Les Copules

But : Modéliser correctement les dépendances entre des composants.

Exemple : On a 2 actions A et B, on peut facilement connaître leur comportement individuel (distrib. marginale)
Quid : lors d'un événement extrême ?

Explication : Il faut étudier leur structure de dépendance.
↳ la corrélation classique est limitée par :
- la dépendance linéaire
- muette dans les cas extrêmes.

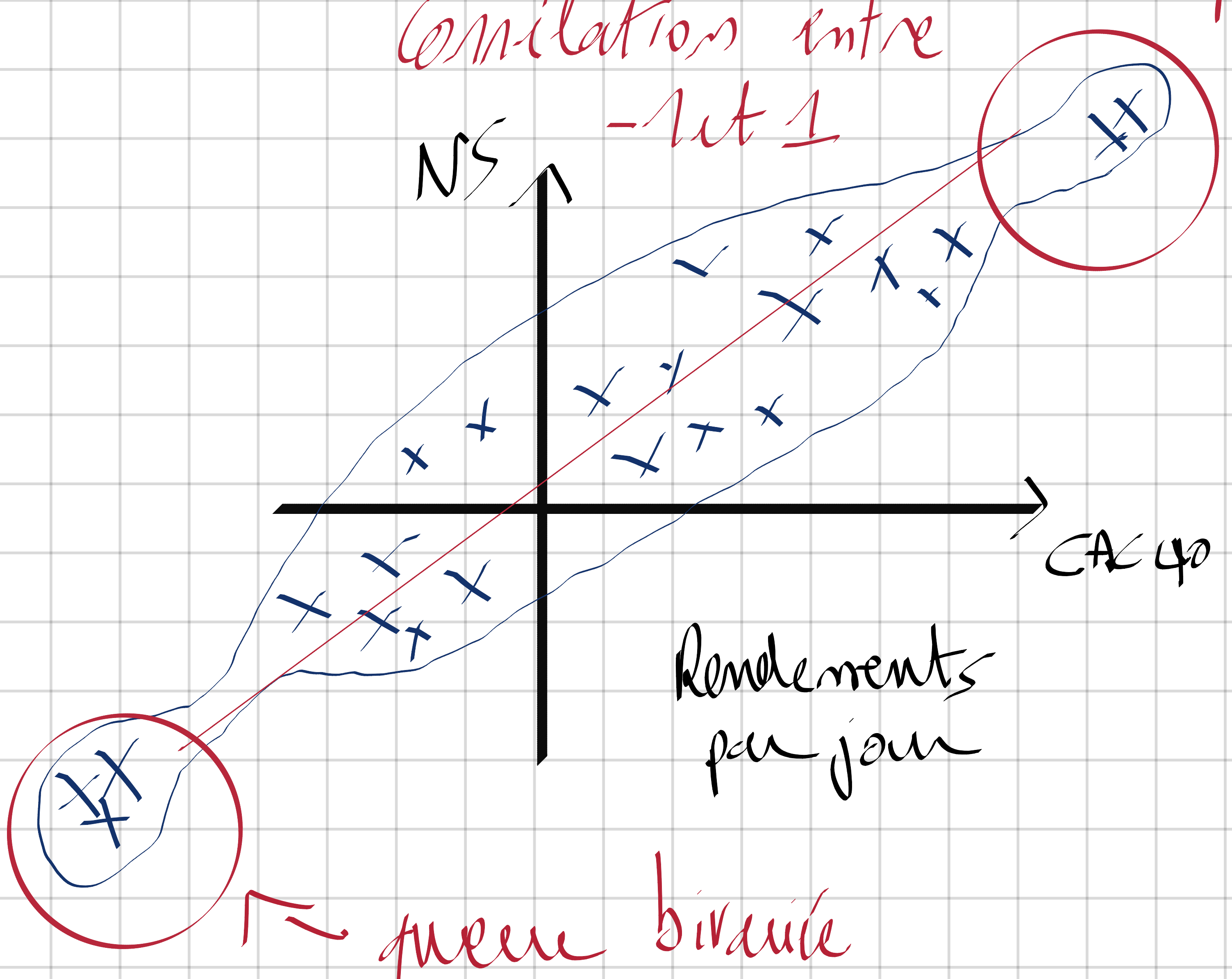
On a besoin d'un outil plus précis pour :
- Séparer les distributions marginales du comportement commun
- Modéliser explicitement cette dépendance.

Définition : Une Copule est une fonction math. qui permet de lier plusieurs distributions marginales pour créer une distribution jointe → Théorème de Sklar.

Interprétation : • On peut choisir les lois marginales que l'on veut.
ex : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$
- Et ensuite choisir indépendamment la manière dont ces 2 variables sont dépendantes via une copule.

