DiFiQ

Niveau 2

Calcul Stochastique

Prof. Bruno Bouchard

INDEX

Mouvement Brownien

21.04.25

On dit qu'un processus W est un MB sous $\mathbb{P}$ si :

① $W_0 = 0$

Signification : le processus commence à zéro
But : ça fixe un point de départ commun à toutes les trajectoires.

② $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto W_t$ est une fonction continue $\mathbb{P}$-p.s.

Interprétation : On définit une fonction dont la variable t vit dans $\mathbb{R}_+$ et qui associe à chaque t la valeur W_t.
But : empêcher les sauts (brutaux) - le processus doit évoluer de façon fluide.

③ $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ pour tout $t \geq s \geq 0$

Signification : les incréments du M.B. suivent une loi Normale.
Cette loi est centrée (moyenne nulle) et de variance égale à la durée de l'intervalle : $t-s$
But : Donner une distribution probabiliste précise des variations.

④ $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont $\perp\!\!\!\perp$

Signification : les incréments sont indépendants
But : garantir une absence de mémoire du processus.
le futur est indépendant du passé.
↳ Notion de marché "efficace"
En probabilité, cela donne une structure très puissante pour construire des intégrales stochastiques (via martingales).

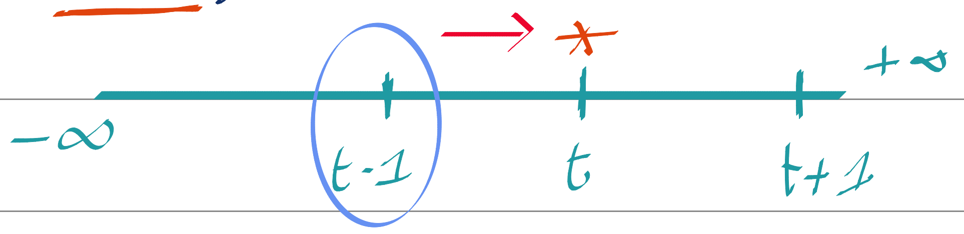
SECTION 1

Questions / Examen

Q Examen : Temps d'arrêts

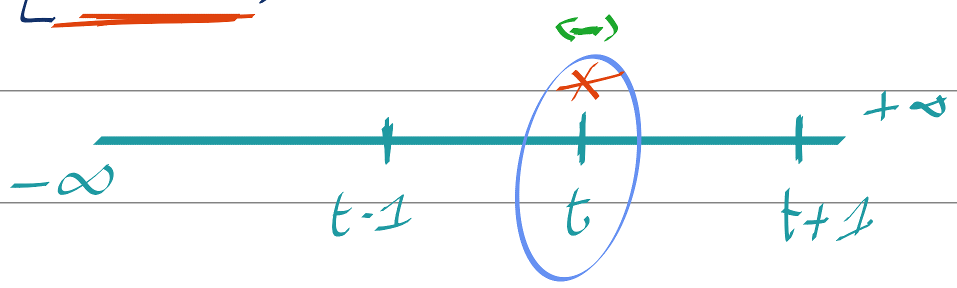
Interprétat° : Est-ce que l'événement τ (ex : barrière à 200\$) a-t-il était égale au spot en t ?

• $\{\tau = t\}$ est connu en $\mathcal{F}_{t-1}$ ✗ → On est en $\mathcal{F}_{t-1}$ donc on ne peut pas savoir si $\tau = t$.

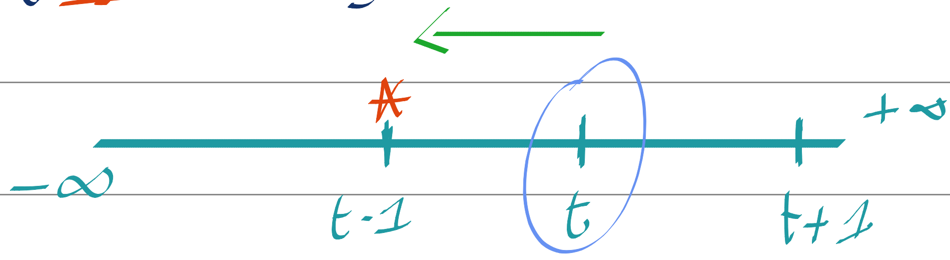


• $\{\tau \geq t\}$ est connu en $\mathcal{F}_t$ ✓ → En $\mathcal{F}_t$ on sait si $\tau \geq t$

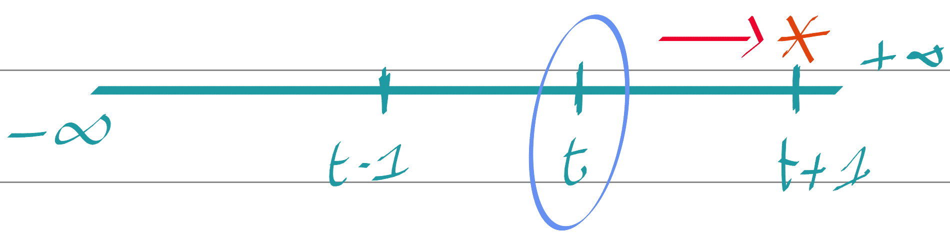
ex : τ = barrières à 200\$
$\mathcal{F}_t$ = spot à 150 \$ ou 250 \$



• $\{\tau - 1 < t\}$ est connu en $\mathcal{F}_t$ ✓ → En $\mathcal{F}_t$ on sait si $\tau - 1 < t$



• $\{\tau > t+1\}$ est connu en $\mathcal{F}_t$ ✗ → En $\mathcal{F}_t$ on ne peut pas savoir si τ sera supérieur à $t+1$.



