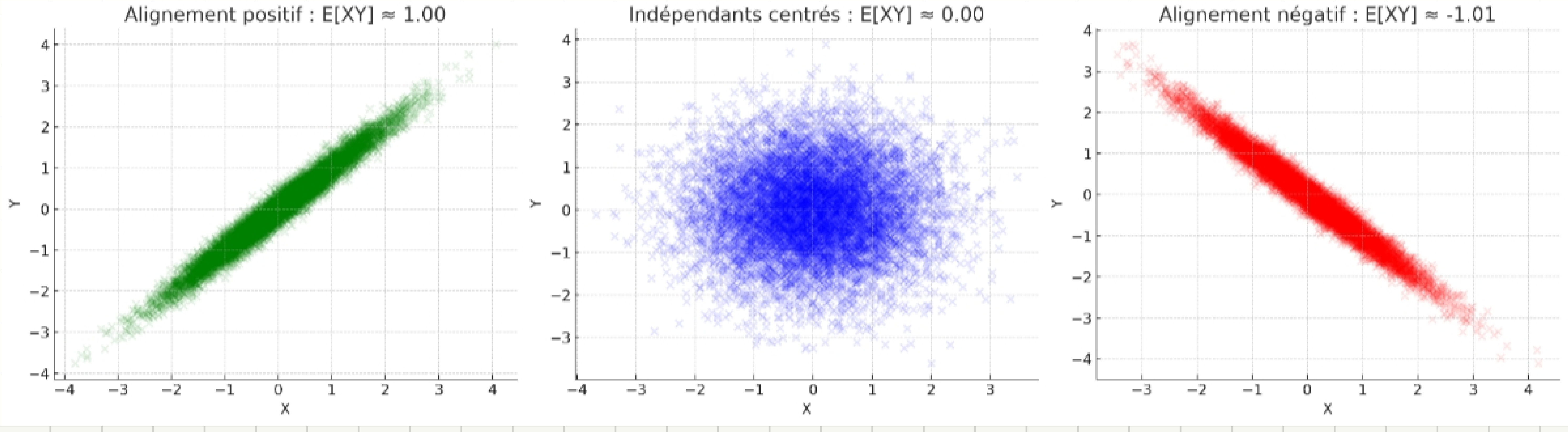
24/04/25

Produit Scalaire

Un produit scalaire est une application $\langle \, , \, \rangle$ qui doit vérifier :

1) Linéarité : $\langle aX+bY, Z\rangle = a\langle X,Z\rangle + b\langle Y,Z\rangle$
2) Symétrie : $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$
3) Positivité : $\langle X,X\rangle \geq 0$ et $\langle X,X\rangle = 0 \iff X=0$
4) Norme associée : $\|X\| = \sqrt{\langle X,X\rangle}$

Et dans $L^2(\Omega)$ on a : $\langle X,Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$



Exemple-Intuitif :

Un trader veut couvrir une position risquée X en utilisant un actif de couverture Y (ex : ETF ou un dérivé)

On cherche combien de fois tu dois multiplier Y pour te rapprocher au mieux de X.
↳ C'est une projection orthogonale dans L^2 et donc un produit scalaire.

Modèle : On peut approximer X par aY : $X \simeq aY$

Et on veut trouver le meilleur coeff a qui minimise l'erreur : $\min \mathbb{E}\left[(X-aY)^2\right]$

Solution : $a^* = \dfrac{\langle X,Y\rangle}{\langle Y,Y\rangle} = \dfrac{E[XY]}{E[Y^2]}$

