Duration Macaulay
Sensibilité
Convexité

JFBL

December 2025

Contents

1 Le fondement de la Duration Macaulay (1938)

Pour comprendre la Duration de Macaulay, il faut revenir en 1938, à l'époque de Frederick Macaulay, un économiste qui cherchait à résoudre un problème très concret.

1.1 Le problème de son époque: "la maturité est un mensonge"

À l'époque, pour comparer la durée de deux obligations, les investisseurs ne regardaient que la maturité (la date du remboursement final).
Imaginons que nous sommes en 1938 et que l'on doit choisir entre deux obligations de 10 ans :

- Obligation A (Zéro-Coupon): elle ne paie rien pendant 9 ans, et tout à la fin (10^{e} année).
- Obligation B (coupon très élevé de 50%): elle rembourse la moitié de notre argent dès la première année, puis encore beaucoup chaque année.

Le problème: sur le papier, elles ont toutes les deux une maturité de 10 ans. Pourtant, économiquement, c'est totalement faux !

- Pour l'obligation B, on récupère la majorité de notre mise très vite. L'argent est "risqué" moins longtemps.
- Pour l'obligation A, presque tout notre argent est bloqué jusqu'au dernier jour.

Macaulay voulait trouver un chiffre qui dise: *"En moyenne, combien de temps mon argent reste-t-il vraiment investi dans cette obligation ?"*

1.2 L'intuition: le centre de gravité

Macaulay n'a pas utilisé de dérivées (vs la Duration Modifiée). Il a utilisé une logique de physique, celle du point d'équilibre (comme une balançoire à bascule).
Il a visualisé l'obligation comme une planche posée sur un point d'appui:

- Les poids sont les sommes d'argent que l'on recçoit (les flux actualisés, VA).
- La distance est le temps (les années $1, 2, 3...$).

Il s'est posé la question: *où dois-je placer le point d'appui pour que la planche tienne en équilibre ?*
Si on reçoit de gros coupons au début (gros poids à gauche), le point d'équilibre se déplace vers la gauche = la durée est courte (image 2). Si tout est payé à la fin (gros poids tout à droite), le point d'équilibre est à la fin (image 3).
Ce point d'équilibre, en années, c'est la **Duration**.

1.3 La construction de la formule

Macaulay a simplement construit une moyenne pondérée. C'est le calcul d'une moyenne classique, comme à l'école. Si on veut calculer la moyenne des notes d'un élève, on fait:

$$\text{Moyenne} = \frac{\sum(\text{Note} \times \text{Coefficient})}{\sum \text{Coefficients}}$$

Macaulay a fait exactement pareil pour le temps :

- La "Note", c'est l'année (t).
- Le "Coefficient", c'est l'importance de l'argent reçu cette année-là (la Valeur Actuelle du flux : VA_t).
- La "Somme des coefficients", c'est la valeur totale de l'obligation (le Prix P).

Sa formule est donc née ainsi, purement par logique de moyenne :

$$\text{Duration (Moyenne)} = \frac{\sum(\text{Année } t \times \text{Poids } VA_t)}{\text{Total des Poids } P}$$

C'est exactement la formule que l'on voit dans les livres pour la Duration:

$$D_{\text{Mac}} = \frac{1}{P} \sum \left(t \times \frac{C_t}{(1+r)^t} \right)$$

Et voilà pourquoi P est au dénominateur ! Non pas à cause d'une dérivation mathématique obscure, mais parce que pour faire une moyenne, on doit toujours diviser par le total.

1.4 À quoi ça servait à son époque ?

En 1938, Macaulay ne se servait pas de ça pour mesurer le risque de taux (la sensibilité) comme on le fait aujourd'hui. Les marchés étaient moins volatils et les modèles de risque n'existaient pas.
Il s'en servait pour :

- **Comparer des investissements**: *"Cette obligation de 20 ans à fort coupon est en fait équivalente à une obligation de 12 ans à faible coupon"*. C'était un outil de comparaison de durée réelle.
- **L'Immunisation** (plus tard): Si on doit payer une dette dans 10 ans, on doit acheter une obligation qui a une Duration de 10 ans (et non une maturité de 10 ans) pour être sûr d'avoir l'argent, quoi qu'il arrive aux taux.

