Contrôle Optimal

Exercice x_t en montant

C2

$$\boxed{f'(t) = k f(t) \Rightarrow f(t) = C e^{kt}}$$

On veut trouver $f(t)$ qui vérifie l'éq. de dérivé.

On veut donc une fonction dont la dérivé est proportionnelle à elle-même

Etape 1 : Séparation des variables

$f'(t) = k f(t)$ — On réécrit avec la notation différentielle formelle car cela permet de manipuler les 2 côtés.

$\Rightarrow \frac{df}{dt} = k \cdot f(t)$ — $\times dt$

$\Rightarrow df = k \cdot f(t) \cdot dt$ — $\div f(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{f(t)} df = k \cdot dt$

Etape 2 : Intégration

$\int \frac{df}{f(t)} = \int k\, dt$ ← ⚠ On intègre par rapport à t. On veut exprimer la primitive de $\frac{1}{f(t)} df$ en t

Si $f'(t) = k f(t)$ alors : $\frac{f'(t)}{f(t)} = k$

et donc : $\frac{d}{dt} \ln(f(t)) = \frac{f'(t)}{f(t)} = k$

Donc : $\int \frac{df}{f(t)} = \int k\, dt$

$\Rightarrow \ln(f(t)) = kt + C$

Etape 3 : Exponentiation

$f(t) = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^{C} = C_1 \cdot e^{kt}$

Etape 4 : Application à $f(0)$

$f(0) = C_1 \cdot e^{k\cdot 0} = C_1 \Rightarrow C_1 = f(0) \Rightarrow \boxed{f(t) = f(0) \cdot e^{kt}}$