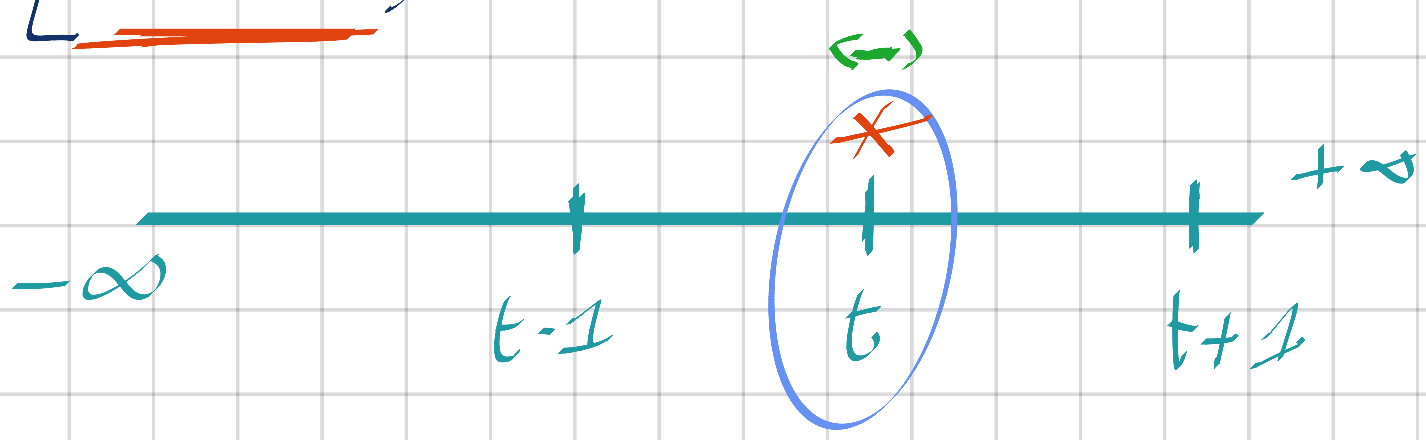
Cours : 19/01/24 et 24/01/24

Exercice 2.20, 2.21

Terminologie 2.19 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ telle que l'évènement $\{\tau \leq t\}$ est connu en t, pour tout $t \leq T$.*

Excercice 2.20 *Montrer que $\{\tau > s\}$ et $\{\tau = s\}$ sont connus en t quel que soit $s \leq t$, si τ est un temps d'arrêt.*

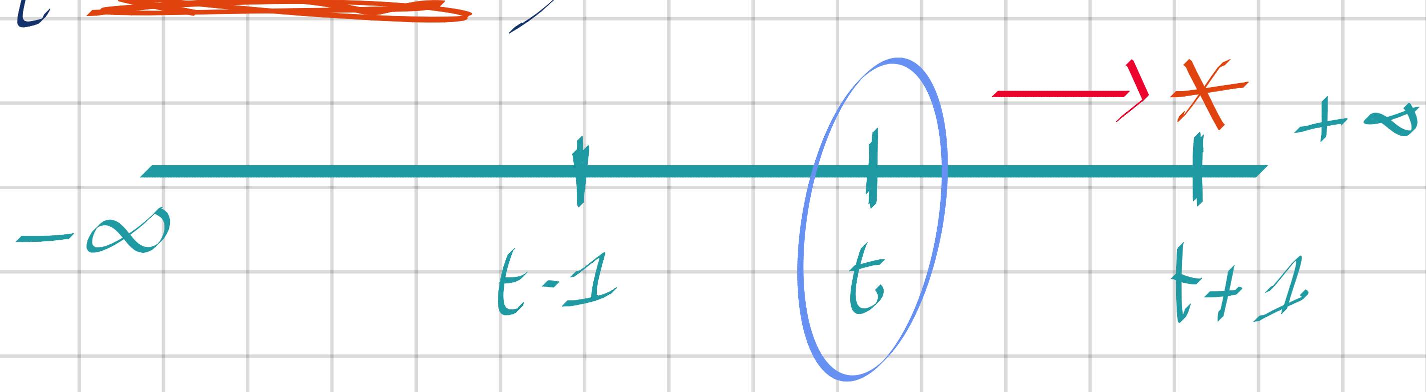
• $\{\tau \geq t\}$ est connu en t



✓ → En t on sait si $\tau \geq t$

ex: τ = barrières à 200 \$
t = spot à 150 \$ ou 250 \$

• $\{\tau > t+1\}$ est connu en t



✗ → En t on ne peut pas savoir si τ sera supérieur à $t+1$

Si $r = 0$ alors S_T - Q martingale

$S_T = S_0 \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$

$r = 0$ $\Rightarrow$ Démonstration pour prouver que c'est une martingale

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 2

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 3

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 4

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 5

Cours 4
24/01/24

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

LS0324

Chapitre 2 : Temps Continu

I/ Mouvement Brownien et B-S

W et pas B car B en Finance = Bonds / ZC

- Cours de l'action dans B-S : $S_t = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_T}$

où μ est le drift (la dérive)

σ la volatilité

$W = (W_t)_{t \leq T}$ est un mvt Brownien (ou "processus de Wiener")

en probabilité

W

Parfois : W = Wealth

B = Brownien

$$S_t = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

drift = tendance

?

Volatilité

bruit

Blague des probabilistes qui répètent tout le temps : "On commence par définir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$."
espace des possibles ; Tribu ; Mesure de proba

1/ C'est quoi un mvt Brownien ?
2/ Pourquoi on a $\sigma^2/2$? Itô
3) Comment on définit la richesse ?

$(\Omega, \mathbb{P})$

mesure de référence

Définition de MB : On dit que W est un MB sous $\mathbb{P}$ si :

Sous $\mathbb{P}$ si :

(1) $W_0 = 0$ (parfois $W_0 = 1$)

(2) $t \to W_t(\omega)$ est continu pour tout $\omega \in N$
où N est un ensemble tq $P[N] = 1$ $\iff$ P.S.

