(x) . C(x) + 0
O sea P(x) = Q(x) . C(x)

PRÁCTICA Expresiones Algebraicas

1. Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

   1) $(a.b)^2 + (b.c)^3 - c^2 \qquad a=-5; \quad b=1; \quad c=3$

   2) $8xy^4 - 5x^2y^3 + x^3y^2 + x^4y + 1000 \qquad x=-2; \quad y=-3$

   3) $(x+y)^2 - (x-y)^2 + x^2 - y^2 + x.(x+y) - y.(x-y) \qquad x=0; \quad y=-1$

   4) $\dfrac{x+y}{x-y} - (x-1)(y+1) \qquad x=-\dfrac{2}{3}; \quad y=-\dfrac{1}{4}$

   5) $\dfrac{1}{4}a.b^{-1} - 2a^{-2}c - \dfrac{3}{2}a^{-1}b^{-1} - c^{-2} \qquad a=-2; \quad b=-4; \quad c=2$

2. Hallar el valor numérico de los siguientes polinomios:

   1) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - 6x + \dfrac{1}{2} \qquad x=2$

   2) $Q(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x + \dfrac{5}{6} \qquad x=-3$

   3) $R(x) = \dfrac{2x-5}{4x^2+1} \qquad x=\dfrac{3}{2}$

3. Determinar el polinomio resultante de las siguientes operaciones, Cuando corresponda emplear la Regla de Ruffini.

   1) $(5x^3 + 7x - 8) + (-2x^3 - x^2 + 8)$

   2) $(-9x^3 + 3x^2 - 6x) + (7x^2 - 2x - 18)$

   3) $\left(\dfrac{3}{4}y^3 + \dfrac{1}{8}y - \dfrac{1}{24}\right) - \left(\dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{16}y + 1\right)$

4) $\left(\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{4}n+\frac{1}{5}n^2\right)+\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{9}{4}n-\frac{2}{5}n^3\right)-\left(\frac{7}{2}n+\frac{15}{4}n^3-\frac{12}{15}n^4\right)$

5) $(2x^2+4x+16).(3x-4)$

6) $(3y^5-9y+15).(2y^2+3)$

7) $(x+1).(x-2).(x^2-5)$

8) $\left(a^4+\frac{1}{2}a^3+2\right).\left(a^3-\frac{1}{2}\right)$

9) $(5a+4)^2$

10) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{5}\right)^2$

11) $(0{,}3\,y+0{,}8\,y^3)^2$

12) $(3c^2+2c)^3$

13) $\left(\frac{1}{2}x-3x^4\right)^3$

14) $(12x^3+8x^2+x+4):(4x)$

15) $(x^3+9x^2-5):(x^2-1)$

16) $(x^4-2x^3+x^2-1):(x^2-x-1)$

17) $(y^3-11y^2+6):(y^2-3)$

18) $\left(-3x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1\right):(x+3)$

19) $(2x^4+17x^3-68x-36):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

20) $(-7x^3+6x^2+50):(x-7)$

4. Determinar si los siguientes polinomios son divisibles y, en caso afirmativo, expresarlos como producto:
   1) $(x^3-x^2-8x+12):(x-2)$
   2) $(3x^4+2x^2-1):(x+1)$

5. Plantear y resolver :
   a. Hallar el valor de k tal que (x^3-kx^2+7k) dividido por (x + 2) tenga resto = 0.
   b. Cuando $(x^2+3x+2k)$ se divide por (x + 2), el resto es 7. Calcular el valor de k
   c. Calcular el valor de “m” del polinomio P(x)= x^4-7x^3-mx+2 para que al dividirlo entre (x+2) tenga de resto −40.
   d. Encontrar el valor de k para que (x + 2)sea un factor de (x^3-kx^2+7k)
   e. Encontrar el valor de k para que (x − 1) sea un factor de (x^3-3x^2+kx-1)
   f. Sea P(x) = $(2x^3-ax^2-bx+3)$ un polinomio que cuando lo divido por (x − 1) el resto es 2, y es divisible por (x + 1). Calcular a y b, completando con estos resultados el polinomio.
6. Tenemos que construir un tanque de forma cilíndrica, cuya altura sea tres veces el radio, y queremos saber:
   1) La expresión polinómica que nos permita calcular el volumen en función del radio (V(r)).
   2) Cuánto debe valer el radio para que el volumen V(r) sea de 1600 litros, expresando el resultado en cm y redondeando a centésimos.
   3) La expresión polinómica de V(r) si se aumenta el radio del tanque en dos metros.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

