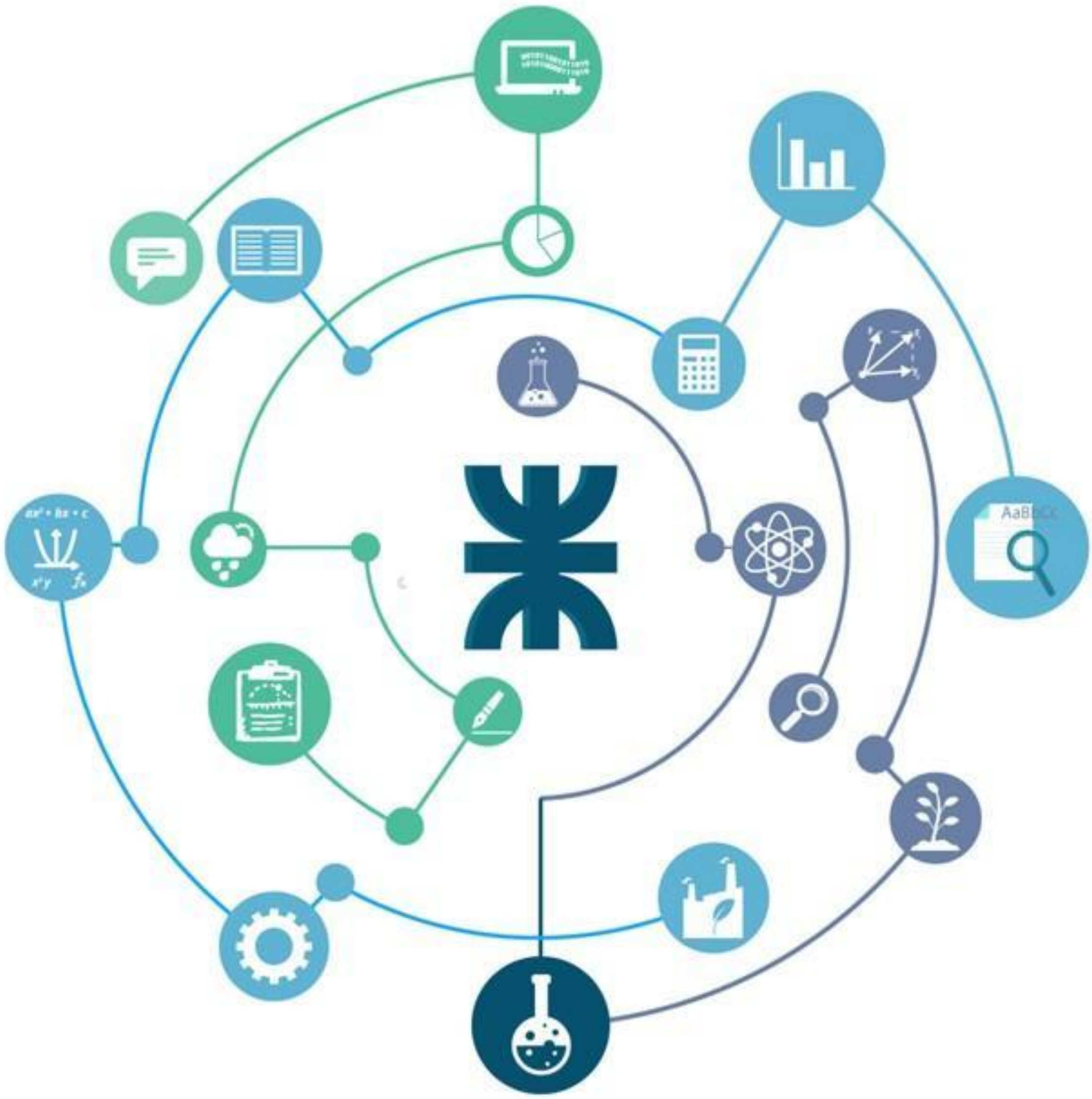


Matemática
Funciones

PROYECTO DE MEJORA DE FORMACIÓN EN
CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

DIRECCIÓN DE PLANEAMIENTO ACADÉMICO
SEMINARIO UNIVERSITARIO

UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

Decana
Mg. Ing. Liliana R. Cuenca Pletsch

Vicedecano
Ing. Gustavo Alberto Bernaola

Secretario Académico
Ing. Fernando H. Soria

Directora de Planeamiento Académico
Mg. María del Carmen Maurel

Coordinación Seminario Universitario
Ing. Claudia R. García

Equipo de Diseño y Producción de contenidos
Matemática: Ing. Claudia García
Física: Prof.ª Mariana Cancián
Química: Ing. Yanina Zuazquita

Resistencia, Octubre 2016.

1. CONTENIDO

I. CONTENIDOS

Funciones. Definición. Representación de funciones. Clasificación de Funciones.

II. DESTINATARIOS

Este material está destinado a estudiantes de 2°- 3° año de nivel secundario de todas las modalidades.

III. COMPETENCIAS

Caracterizar, reconocer e interpretar funciones como un medio para modelizar situaciones problemáticas propias de las matemáticas y de su aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Indicadores de logro:

- Relaciona las diferentes expresiones simbólicas con expresiones algebraicas que describen un problema
- Reconoce e interpreta las características de relaciones funcionales.
- Identifica e interpreta los principales elementos gráficos que representan a la funciones.

1. Introducción

Diseñamos este material didáctico para apoyar el proceso de aprendizaje de alumnos de nivel secundario, con el fin de afianzar saberes necesarios para el ingreso al nivel universitario y, en especial, a las carreras de ingeniería.

Desarrollamos los contenidos con el apoyo de videos y ejercicios de comprobación de lo aprendido. Además, los presentamos de manera tal que puedan ser utilizados tanto en formato impreso como en soporte digital.

En la vida diaria encontramos, frecuentemente, información representada por medio de tablas donde se ordenan datos que, a su vez, son representados por medio de gráficos.

