Exercice HJB (montant α_t)

T.E.

C2

On suppose $r = 0$ et la stratégie consiste à investir le montant α_t dans l'actif risqué.

≠ la proportion C1

I) Déterminer l'équation de HJB

II) Dans le cas où on a : $U(x) = -e^{-Mx}$ où $M > 0$
- chercher la solution de HJB, sous la forme $u(t,x) = -e^{-mx} f(t)$
- et identifier la strat. optimale.

Équation de la proportion de la richesse C1
→ Type B-S
$$dX_t = \frac{\alpha_t X_t}{S_t} dS_t + \frac{(1-\alpha_t) X_t}{S_t^0} dS_t^0$$

I) Déterminer l'équation de HJB

Étape 1 : Trouver la dynamique de notre richesse

#actif risqué #actif sans risqué

Dynamique de notre richesse : $dX_t = \frac{\alpha_t}{S_t} dS_t + \frac{X_t - \alpha_t}{S_t^0} dS_t^0$

→ Type Brownien géométrique

Dynamique actif risqué $= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

Dynamique actif sans risque $= r S_t^0 dt = 0$

$$dX_t = \frac{\alpha_t}{S_t} dS_t + \frac{X_t - \alpha_t}{S_t^0} \underbrace{dS_t^0}_{=0}$$
$$= \frac{\alpha_t}{\cancel{S_t}} (\mu \cancel{S_t} dt + \sigma \cancel{S_t} dW_t) + 0$$
$$= \alpha_t (\mu dt + \sigma dW_t)$$
$$= \alpha_t \mu \, dt + \alpha_t \sigma \, dW_t$$

$$\left(\rightarrow X_t = X_0 + \int_0^t \mu \alpha_s \, ds + \int_0^t \sigma \alpha_s \, dW_s \right)$$

Dynamique générale de la richesse : $dX_t = b(x,\alpha_t) dt + \sigma(x,\alpha_t) dW_t$

Dynamique dans notre exo de la richesse : $dX_t = \mu \alpha_t dt + \sigma \alpha_t dW_t$

Étape 2 : Identifier $b(x,a)$ et $\sigma(x,a)$

→ Une fois qu'on a la dynamique, on doit :
- "geler" le temps
- Remplacer $X_t \to x$ et $\alpha_t \to a$

$\alpha_t \to$ V.A.
$a \to$ un réel

$$b(x,a) = \mu \cdot a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$
$$\sigma(x,a) = \sigma \cdot a$$

Dépendance en x non présente dans notre dynamique

Étape 3 : Écrire l'opérateur de HJB $\mathcal{L}^a$

$\sigma^2(x,a) = (\sigma(x,a))^2$

Formule du cours : $\mathcal{L}^a v(t,x) = \partial_t v + b(x,a) \partial_x v + \frac{1}{2} \sigma^2(x,a) \partial_{xx} v$

$(\sigma \cdot a)^2$

On remplace : $\mathcal{L}^a v(t,x) = \partial_t v + \mu a \partial_x v + \frac{1}{2} \sigma^2 a^2 \partial_{xx} v$

C1 : $\mathbb{R}^+$ car proportion

Étape 4 : Écrire l'équation HJB :
$$\begin{cases} \sup \mathcal{L}^a v(t,x) = 0 & \forall t \in [0,T], x \in \mathbb{R} \\ v(T,x) = U(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

II) Résoudre HJB dans le cas $U(x) = -e^{-\eta x}$ où $\eta > 0$

Interprétation : $U(x) = -e^{-\eta x}$ représente l'utilité totale : plus on est riche moins on "souffre" mais le gain d'utilité ralentit.

