P&L explained

JFBL

November 2025

Contents

1 P&L explained

P&L explain, P&L attribution or profit and loss explained

1.1 A quoi ça sert ?

Le P&L explained a pour objectif d'expliquer l'origine de la variation de la valeur d'un portefeuille entre deux dates. Il décompose le P&L observé en contributions provenant des facteurs de marché: spot, volatilité, taux, passage du temps, nouveaux trades et effets résiduels.

1.2 Idée générale

Le P&L explained repose sur une approximation linéaire du prix d'un portefeuille via ses sensibilités :

$$dP \approx \Delta\, dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2 + \text{Vega}\, d\sigma + \Theta\, dt + \text{Rho}\, dr$$

1.3 Développement de Taylor du prix

Pour une fonction de prix $P(S, \sigma, r, t)$, le développement de Taylor donne :

$$dP \approx \frac{\partial P}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial P}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

Les dérivées partielles correspondent directement aux sensibilités (grecs) du portefeuille :

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}, \quad \text{Vega} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}, \quad \Theta = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \text{Rho} = \frac{\partial P}{\partial r}.$$

En remplaçant les dérivées par les grecs, on obtient la formule:

$$\text{Explained P\&L} = \Delta \times \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2 + \text{Vega} \times \Delta\sigma + \Theta \times \Delta t + \text{Rho} \times \Delta r + \text{New Trades} + \text{Other Effects}.$$

- **Delta P&L :** $\Delta \times \Delta S \Rightarrow$ Contribution linéaire liée à la variation du sous-jacent.
- **Gamma P&L :** $\frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2 \Rightarrow$ Contribution non-linéaire liée à la convexité.
- **Vega P&L :** Vega $\times\, \Delta\sigma \Rightarrow$ Impact de la variation de la volatilité implicite.
- **Theta P&L :** $\Theta \times \Delta t \Rightarrow$ Effet du passage du temps.
- **Rho / DV01 P&L :** Rho $\times\, \Delta r \Rightarrow$ Sensibilité du portefeuille aux taux ou aux courbes.
- **New Trades :** Impact direct des transactions ajoutées aujourd'hui.
- **Other Effects :** Roll-down, carry, corrections de données, paramètres de modèle, mappings produits.

1.4 Residual P&L

$$\text{Residual P\&L} = \text{P\&L Actual} - \text{P\&L Explained}$$

Une valeur significative indique une potentielle anomalie:

- mauvaise donnée de marché,
- grec incohérent,
- mapping incorrect,
- bug de modèle.

2 Le développement de Taylor

Idée

Le développement de Taylor permet d'estimer comment une fonction change lorsqu'on modifie légèrement ses variables. En finance, le prix d'un produit dérivé dépend du spot S, de la volatilité σ, du taux r et du temps t. Plutôt que de recalculer entièrement la fonction (souvent complexe), on utilise Taylor pour approximer le changement de prix.

Analogie

De près, une route courbée ressemble à:

- une ligne droite (approximation linéaire),
- une ligne droite + un petit arrondi (approximation quadratique).

Donc on cherche à approximer une fonction compliquée par quelque chose de simple autour d'un point.

2.1 Développement de Taylor à une variable

1. Écriture par une intégrale

On commence par la relation de base:

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(u)\,du.$$

On change de variable avec $u = x + \theta h$ où $\theta \in [0,1]$, alors $du = h\,d\theta$.
On obtient:

$$f(x+h) = f(x) + h\int_0^1 f'(x+\theta h)\,d\theta.$$

2. Développement de $f'(x+\theta h)$

On applique le développement limité de la dérivée f' autour de x:

$$f'(x+\theta h) = f'(x) + f''(x)\theta h + R_2(\theta,h),$$

où $R_2(\theta,h)$ est un reste tel que $R_2(\theta,h) = o(h)$.

3. Intégration terme par terme

On remplace dans l'intégrale:

$$\int_0^1 f'(x+\theta h)\,d\theta = \int_0^1 \left(f'(x) + f''(x)\theta h + R_2(\theta,h)\right)\,d\theta.$$

On calcule chaque intégrale:

$$\int_0^1 f'(x)\,d\theta = f'(x),$$

$$\int_0^1 f''(x)\theta h\,d\theta = f''(x)h\int_0^1 \theta\,d\theta = f''(x)h\cdot\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 R_2(\theta,h)\,d\theta = o(h).$$

4. Reconstruction finale

Nous avons donc:

$$f(x+h) = f(x) + h\left[f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)h + o(h)\right].$$

D'où:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + o(h^2).$$

2.2 Application au pricing d'un produit dérivé

Identification des Greeks

Les dérivées partielles deviennent:

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}, \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}, \qquad \text{Vega} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}, \qquad \Theta = \frac{\partial P}{\partial t}, \qquad \text{Rho} = \frac{\partial P}{\partial r}.$$

Formule de variation du prix

On obtient:

$$\Delta P \approx \Delta \, \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2 + \text{Vega}\,\Delta\sigma + \Theta\,\Delta t + \text{Rho}\,\Delta r.$$

3 Cas du Spot: présence d'un terme quadratique

Le prix d'un produit dérivé en fonction du spot est fortement non-linéaire. Un petit changement de spot crée deux effets:

$$\Delta P_{\text{spot}} \approx \Delta \, \Delta S + \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2.$$

- Le premier terme $\Delta\Delta S$ est **linéaire**.
- Le second $\frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2$ est **quadratique**.