Por ejemplo: cuadros estadísticos de las variaciones de temperatura en un año; la cantidad de lluvia caída en diferentes semestres; toneladas cosechadas de algodón por temporadas en los últimos 10 año, etc.

Muchos de estos datos nos muestran relaciones que son funciones. En algunos casos, además, es posible modelizarlos por medio de fórmulas matemáticas, lo cual permite estudiar su comportamiento en diferentes situaciones y predecir el comportamiento del modelo.

En este material estudiaremos la definición y las características de las relaciones llamadas **funciones**. Además, revisaremos cómo lograr modelizar e interpretar una situación diaria por medio de un modelo matemático.

2. Funciones

2.1 Definición de función

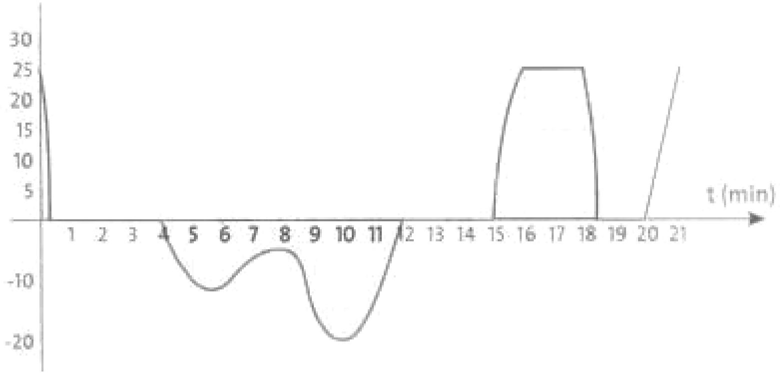
Problema 1

Gonzalo es guardavidas de una playa de Villa Gesell. Como ya se acerca el desafío "interbalneario", se entrena, con mayor intensidad, todas las mañanas muy temprano.

Con sus amigos, y en un bote, se alejan de la costa, para que Gonzalo pueda realizar su entrenamiento: resistencia bajo el agua, velocidad de nado en distintos estilos, etc.


ref="http://www.freepik.es/fotos-vectores-gratis/personas">Personas de vector diseñado por Freepik

A continuación, la representación gráfica te muestra la altura h (en centímetros sobre el nivel del mar) a la que se encuentra Gonzalo durante algunos minutos t de su entrenamiento.



A partir de la lectura interpretativa del gráfico, podríamos responder las siguientes preguntas:

- ¿Dónde se encontraba Gonzalo a los 3 minutos?
- ¿En qué minuto estaba 20 cm debajo del agua?

Problema 2

"http://www.freepik.es/fotos-vectores-gratis/icono">Icono de vector diseñado por Yurlick - Freepik.com

[1]

Las teclas de los teléfonos tienen letras y números asignados. Valiéndose de eso, muchas empresas que contratan el servicio de 0800 idean, con un objetivo comercial, números fáciles de memorizar para sus clientes. Así, por ejemplo, una escuela podría tener el 0800-372-8352, que se corresponde con el 0800-ESCUELA.

a) ¿Qué números habrá que marcar para comunicarse con el 0800-HELADOS?

b) ¿A qué palabra corresponderá el 0800-1843367?

En la representación gráfica del Problema 1 podemos ver la vinculación de dos **variables**: el tiempo durante el cual estuvo nadando Gonzalo y la altura sobre el nivel del mar en la que se encontraba en cada momento. A estas variables las denominamos **dependiente** (la altura) e **independiente** (el tiempo).

En el Problema 2, por su parte, los números están relacionados con las letras: la ubicación de estas depende de la ubicación de los números.

Esta dependencia o correspondencia describe una relación.

Una relación es una correspondencia que asocia elementos del **conjunto A**, llamado **conjunto de partida** de la relación, con elementos del **conjunto B**, llamado **conjunto de llegada.**

En símbolos matemáticos:

$$x\,R\,y \leftrightarrow x \in A, y \in B, \qquad x \text{ esta realacionado con } y \text{ según } R$$

En el primer problema podemos responder a las preguntas porque a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de variable dependiente. Por ejemplo, podemos responder que Gonzalo a los 3 minutos estaba nadando sobre el nivel del mar, que es la interpretación de la relación expresada por el par ordenado (3;0).

En cambio, en el segundo problema, cuando relacionamos un número con una letra de la misma tecla, puede haber varias posibilidades. Por ejemplo, a la tecla del número 5 le corresponden las letras J, K y L. Sumado a eso, a las teclas de los números 1 y 0 no se les asigna ninguna letra.

En lo que sigue nos centraremos en el análisis de aquellas relaciones donde se vinculan todos y cada uno de los valores de la variable independiente con un único valor de la variable dependiente.

A este tipo de relaciones las definiremos de la siguiente manera:

Una función de A en B es una relación que asocia a cada elemento x del conjunto A uno y sólo un elemento y del conjunto B, llamado su imagen.
En símbolos:

$$f : A \rightarrow B \;\; \textit{es función} \;\; \Leftrightarrow \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \exists!\, \mathrm{y} \in \mathrm{B} \,/\, \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$$

En este caso,

x → es una variable independiente,
y → es una variable dependiente.

Te recomendamos el siguiente video para profundizar el concepto de funciones:

[Concepto de función]

Para que una relación sea considerada **función** debe cumplir con dos condiciones:

2.1.1 Existencia

$$\forall\, x \in A\,, \exists\, y \;\in B /\, y = f(x)$$

La "existencia" significa que todas las "x" deben tener una imagen.