→ C'est donc le produit scalaire de X et Y, divisé par la norme au carré de Y

Exemple : Couverture optimal

Cas simple de produit scalaire orthogonale

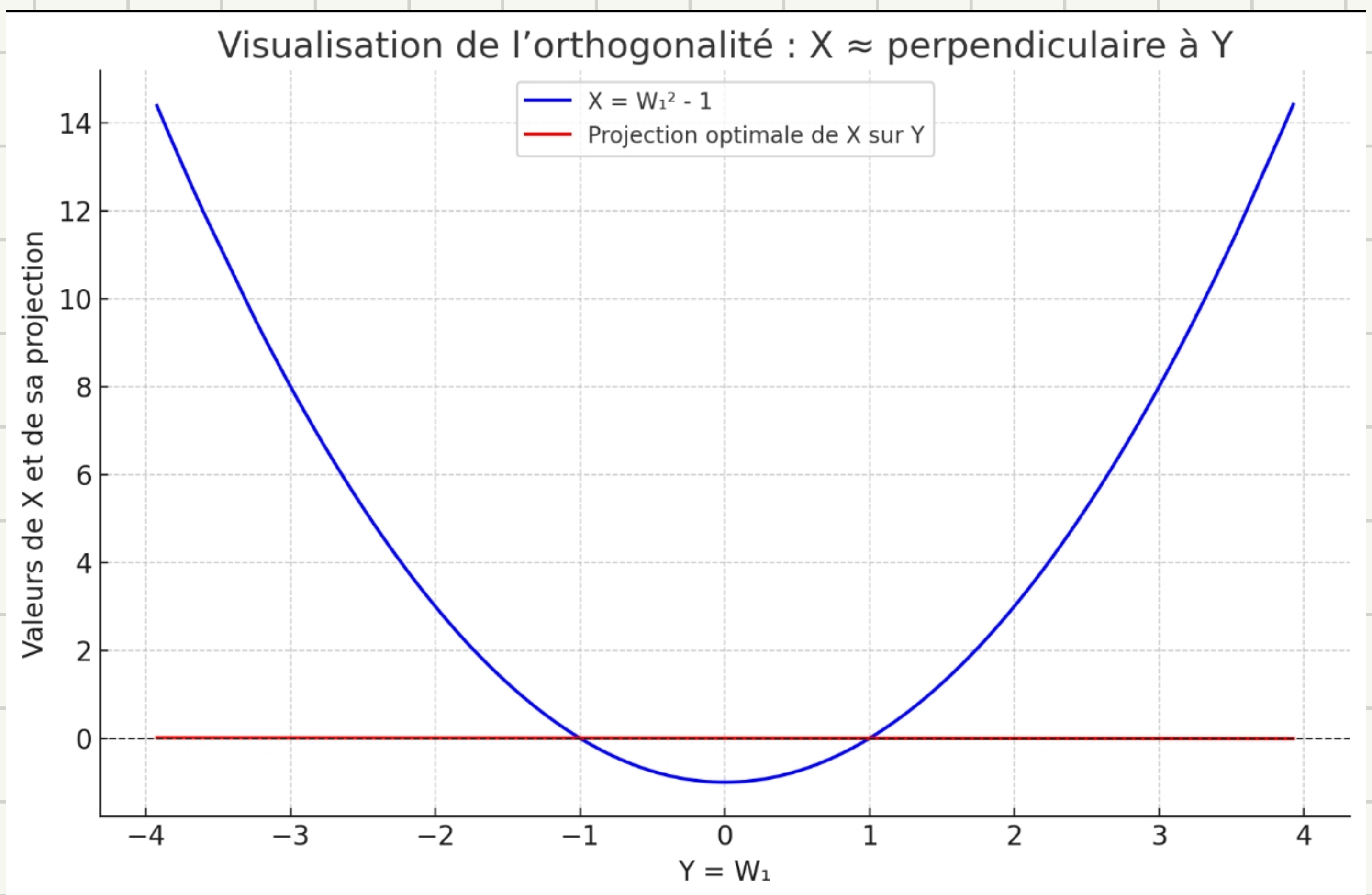
$X = W_1^2 - 1$

$Y = W_1 \sim N(0,1)$ → Simulation MC → $E[X] = 0{,}0068$, $E[Y] = -0{,}0021$, $E[XY] = -0{,}0023$, $E[Y^2] = 1{,}0068$, $a^* = -0{,}0023$

$\text{Projection}_Y(X) = \dfrac{E[XY]}{E[Y^2]} \cdot Y \simeq 0$

$E[(W_1^2 - 1) \cdot W_1] \simeq 0$

→ Donc on ne peut pas couvrir X avec Y, il faut un autre actif.



Cas simple de produit scalaire non-orthogonale

$X = W_1^2 - 1$

$Y = W_1^2$

$E[X] = E[W_1^2 - 1] \simeq 0{,}0068$

$E[Y] = E[W_1^2] \simeq 1{,}0068$

$E[XY] = E[(W_1^2 - 1) \cdot W_1^2] \simeq 2{,}0612 \leftarrow \langle X, Y \rangle$

$E[Y^2] = E[W_1^4] \simeq 3{,}0680$

$a^* = E[XY] / E[Y^2] \simeq 0{,}6718$

On peut approximer :

$X = W_1^2 - 1$ par la projection :

$a \cdot Y = a \cdot W_1^2 \quad > 0$

$a \simeq 0{,}6718$

Donc la projection est non nulle

On peut couvrir X sur 0,6718 avec Y partiellement