Montrer que $\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = e^{\mu(t-s)} \cdot S_s$

↑ écriture log-normale ⇒ B-S

On connaît : $S_t = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$

On peut réécrire S_t en fonction de S_s :

$$S_t = S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right)$$

On transforme en $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\underbrace{S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)}_{\text{constante}} + \sigma(W_t - W_s)\right)\right]$$

On sort les constantes de l'$\mathbb{E}$:

Pour $X \sim N(0, t-s)$
$\mathbb{E}[e^{aX}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)}$
$a = \sigma$

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma(W_t - W_s)\right)\right]$$

$$= S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot (t-s)\right)$$

$$= S_s \cdot e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 (t-s)\right)\right]}$$

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$$= S_s \cdot e^{\left[\left(\mu - \cancel{\frac{\sigma^2}{2}}\right) + \cancel{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)(t-s)]}$$

factorisat° $(t-s)$

$$= S_s \cdot e^{[\mu(t-s)]}$$