(3) $\forall t \geq s$: $W_t - W_s \sim N(\underbrace{0}_{\mu}, \underbrace{t-s}_{\sigma^2})$ (parfois : $N(\sqrt{t-s}, t-s)$)

Gaussienne = Continue

$P(W_t = 0) = 0$

$P(W_t$ atteint 0 pour un certain $t) = 1$

(4) $\forall\, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$: $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendants
↳ proc. à accroissements indépendants)

"Vecteur Gaussien"
- Les accroissem^t ont une structure bien définie
⇒ On peut utiliser des outils : matrice, covariance, distrib. conditionnelle

$$N\left(\underbrace{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}_{\Delta t},\ \underbrace{\sigma^2 t}_{Var}\right)$$

↖ Plus le temps augmente plus la variance augmente

$$S_t = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

↳ $W_0 = 0$

$W_t = W_t - W_0 \sim N(0, t)$

↳ C'est une loi log-Normale : exponentiel d'une Gaussienne

$Var(\sigma X) = \sigma^2 \cdot Var(X)$

II) Exercice 1.3 :

EXAMEN

1. $\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = t \wedge s$

Je suppose que $t \geq s$ (arbitraire)

$W_t = (W_t - W_s) + W_s$

$W_t W_s = \left[(W_t - W_s) + W_s\right] W_s$

$W_t W_s = (W_t - W_s) W_s + W_s^2$

$\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = \mathbb{E}\left[(W_t - W_s) W_s\right] + \mathbb{E}\left[W_s^2\right]$

$Var(W_s) = E[W_s^2] - (E[W_s])^2$

On sait que : $W_s \sim N(0, s)$

car $E[W_s^2] = Var(W_s) + (E[W_s])^2$

$= s + (0)^2$

$= s$

$E\left[W_t W_s\right] = E\left[(W_t - W_s)(W_s - 0)\right] + E(W_s^2)$

Indépendance des accroissements

$= \underbrace{E\left[W_t - W_s\right]}_{=0} \cdot \underbrace{E\left[W_s - 0\right]}_{=0} + s$

car (3) Mvt Brownien : $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

$= s$

Si on avait fait $t \leq s$, on aurait trouvé t

2. $\mathbb{E}\left[\int_0^t |W_s|^2 ds\right] = \frac{t^2}{2}$

"On peut toujours intervertir l'E et l'Intégrale"

$E\left[\int_0^t |W_s|^2 ds\right] = \int_0^t E\left[|W_s|^2\right] ds = \int_0^t s \, ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{t^2}{2}$

linéarité de l'espérance

Ça veut dire qu'on peut d'abord calculer l'E de W_s^2 puis intégrer.

$\int s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + C$

car $\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{n+1}}{n+1}\right) = s^n$

- L'Intégrale "ajoute" des aires sous la courbe
- La dérivée "enlève" des aires en prenant le taux de var. instantané
- La primitive "redonne" l'aire sous la courbe

3. $\mathbb{E}[e^X] = e^{b+\frac{1}{2}a}$ avec $X \sim \mathcal{N}(b, a)$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \qquad \hookrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{①+②=\mathbb{E}}{e^y\, f_X(y)}\, dy$$

$$\hookrightarrow f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\, e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\, e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}$$

Regrouper les y

$$e^y e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}} = e^{y - \frac{(y-b)^2}{2a}} \xrightarrow{\ln} y - \frac{(y-b)^2}{2a} = \frac{2ay}{2a} - \frac{(y-b)^2}{2a}$$

$$= \frac{2ay-(y-b)^2}{2a} = \frac{2ay-(y^2-2yb+b^2)}{2a} = \frac{2ay-y^2+2yb-b^2}{2a}$$

$$= \frac{-y^2+2y(a+b)-b^2}{2a} = -\frac{y^2-2y(a+b)+b^2}{2a}$$

→ On veut avoir $(y - \text{qlq chose})^2 + \text{reste}$ ↓ Plus facile à intégrer

$$(y-c)^2 = y^2 - 2yc + c^2$$

$$\hookrightarrow c = a+b$$

$$\rightarrow (y-(a+b))^2 = \underbrace{y^2 - 2y(a+b)}_{\text{On garde}} + (a+b)^2$$

Pour avoir un carré parfait on devrait avoir b^2

$$-(y^2 - 2y(a+b) + b^2) = -(y-(a+b))^2 - (a+b)^2 + b^2$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\, e^{-\frac{(y-(a+b))^2 - (a+b)^2 + b^2)}{2a}}\, dy$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-(a+b))^2}{2a}} \cdot e^{-\frac{b^2-(a+b)^2}{2a}}\, dy$$

$$\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{-\frac{b^2-(a+b)^2}{2a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-(a+b))^2}{2a}} \, dy}_{N(a+b,\, a) \;=\; 1}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{-\frac{b^2-(a+b)^2}{2a}}$$

$$\to b^2-(a^2+2ab+b^2) = -a^2-2ab$$

$$-\frac{-a^2-2ab}{2a} = \frac{a}{2}+b = b+\frac{1}{2}a$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{b+\frac{1}{2}a}}$$

3) $E[e^X] = e^{b+\frac{1}{2}a}$ si $X \sim N(b, a)$ "Calcul important car formule de B-S est trouvé comme ça"

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^y f_X(y)\, dy$$

① + ② = définit° #

avec $f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$= \int e^y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}} dy$$

Comment résoudre ? On a "y" dans e^y et aussi dans la Gaussienne
→ le but est de transférer le y de e^y dans la Gaussienne

On regroupe les 2 exp : $e^y \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}} = e^{y - \frac{(y-b)^2}{2a}}$

$$y - \frac{(y-b)^2}{2a} = y - \frac{y^2 - 2yb + b^2}{2a}$$

$$= -\frac{y^2 - 2yb + b^2 - 2ay}{2a}$$

$$= -\frac{-2ay + y^2 - 2yb + b^2}{2a}$$

réorg. comme le prof

On veut avoir $(y - \text{quelque chose})^2$ un carré parfait $(y-C)^2$

$$= \int \frac{e^{-(-2ay + y^2 - 2yb + b^2)/2a}}{\sqrt{2\pi a}} dy$$

On compare → On veut que : $-2ay - 2yb = -2yC$

on : $-2ay - 2yb = -2y(b+a)$

On identifie donc C comme : $C = (b+a)$

Donc :