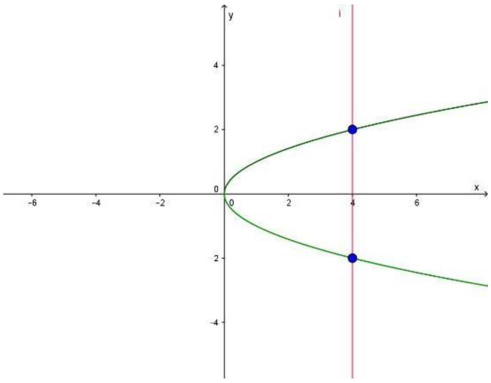
2.1.2 Unicidad

$$Si\ f(x) = y_1\ y\ \ f(x) = y_2 \rightarrow\ y_1\ = y_2$$

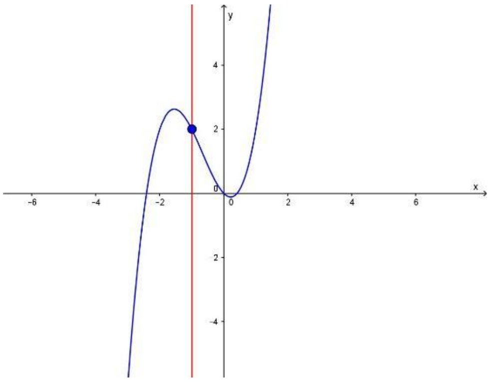
La "unicidad" significa que para todas las "x" hay una sola imagen.

Si la relación no cumple con alguna de estas dos condiciones, decimos que no es función.

Ejemplo:



No es función
Al mover una recta paralela al eje "**y**" (vertical) observamos que corta la curva en dos puntos. Luego, podemos decir que no cumple la condición de unicidad porque cuando x = 4 tiene dos imágenes.



Es función
Al mover una recta vertical paralela al eje "y", corta al gráfico en un solo punto, porque cumple la condición de unicidad. Y además, cada x tiene imagen, es decir, verifica la condición de existencia.

En los siguientes videos se explica cómo determinar cuándo una relación es función:

-[Revisar si un conjunto de puntos representa una función]

-[¿Una recta vertical representa una función?]

Comprobamos lo aprendido

1. ¿Cuáles de las siguientes tablas corresponden a funciones?

Tabla 1

Talle	2	4	6	8	10	12
Precio	9	9	10	10	11	11

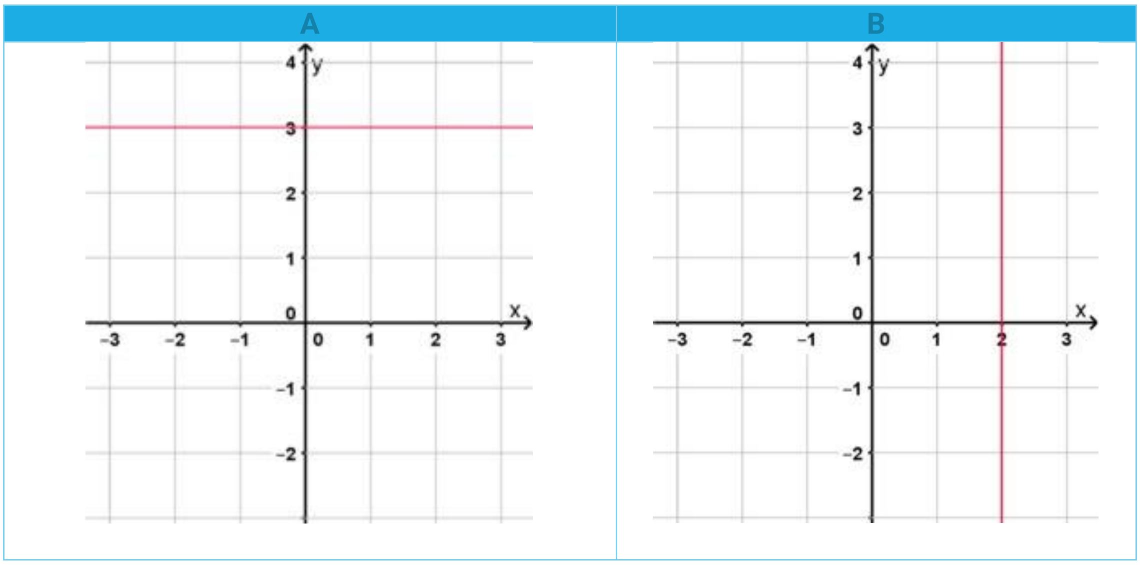
Tabla 2

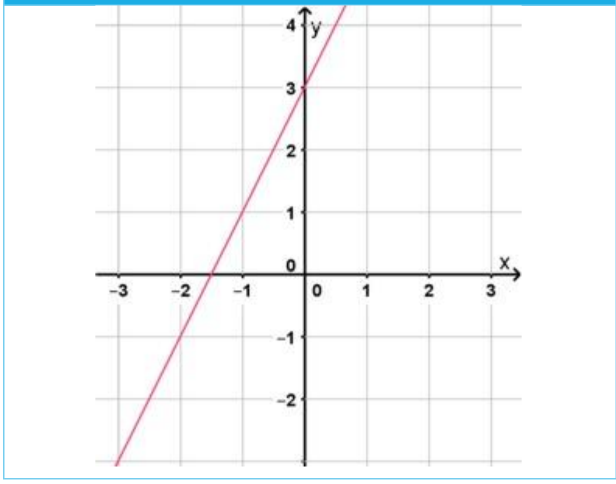
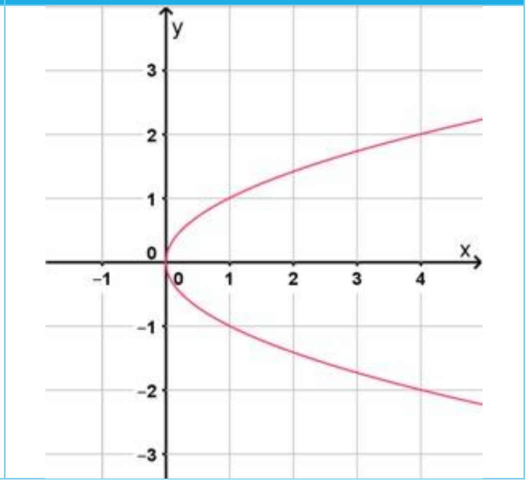
Contenido en gramos	100	200	400
Precio(s)	2,45	4,50	8

