Loi Normale - PDF

PDF : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$

Démonstration

① Que cherche-t-on à construire ?

1) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2) $\int f(x)\,dx = 1$
3) Modéliser une V.A X avec une moyenne μ et d'écart-type σ
4) Symétrique autour de μ

② Fonction candidate

$$f(x) = A \cdot e^{-a(x-\mu)^2}$$

1) Positive partout $(x-\mu)^2 \geq 0 \to -a(x-\mu)^2 \leq 0 \to e^{-a(x-\mu)^2} \in (0,1]$
2) Symétrique autour de μ $(x-\mu)^2 = (\mu-x)^2$
3) Décroit rapidement quand x s'éloigne de μ $|x-\mu| \to \infty$
4) Doit être intégrable $\int e^{-a(x-\mu)^2}\,dx$ est finie

$\rightarrow$ Il reste à déterminer les constantes :

- A (normalisation)
- a (lié à l'écart-type)

③ Calcul de la constante A

On impose : $\int f(x)\,dx = 1$

$\hookrightarrow$ Donc : $\int A \cdot e^{-a(x-\mu)^2}\,dx = 1 \to A \cdot \int e^{-a(x-\mu)^2}\,dx = 1$

Changement de variable : $u = x - \mu \to du = dx$

$A \cdot \int e^{-au^2}\,du = 1 \leftarrow$ Intégrale de Gauss

④ Intégrale de Gauss

$I = \int e^{-a u^2} du$

On pose I^2 :

$I^2 = \left(\int e^{-au^2} du\right)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(u^2+v^2)} du\,dv$

Passage en coordonnées polaires :

$u = r \cdot \cos\theta$

$v = r \cdot \sin\theta$

$u^2 + v^2 = r^2$

$du\,dv = r\,dr\,d\theta$

Donc : $I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} \cdot r\,dr\,d\theta$

On commence par intégrer r : $\int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr$

On pose : $w = ar^2 \rightarrow dw = 2ar\,dr \rightarrow r\,dr = \frac{dw}{2a}$

Donc : $\int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr = \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-w} dw = \frac{1}{2a}$

Puis : $I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{1}{2a} = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a} \longrightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

⑤ Retour à la constante A

$A \cdot \int e^{-au^2} du = 1 \rightarrow A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = 1 \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$

Donc : $f(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-a(x-\mu)^2}$

⑥ Faire apparaître σ

$Var(X) = \frac{1}{2a} \rightarrow a = \frac{1}{2\sigma^2}$

Donc : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$