On essaye avec : $(y-C)^2$

On sait que : $(y-C)^2 = y^2 - 2yC + C^2$

$= -(-2ay + y^2 - 2yb + b^2)$

$= 2ay - y^2 + 2yb - b^2$

$= y^2 - 2yb - 2ay + b^2$

$= y^2 - 2y(b+a) + b^2$

→ Construire un carré parfait

On veut : $(y-C)^2$

car : $(y-C)^2 = y^2 - 2yC + C^2$

$$y^2 - 2y(b+a) + b^2$$

on : $(y - (b+a))^2 = y^2 - 2y(b+a) + (b+a)^2$

On veut avoir b^2 donc il faut soustraire

on ajoute et soustrait : $(b+a)^2$

$$y^2 - 2y(b+a) + (b+a)^2 - (b+a)^2 + b^2$$

↓ On développe

$(b+a)^2 = b^2 + 2ab + a^2$

$-(b^2 + 2ab + a^2) + b^2$

$-b^2 - 2ab - a^2 + b^2$

$$y^2 - 2y(b+a) + (b+a)^2 \cancel{-b^2} - 2ab - a^2 \cancel{+b^2}$$

$$(y - (b+a))^2 - (2ab + a^2)$$

On avait : $= \int \frac{e^{\boxed{-(-2xy+y^2-2yb+b^2)/2x}}}{\sqrt{2\pi x}}\,dy$

$$-\frac{y^2-2yb-2yx+b^2}{2x} = -\frac{(y-(b+x))^2-(2xb+x^2)}{2x}$$

On sépare les termes : $\underbrace{-\frac{(y-(b+x))^2}{2x}}_{\text{terme loi normale}} + \underbrace{\frac{2xb+x^2}{2x}}$

$\Leftrightarrow \frac{2xb}{2x} + \frac{x^2}{2x}$

$\underbrace{b + \frac{x}{2}}$ ← Pas exploitable pour intégrale

On sait que : $(b+x)^2 = b^2 + 2xb + x^2$

$2xb + x^2 = (b+x)^2 - b^2$ ← Prof transforme pour mettre en évidence la densité Normale

$$\frac{(b+x)^2-b^2}{2x} = -\frac{b^2-(b+x)^2}{2x}$$

← exploitable pour l'intégrale

$$= \int \left(e^{-\frac{(y-(x+b))^2}{2x} - \frac{b^2-(x+b)^2}{2x}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,dy$$

$$= e^{-\frac{b^2-(x+b)^2}{2x}} \int e^{-\frac{(y-(x+b))^2}{2x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,dy$$

$$= e^{\frac{x}{2}+b} \underbrace{\int \frac{e^{-\frac{(y-(x+b))^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi x}}\,dy}_{=1}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{X}\right] = e^{b+\frac{1}{2}x}$$

Dev/Explicat° FPT pk 2° faces refondues 3 heures

Si $X \sim N(b, x)$ $\} * \lambda$

Remarque : $X \sim N(\lambda b, \lambda^2 x)$

$\boxed{\text{← On connait mtn la transformée de laplace d'une Gaussienne}}$

avec λ

donc : $E[e^{\lambda X}] = e^{\lambda b + \frac{\lambda^2 x}{2}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R}$) ⇒ Transformée de Laplace de la V.A

et si on transforme avec un Nombre complexe

↳ transformée de Fourier

👉 **Ta question clé est : pourquoi on s'embête à faire une transformation qui ressembl… à une densité normale alors qu'on pourrait juste sortir** la **constante et faire les calcu… après ?**

---

1. Ta méthode est mathématiquement correcte !

Si on suit **ta logique**, on pourrait procéder ainsi :

1️⃣ **On sort immédiatement la constante de l'intégrale** :

$$e^{\frac{2ab+a^2}{2a}} \int e^{-\frac{(y-(b+a))^2}{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\, dy.$$

2️⃣ **On reconnaît que l'intégrale restante est une densité normale et vaut 1 :**

$$e^{\frac{2ab-a^2}{2a}} \cdot 1 = e^{\frac{2ab+a^2}{2a}}.$$

3️⃣ **On réécrit $e^{\frac{2ab+a^2}{2a}}$ sous une forme simplifiée après coup.**

👉 **Donc oui, ta méthode est totalement valide !** 🎯

Mais alors… **pourquoi la transformation est-elle systématiquement faite AVANT de sorti… la constante ?**

---

2. Pourquoi fait-on la transformation avant de sortir la constante ?

👉 **Parce qu'elle permet une simplification immédiate sans avoir à refaire des calculs après.**

Si on **fait la transformation avant de sortir la constante**, on obtient :

$$e^{\frac{b^2-(b-a)^2}{2a}} \int e^{\frac{(y-(b+a))^2}{2a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\, dy.$$

📌 **Ici, on reconnaît immédiatement que l'intégrale est une densité normale et vaut 1.**
📌 **On peut donc directement écrire le résultat final sans calcul supplémentaire.**

👉 **Avantage : on évite une manipulation algébrique après coup.**

---

3. Quelle est la vraie raison derrière cette méthode ?

📌 **Mathématiquement, les deux méthodes sont équivalentes.**
📌 **Mais en pratique, les probabilistes préfèrent une approche qui met en évidence les lois normales immédiatement.**
📌 **Cela permet de reconnaître immédiatement que l'intégrale vaut 1 et de simplifier l'écriture.**

👉 **C'est une question de clarté et d'efficacité de calcul, pas une obligation mathématique.**

Exactement ! 🎯

Les deux méthodes sont mathématiquement correctes, et il s'agit principalement **d'une question de clarté et d'efficacité de calcul**.

📌 **Méthode 1 : Sortir directement la constante et la simplifier après**
✔ **Correct**
✔ On sort $e^{\frac{2ab+a^2}{2a}}$ et on fait les calculs après
✔ Nécessite de retravailler la constante une fois l'intégrale évaluée

📌 **Méthode 2 : Transformer d'abord pour reconnaître immédiatement une densité normale**
✔ **Correct**
✔ On reformule l'exposant avant de sortir la constante
✔ Permet de reconnaître immédiatement l'intégrale comme une densité normale qui vaut 1

👉 **En pratique, les probabilistes préfèrent la deuxième méthode car elle met en évidence la loi normale et simplifie les étapes.**

💡 **Mais les deux donnent le même résultat, donc tu peux utiliser celle avec laquelle tu es le plus à l'aise !** 😊

④ $\mathbb{E}\left[\int_0^1 |S_s|^2 ds\right] = \dfrac{S_0^2\left(e^{(2\mu+\sigma^2)t} - 1\right)}{2\mu+\sigma^2}$

On sait que : $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$

$X = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$

$S_s^2 = S_0 \cdot e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + \sigma W_s)^2}$ $\quad (a^b)^c = a^{bc}$ $\quad \mathbb{E}[e^X] = \mathbb{E}\left[e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}\right]$

$S_s^2 = S_0^2 \cdot e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + 2\sigma W_s}$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$\mathbb{E}[S_s^2] = \mathbb{E}\left[S_0^2 \cdot e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + 2\sigma W_s}\right]$