Tabla 3

X	5	10	15	15	20	25
Y	2	4	6	8	10	12

2. Determinar cuáles de las siguientes gráficas representan a funciones:



C	D
	

3. Representación de funciones

3.1 Lenguaje coloquial

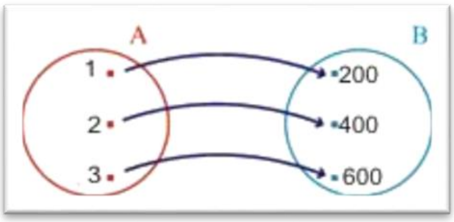
Las funciones pueden ser representadas por medio de un **lenguaje coloquial**, es decir, mediante una explicación con palabras informales y cotidianas. Esto es: mediante una descripción detallada del comportamiento de cierta variable a partir de la cual se pueden determinar otras variables.

Por ejemplo: la definición en palabras de una función y = f (x) es: "la función f determina el precio total de entradas, a un espectáculo, que debe pagar una familia dependiendo de su cantidad de integrantes y considerando que una entrada cuesta $ 200".

3.2 Diagrama Sagital

Se denomina **diagrama sagital** al que se construye para representar las funciones utilizando dos conjuntos (líneas curvas cerradas que contienen sus elementos y que se conocen con el nombre de *diagramas de Venn*) para indicar el conjunto dominio y el conjunto de llegada. Los elementos que se relacionan por la función se unen con una flecha.

En la figura observamos que el **conjunto A** representa al conjunto **dominio** y el **conjunto B** al conjunto **imagen** de la función.



En dicha figura podemos ver una posible representación de la función *f* planteada anteriormente. En el conjunto A representamos la cantidad de integrantes de la familia y en el conjunto B, el costo de las entradas.

3.3 TABLAS

Una función puede ser representada por una tabla donde la **primera columna** representa a los elementos del **dominio** y la **segunda columna** representa a los elementos del conjunto **imagen**. Cada fila representa la relación de correspondencia de un elemento del dominio con el de la imagen.

Este tipo de representación, al igual que el diagrama sagital, permite ver rápidamente las relaciones establecidas entre los elementos del dominio con su respectiva imagen, pero no son adecuados cuando estos conjuntos tienen infinitos elementos.

Costo de entradas a un espectáculo	
Cantidad de integrantes de la familia	Costo total ($200 valor de una entrada)
1	200
2	400
3	600
4	800

3.4 FÓRMULA ALGEBRAICA

Una función puede estar modelizada por medio de una fórmula. En nuestro ejemplo sería $\boldsymbol{f(x) = 200x}$

En este caso, el dominio está representado por todos los valores que puede tomar x para los cuales se puede calcular f(x), que se corresponde con la imagen.

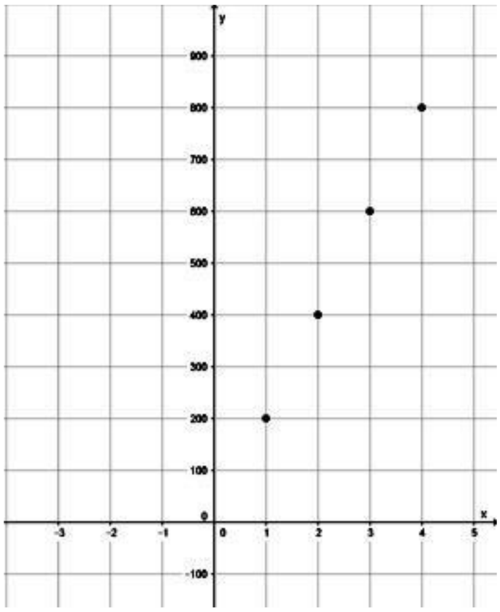
3.5 GRÁFICOS

Al representar una función por medio de un gráfico, utilizaremos el *sistema de coordenadas cartesianas*, donde al eje horizontal lo llamamos **eje de las abscisas** y representa a la **variable independiente**, y el eje vertical lo llamamos **eje de las ordenadas** y representa a la **variable dependiente**.

En este tipo de representación, el eje de las abscisas representa a los elementos del dominio y el eje de las ordenadas representa a las imágenes. Estas relaciones están representadas por un par ordenado (x, f(x)).

En el punto ***(x, y)***, que se marca en el plano para obtener el gráfico de una función, importa el orden; de allí el nombre de *par ordenado*. La primera coordenada ***x*** es el valor de la variable independiente y esta pertenece al dominio de la función. La segunda coordenada ***y*** verifica y= f (x) y es la respectiva imagen.

Siguiendo con nuestro ejemplo, en la gráfica que representaría a la función $f(x) = 200x$ solo representamos los pares ordenados, ya que el Dominio de la función solo puede tomar valores naturales, porque nos estamos refiriendo a número de personas.



Veamos un ejemplo:

Modelizar la función que asigne a cada número su doble.

Expresión algebraica: f(x) = 2x

Definición:

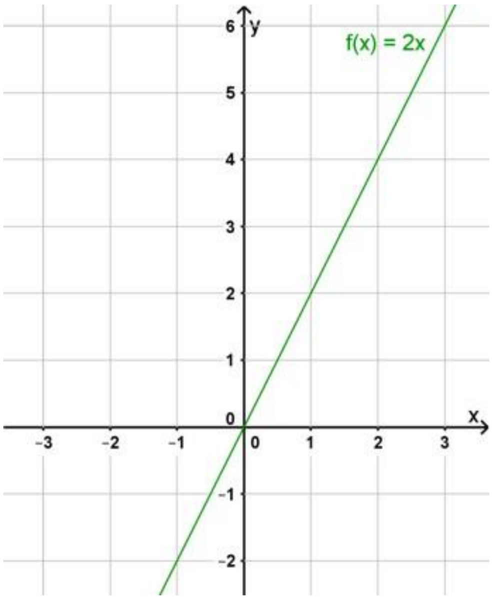
$$f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \ / \ f(x) = 2x$$

Tabla

En este caso solo representamos algunos de los valores ya que el dominio y la imagen son conjuntos infinitos.