Résumé

- **Macaulay (1938)** cherchait une durée moyenne de vie de l'obligation. Il a créé une moyenne pondérée en années.
- Les mathématiciens (plus tard) ont dérivé la formule du prix pour trouver le risque (Sensibilité) et se sont rendu compte: *"Tiens ! La formule du risque ressemble énormément à la formule de la moyenne de Macaulay !"*.
- Ils ont vu qu'il y avait juste un petit facteur de différence dû aux intérêts composés: le fameux $(1 + r)$.
- **Duration Macaulay:** Le concept original, intuitif, physique avec la notion de centre de gravité temporel.
- **Duration Modifiée:** L'application mathématique moderne pour le risque (Dérivée).

Maintenant, faisons le pont vers la finance moderne.
Le passage à la Duration Modifiée et l'apparition du $(1 + r)$ viennent du moment où l'on a arrêté de regarder l'obligation comme une "période de temps" pour la regarder comme une équation mathématique de prix.

2 Le changement d'objectif: du Temps au Risque

Macaulay (1938) avait donné une durée en années. Mais quelques décennies plus tard, les traders et gestionnaires de risques avaient un problème différent :

"Je m'en fiche que la durée moyenne soit de 7,4 ans. Si les taux montent de 1 %, combien d'argent je perds ?"

Ils ne voulaient plus une moyenne de temps, ils voulaient la pente de la courbe (la dérivée). Ils ont donc posé l'équation du prix et l'ont dérivée.
Autrement dit: *"Quelle est la variation ΔP pour une variation Δr des taux?"* (voir **3. Démonstration de la dérivée** $\frac{dP}{dr}$ pour plus de détail).

2.1 L'origine mathématique du $(1+r)$: la "règle de la chaîne"

C'est ici que se trouve le secret. Le terme $(1+r)$ n'est pas ajouté arbitrairement, il résulte du calcul de dérivée. Le prix est une somme de termes qui ressemblent à:

$$\text{Terme} = \text{Flux} \times (1+r)^{-t}$$

Quand un mathématicien dérive ce terme par rapport à r, il utilise la règle de puissance : $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. Ici, notre "groupe" est $(1+r)$ et la puissance est $-t$. La dérivée devient :

$$\text{Dérivée} = \text{Flux} \times \underbrace{(-t)}_{\text{Le temps descend}} \times \underbrace{(1+r)^{-t-1}}_{\text{La puissance baisse de 1}}$$

C'est là, précisément à cet instant, que le $(1+r)$ apparaît. Regardons l'exposant $-t-1$. On peut le séparer en deux morceaux :

$$(1+r)^{-t-1} = \underbrace{(1+r)^{-t}}_{\text{L'actualisation originale}} \times \underbrace{(1+r)^{-1}}_{\text{L'intrus !}}$$

Si on réécrit $(1+r)^{-1}$ sous forme de fraction, cela donne $\frac{1}{1+r}$.

2.2 Le moment Eurêka: la découverte du lien

Imaginons maintenant l'analyste qui regarde le résultat de son calcul de risque (la dérivée complète du prix):

$$\frac{dP}{dr} = \sum \left[\text{Flux} \times (-t) \times (1+r)^{-t} \times \frac{1}{1+r} \right]$$

Il essaye de mettre de l'ordre dans sa formule. Il sort le signe moins et le terme intrus $\frac{1}{1+r}$ qui est commun à tous les flux :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1+r} \times \left(\underbrace{\sum \frac{t \times \text{Flux}}{(1+r)^t}}_{\text{Tiens, mais qu'est-ce que c'est que ça ?}} \right)$$

L'analyste reconnaît immédiatement le terme entre parenthèses ! C'est le numérateur de la formule de Macaulay (le calcul de moyenne pondérée). On sait que ce terme est égal à Prix $\times$ D_{Mac}. Il remplace donc le bloc compliqué par sa version simple :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1+r} \times (\text{Prix} \times D_{\text{Mac}})$$

2.3 La naissance de la Duration Modifiée

L'analyste veut une mesure de risque en pourcentage (relative au prix). Il divise donc tout par le Prix (P) et change le signe pour avoir un chiffre positif :

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{P} \times \frac{dP}{dr}$$

En injectant le résultat précédent :

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{P} \times \left[-\frac{1}{1+r} \times P \times D_{\text{Mac}} \right]$$

Les P s'annulent, les signes moins s'annulent, et il ne reste que la relation finale, pure et élégante :

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1+r}$$

Résumé: pourquoi le $(1 + r)$?

