Exercices : Dév. de Taylor

07/03/25

① Exercice 1 : Approximation linéaire

$f(x) = e^{x}$ autour de $x_0 = 0$ en 1^er^ ordre (linéaire)

1) Calcul des dérivées

$f(0) = e^{0} = 1$

$f'(x) = e^{x}$ donc $f'(0) = e^{0} = 1$

2) Dév. de Taylor à l'ordre 1

$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x$

Donc : $e^{x} \approx 1 + x$

3) Vérification (avec $x = 0,1$) :

- Approximation : $e^{0,1} \approx 1 + 0,1 = 1,1$
- Valeur exacte : $e^{0,1} \approx 1,105$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Exercice 2 : Approximation quadratique

On veut approximer $f(x) = \cos(x)$ avec dév. de Taylor <u>au second ordre</u>

1) Calcul des dérivées

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x)$ donc $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x)$ donc $f''(0) = -1$

2) Dév. de Taylor à l'ordre 2

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2$$

On remplace avec la fonction de l'exercice

$$\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$$

3) Vérification (avec $x = 0,1$)

- Approximation : $\cos(0,1) \simeq 1 - \frac{0,1^2}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$
- Valeur exacte : $\cos(0,1) = 0,995$

Exercice 3 : Développement autour d'un point non nul

On veut approximer $f(x) = \ln(x)$ autour de $x_0 = 1$

1) Calcul des dérivées

$f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(1) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f''(1) = -1$

2) Dév. de Taylor à l'ordre 2

$$\boxed{f(x) \simeq f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2}$$

$$\ln(x) \simeq \cancel{0} + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2$$

On remplace avec la fonction de l'exercice

$$\ln(x) \simeq (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$$

3) Vérification

- Approximation : $\ln(1{,}1) \simeq (1{,}1 - 1) - \dfrac{(1{,}1-1)^2}{2} = 0{,}1 - \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}095$
- Valeur exacte : $\ln(1{,}1) = 0{,}0953$

Exercice 4 : Application aux proc. stochastiques

On a : $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

On définit : $X_t = \ln S_t$

On cherche la dynamique de X_t grâce à Itô

1) Identifier la fonction $f(S)$

$f(S) = \ln S$ ← But : comment $f(S)$ évolue lorsque S_t suit une EDS

2) Calcul des dérivées

$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

$f'(S) = \frac{d}{dS}\ln(S) = \frac{1}{S} \Leftarrow \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}$

$f''(S) = \frac{d}{dS}\left(\frac{1}{S}\right) = -\frac{1}{S^2} \Leftarrow \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ ← $\frac{d}{dx}x^{-m} = -m x^{m-1}$

concave

2) Application du lemme d'Itô

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW_t}$$

- $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ← $f(S) = \ln(S)$ ne dépend pas directement de t donc 0
- $\mu S \cdot \frac{1}{S} = \mu$ ← c'est le drift de la variat° de $\ln(S_t)$
- $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \left(-\frac{1}{S^2}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2$ ← correction du drift
- $\sigma S \frac{1}{S} dW_t = \sigma dW_t$ ← var. aléatoire

$$dX_t = \left(0 + \mu S \cdot \frac{1}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \left(-\frac{1}{S^2}\right)\right) dt + \sigma S \cdot \frac{1}{S} dW_t$$

$$dX_t = \left(\frac{\mu S}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(-\frac{1}{S^2}\right)\right) dt + \sigma \frac{S}{S} dW_t$$

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t$$

On garde car en calcul sto. $(dW_t)^2 = dt$

$$\boxed{dX_t = \mu\, dt - \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dW_t}$$