Questions d'examen - Modélisations Avancées

Jean-François Berger-Lefébure

Contents

1 Questions de base

1. Options américaines et binomiales

- Quel est l'avantage principal d'un call américain par rapport à un call européen ?
- Pourquoi utilise-t-on un arbre binomial pour évaluer les options américaines ?
- Quel paramètre impacte directement la rétropropagation des prix dans un arbre binomial ?
- Dans quels cas un call américain et un call européen ont-ils le même prix ?
- Pourquoi l'évaluation d'un put américain nécessite-t-elle une approche différente de celle d'un call américain ?

2. Options binaires (digitales)

- Quelle est la principale différence entre une option binaire et une option vanille ?
- Pourquoi utilise-t-on un call spread pour répliquer une option binaire ?
- Comment la pente du smile de volatilité affecte-t-elle le pricing d'une option binaire ?
- Quel est l'impact de la volatilité implicite sur le prix d'une option binaire proche de la monnaie ?
- Pourquoi la dérivée du prix d'un call par rapport au strike joue-t-elle un rôle dans l'évaluation d'une digitale ?

3. Modèles de volatilité (Smile et SABR)

- Pourquoi le modèle de Black-Scholes est-il inadéquat pour évaluer des produits sensibles au smile de volatilité ?
- Quels sont les principaux paramètres du modèle SABR et comment influencent-ils la forme du smile ?
- Quelle est la différence entre une volatilité locale et une volatilité stochastique ?
- Pourquoi le modèle SABR est-il souvent utilisé pour calibrer des courbes de volatilité implicite sur des produits de taux ?
- En quoi la corrélation entre la volatilité et le sous-jacent influence-t-elle le pricing dans un modèle SABR ?

4. Méthodes numériques et Monte Carlo

- Quel est l'avantage principal de la méthode de Monte Carlo par rapport à un arbre binomial ?
- Pourquoi doit-on discrétiser le temps finement dans les modèles à volatilité locale ?
- Comment génère-t-on des trajectoires simulées pour un actif sous-jacent dans Monte Carlo ?
- Quel rôle joue la loi des grands nombres dans l'estimation des prix d'options par Monte Carlo ?
- Pourquoi la méthode de Monte Carlo est-elle particulièrement utile pour les options path-dependant ?

5. Produits exotiques et risques associés

- Quels sont les trois grands types de risques associés aux produits exotiques ?
- Pourquoi un autocall présente-t-il un risque digital ?
- En quoi la corrélation entre deux actifs impacte-t-elle l'évaluation des options sur spread ?
- Quel est l'effet d'une volatilité implicite sous-estimée sur le pricing d'une option à barrière ?
- Pourquoi la gestion du Vega est-elle critique pour les produits exotiques à risque digital ?

2 Quelques conseils pour bien préparer l'examen...

3 Options Américaines vs Européennes

3.1 Question 1 : Options Américaines vs Européennes

Pourquoi un call américain et un call européen ont-ils le même prix en l'absence de dividendes, mais pas nécessairement dans le cas d'un put ?

Réponse :

L'absence de dividendes signifie qu'il n'y a aucun avantage à exercer un call avant l'échéance. Cependant, pour un put, l'exercice anticipé peut être avantageux si le prix du sous-jacent chute fortement.

Explications détaillées :

- Pour un **call américain**, en l'absence de dividendes, il est préférable de conserver la valeur temps jusqu'à l'échéance, car exercer plus tôt détruit cette valeur sans offrir de gain supplémentaire.
- En revanche, un **put américain** peut être exercé avant l'échéance pour capturer un gain immédiat si le prix du sous-jacent tombe suffisamment bas. Cela rend sa valeur supérieure à celle d'un put européen.
- Exemple : Si le sous-jacent vaut 50€ et le strike du put est 70€, l'exercice immédiat garantit un gain de 20€. Attendre pourrait réduire ce gain si le prix remonte.

