Démonstration du lemme d'Itô

08/03/25

1) A partir du dév. de Taylor

① Dév. de Taylor à 2 variables

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS_t)^2 + O\left((dS_t)^3\right)$$

En analyse classique on ignore car tout petit

En calcul sto. $(dW_t)^2 = dt$ donc non négligeable

② Substitution de la dynamique de S_t

On sait que : $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$ ★

$$(dS_t)^2 = (\mu dt + \sigma dW_t)^2$$

$$(dS_t)^2 = \underbrace{\mu^2 dt^2}_{\simeq 0} + \underbrace{2\mu\sigma\, dt\, dW_t}_{\simeq 0} + \sigma^2 \underbrace{(dW_t)^2}_{= dt}$$

négligeable

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 dt \quad ★$$

③ Substitution dans Taylor

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS_t)^2$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 dt \quad \leftarrow \text{Remplacement}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2\right)dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial S}dW_t$$

2) Application à la dynamique de S_t

On applique sur $f(S_t) = \ln(S_t) \xrightarrow{\text{pour obtenir}} X_t = \ln(S_t)$

On a : $\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$