Ce terme quadratique représente la **courbure (convexité)** du prix: la pente change progressivement lorsque le spot varie. C'est cette variation progressive qui crée une forme triangulaire, dont l'aire est:

$$\frac{1}{2} \times (\text{base}) \times (\text{hauteur}) = \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2.$$

3.1 Pourquoi le terme de Gamma contient un coefficient $\frac{1}{2}$?

3.1.1 Explication géométrique: l'aire d'un triangle

Dans le développement de Taylor, le terme en dérivée seconde correspond à la **courbure** de la fonction. Lorsque l'on considère une petite variation ΔS, l'effet de la courbure représente une "petite bosse" ou une "petite vallée" qui peut être approximée par un triangle.

$$\text{Aire d'un triangle} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Dans notre cas:

- la base = ΔS,
- la hauteur = $\Gamma\Delta S$, car la pente augmente progressivement.

Ainsi,

$$\text{Aire} \approx \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2.$$

Le coefficient $\frac{1}{2}$ est l'aire d'un triangle. Il représente le fait que la pente ne change pas d'un coup, mais progressivement.

3.1.2 Intuition financière: la pente qui change progressivement

Delta = pente instantanée

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}.$$

Gamma = accélération de la pente

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}.$$

Par analogie:

$$\text{Contribution Gamma} = \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2.$$

3.1.3 Démonstration mathématique

On part de:

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(u)\, du.$$

Changement de variable : $u = x + \theta h$, $du = h\, d\theta$.

$$f(x+h) = f(x) + h\int_0^1 f'(x+\theta h)\, d\theta.$$

On applique Taylor à la dérivée:

$$f'(x+\theta h) = f'(x) + f''(x)\theta h + o(h).$$

On intègre terme par terme:

1er terme

$$\int_0^1 f'(x)\,d\theta = f'(x),$$

2ème terme

$$\int_0^1 f''(x)\theta h\,d\theta = ...$$

L'intégrale contient trois éléments:

- $f''(x)$: dérivée seconde évaluée en x, donc constante,
- h : incrément fixe, constant,
- θ : seule variable d'intégration.

On factorise donc les constantes:

$$\int_0^1 f''(x)\,\theta\,h\,d\theta = f''(x)h\int_0^1 \theta\,d\theta.$$

Calcul de l'intégrale en utilisant la primitive:

$$\int \theta\,d\theta = \frac{\theta^2}{2}.$$

En évaluant sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient:

$$\int_0^1 \theta\,d\theta = \frac{\theta^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Résultat en réassemblant les constantes:

$$f''(x)h\int_0^1 \theta\,d\theta = f''(x)h\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,f''(x)\,h.$$

$$\boxed{\int_0^1 f''(x)\,\theta\,h\,d\theta = \frac{1}{2}\,f''(x)\,h.}$$

3.2 Pourquoi, en pratique, on ne garde que la dérivée seconde en S ?

Principe fondamental: Le 1/2 apparaît uniquement dans les termes quadratiques

Le développement de Taylor contient deux types de contributions :

- **variations linéaires** : proportionnelles à Δx,
- **variations quadratiques** : proportionnelles à $(\Delta x)^2$.

Le coefficient $\frac{1}{2}$ apparaît toujours dans les termes quadratiques, car Taylor génère systématiquement un terme :

$$\frac{(\Delta x)^2}{2!} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2.$$

Il ne peut donc apparaître **que lorsque la variable produit un effet de second ordre**. Pour le spot, c'est le cas. Pour les autres variables, ce second ordre est négligeable.

Exemple:

Les variations typiques du spot sont

$$\Delta S = 1\% \text{ à } 5\%.$$

Donc

$$(\Delta S)^2 \text{ reste significatif.}$$

Le prix d'une option est très non-linéaire en S

La courbure par rapport au spot est élevée :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \neq 0.$$

Le terme quadratique

$$\frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2$$

devient **essentiel**.

Pourquoi les seconds ordres des autres variables sont ignorés ?