5. CONCEPTO DE RAÍZ DE UN POLINOMIO

Un valor de x es raíz de P(x) ,si el polinomio se anula para ese valor.
X = a es raíz de P(x) si y sólo si P(a) = 0 .
Ejemplo:
X = 3 es raíz $P(x)=x^3-3x^2+x-3$ de porque
$P(3)=3^3-3\cdot 3^2+3-3=0$

6. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Del mismo modo en que se descompone un número entero en producto de sus factores primos, se puede descomponer un polinomio compuesto en producto de polinomios primos.
Un polinomio P(x) de grado no nulo, es primo o irreducible cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor que P(x).
Todo polinomio de grado uno es primo o irreducible.
Cuando un polinomio no es primo, es compuesto.

Factorizar un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios primos o irreducibles.

Polinomio $S(x)=-3x^2+12x+15$ desarrollado:
Polinomio $S(x)=-3\cdot(x-5)\cdot(x+1)$ factorizado:

1.2 Factor común

Cuando en un polinomio P(x) , la variable x figura en todos los términos, se la extrae como factor común elevada al menor exponente. También se extrae como factor común el número que aparezca como factor en todos los términos. Luego, se divide cada término del polinomio por el factor común.

Ejemplo:
Dado P(x) = $4x^2+20x^3-8x^4$
Si descomponemos cada termino obtenemos:
$= 4x^2+4.5.x.x^2-4.2.x^2.x^2$
x^2 aparece en todos los términos al igual que 4,por lo que nuestro factor común es $4x^2$.
Entonces
$4x^2+20x^3-8x^4 = 4x^2.(1+5x-2x^2)$
Para comprobar que el producto que obtuvimos es correcto aplicamos la propiedad distributiva.

1.3 Factor común por grupos

Se aplica las veces necesarias el caso anterior.

$8a^3 + 10a + 4a^2 + 5 =$ $\rightarrow$ se agrupan los términos en forma conveniente.

$= \left(8a^3 + 4a^2\right) + \left(10a + 5\right) =$ $\rightarrow$ Se aplica factor común a los paréntesis.

$= 4a^2(2a+1) + 5(2a+1) = \rightarrow$ En ambos términos el factor común es $(2a+1)$

$= (2a+1).(4a^2+5)$ $\rightarrow$ El polinomio resuelto factoreado.

1.4 Diferencia de cuadrados.

Se recuerda que una diferencia de cuadrados puede expresarse como producto del siguiente modo:

$$x^2 - a^2 = (x+a)\cdot(x-a)$$

Ejemplo:

- $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)\cdot(x-5)$
- $x^4 - 36 = \left(x^2\right)^2 - 6^2 = \left(x^2+6\right)\cdot\left(x^2-6\right)$
- $x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(x+\sqrt{6}\right)\cdot\left(x-\sqrt{6}\right)$

1.5 Trinomio cuadrado perfecto

Recordemos que la expresión factorizada de un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

Un trinomio cuadrado perfecto consta de tres términos que cumplen las siguientes condiciones:

- Dos de los términos son cuadrados perfectos.
- El término restante es el duplo del producto de las bases de los cuadrados perfectos.

Si este término es negativo, entonces es negativo uno de los términos del binomio.

Ejemplo:
P(x) = $x^2 - 10x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:

- ✓ El primer término es el cuadrado de x.
- ✓ El tercer término es el cuadrado de 5.
- ✓ El segundo término es 2.5.x .

