Options
&
Méthodes d'Évaluation

Jean-François Berger-Lefébure

21 mars 2025

Contents

1 Introduction

1.1 Les Options

Options Vanilles
Les options vanilles sont des contrats financiers qui donnent le droit (mais non l'obligation) d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance, à une date donnée.

Options Américaines
Les options américaines peuvent être exercées à tout moment avant leur maturité, contrairement aux options européennes qui ne peuvent l'être qu'à l'échéance.

Options Barrières
Les options barrières sont des options dont l'activation ou la désactivation dépend de l'atteinte d'un certain seuil (barrière) par le sous-jacent.

Options Asiatiques
Les options asiatiques ont un payoff basé sur la moyenne du prix du sous-jacent sur une période donnée, réduisant ainsi l'impact de la volatilité ponctuelle.

Options Lookback
Les options lookback permettent de fixer le prix d'exercice à la valeur la plus avantageuse atteinte par le sous-jacent pendant la durée de vie de l'option.

Autocalls
Les autocalls sont des produits structurés qui peuvent être remboursés avant échéance si le sous-jacent dépasse une certaine barrière à des dates d'observation prédéfinies.

Produits Quantos
Les produits quantos permettent d'exposer un investisseur à un actif libellé dans une devise étrangère sans risque de change, grâce à une compensation intégrée.

Spread Options
Les spread options sont des options dont le payoff dépend de l'écart entre deux actifs sous-jacents, souvent utilisées pour des stratégies d'arbitrage.
—

1.2 Méthodes d'Évaluation

Formules Fermées (Black-Scholes)
Les formules fermées fournissent une solution analytique directe pour le pricing d'options vanilles sous certaines hypothèses comme la volatilité constante.

Arbres Binomiaux (Cox-Ross-Rubinstein - CRR)
Les arbres binomiaux permettent d'évaluer une option en simulant un nombre fini de scénarios d'évolution du sous-jacent et en remontant la valeur de l'option à partir de la maturité.

Différences Finies
La méthode des différences finies approxime les équations différentielles partielles de Black-Scholes pour calculer le prix des options en discrétisant le temps et l'espace des prix.

Monte Carlo
La méthode de Monte Carlo simule un grand nombre de trajectoires du sous-jacent pour estimer la valeur moyenne du payoff actualisé d'une option.

2 Évaluation des Options Européennes

2.1 Méthode des Formules Fermées (Adaptée)

Pourquoi ?

- Lorsqu'une solution analytique existe, elle est rapide, précise et ne nécessite pas de simulations.
- La formule fermée de Black & Scholes est directement applicable aux options européennes vanilles (call et put).

Limites : Ne fonctionne que pour les cas où une solution analytique existe (ex. options classiques sans barrières ni dépendance à la trajectoire).

2.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Adaptée)

Pourquoi ?

- Fonctionne bien pour les options européennes en construisant un arbre de prix du sous-jacent.
- Approche discrète qui converge vers Black & Scholes si le nombre de pas tend vers l'infini.

Limites :

- Moins efficace que la formule fermée pour des options standards.
- Problème de convergence si le nombre de pas est trop faible.

2.3 Méthode des Différences Finies (Adaptée)

Pourquoi ?

- Permet de résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black & Scholes.
- Utile quand il y a des conditions aux limites spécifiques (ex. volatilité locale).

Limites :

- Moins efficace que les formules fermées pour des options simples.
- Peut nécessiter un maillage fin pour garantir la précision.

2.4 Méthode de Monte Carlo (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Monte Carlo est souvent utilisé pour des options complexes et path-dépendantes (exotiques).
- Pour une option européenne simple, elle est inefficace car il existe des solutions analytiques plus rapides.

Limites :

- Convergence lente comparée aux formules fermées ou aux arbres.
- Pas justifié pour des produits simples (vanilles).

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Oui**	Très rapide et précise.
Arbres Binomiaux	**Oui**	Bonne précision mais plus lent que la formule fermée.
Différences Finies	**Oui**	Utile si l'EDP doit être résolue numériquement.
Monte Carlo	**Non**	Inefficace pour les options vanilles (convergence lente).