X	-2	-1	0	1	2
F(x)	-4	-2	0	2	4

Gráfica



4. DOMINIO E IMAGEN

Se pueden definir, asociados a la relación, dos conjuntos: el dominio y su imagen, que serán subconjuntos del conjunto de partida y de llegada, respectivamente.

El **dominio** de una función es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con, al menos, un elemento del conjunto de llegada.
La **imagen (Rango)** de una función es el conjunto formado por los elementos del conjunto de llegada que están relacionados con algún elemento del dominio de la relación.

En símbolos matemáticos:

Dom f = $\{\boldsymbol{x \in A \ / \ existe \ \ y \in B \ con \ x \ R \ y}\}$
Img f = $\{\boldsymbol{y \in A/existe \ \ x \in A \ con \ x \ R \ y}\}$

En nuestro ejemplo del nadador, el conjunto dominio está determinado por el tiempo, por lo que comienza en el instante 0 y concluye a los 21 minutos, que es el tiempo en el cual Gonzalo concluye con la práctica. Esto lo podemos representar de la siguiente manera:

Dominio = $\{\boldsymbol{x \in \mathcal{R}/0 \leq x \leq 21}\}$

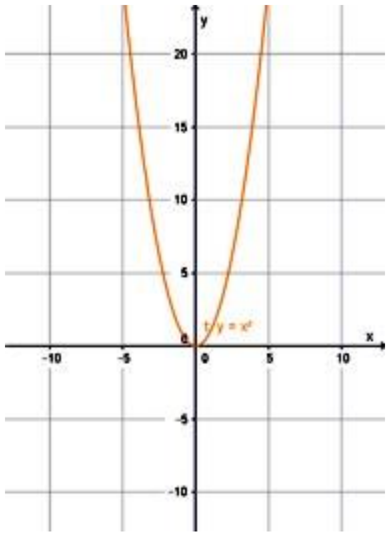
La imagen está compuesta por las alturas sobre el nivel del mar en la que se encuentra Gonzalo de acuerdo con el tiempo:

Imagen = $\{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}/25 \text{ cm} \leq \boldsymbol{x} \leq 20 \text{ cm} \}$

Si tenemos una función definida de la siguiente manera:

$$f : R \rightarrow R \,/\, y = x$$

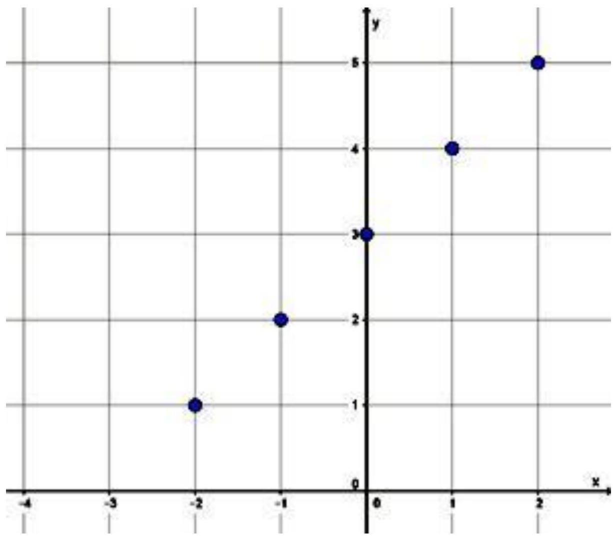
Estamos indicando que el conjunto dominio y el conjunto imagen es el conjunto de los números reales (*R*). La variable x podrá tomar cualquier valor real que se le asigne y por imagen producirá también un valor real. A esta función se la llama **Función identidad**.



Otro ejemplo: $t(x) = x^2$

Dominio = $x \in \mathcal{R}$ En este caso, la variable x puede tomar cualquier valor real ya que para cualquier valor real está definida la potencia.

Imagen = $\{y \in \mathcal{R}/ \, y \geq 0\}$ Esto se debe a que la potencia par de un número real siempre será otro número real positivo.
Su representación gráfica nos permite comprobar lo planteado.



En una función definida

$$m : Z \rightarrow Z^{+}/y = x + 3$$

Dominio = $\{ x \in Z/ \, x \geq -2\}$
Imagen = $\{ y \in Z/ \, y > 0$

En esta función se define específicamente que el conjunto imagen está compuesto sólo por los valores positivos, por lo cual el conjunto dominio no podrá tomar valores menores a -2, ya que, en ese caso, no cumpliría con la definición de la función.

En los siguientes videos se amplía el concepto de dominio e imagen o rango de una función y se analizan algunas funciones particulares:

[¿Qué es el dominio de una función?]

[¿Qué es el rango o imagen de una función?]

Cómo encontrar el dominio de una función.

Comprobamos lo aprendido

PROBLEMA 1

Para cada uno de los siguientes diagramas sagitales, marcar con V (Verdadero) o F (Falso) según cumplan o no con las condiciones para ser función:

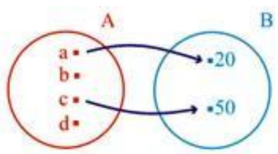
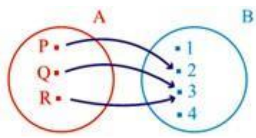
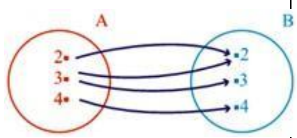
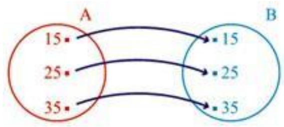
Diagrama Sagital		Condición	Diagrama Sagital		Condición
	V-F	Unicidad		V-F	Unicidad
	V-F	Existencia		V-F	Existencia
	V-F	Es Función		V-F	Es Función
	V-F	No es Función		V-F	No es Función