Le $(1 + r)$ est la trace mathématique laissée par l'opération de dérivation sur des intérêts composés.

- **Macaulay** ($D_{\textbf{Mac}}$): c'est la vision statique. On regarde l'équilibre des flux dans le temps. Il n'y a pas de dérivation, donc pas de terme supplémentaire.
- **Modifiée** ($D_{\textbf{mod}}$): c'est la vision dynamique (mouvement). Pour voir le mouvement, on doit dériver. En dérivant une formule d'intérêts composés, la puissance change de $-t$ à $-t - 1$, créant mécaniquement ce facteur diviseur $(1 + r)$.

C'est ainsi qu'on a découvert que le "Risque" n'est rien d'autre que le "Temps Moyen" ajusté d'une période d'intérêt.

3 Démonstration mathémqtique du lien entre la D_{Macaulay} et $D_{\text{Modifiée}}$

Il est exact que la **Duration Macaulay** (D_{Mac}) est issue d'une approche statique (moyenne des temps d'encaissement des flux), tandis que la **Duration Modifiée** (D_{mod}) est issue d'une approche dynamique (mesure de la sensibilité/risque). Leur lien intime est une conséquence directe du calcul différentiel appliqué à l'actualisation en intérêts composés.

3.1 Origine mathématique du facteur $(1 + r)$: la règle de dérivation

Chaque flux F est actualisé via un terme de la forme:

$$\text{Terme}_t = F_t \times (1 + r)^{-t}$$

On dérive ce terme par rapport à la variable r. En utilisant la règle de dérivation pour x^n (où $x = 1 + r$ et $n = -t$), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[F_t \times (1 + r)^{-t} \right] = F_t \times (-t) \times (1 + r)^{-t-1}$$

C'est ici que le $(1 + r)$ **est implémenté:** l'exposant passe de $-t$ à $-t - 1$.

On peut maintenant factoriser l'exposant:

$$(1 + r)^{-t-1} = (1 + r)^{-t} \times (1 + r)^{-1}$$

Ce terme $(1 + r)^{-1}$ (ou $\frac{1}{1+r}$) est le facteur qui n'appartient pas à la formule de Macaulay, et qui est le même pour tous les termes de la somme.

3.2 Le lien analytique

La dérivée première complète est la somme de toutes ces dérivées, en sortant les facteurs constants (-1) et $\frac{1}{(1+r)}$:

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r} \left[F_t (1 + r)^{-t} \right] = -\frac{1}{1 + r} \times \underbrace{\sum_{t=1}^{n} t \times F_t (1 + r)^{-t}}_{\text{Numérateur de } D_{\text{Mac}} \times P}$$

3.3 Révélation de l'identité

Par définition, la Duration Macaulay (D_{Mac}) est :

$$D_{\text{Mac}} = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{n} t \times F_t (1 + r)^{-t} \implies P \times D_{\text{Mac}} = \sum_{t=1}^{n} t \times F_t (1 + r)^{-t}$$

En substituant cette identité dans l'équation de la dérivée :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1 + r} \times (P \times D_{\text{Mac}})$$

3.4 Naissance de la Duration Modifiée

La Duration Modifiée est définie comme la sensibilité relative et positive :

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{P} \times \frac{dP}{dr}$$

En injectant l'expression de $\frac{dP}{dr}$ dans cette définition, nous obtenons :

$$D_{\text{mod}} = -\frac{1}{P} \times \left[-\frac{1}{1 + r} \times P \times D_{\text{Mac}} \right]$$

Après simplification (les P s'annulent, les signes négatifs s'annulent) :

$$D_{\text{mod}} = \frac{D_{\text{Mac}}}{1 + r}$$

Conclusion

Le facteur $\frac{1}{1+r}$ est le **coefficient d'ajustement** nécessaire pour passer d'une mesure statique (Macaulay, en années) à une mesure dynamique (Modifiée, en % de prix), induit par la dérivation de la formule d'actualisation en intérêts composés. C'est la trace mathématique du *compounding* (capitalisation) dans le calcul de la sensibilité.