Top Recommandation :

1. Formule fermée si possible.
2. Arbres binomiaux si besoin de flexibilité (ex. taux ou volatilité évolutifs).
3. Différences finies pour des problèmes nécessitant la résolution d'une EDP.

3 Évaluation des Options Américaines

3.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Les options américaines permettent un exercice anticipé, ce qui complique l'obtention d'une solution analytique.
- Il n'existe pas de formule fermée générale, contrairement aux options européennes (ex. Black & Scholes).

Limites : Impossible de prendre en compte l'exercice anticipé sans approximation.

3.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Adaptée)

Pourquoi ?

- L'arbre binomial permet de représenter l'évolution du sous-jacent sur une grille discrète et d'évaluer l'option en remontant l'arbre.
- On prend en compte l'exercice anticipé en comparant, à chaque nœud, la valeur intrinsèque et la valeur d'attente.

Limites : Peut nécessiter un grand nombre de pas pour une bonne précision.

3.3 Méthode des Différences Finies (Adaptée)

Pourquoi ?

- Permet de résoudre numériquement l'équation de Black & Scholes en prenant en compte l'exercice anticipé.
- On impose une condition de complémentarité à chaque instant pour déterminer si l'option est exercée.

Limites :

- Sensible au choix du pas de temps et de la discrétisation.
- Peut être numériquement instable si mal paramétrée.

3.4 Méthode de Monte Carlo (Non adaptée)

Pourquoi ?

- La méthode de Monte Carlo estime l'espérance du payoff final, mais ne gère pas l'exercice anticipé.
- Des techniques spécifiques (Least Squares Monte Carlo, Longstaff & Schwartz) sont nécessaires pour approximer la décision d'exercice.

Limites :

- Complexe à implémenter pour une option américaine.
- Moins efficace qu'un arbre binomial.

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Pas de solution analytique en général.
Arbres Binomiaux	**Oui**	Prend en compte l'exercice anticipé de manière discrète.
Différences Finies	**Oui**	Résout numériquement l'EDP tout en intégrant l'exercice anticipé.
Monte Carlo	**Non**	Mauvaise gestion de l'exercice anticipé sans techniques avancées.

Top Recommandation :

1. Arbres binomiaux pour un bon compromis entre précision et simplicité.
2. Différences finies pour des cas nécessitant une EDP plus complexe.

4 Évaluation des Options à Barrière

4.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Les options à barrière dépendent de la trajectoire du sous-jacent, et la plupart des formules fermées classiques (comme Black & Scholes) ne prennent en compte que la valeur finale du sous-jacent.

Limites :

- Ne prend pas en compte les effets de volatilité implicite variable (smile).
- Inadapté aux options complexes avec plusieurs barrières ou conditions avancées.

4.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Adaptée)

Pourquoi ?

- L'arbre binomial modélise l'évolution du sous-jacent sous forme discrète et permet de vérifier si la barrière est atteinte à chaque nœud.

Limites :

- La convergence vers le bon prix nécessite un grand nombre de pas (discrétisation fine).
- Moins efficace pour des dynamiques complexes de volatilité.

4.3 Méthode des Différences Finies (Adaptée)

Pourquoi ?

- Permet d'imposer des conditions aux limites correspondant aux barrières.
- Très utilisée pour les options à barrière où la volatilité peut varier avec le prix.

Limites :

- Choix des pas de temps et de prix critique pour éviter les erreurs numériques.
- Peut être lente à converger si mal paramétrée.

4.4 Méthode de Monte Carlo (Partiellement adaptée)

Pourquoi ?

- Simule des milliers de trajectoires possibles du sous-jacent et vérifie, pour chaque trajectoire, si la barrière a été franchie.
- Adaptée aux options à barrière complexes, notamment avec volatilité stochastique ou dépendance forte à la trajectoire.

Limites :

- Très lent à converger pour les options barrières, car il faut tester beaucoup de trajectoires.

