3) $E[e^X] = e^{b+\frac{1}{2}a}$ si $X \sim N(b,a)$ "Calcul important car formule de B-S est trouvé comme ça"

$E[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^y}_{①} \underbrace{f_X(y)}_{②}\, dy$ ①+② = définit° #

avec $f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$= \int e^y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}}\, dy$$

Comment résoudre? On a "y" dans e^y et aussi dans la Gaussienne
→ le but est de transférer le y de e^y dans la Gaussienne

On regroupe les 2 exp : $e^y \cdot e^{-\frac{(y-b)^2}{2a}} = e^{y - \frac{(y-b)^2}{2a}}$

$$y - \frac{(y-b)^2}{2a} = y - \frac{y^2-2yb+b^2}{2a}$$

$$= -\frac{y^2-2yb+b^2-2ay}{2a}$$

$$= -\frac{-2ay+y^2-2yb+b^2}{2a}$$

réorg. comme le prof

On veut avoir $(y - \text{quelque chose})^2$
un carré parfait $(y-C)^2$

$$= \int \frac{e^{-(-2ay+y^2-2yb+b^2)/2a}}{\sqrt{2\pi a}}\, dy$$

On compare → On veut que : $-2ay - 2yb = -2yC$
or : $-2ay - 2yb = -2y(b+a)$
On identifie donc C comme : $C = (b+a)$
Donc :

On essaye avec : $(y-C)^2$
On sait que : $(y-C)^2 = y^2 - 2yC + C^2$

$= -(-2ay + y^2 - 2yb + b^2)$
$= 2ay - y^2 + 2yb - b^2$
$= y^2 - 2yb - 2ay + b^2$
$= y^2 - 2y(b+a) + b^2$

→ Construire un carré parfait
On veut : $(y-C)^2$
car : $(y-C)^2 = y^2 - 2yC + C^2$

$y^2 - 2y(b+a) + b^2$

or : $(y-(b+a))^2 = y^2 - 2y(b+a) + (b+a)^2$

On veut avoir b^2 donc il faut soustraire

on ajoute et soustrait : $(b+a)^2$

$y^2 - 2y(b+a) + (b+a)^2 - (b+a)^2 + b^2$

↓ on développe

$(b+a)^2 = b^2 + 2ab + a^2$
$-(b^2 + 2ab + a^2) + b^2$
$-b^2 - 2ab - a^2 + b^2$

$y^2 - 2y(b+a) + (b+a)^2 \cancel{-b^2} - 2ab - a^2 \cancel{+b^2}$

$(y-(b+a))^2 - (2ab + a^2)$

On avait : $= \int \frac{e^{-(-2xy+y^2-2yb+b^2)/2x}}{\sqrt{2\pi x}} dy$

$$-\frac{y^2-2yb-2yx+b^2}{2x} = -\frac{(y-(b+x))^2-(2xb+x^2)}{2x}$$

On sépare les termes : $-\frac{(y-(b+x))^2}{2x} + \frac{2xb+x^2}{2x}$

terme loi normale

$\Leftrightarrow \frac{2xb}{2x} + \frac{x^2}{2x}$

$b + \frac{x}{2}$ ← Pas exploitable pour intégrale

On sait que : $(b+x)^2 = b^2 + 2xb + x^2$

$$2xb + x^2 = (b+x)^2 - b^2$$

← Prof transforme pour mettre en évidence la densité Normale

$$\frac{(b+x)^2-b^2}{2x} = -\frac{b^2-(b+x)^2}{2x}$$

← exploitable pour l'Int

$$= \int \left(e^{-\frac{(y-(x+b))^2}{2x} - \frac{b^2-(x+b)^2}{2x}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} dy$$

$$= e^{-\frac{b^2-(x+b)^2}{2x}} \int e^{-\frac{(y-(x+b))^2}{2x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} dy$$

$$= e^{\frac{x}{2}+b} \underbrace{\int \frac{e^{-\frac{(y-(x+b))^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi x}} dy}_{=1}$$

Dev/Explicat° FPT pb 2° tas refaçable 3heure

$$\mathbb{E}\left[e^X\right] = e^{b+\frac{1}{2}x}$$

Si $X \sim N(b, x)$ $) * \lambda$

Remarque : $X \sim N(\lambda b, \lambda^2 x)$

$\boxed{\text{← On connait mtn la transformée de laplace d'une Gaussienne}}$

donc : $E[e^{\lambda X}] = e^{\lambda b + \frac{\lambda^2 x}{2}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

avec λ

$\lambda \in \mathbb{R}$) ⇒ Transformée de Laplace de la V.A

et si on transforme avec un Nombre complexe

↳ transformée de Fourier

II/ Exercice 1.3 :

EXAMEN

1. $\mathbb{E}[W_t W_s] = t \wedge s$

Je suppose que $t \geq s$ (arbitraire)

$W_t = (W_t - W_s) + W_s$

$W_t W_s = [(W_t - W_s) + W_s] W_s$

$W_t W_s = (W_t - W_s) W_s + W_s^2$

$\mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s) W_s] + \mathbb{E}[W_s^2]$

$Var(W_s) = E[W_s^2] - (E[W_s])^2$ ⓐ

On sait que : $W_s \sim N(0, s)$

car $E[W_s^2] = Var(W_s) + (E[W_s])^2$
$= s + (0)^2$
$= s$

$E[W_t W_s] = E[(W_t - W_s)(W_s - 0)] + E(W_s^2)$

Indépendance des accroissements

$= \underbrace{E[W_t - W_s]}_{=0} \cdot \underbrace{E[W_s - 0]}_{=0} + s$ ⟵ car (3) Mvt Brownien : $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

$= s$

Si on avait fait $t \leq s$, on aurait trouvé t

2. $\mathbb{E}\left[\int_0^t |W_s|^2 ds\right] = \frac{t^2}{2}$

"On peut toujours intervertir l'E et l'Intégrale"

$$E\left[\int_0^t |W_s|^2 ds\right] = \int_0^t E[|W_s|^2] ds = \int_0^t s\, ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$

linéarité de l'espérance

Ça veut dire qu'on peut d'abord calculer l'E de W_s^2 puis intégrer.

ⓐ

$\int s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + C$

car $\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{n+1}}{n+1}\right) = s^n$

- L'Intégrale "ajoute" des aires sous la courbe
- La dérivée "enlève" des aires en prenant le taux de var. instantané
- La primitive "redonne" l'aire sous la courbe