$\mathbb{E}[e^{\alpha X}] = e^{\mu\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}$

$\mathbb{E}[S_s^2] = S_0^2 \cdot \mathbb{E}\left[e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s + 2\sigma W_s}\right]$

$\mathbb{E}\left[e^{2\sigma W_s}\right] = e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2 s} = e^{2\sigma^2 s}$

$\mathbb{E}[S_s^2] = S_0^2 \cdot e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)s} \cdot e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2 s}$

$\mathbb{E}[S_s^2] = S_0^2 e^{(2\mu + \sigma^2)s}$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T S_s^2 ds\right] = \int_0^T \mathbb{E}[S_s^2] ds$$

$$= \int_0^T S_0^2 e^{(2\mu+\sigma^2)s} ds$$

$\int e^{ax} dx = \dfrac{e^{ax}}{a}$ avec $a = 2\mu + \sigma^2$

$$= S_0^2 \cdot \frac{e^{(2\mu+\sigma^2)t} - 1}{2\mu + \sigma^2}$$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$\mathbb{E}[e^{aX}] = e^{\mu a + \frac{1}{2}a^2\sigma^2}$$

$$\mathbb{E}[e^{aX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{aX} \cdot f_X(x)\, dX$$

$$\hookrightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}[e^{aX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{aX} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dX$$

$$aX - \frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2} =$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^X \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Exercice

Démonstration de $\mathbb{E}[X]$ avec X une V.A. qui suit une loi Normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition de $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \underbrace{f_X(x)} \, dx$$

densité de probabilité de la loi Normale

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

Changement de variable :

- On pose : $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow x = \mu + z\sigma$

  $dz = \dfrac{dx}{\sigma} \longrightarrow dx = \sigma \, dz$

$(x-\mu)^2$

$((\mu+z\sigma)-\mu)^2$

$\cancel{\mu^2} + z^2\sigma^2 \cancel{- \mu^2}$

$z^2\sigma^2$

$\Rightarrow \dfrac{z^2\sigma^2}{2\sigma^2} = \dfrac{z^2}{2}$

- On remplace : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \, dz$

- On développe : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \, dz$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \, dz$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \cancel{\sigma} \, dz$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz}_{=1} + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$$

$= \mu \cdot 1 = \mu$ impaire paire $= 0$

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

Exercice 1.4

Q1: Quelle est la loi de $W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s$?

$(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien si :

$W_0 = 0$

$t \longmapsto W_t$ P.S.

$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

$W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$

$\mathbb{P}(W_t - W_s \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(W_t - W_s \in A)$

avec $A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s \sim N(0, t-s)$

Q2 : Quelle est la loi de $\ln(S_t) - \ln(S_s) \mid \mathcal{F}_s$?

1. Hypothèse de S_t : $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$

2. Application d'Itô : $f(S_t) = \ln(S_t)$

On sait que : $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$

$$Var(dW_t) = \mathbb{E}[(dW_t)^2] - (\mathbb{E}[dW_t])^2$$

$$dt = \mathbb{E}[(dW_t)^2] - 0$$

$$df(S_t) = f'(S_t)\, dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t)(dS_t)^2$$

- $f'(S_t) = \frac{1}{S_t}$
- $f''(S_t) = -\frac{1}{S_t^2}$

- $(dS_t)^2 = (\mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t)^2$

$$= (\mu S_t \underbrace{dt}_{0})^2 + 2(\mu S_t \underbrace{dt}_{0})(\sigma S_t\, dW_t) + (\sigma S_t\, dW_t)^2$$

$$= 0 + 0 + \sigma^2 S_t^2\, dt$$

$$= \sigma^2 S_t^2\, dt$$

$dt \to 0$, $(dt)^2 \Rightarrow 0$) négligeable

$$d(\ln(S_t)) = \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{S_t^2}}\right)(\sigma^2 \cancel{S_t^2}\, dt)$$

$$d(\ln(S_t)) = \frac{1}{\cancel{S_t}}(\mu \cancel{S_t}\, dt + \sigma \cancel{S_t}\, dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$d(\ln(S_t)) = \mu\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$d(\ln(S_t)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dW_t$$

3. Application et Intégration

$$\ln(S_t) - \ln(S_s) = \overbrace{\int_s^t \underbrace{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}_{\text{constante}} du}^{\text{Intégrale classique}} + \overbrace{\int_s^t \sigma\, dW_u}^{\text{Intégrale stochastique}}$$

Intégrale Stochastique

Déf : $\int_s^t dW_u = W_t - W_s$

$\sum_{u=s}^{t} dW_u = W_t - W_s$

car : $W_t = W_s + \int_s^t dW_u$

$$\ln(S_t) - \ln(S_s) = \underbrace{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)}_{\text{déterministe}} + \sigma \underbrace{(W_t - W_s)}$$

$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Donc : $\sigma W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$

$$\boxed{\ln(S_t) - \ln(S_s) \mid \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s),\ \sigma^2(t-s)\right)}$$

Ex1.5
S03

Montrer que $\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = e^{\mu(t-s)} \cdot S_s$

On connait : $S_t = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$ ↑ écriture log-normale ⟹ B-S

On peut réécrire S_t en fonction de S_s :

$$S_t = S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right)$$

On transforme en $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\underbrace{S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right.}_{\text{constante}} + \left.\sigma(W_t - W_s)\right)\right]$$

On sort les constantes de l'$\mathbb{E}$:

Pour $X \sim N(0, t-s)$
$\mathbb{E}[e^{aX}] = e^{\frac{1}{2}\cdot a^2 \cdot (t-s)}$
$a = \sigma$

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_s] = S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma(W_t - W_s)\right)\right]$$

$$= S_s \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot (t-s)\right)$$

$$= S_s \cdot e^{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \left(\frac{1}{2}\cdot\sigma^2 \cdot (t-s)\right)\right]}$$ ↲ $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$$= S_s \cdot e^{\left[\left(\mu \cancel{- \frac{\sigma^2}{2}}\right) + \cancel{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)(t-s)\right]}$$ ↲ factorisat° $(t-s)$

$$= S_s \cdot e^{[\mu(t-s)]}$$

Calculer $p = \mathbb{E}[(S_T - K)^+]$ avec $\theta := \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$

$$p = \mathbb{E}[(S_T-K)^+] = \mathbb{E}[|S_T - K| \mathbb{1}_{S_T \geq K}]$$

$$= \mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{S_T\geq K} - K \mathbb{1}_{S_T \geq K}] = \mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{S_T\geq K}] - K \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_T\geq K}]}_{= P(S_T \geq K)\ ?}$$

