Q2 : Quelle est la loi de $\ln(S_t) - \ln(S_s) \mid \mathcal{F}_s$?

1. Hypothèse de S_t : $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$

2. Application d'Itô : $f(S_t) = \ln(S_t)$

On sait que : $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$

$$Var(dW_t) = \mathbb{E}\left[(dW_t)^2\right] - \left(\mathbb{E}[dW_t]\right)^2$$

$$dt = \mathbb{E}\left[(dW_t)^2\right] - 0$$

$$df(S_t) = f'(S_t)\, dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t)(dS_t)^2$$

- $f'(S_t) = \frac{1}{S_t}$
- $f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}$

- $$(dS_t)^2 = (\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t)^2$$
$$= (\mu S_t\, dt)^2 + 2(\mu S_t\, dt)(\sigma S_t\, dW_t) + (\sigma S_t\, dW_t)^2$$
$$= 0 + 0 + \sigma^2 S_t^2\, dt$$
$$= \sigma^2 S_t^2\, dt$$

$dt \to 0$, $(dt)^2 \Rightarrow 0$: négligeable

$$d(\ln(S_t)) = \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{S_t^2}}\right)(\sigma^2 \cancel{S_t^2}\, dt)$$

$$d(\ln(S_t)) = \frac{1}{\cancel{S_t}}(\mu \cancel{S_t}\, dt + \sigma \cancel{S_t}\, dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$d(\ln(S_t)) = \mu\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$d(\ln(S_t)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t$$

3. Application et Intégration

$$\ln(S_t) - \ln(S_s) = \overbrace{\int_s^t \underbrace{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}_{\text{constante}} du}^{\text{Intégrale classique}} + \overbrace{\int_s^t \sigma\, dW_u}^{\text{Intégrale Stochastique}}$$

Intégrale Stochastique

Déf : $\int_s^T dW_u = W_t - W_s$

$\sum_{u=s}^{t} dW_u = W_t - W_s$

car : $W_t = W_s + \int_s^t dW_u$

$$\ln(S_t) - \ln(S_s) = \underbrace{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)}_{\text{déterministe}} + \sigma(W_t - W_s)$$

$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Donc : $\sigma W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$

$$\boxed{\ln(S_t) - \ln(S_s) \mid \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s),\ \sigma^2(t-s)\right)}$$