Formule de Feynman-Kac

24/06/25

Soit le processus $X^{t,x}$:

$$X^{t,x} = x + \int_t \mu(s, X_s^{t,x})\, ds + \int_t \sigma(s, X_s^{t,x})\, dW_s$$

On pose : $v(t,x) = \mathbb{E}[g(X_T^{t,x})]$

→ L'EDS sert à décrire le chemin aléatoire qui suit le processus et l'Espérance conditionnelle agrège tous ces chemins.

- L'EDS donne les trajectoires aléatoires $X_s^{t,x}$
- L'Espérance prend la moyenne de toutes les valeurs possibles de $g(X_T)$ selon ces trajectoires.

- On utilise l'Espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[g(X_T^{t,x})] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X_T^{t,x}) \mid \mathcal{F}_\tau]\right]$$

On conditionne l'information disponible jusqu'à τ

- On utilise la propriété de Markov :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X_T^{t,x}) \mid \mathcal{F}_\tau]\right] = \mathbb{E}\left[g(X_T^{\tau, X_\tau^{t,x}}) \mid \mathcal{F}_\tau\right]$$

- On substitue par $v(\tau, y)$:

$$v(\tau, y) = \mathbb{E}[g(X_T^{\tau,y})]$$

$$\mathbb{E}\left[g(X_T^{\tau, X_\tau^{t,x}}) \mid \mathcal{F}_\tau\right] = v(\tau, X_\tau^{t,x})$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X_T^{t,x}) \mid \mathcal{F}_\tau]\right] = \mathbb{E}[v(\tau, X_\tau^{t,x})]$$

$$v(t,x) = \mathbb{E}[g(X_T^{t,x})] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X_T^{t,x}) \mid \mathcal{F}_\tau]\right] = \mathbb{E}[v(\tau, X_\tau^{t,x})]$$

$$v(t,x) = \mathbb{E}[v(\tau, X_\tau^{t,x})]$$

Avec comme unique solution :

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \mu(t,x)\, \partial_x v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\, \partial_{xx} v(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ v(T,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$