250326

Démonstration de $\mathbb{E}[X]$ avec X une V.A. qui suit une loi Normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition de $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \underbrace{f_X(x)}_{} \, dx$$

densité de probabilité de la loi Normale

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

Changement de variable :

- On pose : $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \longrightarrow x = \mu + z\sigma$

$$dz = \frac{dx}{\sigma} \longrightarrow dx = \sigma \, dz$$

$(x-\mu)^2$

$((\mu + z\sigma) - \mu)^2$

$\cancel{\mu^2} + z^2\sigma^2 - \cancel{\mu^2}$

$z^2\sigma^2$

$\Rightarrow \dfrac{z^2\sigma^2}{2\sigma^2} = \dfrac{z^2}{2}$

- On remplace : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \, dz$

- On développe : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \, dz$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \sigma \, dz$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, \cancel{\sigma} \, dz$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz}_{=1} + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz$$

$= \mu \cdot 1 = \mu$

impaire paire $= 0$

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$