Permet de : 1) Combiner facilement des lois et différentes dépendances
2) Capter des dépendances extrêmes
3) Modéliser correctement la corrélation dans les queues

Copule empirique



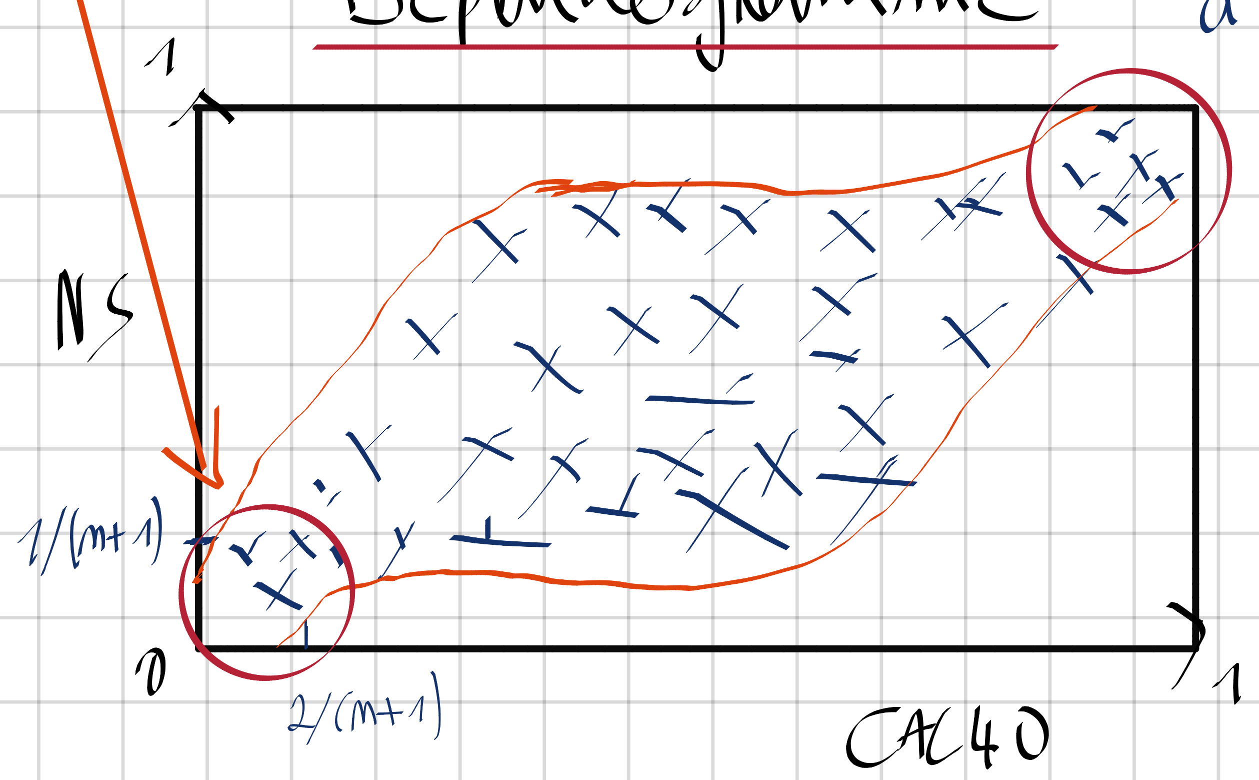
Graphiquement, on voit que ce n'est pas linéaire.

But : Transformer ce nuage de points en une fonction bivariée qui va capter la corrélation des rangs
→ re corrélation des extrêmes
→ Uniformiser les données

Il y a des indicateurs non linéaires de la dépendance :
→ Corrélation des rangs : ① le tau de Kendall
② le rho de Spearman

Date	Proba associée	Rang NS	NS	CAC 40	Rang CAC 40	Proba associée
	$1/(m+1)$	1	Minimum -15%	-10%	2	$2/(m+1)$
		2	-12%	-14%	1	$1/(m+1)$
	⋮	$m-1$	m jour			
	$m/(m+1)$	m				

Dépendogramme d'une copule empirique ← via l'extraction des rangs



On veut appliquer une copule paramétrique avec Maximum-Vraisemblance.

→ 3 éléments sont présents sur le graphique
① Distrib univariée R CAC 40 → propre loi
② Distrib univariée R NS → propre loi
③ La loi de la dépendance entre les 2 rangs
↳ c'est la copule

Donc dans chaque loi bivariée se cache
- 2 lois marginales
- 1 copule

Construction d'une Copule empirique

On ne connaît pas la fonction de répartition théorique F_X

Donc on remplace par une version empirique basée sur les rangs

$\rightarrow$ On construit une approximation de $F_X(x)$: $\hat{F}_X(x) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leq x}$