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Ne gère pas la dépendance à la trajectoire et le smile de volatilité.
Arbres Binomiaux	**Oui**	Bonne prise en compte des barrières, mais peut être lent à converger.
Différences Finies	**Oui**	Très précis, permet de gérer les conditions aux limites.
Monte Carlo	**Partiellement**	Adapté aux cas complexes, mais lent et imprécis pour des barrières simples.

Top Recommandation :

1. Différences Finies → Pour une précision maximale et une bonne gestion des barrières.
2. Arbres Binomiaux → Bon compromis entre précision et simplicité.

5 Évaluation des Options Asiatiques

5.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée sauf cas particulier)

Pourquoi ?

- Il existe une solution fermée pour certaines options asiatiques (ex. moyenne géométrique dans un modèle Black & Scholes).
- Mais pour la moyenne arithmétique, il n'existe pas de formule exacte en général.

Limites :

- Ne fonctionne que pour des cas spécifiques et sous des hypothèses simplificatrices.
- Incapable de gérer des smiles de volatilité ou une dynamique complexe du sous-jacent.

5.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Un arbre binomial devient très inefficace pour une option asiatique car il doit mémoriser toutes les valeurs passées du sous-jacent pour calculer la moyenne.
- Cela entraîne une explosion combinatoire, rendant l'approche irréalisable en pratique.

Limites : Trop lourd computationnellement dès que le nombre de pas est élevé.

5.3 Méthode des Différences Finies (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Peut approximer la moyenne en ajoutant une dimension supplémentaire à l'EDP de Black & Scholes.
- Fonctionne bien pour certaines options asiatiques avec volatilité constante.

Limites :

- Très lourd en calculs car il faut introduire une nouvelle variable pour représenter la moyenne accumulée.

5.4 Méthode de Monte Carlo (Adaptée)

Pourquoi ?

- Simule des milliers de trajectoires du sous-jacent, puis moyenne les prix simulés pour calculer le payoff.
- Idéal pour les options asiatiques, car il est facile d'ajouter la contrainte de moyenne au calcul.

Limites :

- Lent si on ne réduit pas la variance (ex. techniques de réduction).
- Nécessite beaucoup de simulations pour obtenir un résultat précis.

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Fonctionne uniquement pour la moyenne géométrique + cas très simplifié.
Arbres Binomiaux	**Non**	Explosion combinatoire, inefficace pour gérer une moyenne sur plusieurs dates.
Différences Finies	**Non**	Possible mais lourd, difficile à calibrer.
Monte Carlo	**Oui**	Approche naturelle, efficace pour les options asiatiques arithmétiques.

Top Recommandation :

1. Monte Carlo → Le meilleur choix pour toutes les options asiatiques, surtout en moyenne arithmétique.
2. Différences Finies → Utile si on veut un résultat précis mais computationnellement coûteux.
3. Formule Fermée → Uniquement pour la moyenne géométrique et sous des hypothèses restrictives.

6 Évaluation des Options Lookback

6.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Dans un modèle de Black & Scholes avec volatilité constante, il existe des formules analytiques pour certaines options Lookback, notamment celles avec strike fixe.

Limites :

- Ne fonctionne pas si la volatilité varie avec le sous-jacent (smile, skew, etc.).
- Incapable de gérer des barrières complexes ou des marchés non log-normaux.

6.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Un arbre binomial classique ne peut pas stocker toute la trajectoire du sous-jacent, ce qui est nécessaire pour calculer le maximum/minimum.
- On pourrait l'adapter en stockant la valeur extrême atteinte à chaque nœud, mais cela devient trop lourd computationnellement.

Limites : Explosion combinatoire → nécessite trop de mémoire et de calculs.

6.3 Méthode des Différences Finies (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Peut résoudre numériquement l'équation de Black & Scholes en ajoutant une dimension supplémentaire pour suivre la valeur extrême du sous-jacent.
- Fonctionne pour des Lookback à strike fixe.

Limites :

- Très lourd en calcul → chaque point de la grille doit suivre S_t et $S_{\max}$ ou $S_{\min}$.
- Complexe à implémenter pour des options Lookback à strike flottant.