4 Autrement dit

On a vu que deux chemins intellectuels totalement différents (l'un temporel, l'autre financier) arrivent quasiment au même résultat. C'est ce qu'on appelle souvent une beauté mathématique.
Pour comprendre ce lien mystérieux, il faut arrêter de voir le **temps** et le **risque** comme deux choses différentes. En finance, le temps EST le risque.
Voici l'image mentale pour comprendre pourquoi la moyenne des temps (Macaulay) est forcément égale à la sensibilité (Duration Modifiée).

4.1 L'analogie du levier

Imaginons une clé à molette ou un levier.

- Le point de pivot: c'est aujourd'hui.
- La longueur du bras: c'est le **temps** (Macaulay).
- La force appliquée: c'est la variation du **taux** (r).
- Le mouvement résultant: 'est la variation du **prix**.

Le lien logique: Si on a un levier très long (une Duration Macaulay élevée), une toute petite force (variation de taux) va créer un mouvement énorme au bout (variation de prix).

- Macaulay a mesuré la longueur du levier (en années).
- Les Traders ont mesuré la puissance du mouvement (en $\%$).

Il est donc logique que la formule de la **puissance** (D_{mod}) contienne la variable **longueur** (D_{Mac}).
Autrement dit: plus le temps est long, plus le levier est puissant. C'est pour cela que les formules sont jumelles.

4.2 Le mécanisme mathématique: l'exposant devient multiplicateur

C'est ici que la magie opère dans les équations. Le prix d'une obligation dépend d'un facteur d'actualisation :

$$\frac{1}{(1+r)^t} = (1+r)^{-t}$$

Dans cette formule :

- r est le taux (la cause du risque).
- t est le temps (la durée).

En mathématiques, t est un exposant (une puissance). Or, la règle fondamentale de la dérivation (le calcul de sensibilité), c'est que **l'exposant devient un multiplicateur**.

- Si je dérive x^2, le 2 descend devant et devient $2x$.
- Si je dérive $(1+r)^{-t}$, le $-t$ descend devant.

La Révélation:

Le calcul de sensibilité (la dérivée) prend mécaniquement le **temps (t)** qui était caché en puissance, et le fait descendre pour en faire un poids (un multiplicateur). C'est pour ça que la sensibilité est mathématiquement obligée d'être une somme pondérée par le temps. La dérivation a transformé le **temps (t)** en **coefficient d'impact**.

4.3 Pourquoi le lien n'est pas "parfait" (le $1+r$) ?

Pourquoi ce petit décalage ? C'est simplement une question de technologie d'intérêts.
Si nous vivions dans un monde parfait d'intérêts continus (formule avec exponentielle e^{-rt}), la Duration Macaulay serait exactement égale à la Duration Modifiée! Le lien serait pur et parfait.
Mais comme nous utilisons des **intérêts composés annuels** (par bonds d'un an), la dérivation laisse une petite "poussière mathématique" derrière elle: le facteur $\frac{1}{1+r}$.

En résumé:

On peut voir le lien ainsi:

- Le fondement: le temps agit comme un amplificateur.
- Macaulay a calculé la moyenne de cet amplificateur (le temps).
- La densibilité a calculé l'effet de l'amplification.
- Le résultat: mathématiquement, l'effet est égal à la cause. La sensibilité est donc pilotée directement par la moyenne des temps.

C'est parce que le temps est le multiplicateur du taux dans la formule du prix que la moyenne des temps devient la mesure du risque.