Diagrama Sagital		Condición	Diagrama Sagital		Condición
	V-F	Unicidad		V-F	Unicidad
	V-F	Existencia		V-F	Existencia
	V-F	Es Función		V-F	Es Función
	V-F	No es Función		V-F	No es Función

PROBLEMA 2

Un empleado de la empresa telefónica presentó a sus superiores el registro de las ganancias obtenidas durante una semana en el telecentro a su cargo y las representó con la siguiente tabla:

Día *t*	Ganancia
Lunes	$-20
Martes	$23
Miércoles	$32
Jueves	$45
Viernes	$80

A partir de los datos del empleado, definimos la función G (t) = ganancia obtenida por la empresa telefónica en el día *t* en el telecentro. Para esta función, **¿Cuál es la respuesta a las siguientes preguntas?:**

a. ¿Cuál es el dominio de G(t)? ¿Y el conjunto imagen?

b. ¿Cuál es la imagen de la variable t = miércoles?

c. ¿De quién es imagen el número 45?

d. ¿Qué significa que G (lunes) = - $20?

e. ¿En qué día de la semana la telefónica logra su mayor ganancia?

f. ¿La función G es creciente o decreciente? Justificá tu respuesta.

PROBLEMA 3

Modelizar, mediante un gráfico, la función que describa el precio *P* de un kilogramo de manzana en función del día *x* del año, a partir del siguiente informe brindado por la provincia de Río Negro:

Informe

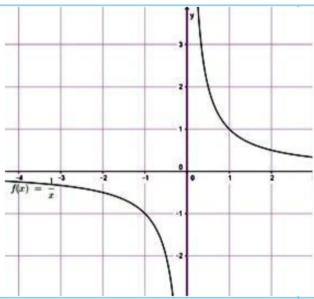
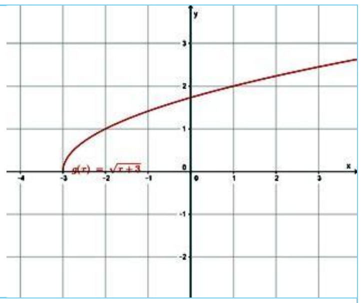
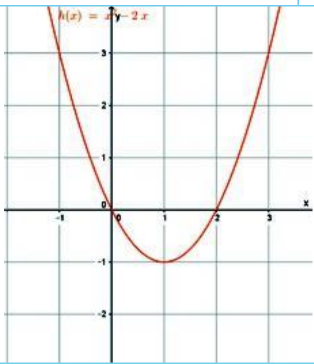
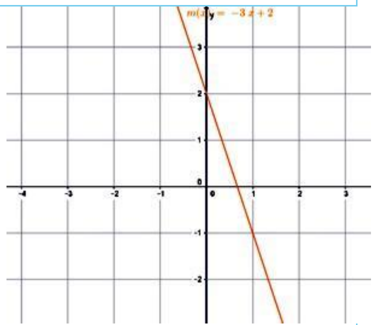
- ☑ En el primer mes del año el precio se mantuvo estable en $1,00 por kilogramo.
- ☑ En la última quincena del mes de febrero comenzó a bajar, hasta que el día 10 de abril alcanzó un precio de $0,50 por kg.
- ☑ El precio de $0,50 por kg se mantuvo constante hasta finalizar el mes de mayo.
- ☑ A partir de junio se registró un aumento sostenido en el precio, que permitió vender la manzana a $2,00 el kg el 15 de octubre.
- ☑ A finales de noviembre, el precio comenzó a decrecer nuevamente, llegando, a finales de diciembre, a un valor de $1,20 por kg.

PROBLEMA 4

El siguiente video te puede ayudar a resolver este ejercicio

[Dominio de una función]

Luego de mirar el video analizá las siguientes fórmulas con sus respectivas gráficas y determiná su dominio e imagen.
Empareja la gráfica con la formula y su dominio y completa los espacios vacios

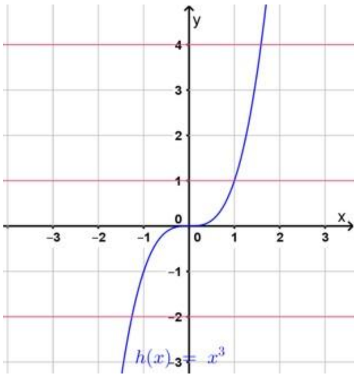
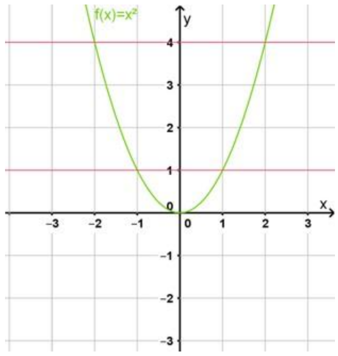
$f(x) = \frac{1}{x}$ 	$f(x) = \sqrt[2]{x+3}$ 
Dominio= Imagen =	Dominio= Imagen =
$f(x) = x^2 - 2x$ 	$f(x) = -3x + 2$ 
Dominio= Imagen =	Dominio= Imagen =

5. Clasificación de Funciones

5.1 FUNCIÓN INYECTIVA

Una función $f: A \to B$ **inyectiva** cuando a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas. En símbolos:

$$f: A \to B \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x_1, \forall x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$f: R \to R \,/\, y = x^3$	$f: R \to R \,/\, y = x^2$
	
La gráfica nos presenta una función **inyectiva**: a cada valor del dominio le corresponde un único valor del conjunto imagen.	La función graficada **no es inyectiva**, ya que a diferentes elementos del dominio le corresponden iguales imágenes. Si corremos una recta paralela al eje x, vemos que esta corta en dos puntos a la gráfica.

