

Formule explicite de S_T dans B&S

08/01/23

On veut la forme explicite de: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

1) Transformation

terme multiplicatif \rightarrow complex

Simplification avec: $X_t = \ln S_t$

Application d'ITô: $dX_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$ \leftarrow beaucoup plus simple (que addition)

2) Intégration de X_t

On a: $dX_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$

On intègre entre $t=0$ et $t=T$:

$$X_T - X_0 = \int_0^T (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \int_0^T \sigma dW_t$$

$$X_T = X_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T$$

\swarrow Transp. de $X_T = \ln(S_T)$

$$\ln(S_T) = \ln(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T$$

$$S_T = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$$

\swarrow exponentielle

3) Application sous la mesure risque-neutre

On remplace μ par r

$$S_T = S_0 \cdot e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T^Q}$$

\swarrow avec $W_T^Q \sim N(0, T)$