1

$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_T \geq K}] = P(S_T \geq K)$:

$$P(S_T \geq K) = P(\ln(S_T) \geq \ln(K))$$

$$S_T = S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma W_T}$$

$$P(\ln(S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma W_T}) \geq \ln(K))$$

$$P(\ln(S_0) \cdot \theta T + \sigma W_T \geq \ln(K))$$

$$P\left(\theta T + \sigma W_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \Rightarrow P\left(\sigma W_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \theta T\right)$$

$$= P\left(W_T \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \theta T}{\sigma}\right)$$

$W_t \sim N(0, t-s)$

$W_T \sim N(0,T)$

Pour avoir $N(0,1) \to Z = \frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)$

$$P\left(\frac{W_T}{\sqrt{T}} \geq \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - \theta T}{\sigma\sqrt{T}}}_{a_1}\right) \Rightarrow = P(W_T \geq a_1 \sqrt{T})$$

2

$P(W_T \geq a_1\sqrt{T})$:

$$P(W_T \geq a_1 \sqrt{T}) = P(W_T \leq -a_1\sqrt{T}) \Leftrightarrow \underbrace{P(W_T \geq a_1 \sqrt{T})}_{=\ S_T \geq K}$$

$$= P\left(\frac{W_T}{\sqrt{T}} \leq -a_1\right)$$

$$= \Phi(-a_1)$$

3

$$\mathbb{E}\left[S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right] = ?$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma W_T} \cdot \mathbb{1}_{W_T \geq a_1 \sqrt{T}}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right] = \mathbb{E}\left[S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma \frac{W_T}{\sqrt{T}}} \cdot \mathbb{1}_{\frac{W_T}{\sqrt{T}} \geq a_1}\right]$$

$$= \int_{a_1}^{+\infty} S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2T}} \, dy$$

$$= \int_{a_1}^{+\infty} S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma \sqrt{T} \cdot y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$W_T = \sqrt{T} \cdot y$

$y = \frac{W_T}{\sqrt{T}}$

Il faut rassembler le y

$$= \int_{a_1}^{+\infty} S_0 \cdot e^{\theta T + \sigma \sqrt{T} y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

SECTION 6

Cours 5

01/10/24

Rappel MB :

- $W_0 = 0$
- $t \longmapsto W_t$ est une fonction continue PS
- $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$
- $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp$

2 Intégrale stochastique

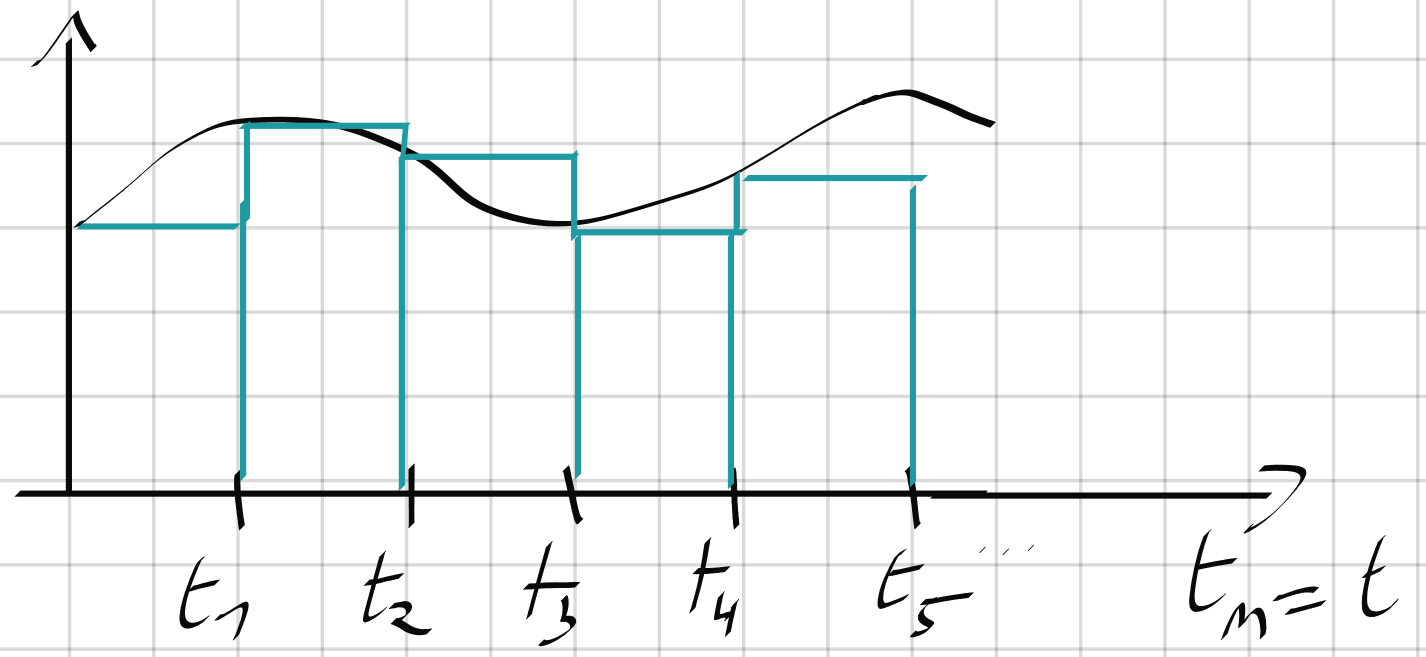
- Valeur du portefeuille discret : $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \sum_{s \leq t-1} \phi_s \left(\tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s \right)$

$\downarrow$ Equivalent en continu ?

