

# Mouvement Brownien

L4 04/15  
25

On dit qu'un processus  $W$  est un M.B. sous  $\mathbb{P}$  si :

①  $W_0 = 0$

Signification : le processus commence à zéro

But : se fixe un point de départ commun à toutes les trajectoires.

②  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto W_t$  est une fonction continue  $\mathbb{P}$ -P.S.

Interprétation : On définit une fonction dont la variable  $t$  vit dans  $\mathbb{R}_+$  et qui associe à chaque  $t$  la valeur  $W_t$ .

But : empêcher les sauts (bruits) - le processus doit évoluer de façon fluide.

③  $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$  pour tout  $t \geq s \geq 0$

Signification : les incréments du M.B. suivent une loi Normale. Cette loi est centrée (moyenne nulle) et de variance égale à la durée de l'intervalle :  $t-s$

But : Donner une distribution probabiliste précise des variations.

④  $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$  sont  $\perp$

Signification : les incréments sont indépendants

But : garantir une absence de mémoire du processus.

le futur est indépendant du passé.

↳ Notion de marché "efficace"

En probabilité, cela donne une structure très puissante pour construire des intégrales stochastiques (via martingales).