—

3.2 Question 2 : Exercice anticipé d'un call américain

Expliquez pourquoi l'exercice anticipé d'un call américain devient avantageux en présence de dividendes.

Réponse :

Un call américain peut être exercé avant l'échéance pour éviter la baisse de valeur due au détachement du dividende.

Explications détaillées :

- Si un dividende est versé, le prix du sous-jacent baisse d'un montant équivalent au dividende.
- En exerçant avant cette baisse, l'investisseur peut obtenir l'action et bénéficier du dividende, évitant ainsi la perte de valeur sur l'option.
- Ce phénomène justifie que les calls américains peuvent valoir plus que leurs équivalents européens.
- Exemple : Si une action vaut 100€, et un dividende de 5€ est prévu, l'exercer avant détachement permet de sécuriser le dividende.

—

3.3 Pourquoi un call américain n'est-il pas exercé même si le prix monte fortement ?

1. Valeur temporelle (Time Value)

Une option américaine se compose de :

- **Valeur intrinsèque :** $S_t - K$ (différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice).
- **Valeur temporelle :** Prime liée à la possibilité d'un mouvement futur favorable.

Exercer un call entraîne la perte immédiate de la **valeur temporelle**.

Exemple :

- Prix d'exercice (K) = 100 €, sous-jacent actuel (S_t) = 150 €, échéance dans 3 mois.
- Valeur intrinsèque = 150 - 100 = **50 €**.
- Valeur temporelle estimée = **10 €**.

$$\text{Si exercé : } 50 \text{ €}$$

$$\text{Si vendu : } 60 \text{ €}$$

Perte de 10 € en exerçant trop tôt.
—

2. Absence d'avantages directs

Contrairement à un put, un call ne fournit **pas de cash immédiat** lors de l'exercice anticipé.

- L'exercice nécessite d'**immobiliser des fonds** pour acheter l'actif sous-jacent.
- En conservant l'option, on maintient l'**effet de levier** et profite de hausses futures potentielles.

—

3. Cas des dividendes

- Avec dividendes : Exercer avant détachement d'un dividende peut être optimal pour éviter une chute du sous-jacent après paiement du dividende.
- Sans dividendes : Aucun avantage immédiat n'est associé à un exercice anticipé.

Exemple :

- Action à 150 €, dividende prévu de 5 €.
- Après détachement du dividende, le prix chute à 145 €.

Exercé avant détachement, l'investisseur évite cette baisse et reçoit le dividende.
—

4. Comparaison avec un put américain

Un **put américain** peut être exercé plus tôt car :

- Il donne accès à des fonds immédiatement, qui peuvent être réinvestis pour générer un rendement (taux d'intérêt positifs).
- Si le sous-jacent chute fortement, récupérer la valeur intrinsèque protège contre d'éventuels rebonds.

Exemple :

- Strike = 50 €, sous-jacent = 30 €.
- Exercé immédiatement → 20 € récupérés et réinvestis.

—

5. Cas spécifiques où exercer un call peut être justifié

- **Dividendes imminents :** Si un dividende va réduire significativement la valeur du sous-jacent.
- **Volatilité faible et ITM profond :** Si la volatilité est quasi nulle, la valeur temporelle devient négligeable.
- **Liquidité du marché :** Si l'option est illiquide, mais que le sous-jacent peut être revendu immédiatement après l'exercice.

—

3.4 Question 3 : Modèle binomial

En utilisant un modèle binomial, expliquez comment évaluer une option américaine et gérer l'exercice anticipé à chaque nœud.

Réponse :

L'arbre binomial évalue une option américaine en vérifiant à chaque nœud si l'exercice anticipé est plus rentable que la continuation.

Explications détaillées :

À chaque nœud, deux valeurs sont calculées :

- La valeur d'attente (en laissant l'option vivante).
- La valeur d'exercice immédiat (valeur intrinsèque).