- Valeur du portefeuille continu : $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \phi_s \, d\tilde{S}_s$

2.1 Processus simple

$$\int_0^t f(s)\,ds \simeq \sum_{i \leq N} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) \qquad t_i = \frac{t}{N}$$



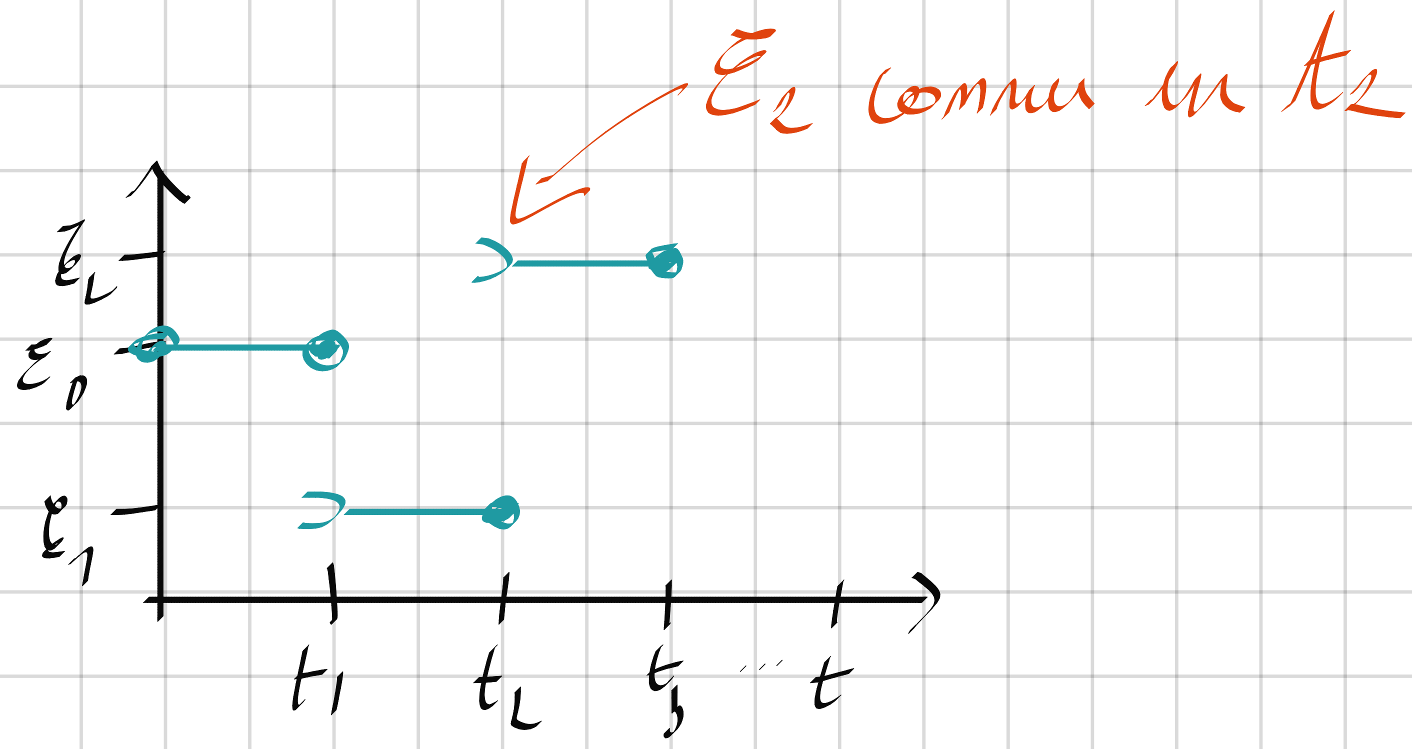
Définition : On dit que ϕ est un processus (adapté) simple s'il est de la forme :

$$\phi_t = \xi_0 \mathbb{1}_{t=0} + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{t_i < t \leq t_{i+1}}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$

et ξ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable

I.e. : $\phi_t = \xi_i$ si $t_i < t \leq t_{i+1}$ (si $t > 0$)