5.2 Función Sobreyectiva o Suryectiva

Una función $f: A \to B$ es **sobreyectiva** cuando el conjunto imagen es igual al rango. Esto significa que todo elemento del rango es imagen de, por lo menos, un elemento del dominio. En símbolos:

$$f : A \to B \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B . \exists x \in A \,/\, y = f(x)$$

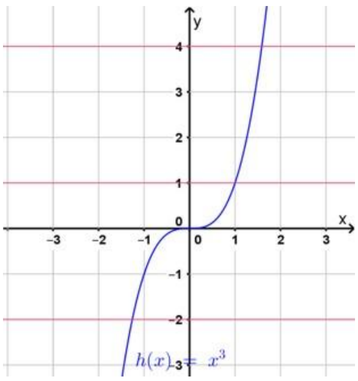
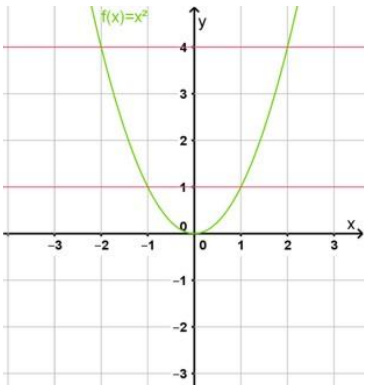
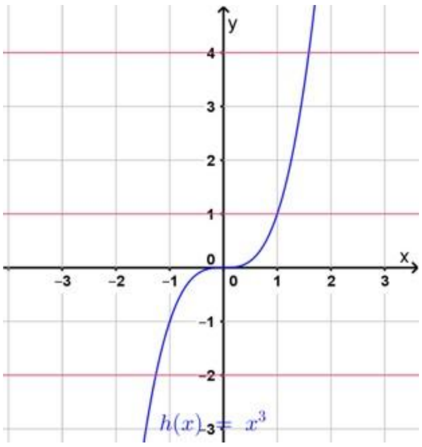
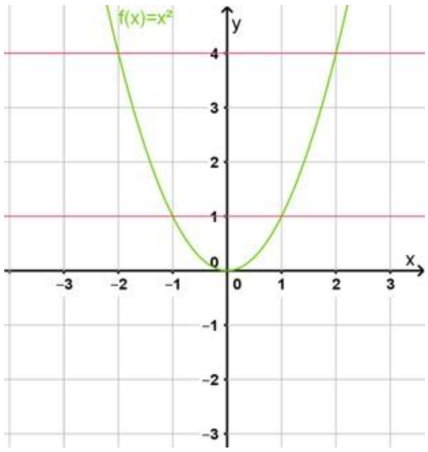
$f: R \to R \,/\, y = x^3$	$f: R \to R \,/\, y = x^2$
	
La gráfica nos presenta una función **sobreyectiva**: a cada valor del conjunto	La función graficada **no es sobreyectiva**, ya que los reales negativos del conjunto

imagen le corresponde un valor del conjunto dominio.	imagen no se corresponden con ningún valor del dominio.

5.3 Función Biyectiva

Una función $f\colon A \to B$ es **biyectiva** cuando es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente. En símbolos:

$$f : A \to B \text{ es biyectiva } \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva } \wedge f \text{ es sobreyectiva}$$

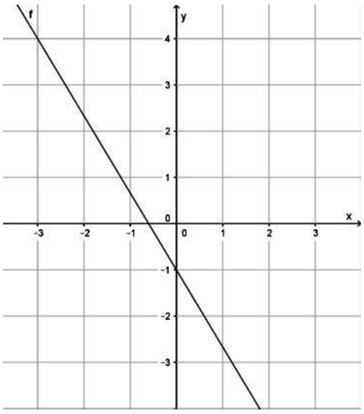
$f\colon R \to R \;/\; y = x^3$  La gráfica nos presenta una función **biyectiva**, por ser una función inyectiva y sobreyectiva a la vez.	$f\colon R \to R \;/\; y = x^2$  La función **no es biyectiva** porque no cumple con la condición de ser inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Comprobamos lo aprendido

Problema 4

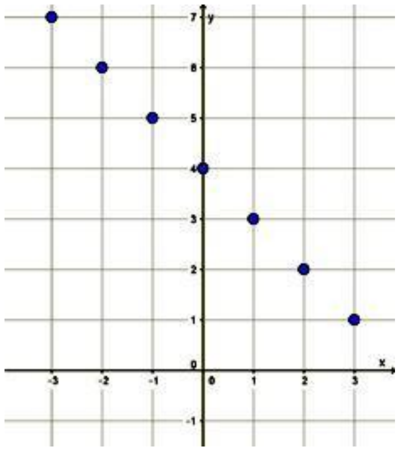
Analizá las siguientes funciones con sus dominios e imágenes y sus gráficas para determinar su clasificación (colocá un visto o *tick* junto a la categoría que corresponda):

$$f: R \rightarrow R \;/\; y = \frac{-5}{3}\,x - 1$$



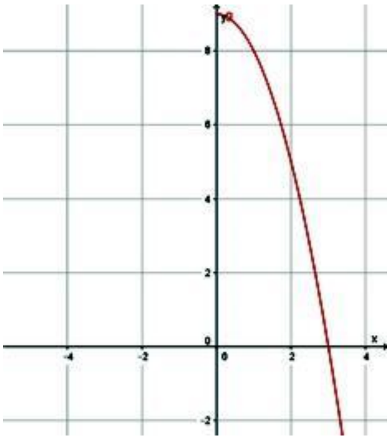
- Inyectiva
- Sobreyectiva
- Biyectiva

$$f: Z \rightarrow R / \; y = -\,x - 1$$



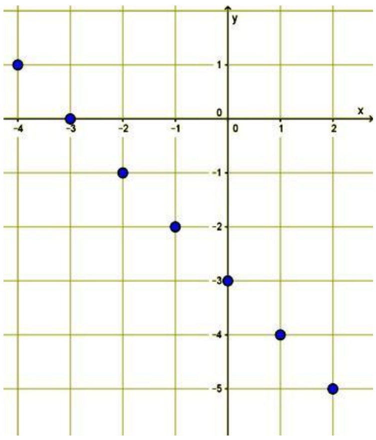
- Inyectiva
- Sobreyectiva
- Biyectiva

$$f: R_0^{+} \rightarrow R \;/\; y = -x^2 + 9$$



- Inyectiva
- Sobreyectiva
- Biyectiva

$$f: Z \rightarrow Z \;\;/\; y = -x - 3$$



- Inyectiva
- Sobreyectiva
- Biyectiva

ACTIVIDADES DE CIERRE

PROBLEMA 1

Considerar el siguiente texto, que es un fragmento del prospecto de un remedio antitérmico para niños:

