Loi Normale

I) Définition :

Une V.A. X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si sa densité de probabilité est donné par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad \text{avec } x\in\mathbb{R}$$

$(x-\mu)$: plus c'est grand, plus la proba. est faible.

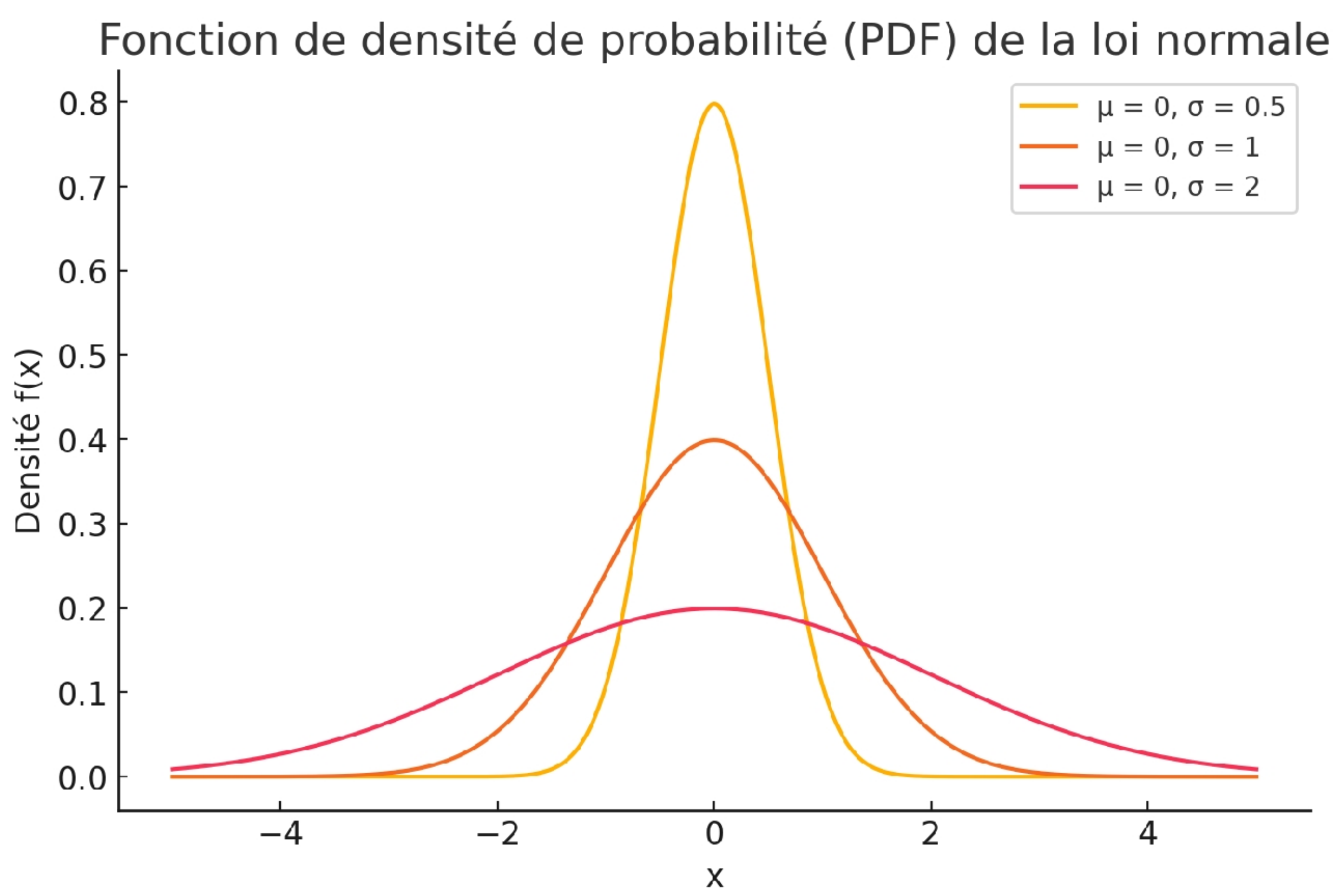
On note : $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