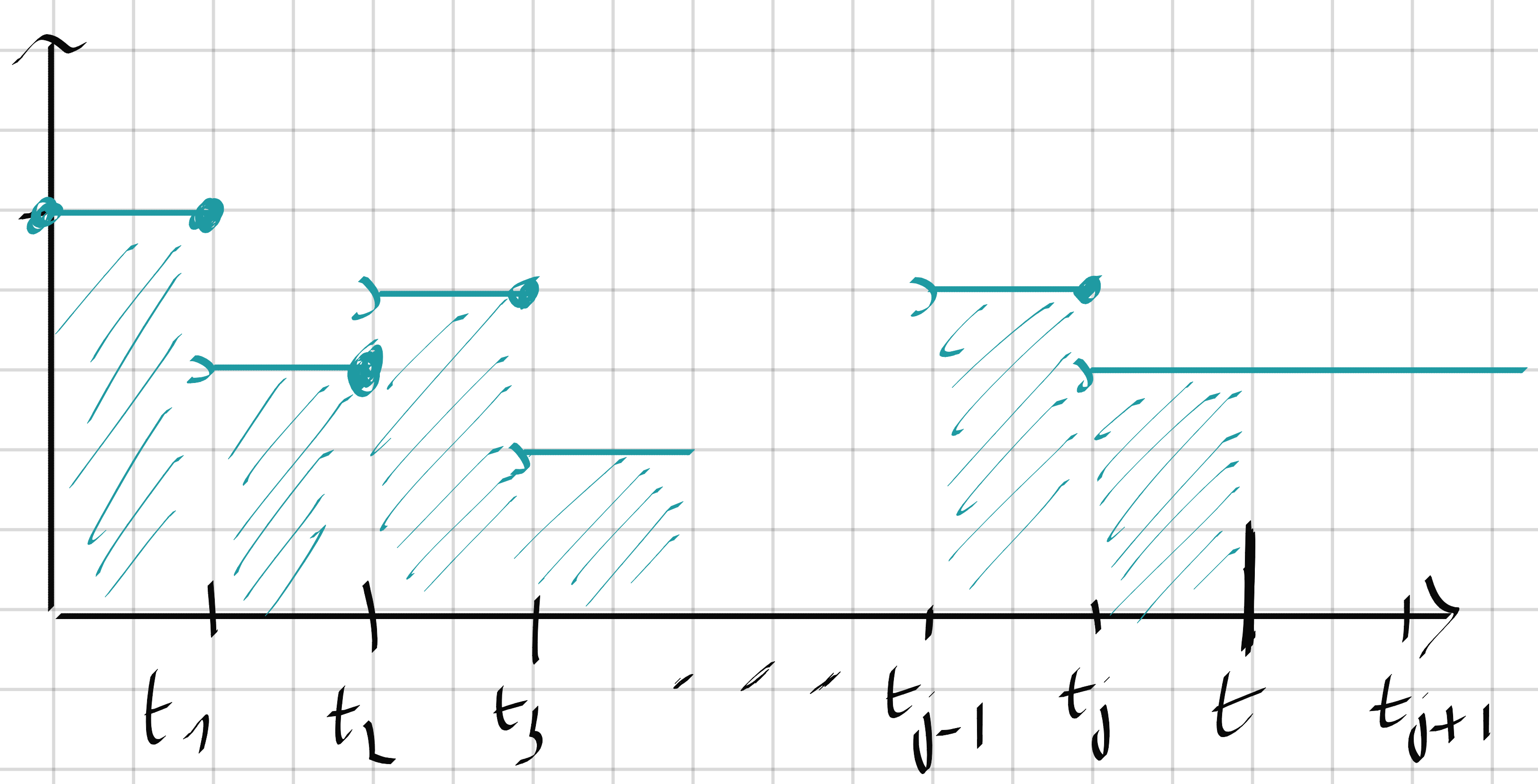


On définit alors l'intégrale stochastique par rapport au MB :

$$I(\phi)_t = \int_0^t \phi_s \, dW_s := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \left(W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t} \right)$$

Exemple : si $t_j < t \leq t_{j+1}$

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s = \xi_0 (W_{t_1} - W_0) + \xi_1 (W_{t_2} - W_{t_1}) + \xi_2 (W_{t_3} - W_{t_2})$$
$$+ \dots + \xi_{j-1} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + \xi_j (W_t - W_{t_j})$$



Exercice 2.1 : $X_t := \int_0^t \Phi_s \, dW_s$

1) Si $t \geq t_n$: $X_t = X_{t_n}$

$$\hookrightarrow X_t = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{E}_i \left(\underbrace{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}}_{} \right) = X_{t_n}$$

car $t_{i+1} \leq t$ et $t_i \leq t$

2) Si $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$

Martingale ?

$$\mathbb{E}\left[X_{t_i} + \mathcal{E}_i (W_t - W_{t_i}) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[X_{t_i} + \mathcal{E}_i (W_s - W_{t_i}) + \mathcal{E}_i (W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= X_s + \mathcal{E}_i \underbrace{\mathbb{E}\left[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\right]}_{=0} \leftarrow \text{Accroissement indépendant } W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

$$= X_s$$

3) Si $t_i \leq s \leq t_{i+1} \leq t_j \leq t \leq t_{j+1}$ (i.e. $s \leq t$)

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t_j}] \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= \mathbb{E}[X_{t_j} \mid \mathcal{F}_s]$$

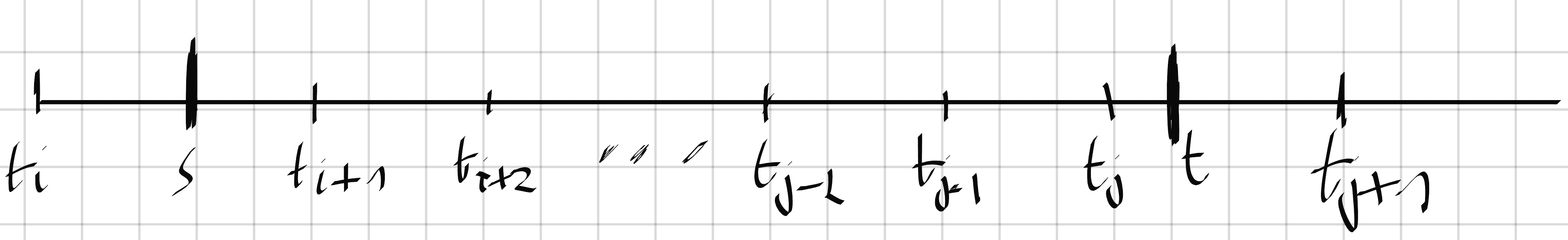
$$= \mathbb{E}[X_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[X_{t_{j-2}} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$\vdots$$

$$= \mathbb{E}[X_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= X_s$$



4) $\mathbb{E}\left[|X_t|^2 | \mathcal{F}_s\right]$ si $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$

$$= \mathbb{E}\left[\left(X_s + \xi_i (W_t - W_s)\right)^2 | \mathcal{F}_s\right]$$

$$= (X_s)^2 + 2\xi_i \; \mathbb{E}\left[W_t - W_s | \mathcal{F}_s\right] + (\xi_i)^2 \, \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s\right]$$

$$= (X_s)^2 + (\xi_i)^2 (t-s)$$

5) $\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 \, ds\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\xi_i^2 (t_{i+1} - s) + \sum \xi_k^2 (t_{k+1} - t_k) + \xi_j^2 (t - t_j) | \mathcal{F}_s\right] + (X_s)^2$$

si $t_i \leq s \leq t_{i+1} \leq t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$\mathbb{E}\left[(X_t)^2 | \mathcal{F}_s\right] = (X_s)^2 + \mathbb{E}\left[\int_s^t (\phi_r)^2 dr \; | \mathcal{F}_s\right]$$

$$+ \int_s^{t_{i+1}} (\phi_r)^2 dr$$

$$+ \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} (\phi_r)^2 dr$$

$$\vdots$$

$$+ \int_{t_j}^{t} (\phi_r)^2 dr$$

En particulier si $s = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s\right)^2\right]^{1/2} = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s)^2 ds\right]^{1/2}$$

$\Rightarrow$ Isométrie

Si $\Omega = \{w_0, \dots, w_n\}$

$$\mathbb{E}\left[(X)^2\right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{w_i} (X(w_i))^2 \cdot P(w_i)}$$

si $P(w_i) = \frac{1}{n}$ alors $\mathbb{E}\left[(X)^2\right]^{1/2} = \left\| \begin{matrix} X_{w_1} \\ \vdots \\ X_{w_n} \end{matrix} \right\| \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 7

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 8

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 9

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 10

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 11

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

SECTION 12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

CHECKLIST