5 Prix futur, Duration, Convexité et Développement de Taylor

5.1 Prédire le futur

L'analyste cherche à estimer le nouveau prix $P(r + \Delta r)$ lorsque le taux (r) varie de Δr.
Le mathématicien Taylor a prouvé qu'on peut approximer n'importe quelle fonction courbe $(P(r))$ par une somme de termes de plus en plus précis.
Le développement de Taylor à l'ordre 2 est le suivant :

$$P(r + \Delta r) \approx \underbrace{P(r)}_{\text{Départ}} + \underbrace{P'(r) \cdot \Delta r}_{\text{Vitesse}} + \underbrace{\frac{1}{2} P''(r) \cdot (\Delta r)^2}_{\text{Accélération}}$$

La variation du prix est donc :

$$\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r) \approx P'(r)\Delta r + \frac{1}{2} P''(r)(\Delta r)^2$$

5.2 L'approximation 1: la Duration

Terme mathématique
Le terme de premier ordre est $P'(r) \cdot \Delta r$.

Traduction financière
Nous savons que la dérivée première $P'(r)$ est liée à la Duration Modifiée (D_{mod}) par la formule :

$$P'(r) = -D_{\text{mod}} \times P(r)$$

Si on remplace ce terme dans la formule de Taylor, on obtient l'approximation linéaire classique :

$$\text{Variation Prix} \approx -D_{\text{mod}} \times P(r) \times \Delta r$$

Problème : Comme nous l'avons vu, la droite s'éloigne de la courbe. Il y a une erreur.

5.3 L'approximation 2: la Convexité

Pour corriger l'erreur, on ajoute le terme de courbure. C'est le terme du "second ordre" dans la série de Taylor.

Le facteur $\frac{1}{2}$: la formule de Taylor rajoute $\frac{1}{2} P''(r) \cdot (\Delta r)^2$.

Pourquoi $\frac{1}{2}$?
C'est une règle mathématique (liée aux factorielles 2!) qui vient de l'intégration. Quand on intègre x, on obtient $\frac{x^2}{2}$. C'est inévitable.

Traduction financière
On définit la Convexité (C) comme la dérivée seconde divisée par le prix :

$$C = \frac{1}{P(r)} \times P''(r)$$

Donc, on peut isoler $P''(r)$:

$$P''(r) = C \times P(r)$$

5.4 L'assemblage final

Nous remplaçons maintenant les termes mathématiques (P' et P'') par leurs noms financiers (D_{mod} et C) dans la formule de Taylor initiale.

Formule de Taylor:

$$\Delta P \approx P'(r)\Delta r + \frac{1}{2} P''(r)(\Delta r)^2$$

Substitution:

- Remplacer $P'(r)$ par $[-D_{\text{mod}} \times P]$.
- Remplacer $P''(r)$ par $[C \times P]$.

$$\Delta P \approx \underbrace{[-D_{\text{mod}} \times P \times \Delta r]}_{\text{Effet Duration}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \times C \times P \times (\Delta r)^2\right]}_{\text{Effet Convexité}}$$

Si on divise tout par le Prix (P) pour avoir la variation **en pourcentage**, on obtient la formule célèbre que les traders utilisent :

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \underbrace{-D_{\text{mod}} \times \Delta r}_{\text{Effet Duration}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times C \times (\Delta r)^2}_{\text{Effet Convexité}}$$

5.5 Pourquoi l'effet de convexité est toujours un positif ?

Regardons le terme de convexité ajouté : $+\frac{1}{2}C(\Delta r)^2$.

- $\frac{1}{2}$ est positif.
- C (Convexité) est positive (comme démontré précédemment, $P'' > 0$).
- $(\Delta r)^2$ est le carré de la variation de taux.

Que les taux montent (par exemple, $(+0,01)^2$ est positif) ou baissent (par exemple, $(-0,01)^2$ est positif), le terme $C(\Delta r)^2$ reste toujours positif.
Le terme de convexité ajoute **toujours** une valeur positive à votre prix.

- Il réduit la perte prédite par la duration (si les taux montent).
- Il augmente le gain prédit par la duration (si les taux baissent).

C'est ainsi que le développement de Taylor démontre mathématiquement que la convexité est l'amie de l'investisseur obligataire.