El trinomio cuadrado perfecto queda factorizado como:
$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

Otro ejemplo:
$9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2$

1.6 Suma y Resta de potencias de igual exponente.

Para un polinomio de la forma P(x) = $x^n \pm a^n$ existen cuatro posibilidades:
P(x) = $x^n \pm a^n$ donde n es par
P(x) = $x^n \pm a^n$ donde n es impar.
Ejemplo:
a) P(x) = $x^4 - 16 = x^4 - 2^4$
Si se buscan las raíces de P(x) = $x^4 - 16 = 0$ entonces $|x| = 2$ entonces $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$
Por el teorema del resto: P(2) = 0 entonces (x - 2) es divisor de P(x)
P(-2) = 0 entonces (x + 2) es divisor de P(x)

Se aplica la Regla de Ruffini
$(x^4 - 16)$: (x – 2)

	1	0	0	0	-16
2		2	4	8	16
	1	2	4	8	0

$x^4 - 16$ = (x – 2). (x^3 +2x^2 + 4x + 8)
Volvemos a aplicar la Regla de Ruffini con el segundo factor, (x^3 +2x^2 + 4x + 8):(x+2)

	1	2	4	8
-2		-2	0	-8
	1	0	4	0

$x^4 - 16$ = (x – 2). (x^3 +2x^2 + 4x + 8) = (x – 2).(x + 2).(x^2 + 4)
Estos tres últimos factores son polinomios primos irreducibles, por lo tanto

$x^4 - 16$ = (x – 2).(x + 2).(x^2 + 4)

b) P(x) = $x^4 + 81$ no tiene raíces reales, por lo tanto no podemos factorear con este método.

Cuando tenemos n impar procedemos de la misma manera.

PRÁCTICA: Factorización de Polinomios.

1) Factorizar los siguientes polinomios según el caso indicado

1. Factor común
   a. $7x^5 + 5x^4 + x^3$
   b. $2x^4 - 6x^3 + 4x^2$
   c. $-4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x$
   d. $2x^4 - x^3 - 6x^2$
   e. $-x^3 + 2x^2$

2. Diferencia de cuadrados
   a. $x^2 - 25$
   b. $x^4 - 36$
   c. $x^4 - 9x^2$
   d. $x^6 - 16x^2$

3. Factor común por grupos
   a. $7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$
   b. $3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + \mathrm{x}^2 - 2$
   c. $2x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$
   d. $2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

4. Trinomio cuadrado perfecto
   a. $x^2 - 8x + 16$
   b. $16x^2 - 128x + 256$
   c. $9x^2 + 36x^2 + 36$
   d. $x^6 + x^4 + 0{,}25$

5. Cuatrinomio cubo perfecto
   a. $x^3 + 13x^2 + 75x + 125$
   b. $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$
   c. $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
   d. $2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

6. Suma y resta de potencias de igual exponente
   a. $x^3 - 27$
   b. $x^7 + 1$
   c. $x^5 - \frac{1}{32}$
   d. $\mathrm{x}^4 - \frac{1}{81}$

7. Casos Combinados
   a. $x^4 - 2x^3 + x^2$
   b. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
   c. $x^3 - 3x^2 - x + 3$
   d. $x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x$

2) Factorear los siguientes polinomios e indicar el caso de factoreo.

1) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 =$

2) $-x^3 + 12x^2 - 48x + 64 =$

3) $9a^3 - 12a^2 - 9a + 12 =$

4) $10x^5 + 5x^3 - 20x^2 =$

5) $3x^3 + 4x^2 - 6x^6 - x^4 =$

6) $3p^4 - 9p^2 + 12p^3 + 30p^5 - 6p^8 =$

7) $144a^2 - 48a.b + 4b^2 =$

8) $9a^2m^2 + 12am^2 + 4m^2 =$

9) $\frac{1}{25} + \frac{2}{5}a + a^2 =$

10) $\frac{1}{9}a^6 - \frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{81} =$

11) $144m^6 - 121x^8 =$

12) $9z^4 - 16 =$

13) $\frac{1}{4} - y^2 =$

14) $\frac{1}{9}a^6 - \frac{25}{81} =$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Reciben el nombre de expresiones algebraicas fraccionarias o simplemente fracciones Algebraicas las expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P(x) y Q(x) son polinomios de una solo indeterminada x, y Q(x) no nulo.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-36}{3x^2-18x} \quad \text{con } x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 6$$

7. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Simplificación

Es posible simplificarlas cuando existen factores comunes en el numerador y en el denominador, de lo contrario la expresión es irreducible.

