Drift du taux de change X_t sous Q^d

$S_t^f = e^{r_f t}$ ← ex: \$

$M_t = X_t \cdot e^{r_f \cdot t}$ ← €

Sous Q^d, M_t doit être une martingale :

$M_t \cdot e^{-r_d \cdot t} = X_t \cdot e^{(r_f - r_d)t}$

$S_t^f = e^{r_f \cdot t}$

$M_t = X_t \cdot S_t^f = X_t \cdot e^{r_f \cdot t}$

$M_t \cdot e^{-r_d t} = X_t \cdot e^{r_f t} \cdot e^{-r_d t}$

On factorise les exp

$M_t \cdot e^{-r_d t} = X_t \cdot e^{(r_f - r_d)t}$

Démonstration :

Si M_t est martingale sous Q^d alors son drift doit être nul :

$$dM_t = \underbrace{e^{(r_f - r_d)t} dX_t}_{1} + \underbrace{X_t \cdot d\left(e^{(r_f - r_d)t}\right)}_{2} + \underbrace{d\left\langle X_t, e^{(r_f - r_d)t}\right\rangle}_{3}$$

← Itô + règle du produit

On sait que : $\frac{dX_t}{X_t} = \mu_x dt + \sigma_x dW_t^x$

1. $e^{(r_f - r_d)t} dX_t = e^{(r_f - r_d)t} \left(\mu_x X_t dt + \sigma_x X_t dW_t^x\right)$ ← remplacement

2. $d\left(e^{(r_f - r_d)t}\right) = (r_f - r_d)\, e^{(r_f - r_d)t} dt$

$X_t \cdot d\left(e^{(r_f - r_d)t}\right) = X_t (r_f - r_d)\, e^{(r_f - r_d)t} dt$

3. $e^{(r_f - r_d)t}$ ← pas d'aléatoire

$d\left\langle X_t, e^{(r_f - r_d)t}\right\rangle = 0$

On combine les 3 facteurs :

$$dM_t = e^{(r_f - r_d)t} \left(\mu_x X_t dt + \sigma_x X_t dW_t^x\right) + X_t (r_f - r_d)\, e^{(r_f - r_d)t} dt$$

$$dM_t = e^{(r_f - r_d)t} \left[\underbrace{(\mu_x + r_f - r_d) dt}_{\text{si martingale } dt = 0} + \sigma_x dW_t^x \right]$$

$\mu_x + r_f - r_d = 0$

$$\boxed{\mu_x = r_d - r_f}$$