$$\hat{F}_X(X_i) = \frac{R_i}{n}$$

Rang 1 $\rightarrow$ $1/n+1 \simeq 0{,}00018...$

Donc le 1er rang a une probabilité très faible

ex : Rang 1 Nasdaq baisse -22% sur 102 jours

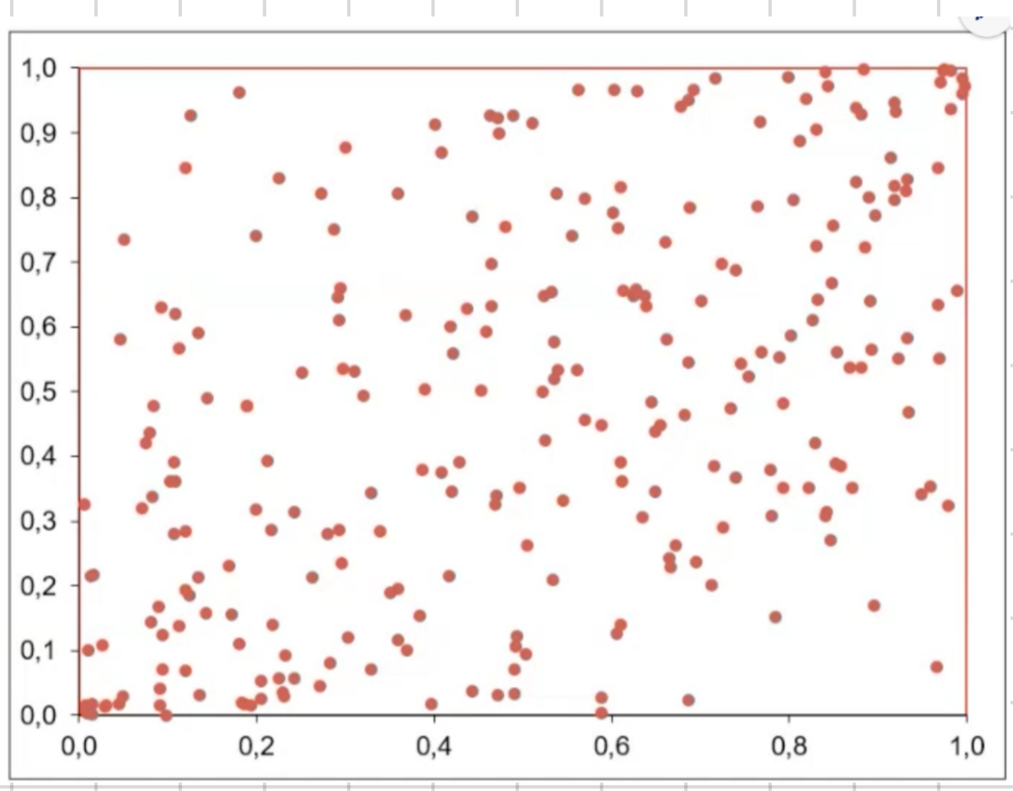
$$\hat{F}_{NS}(-22\%) = \frac{1}{102} \simeq 0{,}0018$$

Interprétation : Pour un sample de 102 observations, seule une a eu un rendement inf ou égale à -22%

A quoi sert le Dépendogramme ?

Nuage des rangs (Copule Empirique)

$$(u_i, v_i) = \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{R_i'}{n+1}\right)$$



- Il n'y a plus d'unités
- Tous les points sont dans $[0,1]^2$

$\rightarrow$ Pas de diagonale donc faible dépendance

$\rightarrow$ Pas de structure visible $\rightarrow$ proche d'une copule indépendante

carré uniforme

Nuage de rendements brut vs Copule empirique

Axes	Rendements réels	Rang normalisé
Sensible aux unités	Oui	Non
Info sur Vol	Oui	Non
Info sur Dépendance	Non	Oui exclusivement (on retire le bruit)
Pour modéliser	Non	Oui

Transition Copule empirique → Copule bivariée

Etape 1 : On part d'un tableau de rendements

Etape 2 : Construction de la copule empirique

Objectif : transformer les rendements en variable uniformes $[0,1]$

1) Classer les rendements $R_{1,t}$ et $R_{2,t}$
2) Transformer ces rangs en probabilités : $u_{1,t} = \dfrac{rang(R_{1,t})}{T+1}$ $u_{2,t} = \dots$
3) Nuage de points $(u_{1,t}, u_{2,t})$ est la copule empirique

↳ Utile pour visualiser la dépendance → Dépendogramme

Etape 3 : Ajustement d'une copule bivariée (Théorique)

1) On choisit un modèle :

- Gaussienne (corrélation linéaire)
  - → données linéaires, pas de dépendance de queue, corr. de Pearson élevé
  - → pour modéliser des aisés dépendance asymétrique
- Student (dépendance de queue)
  - → Dépendance symétrique avec des events extrêmes, On veut capter les queues
  - → Pas de queue, Asymétrique
- Clayton, Gumbel, Frank (copule Archimédienne)
  - Clayton : → Forte dép. queue gauche ; → modéliser extrême à la hausse
  - Gumbel : → Forte dép. queue droite ; → Chute de symétrie
  - Frank : → On veut une copule flexible et symétrique ; → modéliser extrêmes

2) On ajuste le modèle sur les données $(u_{1,t}, u_{2,t})$ par :

- Méthode des moments (ex. Kendall)
- Maximum de vraisemblance

→ On obtient une fonction $C(u_1, u_2; \theta)$ avec un param. θ estimé.

↳ Utile pour :

- simuler des nouvelles données avec la m̃ dépendance
- Générer des scénarios de risque (VaR, stress test)
- Etendre le modèle à plusieurs dimensions
- Modéliser la dépendance de queue

→ Extraire une copule à partir d'une loi bivariée → Sklar