Démonstration : Drift d'un taux de change

μ_x sous Q^d

On suppose : $$\frac{dX_t}{X_t} = \underbrace{\mu_x^{Q^d}}_{?} dt + \sigma_x dW_t^{Q^d}$$

On sait que :

- Valeur du portefeuille étranger = $e^{r_f t}$
- Valeur du portefeuille en devise domestique = $X_t \cdot e^{r_f t}$

↳ martingale sous Q^d : $V_t = X_t \cdot e^{r_f t} \cdot e^{-r_d t}$

$$V_t = X_t \cdot \underbrace{e^{(r_f t - r_d t)}}_{\text{terme déterministe}}$$

On applique Itô :

(pour un produit : $d(A_t B_t) = A_t dB_t + B_t dA_t + dA_t dB_t$)

$$dV_t = e^{(r_f - r_d)t} dX_t + X_t \, d\left(e^{(r_f - r_d)t}\right)$$

- $d(X_t) = X_t (\mu_x dt + \sigma_x dW_t^{Q^d})$
- $d\left(e^{(r_f - r_d)t}\right) = (r_f - r_d) \, e^{(r_f - r_d)t} dt$

$$dV_t = e^{(r_f - r_d)t} \cdot X_t (\mu_x dt + \sigma_x dW_t^{Q^d}) + X_t \cdot (r_f - r_d) \, e^{(r_f - r_d)t} dt$$

$$dV_t = \underline{X_t \cdot e^{(r_f - r_d)t}} \left[(\mu_x dt + \sigma_x dW_t^{Q^d}) + (r_f - r_d) dt\right]$$

$$dV_t = V_t \left[(\underbrace{\mu_x + r_f - r_d}_{= 0 \text{ car martingale sous } Q^d}) dt + \sigma_x dW_t^{Q^d}\right] \quad \text{réorg}$$

$$\mu_x + r_f - r_d = 0$$

$$\boxed{\mu_x = r_d - r_f}$$

$$\boxed{\frac{dX_t}{X_t} = (r_d - r_f) dt + \sigma_x dW_t^{Q^d}}$$