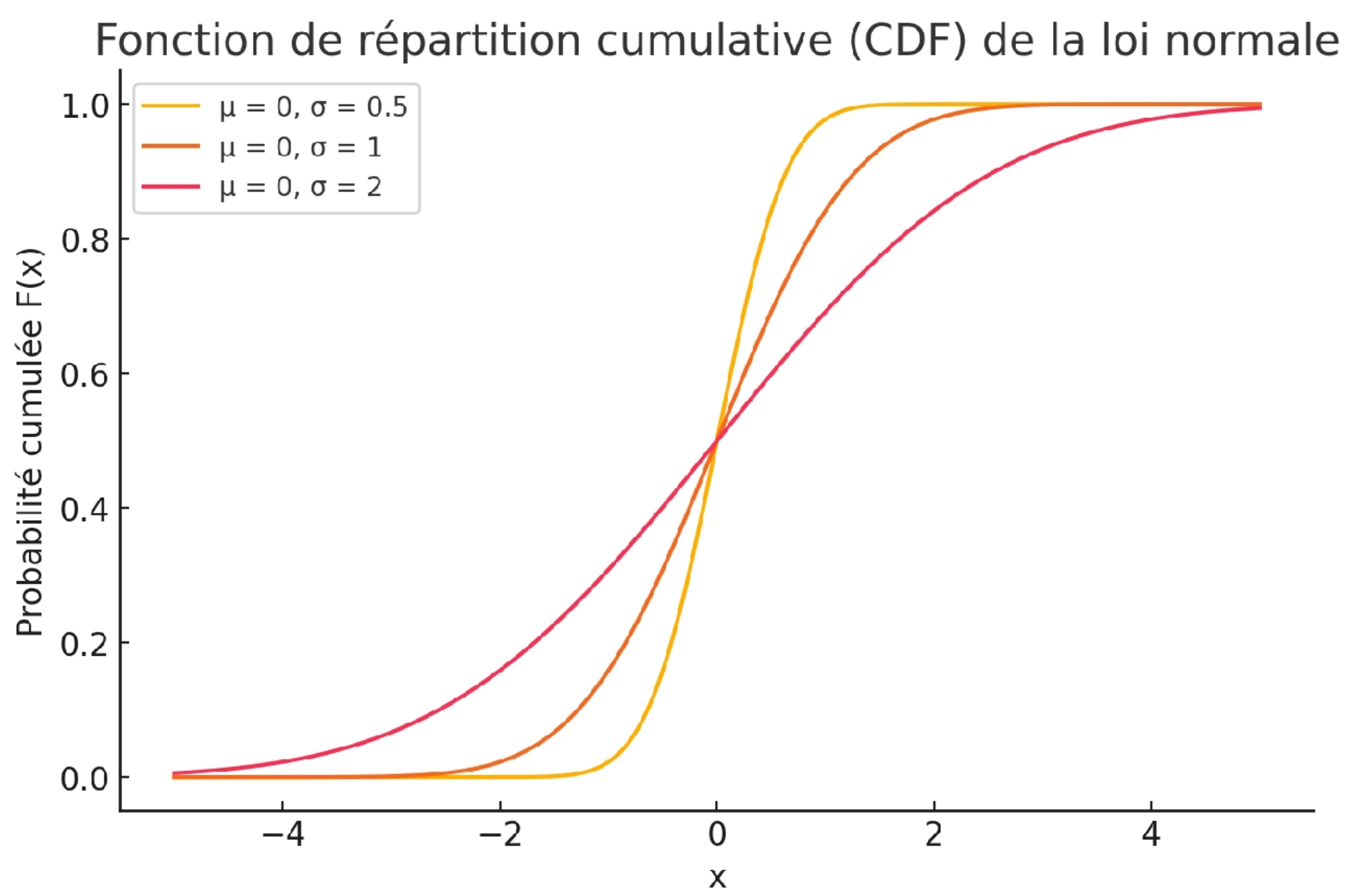
II) Propriétés et Paramètres :

1) Symétrie autour de μ
2) $\mathbb{E}[X]=\mu$
3) $Var(X)=\sigma^2$

PDF *1	CDF	μ	σ^2
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$	$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$	$\mathbb{E}[X]=\mu$	$Var(Y)=\sigma^2$

III) Graphiques





IV) Démonstration de la formule PDF : (*1)

1. Une densité de probabilité doit vérifier 2 conditions :

1) $f(x) \geq 0$ pour tout x
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow$ On veut chercher $f(x)$ qui satisfait et qui est symétrique autour d'une moyenne μ.

2. On débute avec une forme exponentielle

$$f(x) = A e^{-B(x-\mu)^2}$$

- L'exponentielle permet d'avoir une forme en cloche
- $(x-\mu)^2$ assure la symétrie autour de μ
- A et B sont des constantes à déterminer.

3. Déterminer A et B

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-B(x-\mu)^2} dx = 1$$

On pose : $z = x - \mu \Rightarrow dz = dx$

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bz^2} dz = 1$$

On reconnaît l'intégrale Gaussienne classique : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ avec $a > 0$

Donc : $a = B \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{B}}$

On peut réécrire

$$A\sqrt{\frac{\pi}{B}} = 1$$

On sait qu'on doit avoir ça

Donc on peut trouver A

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{B}}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{B}{\pi}}}$$

4. On introduit σ

4.1. Trouver la formule de B

On sait que la σ^2 contrôle l'étalement de la distribution, donc B doit être relié à σ^2.

But: Trouver B de manière à ce que la variance soit exactement σ^2

On sait que : $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 A e^{-Bz^2}\,dz$$

En utilisant la formule exp. en cloche

Intégrale classique à connaître : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}$ avec $\alpha > 0$

On applique cette intégrale avec $\alpha = B$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-Bz^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2B^{3/2}}$$

$$Var(X) = A \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2B^{3/2}}$$

On a trouvé préc. la formule de A.

$$Var(X) = \left(\sqrt{\frac{B}{\pi}}\right) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2B^{3/2}}$$

$$Var(X) = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2B^{3/2}} = \frac{1}{2B}$$

Or par définition de la loi Normale, la variance doit être égale à σ^2

Donc : $\sigma^2 = \frac{1}{2B}$

$$\boxed{B = \frac{1}{2\sigma^2}}$$

← Formule correcte de B pour que la variance $= \sigma^2$

4.2. Application de B dans A

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{B}{\pi}}} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2\pi}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}$$

5. Consolidation

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}\, e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}$$

V/ Développements utiles à savoir :

1) Transformation affine d'une var. Normale :

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Y = aX + b \rightarrow Y \sim N(\underbrace{a\mu + b}_{E[Y]\ (1)}, \underbrace{a^2\sigma^2}_{Var(Y)\ (2)})$

Démonstration :

- $E[Y] = E[aX+b] = a\,E[X] + b = \boxed{a\mu + b}$ (1)
- $Var(Y) = E\left[(Y - (E[Y]))^2\right] = E\left[(aX + b - (a\mu + b))^2\right]$

  $Var(Y) = E\left[(aX - a\mu)^2\right] = a^2 E\left[(X-\mu)^2\right] \boxed{= a^2\sigma^2}$ (2)

2) Densité de la loi Normale centrée réduite

On sait maintenant que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a pour densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Donc avec $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}}$$