Ejemplo: Dada la expresión $\frac{x^2-9}{x^3+x^2-9x-9}$ se factoriza numerador y denominador, simplificando los factores comunes:

$$\frac{x^2-9}{x^3+x^2-9x-9} = \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{1}{x+1} \quad \text{si} \quad x \neq 3 \quad \text{y} \quad x \neq -3$$

La primera y la última expresión son equivalentes.
La simplificación será válida siempre que x≠ 3 y x≠ -3.

Mínimo común múltiplo de polinomios

Sean dos o más polinomios cada uno de ellos expresado como producto de factores primos o irreducibles, el MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO entre ellos es el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo:
Encontrar el m.c.m. de los siguientes polinomios:
$P(x) = x^2 - 4$; $Q(x) = x^2 + 2x$; $S(x) = x^2 - 4x + 4$
Primero factoreamos:
$P(x) = x^2 - 4 = (x-2).(x+2)$
$Q(x) = x^2 + 2x = x.(x+2)$
$S(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
Luego el m.c.m. es
$x.(x-2)^2(x+2)$

Suma y resta

Con igual denominador

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{S(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)+S(x)}{Q(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{S(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)-S(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2+2x+1}{x-2}+\frac{-3x}{x-2}-\frac{3x-3}{x-2}=\frac{\left(x^2+2x+1\right)+(-3x)-(3x-3)}{x-2}$$

$$=\frac{x^2+2x+1-3x-3x+3}{x-2}=\frac{x^2-4x+4}{x-2}$$

Podemos reducir este resultado factorizando y simplificando luego:

$\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$ con $x\neq 2$.

De distinto denominador

En este caso debemos hallar el denominador común, que será el m.c. m. de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{x-2}{x^2-5x+4}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

para determinar el m.c.m. de los denominadores, debemos factorizarlos:

$$\frac{x-2}{(x-4).(x-1)}+\frac{x+1}{(x-2).(x-1)}$$

el denominador común será:

$$(x-4).(x-2).(x-1)$$

luego se utiliza el mismo procedimiento que para la suma y resta de fracciones, quedando:

$$\frac{x-2}{(x-4).(x-1)}+\frac{x+1}{(x-2).(x-1)}=\frac{(x-2).(x-2)+(x+1).(x-4)}{(x-4).(x-2).(x-1)}=\frac{x^2-4x+4+x^2-3x-4}{(x-4).(x-2).(x-1)}=$$

$=\frac{2x^2-7x}{(x-4).(x-2).(x-1)}$ con $x\neq 4;\ x\neq 2;\ x\neq 1$

Multiplicación

El producto de dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{S(x)}{T(x)}$ se realiza del siguiente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{S(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$$

La operación es análoga a la multiplicación de fracciones, pero es conveniente factorizar cada componente para simplificar las expresiones:

Ejemplo:

$$\frac{x^2+2x+1}{x-1}\cdot\frac{x^3-1}{2x+2}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)}\cdot\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2.(x+1)}=\frac{(x+1).(x^2+x+1)}{2}$$

$$=\frac{x^3+2x^2+2x+1}{2}$$

División

Se llama inversa de una expresión algebraica fraccionaria $\frac{S(x)}{T(x)}$ ala expresión $\frac{T(x)}{S(x)}$ si S(x) e no nulo.