6.4 Méthode de Monte Carlo (Adaptée)

Pourquoi ?

- Monte Carlo est la méthode la plus naturelle pour les options Lookback, car il suffit de simuler plusieurs trajectoires du sous-jacent et de retenir la valeur maximale/minimale atteinte.
- Fonctionne peu importe la dynamique de volatilité, ce qui le rend très flexible.

Limites :

- Convergence plus lente que les méthodes analytiques.
- Doit être optimisé (ex: méthodes de réduction de variance).

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Fonctionne uniquement pour certaines Lookback sous Black & Scholes.
Arbres Binomiaux	**Non**	Trop complexe pour stocker les valeurs extrêmes du sous-jacent.
Différences Finies	**Non**	Possible mais lourd, surtout pour les Lookback avec strike flottant.
Monte Carlo	**Oui**	Approche naturelle, fonctionne pour toutes les Lookback.

Top Recommandation :

1. Monte Carlo → Méthode la plus flexible pour toutes les Lookback.
2. Formule Fermée → À utiliser si applicable, mais limité au modèle Black & Scholes.
3. Différences Finies → Approche numérique possible mais lourde en calcul.

7 Évaluation des Autocalls

7.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée)

Pourquoi :

- Il n'existe pas de solution analytique simple pour un Autocall, car son payoff dépend de plusieurs dates d'observation et de barrières conditionnelles.

Limites :

- Ne prend pas en compte la structure du produit.
- Impossible de gérer plusieurs scénarios d'activation.

7.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Non adaptée)

Pourquoi:

- Peut modéliser les barrières et les paiements conditionnels en remontant dans l'arbre.
- On peut ajouter des conditions d'activation et de remboursement anticipé à chaque nœud.

Limites :

- Explose en complexité lorsque plusieurs dates d'observation sont prises en compte.
- Moins précis pour des structures complexes (ex. Autocall multi-sous-jacent).

7.3 Méthode des Différences Finies (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Les différences finies sont adaptées pour résoudre des EDP sur des grilles, mais les Autocalls n'ont pas une dynamique d'évolution classique qui suit une EDP standard.
- Le payoff est trop complexe pour être modélisé avec cette méthode.

Limites :

- Pas adapté aux paiements conditionnels multiples.
- Difficile à paramétrer pour des Autocalls complexes.

7.4 Méthode de Monte Carlo (Adaptée)

Pourquoi ?

- Meilleure méthode pour un Autocall, car elle permet de simuler toutes les trajectoires possibles du sous-jacent.
- Permet de gérer les barrières, les dates d'observation, et les remboursements anticipés.

Limites :

- Convergence plus lente qu'un modèle analytique (nécessite un grand nombre de simulations).
- Sensibilité aux paramètres (volatilité, taux d'intérêt, structure de corrélation en cas de multi-actifs).

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Impossible de gérer les remboursements anticipés et les barrières.
Arbres Binomiaux	**Non**	Possible mais devient trop lourd avec plusieurs dates d'observation.
Différences Finies	**Non**	Pas adapté aux paiements conditionnels multiples.
Monte Carlo	**Oui**	Modélise toutes les dynamiques et les barrières, meilleure méthode pour un Autocall.

Top Recommandation :

1. Monte Carlo → Meilleure méthode pour le pricing d'un Autocall.
2. Arbre Binomial → Utilisable pour des Autocalls simples (peu de dates d'observation).

8 Évaluation des Produits Quantos

8.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Certaines formules analytiques existent dans Black & Scholes pour des options Quantos vanilles (ex. Call ou Put Quanto).
- Elles prennent en compte la corrélation entre le sous-jacent et le taux de change à travers un ajustement du drift.

Limites :

- Ne fonctionne que sous l'hypothèse de volatilité constante et de corrélation fixe.
- Pas adaptée aux produits Quantos complexes (ex. barrières, asiatiques, autocalls).

8.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Chaque nœud de l'arbre devrait prendre en compte l'évolution conjointe du sous-jacent et du taux de change.
- La double dépendance rend le modèle trop lourd computationnellement.