- η : lettre grecque « êta » → Paramètre d'aversion au risque contrôle la forme de notre fonction d'utilité
  - ↳ Plus η est grand, plus la courbe est courbée, i.e :
    - L'investisseur devient plus sensible aux Δ de la richesse
    - Il est plus prudent donc plus averse au risque
  - → Interprétation : mesure à quel point l'investisseur n'aime pas le risque.
    Quand $\eta \to 0$: $U(x) \to -1$ = neutre face au risque
    Quand $\eta \to +\infty$: $U(x) \to -\infty$ dès que x baisse un peu → Satisfaction ☹☹☹
    ↳ exemple : $\eta = 100$, $x = 0{,}01$ → $e^{-100 \cdot 0{,}01} \simeq 4{,}5 \times 10^{-5}$
    - si $\eta \gg 1$: averse au risque
    - si $\eta \simeq 0$: neutre au risque

- HJB – Condition terminale
  - On a : $v(T,x) = U(x) = e^{-\eta x}$
  - On cherche $v(t,x)$ qui vérifie : • la condition terminale à $t = T$
    • Et qui satisfait HJB
  - → On cherche une solution par conjecture
    ↳ On imagine une forme pour $v(t,x)$ et on regarde si elle satisfait HJB.

- On pose : $v(t,x) = -e^{-\eta x} \cdot f(t)$
  ↳ Pourquoi cette forme ? Car on connait la dépendance en x mais pas dans le temps.

Parce que à la date finale T, on veut : $v(T,x) = -e^{-\eta x} f(T) \overset{!}{=} -e^{-\eta x} \to f(T) = 1$

Interprétation : A chaque date t, U a la même forme exp en x mais elle est pondérée par un facteur temporel.

Etape 1 : Calculer les dérivées

$v(t,x) = -e^{-\eta x} f(t)$

$\partial_t v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\underbrace{e^{-\eta x}}_{\text{constante par rapport à } t} f(t)\right)$

règle → $\partial_t (c \cdot f(t)) = c \cdot f'(t) \longrightarrow \partial_t v(t,x) = -e^{-\eta x} f'(t)$

$\partial_x v(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{-\eta x} \underbrace{f(t)}_{\text{constante par rapport à } x}\right)$

règle → la dérivée de $e^{u(x)} \longrightarrow u'(x)\, e^{u(x)}$

ici $u(x) = -\eta x \rightarrow u'(x) = -\eta$

Donc : $\frac{\partial}{\partial x} e^{-\eta x} = -\eta e^{-\eta x}$

Donc $\partial_x v(t,x) = f(t)\left(-\eta\left(-e^{-\eta x}\right)\right) \longrightarrow \partial_x v(t,x) = \eta\, e^{-\eta x} f(t)$

$\partial_{xx} v(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\, e^{-\eta x} \underbrace{f(t)}_{c}\right)$

règle → $\partial_x (e^{-\eta x}) = -\eta e^{-\eta x}$

Donc : $\partial_{xx} v(t,x) = \eta f(t)\left(-\eta e^{-\eta x}\right) \longrightarrow \partial_{xx} v(t,x) = -\eta^2 e^{-\eta x} f(t)$

$v(t,x) = -e^{-\eta x} f(t)$

$v_t(t,x) = -e^{-\eta x} f'(t)$

$v_x(t,x) = \eta f(t)\, e^{-\eta x}$

$v_{xx}(t,x) = -\eta^2 f(t)\, e^{-\eta x}$

Etape 2 : Remplacer dans HJB

$\mathcal{L}^a v(t,x) = \partial_t v(t,x) + b(x,a)\,\partial_x v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,a)\,\partial_{xx} v(t,x)$

$\mathcal{L}^a v(t,x) = -e^{-\eta x} f(t) + \mu a\, \eta f(t)\, e^{-\eta x} + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2\, \eta^2 e^{-\eta x} f(t)$

$= e^{-\eta x}\left(-f'(t) + \left(\mu \eta a - \frac{1}{2}\sigma^2 \eta^2 a^2\right) f(t)\right)$ ✓ AD

Etape 3 : On cherche à identifier f tq : $\sup_{a \in \mathbb{R}} \mathcal{L}^a v(t,x) = 0$

1) Si on cherche $= 0$ ça veut dire qu'un terme $= 0$
l'expo ne peut pas être égale à 0
Donc c'est forcément le 2ème terme