Para realizar la división $\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{S(x)}{T(x)}$ se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{S(x)}{T(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{T(x)}{S(x)}$$

Ejemplo:

a) $$\frac{x-1}{x^2-1}:(x+1)=\frac{x-1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)}{(x+1).(x-1)}\cdot\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

b) $$\frac{x^3+2x}{4x^2-9}:\frac{x^3+4x^2+3x}{2x^2-x-3}=\frac{x.(x^2+2)}{(2x+3).(2x-3)}:\frac{x.(x+3).(x+1)}{(2x-3).(x+1)}$$

$$=\frac{x.(x^2+2)}{(2x+3).(2x-3)}\cdot\frac{(2x-3).(x+1)}{x.(x+3).(x+1)}=\frac{(x^2+2)}{(2x+3)}\cdot\frac{1}{(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+2}{2x^2+9x+9}$$

PRÁCTICA: Expresiones Algebraicas Fraccionarias

1. Hallar el mínimo común múltiplo de las siguientes expresiones:

1) $2x+10 \quad ; \quad x^2+10x+25 \quad ; \quad x^3+125$

2) $x^3-3x^2+3x-1 \quad ; \quad x^2-2x+1 \quad ; \quad x^3-x^2$

3) $x^3+27 \quad ; \quad x^6-3x^5+9x^4 \quad ; \quad x^2-9$

4) $ax+bx \quad ; \quad ax^2-bx^2 \quad ; \quad a^2-b^2$

2. Realizar las siguientes operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias:

1) $\dfrac{5+y}{y+3}+\dfrac{4-y^2}{y+3}+\dfrac{2y+7y^2}{y+3}$

2) $\dfrac{2x^2+5x-9}{x-5}+\dfrac{4-x^2-19x}{x-5}$

3) $\dfrac{4y+7}{x^2+y^2}-\dfrac{3y-5}{x^2+y^2}$

4) $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{5}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}$

5) $\dfrac{2x-10}{x^2-25}-\dfrac{5-x}{25-x^2}$

6) $\dfrac{3x-1}{x^2+2x-3}-\dfrac{x+4}{x^2-9}$

7) $\dfrac{11xy-4}{x^2y^2}-\dfrac{5y^2+7}{xy^3}+\dfrac{6x^2-11}{x^3y}$

8) $\dfrac{2}{y+3}-\dfrac{y}{y-1}+\dfrac{y^2+2}{y^2+2y-3}$

9) $7y-\dfrac{5y}{1-2y}+\dfrac{2y}{2y+1}-\dfrac{3}{4y^2-1}$

10) $\dfrac{x^2-16}{x^2}\cdot\dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$

11) $\dfrac{y^2+10y+25}{y^2-9}\cdot\dfrac{y+3}{y+5}$

12) $\dfrac{x^2}{a}\cdot\dfrac{b(x-1)}{3a}\cdot\dfrac{6a^3}{x^2-1}\cdot\dfrac{1}{2abx^2}$

13) $\dfrac{2mn^2}{m-1}\cdot\dfrac{-mn}{m-2}\cdot\dfrac{m^2-3m+2}{m^4n^4}$

14) $\dfrac{x^2-4}{x}:\dfrac{x-2}{x+4}$

15) $\dfrac{25x^2-4}{x^2-9}:\dfrac{5x-2}{x+3}$

16) $\dfrac{y^2+7y+10}{2y-4}:\dfrac{y^2-3y-10}{y-2}$

17) $\dfrac{(x+y)^2}{x-y}:\dfrac{x+y}{(x-y)^2}$

18) $\dfrac{8y^3+27}{64y^3-1}:\dfrac{4y^2-9}{16y^2+4y+1}$

19) $\dfrac{9m^6-6m^3+1}{9x^2+6x+1}:\dfrac{(3m^3-1)^3}{(3x+1)^3}$

3. Resolver las operaciones combinadas y especificar en cada ejercicio cuáles son los valores que no puede tomar la variable:

1) $\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

2) $\left(\dfrac{1}{y}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{2y}{1-y^2}\right)$

3) $\left(\dfrac{a(a+1)+a(a-1)-a^2+1}{a^2-1}\right)\cdot(a^2-1)$

4) $\left(1+\dfrac{8}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

5) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$

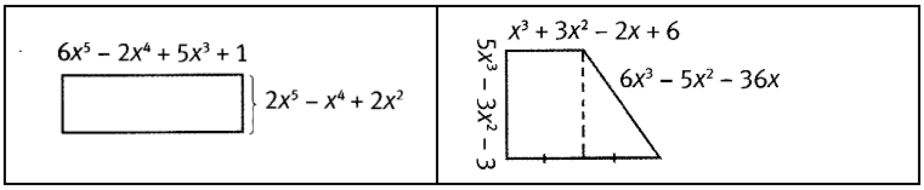
6) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}\cdot\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}:\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}$