Limites :

- Explosion combinatoire avec la double variable (sous-jacent + taux de change).

8.3 Méthode des Différences Finies (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Peut résoudre numériquement une EDP multi-dimensionnelle qui inclut le sous-jacent et le taux de change.
- Gère la corrélation et peut être calibrée aux prix de marché.

Limites :

- Lourd en calculs, car il faut une grille fine pour obtenir une bonne précision.

8.4 Méthode de Monte Carlo (Adaptée)

Pourquoi ?

- Meilleure méthode pour un Quanto complexe car elle permet de simuler simultanément le sous-jacent et le taux de change.
- Gère les structures complexes comme les produits à barrière, asiatiques, autocalls en version Quanto.
- Fonctionne même avec une volatilité et une corrélation stochastiques.

Limites :

- Convergence plus lente que les formules fermées pour des produits simples.
- Nécessite un grand nombre de simulations pour capter les dépendances correctement.

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Fonctionne uniquement pour des options vanilles sous hypothèses simplificatrices.
Arbres Binomiaux	**Non**	Trop lourd à implémenter avec double dynamique (sous-jacent + taux de change).
Différences Finies	**Non**	Possible mais lourd en calcul, utilisé surtout pour les modèles calibrés.
Monte Carlo	**Oui**	Approche flexible, gère toutes les complexités des produits Quantos.

Top Recommandation :

1. Monte Carlo → Meilleure méthode pour tous les produits Quantos complexes.
2. Formule Fermée et Différences Finies → Accepté si on reste sur un Quanto simple (Call ou Put sans barrière).

9 Évaluation des Spread Options

9.1 Méthode des Formules Fermées (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Les formules fermées pour les spread options ne fonctionnent que sous des hypothèses trop simplificatrices (corrélation fixe, volatilité constante, distribution normale des prix).

Limites :

- Ne prend pas en compte la volatilité stochastique ni la dynamique de corrélation.
- Trop restrictif pour refléter les prix de marché réels.

9.2 Méthode des Arbres Binomiaux (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Un arbre binomial standard ne peut pas gérer correctement la dépendance entre deux actifs corrélés.
- Un arbre bivarié deviendrait trop lourd computationnellement et nécessiterait une double discrétisation des actifs.

Limites :

- Explosion combinatoire (chaque actif doit suivre sa propre dynamique, ce qui double le nombre de nœuds).
- Impraticable en temps de calcul.

9.3 Méthode des Différences Finies (Non adaptée)

Pourquoi ?

- Les différences finies nécessitent une grille bivariée pour modéliser l'évolution conjointe des deux actifs, ce qui augmente énormément la charge de calcul.
- Gérer la corrélation entre les actifs dans un cadre aux différences finies est complexe et difficilement stable numériquement.

Limites :

- Trop lourd computationnellement pour des spreads avec des maturités longues.
- Difficile à calibrer pour capturer la dynamique réelle du marché.

9.4 Méthode de Monte Carlo (Adaptée)

Pourquoi ?

- Méthode la plus flexible, car elle permet de simuler directement les trajectoires des deux actifs en tenant compte de leur corrélation.
- Fonctionne même pour des modèles complexes de volatilité stochastique et de corrélation dynamique.
- Peut intégrer des barrières, des structures asymétriques et des scénarios de stress.

Limites :

- Nécessite beaucoup de simulations pour obtenir un résultat précis.
- Doit être optimisé avec des techniques de réduction de variance pour une bonne convergence.

Conclusion

Méthode	**Adaptée ?**	**Pourquoi**
Formule Fermée	**Non**	Hypothèses trop simplificatrices, ne capture pas les dynamiques réelles.
Arbres Binomiaux	**Non**	Trop lourd computationnellement, difficile à implémenter en pratique.
Différences Finies	**Non**	Problème de complexité et de stabilité numérique, impraticable.
Monte Carlo	**Oui**	Simule directement les deux actifs et leur dépendance, méthode la plus flexible.

Top Recommandation :

1. Monte Carlo $\rightarrow$ Meilleure méthode pour des spreads complexes avec corrélations dynamiques.