: $e^{-\eta x}$ car > 0
+ applicat° sup

$= \sup_{a \in \mathbb{R}}\left(-f'(t) + \left(\mu \eta a - \frac{1}{2}\sigma^2 \eta^2 a^2\right) f(t)\right) = 0$

On sort $f(t)$ → $0 = -f'(t) + \underbrace{\sup\left(\left(\mu \eta a - \frac{1}{2}\sigma^2 \eta^2 a^2\right)\right)}_{\alpha} f(t) = 0$

2) Et le sup s'applique uniquement sur α

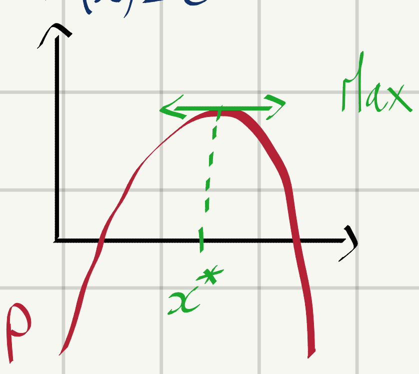
Donc : $\iff -f'(t) + \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \mu \eta \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \eta^2 \alpha^2 \right\} f(t) = 0$

Etape 4 : Identifier le α qui atteint le max

Q : Quelle fonction de α, on décide à max ?

Rappel : Un polynôme du second degrés $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a < 0$ (l'endroit où la dérivée s'annule) atteint son maximum en $x^* = -\frac{b}{2a}$

C'est la solution de $P'(x) = 0$



On dérive par rapport à α et égalité de 0

$$\partial_\alpha \left(\mu \eta \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 \alpha^2 \right) = 0$$

$$\iff \mu \eta - \sigma^2 \eta^2 \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\mu}{\sigma^2 \eta}$$

$$\longrightarrow \hat{\alpha} = -\frac{\mu \eta}{2\left(-\frac{\sigma^2 \eta^2}{2}\right)} = \frac{\mu}{\sigma^2 \eta}$$

On pose : $K = \mu \eta \hat{\alpha} - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 \hat{\alpha}^2$

$$K = \mu \eta \frac{\mu}{\sigma^2 \eta} - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 \left(\frac{\mu^2}{\sigma^4 \eta^2} \right) = \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$$

$\longrightarrow$ Et le max vaut : $K = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$

$\iff -f'(t) + K f(t) = 0 \iff f'(t) = K f(t)$ solution bien connue (L1)

$\iff f(t) = f(0) e^{Kt}$ piège par rapport à C1

$f'(t) = K f(t) \Rightarrow f(t) = C e^{Kt}$ D

Etape 5 : Identifier $f(0)$

On veut que : $v(T, x) = U(x)$

On sait que : $v(t, x) = -e^{-\eta x} f(t)$

Donc en $t = T$, on a : $v(T, x) = e^{-\eta x} f(T)$

Et comme on impose que : $v(T, x) = U(x) = -e^{-\eta x}$

$\iff -e^{-\eta x} f(T) = -e^{-\eta x} \Rightarrow f(T) = 1$

On a trouvé que : $f(t) = f(0) e^{Kt}$

Donc $f(T) = f(0) e^{KT} \Rightarrow f(0) = \frac{f(T)}{e^{KT}} = \frac{1}{e^{KT}} = e^{-KT}$

$\iff f(0) = e^{-KT}$

Donc : $v(t, x) = \underbrace{-e^{-\eta x}} \; \underbrace{e^{-K(T-t)}}$ $\longrightarrow v(t,x) =$ Utilité instantanée $\times$ coeff d'actualisation optimal

- $-e^{-\eta x}$: vient de $U(x) \rightarrow$ c'est l'aversion au risque (exp) qui dépend que de x
- $e^{-K(T-t)}$: vient de HJB $\rightarrow$ c'est la croissance attendue de la valeur optimale

et le contrôle optimal est : $\hat{\alpha} = \frac{\mu}{\sigma^2 \eta}$