7) $\dfrac{\dfrac{b^2-81}{a^4-100}}{\dfrac{b+9}{a^2-10}}$

8) $\dfrac{\dfrac{4}{x-5}+\dfrac{2}{x+2}}{\dfrac{2x}{x^2-3x-10}+\dfrac{3}{x-5}}$

PRÁCTICA Para Profundizar

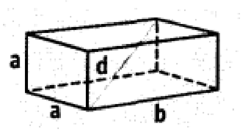
1. Escribir el polinomio reducido de la expresión del perímetro de las siguientes figuras.



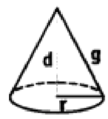
2. La expresión de la superficie de un rectángulo es: $6x^3+x^2-1$ y la de su base: $3x^2+2x+1$. ¿Cuál es la expresión de su altura?

3. Para cada una de las siguientes figuras, escribir una fórmula que permita hallar la medida de d conociendo las demás medidas señaladas.

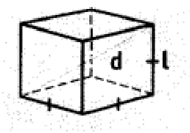
a)



b)

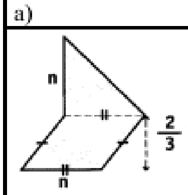


c)

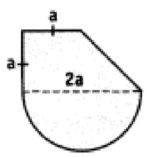


4. Utilicen lenguaje algebraico para expresar el área de las siguientes figuras.

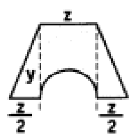
a)



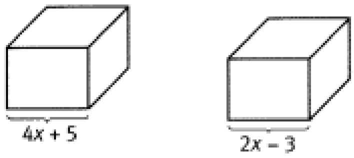
b)



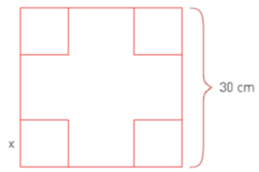
c)



5. Calcular la expresión del volumen de los siguientes cuerpos.



6. Con un cuadrado de cartón cuyos lados miden 30 cm. queremos construir una caja abierta recortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados restantes. Si x es el lado del cuadrado que hay que recortar:



   a. Encontrar una expresión que permita calcular el volumen de la caja, dependiendo de la longitud x del cuadrado que se recorta en cada esquina.
   b. ¿Qué volumen tendrá la caja si se recortan cuadrados de 4 cm. de lado?
   c. ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado a recortar para que el volumen de la caja sea exactamente de 1.944 cm^3 ?

7. Factorizar y simplificar las siguientes expresiones:

   a. $$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)^2}{3x^2 + 3x}$$

   b. $$\frac{3x^3 + 12x^2 + 3x - 18}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{5x^2 - 10x}{x^2 - 4}$$

   c. $$\frac{2x^3 + 2x^2 - 12x}{4x^3 - 8x^2} \cdot \frac{2x - 6}{x^2 - 9}$$

   d. $$\frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 9} \cdot \frac{2x^3 - 4x^2 - 22x + 24}{x^2 - 4x}$$

   e. $$\frac{3x + 6}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 5x - 6}{5x - 30}$$

8. BIBLIOGRAFÍA

- Pablo J.Kaczor, Ruth A. Schaposchnik, Eleonora Franco, Rosa A. Cicala, Bibiana H. Diaz, (2000). “Matemática I”. Editorial Santillana.
- Susana N. Etchegoyen, Enrique D Fagale, Silvia A. Rodriguez, Marta Avila de Kalan, Maria Rosario Alonso, (2000). “MATEMATICA 1”. Editorial Kapelusz.
- Dure Diana Analía, Capítulo II: Expresiones Algebraicas. Seminario Universitario 2011. UTN-FRRE.

Sitios Web recomendados:
https://es.khanacademy.org/
http://www.math2me.com/
http://webdelmaestrocmf.com/portal/