# Espace Euclidien

## I) C'est quoi un espace euclidien ?

C'est simplement un endroit où on peut faire des choses géométriques : vecteurs
↳ des objets → fonctions → V.A ...

- Mesurer des longueurs (normes)
- Mesurer des angles (produits scalaires)
- Dire si deux vecteurs sont orthogonaux (perpendiculaires)

Exemple : 2 vecteurs : $\vec{u} = (1,2)$, $\vec{v} = (3,-1)$

Dans cet espace, on peut mesurer :
- la Norme (la longueur) : $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$
- le produit scalaire (l'angle ou l'alignement) : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) = 1$

  ↳ si $= 0 \Rightarrow$ les vecteurs sont perpendiculaires = orthogonaux

## II) Quid en calcul stochastique ?

Au lieu de travailler avec des vecteurs, on travaille avec des fonctions ou des V.A mais on garde la même logique.

Dans l'espace des V.A $L^2(\Omega)$

- On définit la Norme par : $\|X\| = \sqrt{E[(X-0)^2]} = \sqrt{E[X^2]}$
- On définit le produit scalaire par : $\langle X, Y \rangle = E[XY]$

Donc on peut aussi parler de :
- longueur d'une V.A
- angle de deux V.A
- orthogonalité si $E[XY] = 0$

## III) Produit scalaire

Un produit scalaire est une application $\langle\ ,\ \rangle$ qui doit vérifier :

1) Linéarité : $\langle aX + bY, Z \rangle = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle$

2) Symétrie : $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$

3) Positivité : $\langle X, X \rangle \geq 0$ et $\langle X, X \rangle = 0 \iff X = 0$

4) Norme associée : $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$