Variance

Par définition la Variance de X se définit comme l'espérance du carré de l'écart entre X et son espérance $\mathbb{E}[X] = \mu$

$$Var(X) := \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]$$

Dév.

$$(X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + X^2 \leftarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mathbb{E}[2\mu X]}_{2\mu = \text{constantes}} + \underbrace{\mathbb{E}[\mu^2]}_{\text{constante} \rightarrow \mathbb{E}[\mu^2] = \mu^2}$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=\mu} + \mu^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mu + \mu^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mu}_{=\mathbb{E}[X]}{}^2$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])$$

$$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}$$

LS 0317