3. $\mathbb{E}[e^X] = e^{b+\frac{1}{2}a}$ avec $X \sim \mathcal{N}(b, a)$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

$$\hookrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

① + ② = $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \, f_X(y) \, dy$$

$$\hookrightarrow f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \, e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}$$

Regrouper les y

$$e^y e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}} = e^{y - \frac{(y-b)^2}{2a}}$$

$$\ln \Rightarrow y - \frac{(y-b)^2}{2a} = \frac{2ay}{2a} - \frac{(y-b)^2}{2a}$$

$$= \frac{2ay-(y-b)^2}{2a} = \frac{2ay-(y^2-2yb+b^2)}{2a} = \frac{2ay-y^2+2yb-b^2}{2a}$$

$$= \frac{-y^2+2y(a+b)-b^2}{2a} = -\frac{y^2-2y(a+b)+b^2}{2a}$$

→ On veut avoir $(y - \text{qlq chose})^2 + \text{reste}$

Plus facile à intégrer

$$(y-c)^2 = y^2 - 2yc + c^2$$

$$\hookrightarrow c = a+b$$

$$\to (y-(a+b))^2 = \underbrace{y^2 - 2y(a+b)}_{\text{On garde}} + (a+b)^2$$

Pour avoir un carré parfait on devrait avoir b^2

$$-\left(y^2 - 2y(a+b) + b^2\right) = -(y-(a+b))^2 - (a+b)^2 + b^2$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(y-(a+b))^2 - (a+b)^2 + b^2}{2a}} dy$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-(a+b))^2}{2a}} \cdot e^{-\frac{b^2-(a+b)^2}{2a}} dy$$

$$\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{-\frac{b^2-(a+b)^2}{2a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-(a+b))^2}{2a}} \, dy}_{N(a+b,\,a) \,=\, 1}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{-\frac{b^2-(a+b)^2}{2a}}$$

$$b^2-(a^2+2ab+b^2) = -a^2-2ab$$

$$-\frac{-a^2-2ab}{2a} = \frac{a}{2}+b = b+\frac{1}{2}a$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{b+\frac{1}{2}a}}$$