On choisit la plus élevée pour garantir une évaluation optimisée. Ce processus est répété en remontant l'arbre jusqu'à la racine.
Exemple : Si l'option permet un profit immédiat de 5€ à un nœud, mais que la continuation attendue vaut 4€, l'exercice anticipé est préféré.
—

3.5 Question 4 : Gestion du gamma

Pourquoi la gestion du gamma est-elle plus critique pour les options américaines proches de l'échéance ?

Réponse :

Le gamma devient extrêmement élevé pour une option proche de l'échéance, augmentant la sensibilité aux mouvements du sous-jacent.

Explications détaillées :

- Le gamma mesure la sensibilité du delta. Pour une option américaine proche de l'échéance, même un petit mouvement du sous-jacent peut entraîner un changement important du delta.
- Cela nécessite des ajustements fréquents (hedging dynamique) pour maintenir la couverture delta-neutre.
- Exemple : Si un trader est delta-neutre et que le sous-jacent bouge de 1

—

3.6 Différences de Gamma entre Options Américaines et Européennes

1. Définition et rôle du Gamma

Le **gamma** mesure la sensibilité du **delta** d'une option à une variation du prix du sous-jacent (S_t).

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

- Il indique à quel point la couverture delta devra être ajustée en réponse aux variations du sous-jacent.
- Un **gamma élevé** signifie qu'une petite variation du sous-jacent peut entraîner un grand changement du delta, rendant la gestion plus complexe.
- Le gamma est généralement plus **élevé** pour les options proches de la monnaie (**ATM**) et proches de l'échéance.

—

2. Gamma des Options Européennes

Pour une **option européenne** :

- Le gamma est uniquement fonction des paramètres classiques (S_t, K, σ, T), car l'exercice n'est possible qu'à l'échéance.
- Il n'y a pas d'ajustement à faire pour un exercice anticipé.
- La gestion repose uniquement sur la protection contre les variations du sous-jacent jusqu'à la maturité.

—

3. Gamma des Options Américaines

Pour une **option américaine** :

- En plus des paramètres classiques, le gamma dépend de la **possibilité d'exercice anticipé**.
- Cette flexibilité ajoute une dimension supplémentaire à la gestion du gamma, car il faut aussi tenir compte de l'opportunité d'exercer l'option si elle devient ITM (In The Money).
- Lorsque le sous-jacent approche un niveau critique, le gamma peut varier plus brutalement par rapport à une option européenne.

—

4. Pourquoi la gestion du gamma est-elle plus critique pour les options américaines proches de l'échéance ?

- Les options américaines peuvent être exercées à tout moment, ce qui rend leur gamma **moins prévisible**.
- Lorsqu'une option est **proche de l'échéance** et **proche de la monnaie** (**ATM**), le gamma peut devenir **extrêmement élevé**.
- Pour les options américaines, l'exercice anticipé ajoute un risque supplémentaire, car un changement brutal de prix peut inciter l'investisseur à exercer immédiatement, rendant les ajustements de couverture complexes.

—

5. Exemple Numérique : Gamma Américain vs Européen

Exemple : Option Call Européenne

- $K = 100$, $S_t = 100$, $T = 1$ mois, $\sigma = 20\%$.
- Gamma calculé : 0.08.
- Le gamma reste stable jusqu'à l'échéance, car il n'y a pas de risque d'exercice anticipé.

Exemple : Option Call Américaine

- Même paramètres, mais avec possibilité d'exercice anticipé.
- Si un dividende important est prévu dans 2 jours, la probabilité d'exercice anticipé augmente, ce qui fait bondir le gamma à 0.12.
- Le trader doit maintenant surveiller le dividende et ajuster sa couverture plus fréquemment.

—

6. Points clés sur la gestion du gamma des options américaines

- La gestion du gamma est plus **instable** pour les options américaines en raison du risque d'exercice anticipé.
- Plus l'échéance approche, plus le gamma devient élevé, nécessitant des ajustements plus fréquents (**rebalancements**).
- Les dividendes ou des chutes brutales de prix peuvent déclencher un exercice anticipé, créant des risques supplémentaires par rapport aux options européennes.
- Une surveillance continue est nécessaire pour éviter des pertes dues à un déséquilibre de couverture.