Si la temperatura es menor a 38 grados (axilar), se recomienda tomar una dosis de 0,3 ml cada kg. de peso (equivalente a 6mg/kg de ibuprofeno), cada seis a ocho horas. Si la temperatura es igual o mayor a 38° (axilar), se recomienda una dosis de 0,5 ml cada kg de peso.

Fuente de la imagen: https://goo.gl/me1jBo

i. ¿Qué cantidad de remedio se le daría a un bebé que pesa 5 kg y tiene 37,7° de temperatura?
ii. ¿Cuánto pesa Nico si debe tomar 12 ml cada 6 horas y tiene 38,2° de temperatura?

PROBLEMA 2

La nafta que consume un auto varía con la cantidad de kilómetros que recorre. Si viaja en una ruta, sin detenerse y sin grandes cambios en la velocidad, el consumo es parejo. Completar la tabla que presentamos a continuación, suponiendo que un coche gasta 6 litros cada 100 km:

Distancia recorrida en KM	100	200	300	10	50	1000	45
Nafta consumida en litros							

1. ¿Por qué no marcamos números negativos en ninguno de los dos renglones de la tabla, ni en los ejes?
2. Si el auto tuviera que detenerse o disminuir mucho su velocidad en varias ocasiones, el consumo de nafta variaría. ¿Hasta qué número de kilómetros recorridos sería razonable extender nuestro estudio, considerando que un tanque promedio tiene 50 litros de capacidad?

3. ¿Cuánta nafta se consumió aproximadamente en 215 km de viaje? Si el tanque de nafta tiene una capacidad de 40 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer hasta que se acabe la nafta?

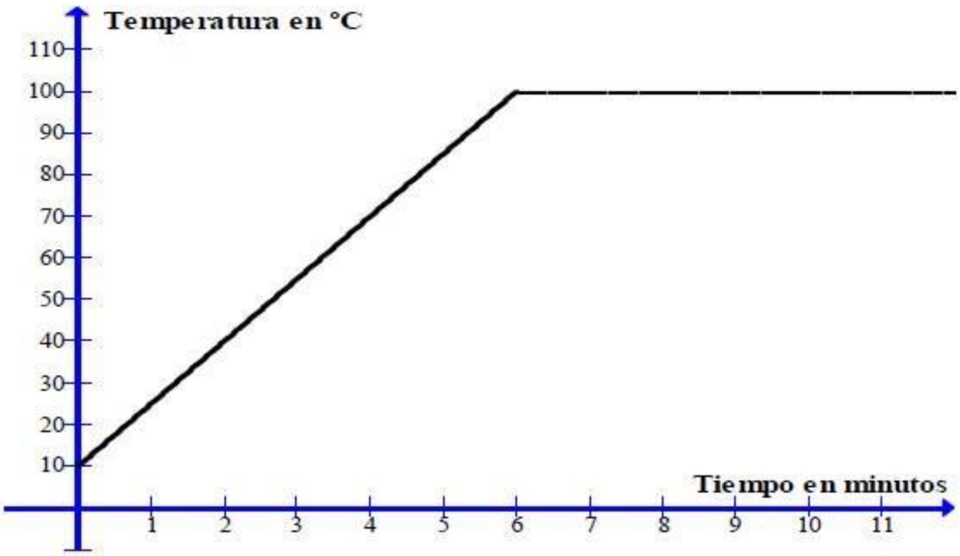
PROBLEMA 3

Una olla en el fuego

Se coloca en el fuego una olla con agua a 10 grados centígrados (10 ºC). La temperatura del agua va aumentando 15 ºC cada minuto hasta llegar a hervir (100 ºC) y se mantiene hirviendo hasta que la retiran del fuego, 11 minutos después de haberla colocado.

Analizar la gráfica y responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué temperatura tiene el agua 1 minuto después de estar en el fuego?
2. ¿Y a los 3 minutos?
3. ¿Cuántos minutos tarda en llegar a hervir?
4. ¿Durante cuánto tiempo sigue hirviendo?
5. ¿En qué momento alcanzó los 40 ºC?
6. ¿Llegó en algún momento a los 120 ºC?



2) Para cada una de las siguientes funciones, ¿cuál es su dominio de definición? Antes de resolver estos ejercicios, te recomendamos volver a mirar este video: Dominio de una función

a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$

b) $y = \dfrac{x-1}{5}$

c) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

d) $h(t) = \dfrac{4}{t}$

e) $y = \dfrac{1}{x-5}$

f) $C(x) = \dfrac{x-2}{x+4}$

g) $F(m) = \sqrt{m+10}$

h) $P(x) = 4 - \sqrt{x}$

6. BIBLIOGRAFÍA

Altman, S.; Comparatore, C.; Kurzrok, L. (2003), *Matemática: Funciones 1*, Buenos Aires, Longseller.
Bocco, M. (2010), *Funciones Elementales para construir modelos matemáticos*, Buenos Aires, INET, Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática”.
Duré, D. A. (2011), Capítulo III: “Funciones - Introducción”, Resistencia, Seminario Universitario, UTN-FRRE.
Kaczor, P. *et al.* (2000), *Matemática I*, Buenos Aires, Santillana.

Sitios web recomendados
https://es.khanacademy.org/
http://math2me.com/playlist/pre-calculo