Volatilité: variations très petites

$$\Delta\sigma \approx 0.1\% \text{ à } 0.3\%.$$

Donc

$$(\Delta\sigma)^2 \approx 0.$$

La dérivée seconde correspondante

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}(\Delta\sigma)^2$$

est négligeable.

Taux d'intérêt : variations infimes

$$\Delta r \approx 2 \text{ à } 5 \text{ bps}.$$

Donc

$$(\Delta r)^2 \approx 10^{-6}.$$

Le terme d'ordre 2 n'apporte rien.

Temps: décroissance linéaire

Le temps avance d'un jour :

$$\Delta t = 1.$$

Le prix décroît quasiment de façon linéaire:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \approx 0.$$

4 Lien entre le développement de Taylor et le binôme de Newton

Taylor veut généraliser Newton à toutes les fonctions

Newton ne développe que des puissances. Taylor cherche à étendre ce principe à n'importe quelle fonction:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots$$

L'objectif de Taylor est d'obtenir des termes h^k avec les coefficients exacts.
Or ces coefficients exacts sont ceux que Newton avait trouvés pour les puissances.

4.1 Application du développement de Taylor à $f(x) = x^n$

On considère la fonction:

$$f(x) = x^n.$$

Ses dérivées successives sont:

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Le terme d'ordre k du développement de Taylor vaut donc:

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k}h^k.$$

Et

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Donc Taylor reproduit exactement:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k.$$

On retrouve le binôme de Newton lorsqu'on l'applique à $f(x) = x^n$.

Autrement dit: Lorsqu'on dérive une fonction k fois, les dérivées successives génèrent un sur-comptage combinatoire :

$$f^{(k)}(x) \sim n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

qui compte chaque contribution exactement $k!$ fois.
Pour corriger cette surévaluation, Taylor divise par $k!$. Ainsi :

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

reproduit exactement le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

4.2 Le rôle du $\frac{1}{2}$

Dans Newton :

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dans Taylor :

$$\frac{f''(x)}{2!}h^2 = \frac{1}{2}f''(x)h^2.$$

Les deux proviennent de la même origine combinatoire :

- Newton : nombre de façons de choisir 2 occurrences de h,
- Taylor : correction du sur-comptage des dérivées secondes.

En finance, le Gamma s'écrit :

$$\frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2.$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ est la **même origine** que celui du binôme de Newton.

Le développement de Taylor est la généralisation analytique du binôme de Newton.

5 Le Binôme de Newton

5.1 La problématique de Newton

Avant Newton, on savait développer :

$$(x+h)^2, \quad (x+h)^3, \quad (x+h)^4,$$

mais aucune formule générale n'existait pour $(x+h)^n$.
Newton cherche à répondre à la question :

"Existe-t-il une formule valable pour tout entier n ?"

5.2 L'intuition de Newton : un produit de n facteurs identiques

Newton écrit :

$$(x+h)^n = \underbrace{(x+h)(x+h)\cdots(x+h)}_{\text{n fois}}.$$

Chaque facteur contient soit x, soit h. Donc tout terme produit lors du développement est de la forme :

$$x^{n-k}h^k.$$

Il s'agit maintenant de déterminer le **nombre de façons** d'obtenir un terme contenant :

- k fois la lettre h,
- $n-k$ fois la lettre x.

Newton comprend alors qu'il s'agit d'un problème de **combinatoire**.

5.3 Nombre de façons de choisir k fois h parmi n facteurs

Le nombre de façons d'insérer k lettres h parmi n positions est :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Il apparaît naturellement car :

- choisir k positions pour placer h,
- revient à compter les permutations possibles,
- ce qui produit les factoriels.

5.4 Formule générale du binôme de Newton

En combinant ces idées, Newton obtient :

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

5.5 Exemple: le cas n = 3

On développe $(x+h)^3$ avec la formule :

$$(x+h)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2h + \binom{3}{2}xh^2 + \binom{3}{3}h^3.$$

Calcul des coefficients :

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\,3!} = 1, \quad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3,$$
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3, \quad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1.$$

Donc :

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

5.6 Démonstration formelle du binôme (preuve par récurrence)

Étape 1: Initialisation

Pour $n = 1$,

$$(x+h)^1 = x + h$$

correspond bien à :

$$\binom{1}{0}x + \binom{1}{1}h = x + h.$$

Étape 2: Hypothèse de récurrence

Supposons que pour un entier n,

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Étape 3: Passage de n à n+1

On multiplie $(x+h)^n$ par $(x+h)$:

$$(x+h)^{n+1} = (x+h) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

On distribue :

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} h^k \; + \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k+1}.$$

On recale l'indice dans le second terme (on remplace $k+1$ par k) :

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} h^k.$$

Or l'identité combinatoire fondamentale est :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Donc :

$$(x+h)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} h^k.$$

La formule est donc vraie pour $n + 1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout n.