3.7 Question 5 : Relation avec la volatilité implicite

Quelle est la relation entre la volatilité implicite et la probabilité d'exercice anticipé pour une option américaine ?

Réponse :

Une volatilité implicite élevée réduit la probabilité d'exercice anticipé, car elle augmente la valeur temps de l'option.

Explications détaillées :

- Lorsque la volatilité est élevée, la probabilité que l'option devienne encore plus rentable avant l'échéance augmente.
- Cela pousse les investisseurs à retarder l'exercice, préservant la valeur temps.
- En revanche, une volatilité faible rend l'exercice anticipé plus probable, car le gain immédiat devient plus attractif.

—

4 Arbre Binomial pour les Options Américaines

4.1 Question 1 : Qu'est-ce qu'un arbre binomial et pourquoi est-il utilisé pour évaluer les options américaines ?

Un **arbre binomial** est un modèle discret utilisé pour représenter l'évolution possible des prix d'un actif financier sur des périodes successives. Il est particulièrement utile pour évaluer les **options américaines** en raison de leur possibilité d'exercice anticipé.

4.2 Utilité pour les options américaines :

- Le modèle permet d'évaluer la valeur de l'option à chaque nœud en tenant compte de l'exercice anticipé.
- Contrairement aux options européennes, dont la valeur dépend uniquement du prix à maturité, les options américaines nécessitent une évaluation à chaque étape pour décider s'il est optimal de les exercer.

—

4.3 Question 2 : Comment fonctionne un arbre binomial ?

Construction de l'arbre :

1. Diviser la durée (T) en N intervalles de temps ($\Delta t = \frac{T}{N}$).
2. Calculer les mouvements possibles du prix du sous-jacent :
   - Montée (u) : Multiplicateur pour une hausse.
   - Descente (d) : Multiplicateur pour une baisse.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{et} \quad d = \frac{1}{u}$$

3. Définir la probabilité neutre au risque (p) :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

   où r est le taux sans risque et σ est la volatilité.

—

4.4 Question 3 : Comment rétro-propager un prix dans un arbre binomial ?

Méthode de rétro-propagation :

1. Calculer le **payoff** à maturité au dernier nœud de l'arbre.
2. Travailler en remontant dans l'arbre en utilisant :

$$V_i = e^{-r\Delta t} [p \cdot V_u + (1 - p) \cdot V_d]$$

   où :

   - V_u : Valeur dans le cas d'une montée.
   - V_d : Valeur dans le cas d'une descente.
3. À chaque nœud, comparer la valeur obtenue avec le **payoff immédiat** pour décider s'il est optimal d'exercer l'option.

—

4.5 Question 4 : Comment évaluer le payoff à chaque nœud dans l'arbre binomial ?

Calcul du payoff :

- Pour un **call américain** :
$$Payoff = \max(S - K, 0)$$
- Pour un **put américain** :
$$Payoff = \max(K - S, 0)$$

  où :
  - S est le prix du sous-jacent au nœud considéré.
  - K est le prix d'exercice.

Décision d'exercice anticipé :

- Calculer la valeur intrinsèque de l'option au nœud actuel.
- Comparer cette valeur avec la valeur future actualisée.
- Si la valeur intrinsèque est supérieure, exercer immédiatement.

—

4.5.1 Exemple Numérique : Option Put Américaine avec 2 Périodes

Données :

- $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $T = 1$ an, $N = 2$.

Étapes :

1. Calcul des facteurs :
$$u = e^{0.2\cdot\sqrt{0.5}} \approx 1.1052$$
$$d = \frac{1}{1.1052} \approx 0.9048$$
$$p = \frac{e^{0.05\cdot 0.5} - 0.9048}{1.1052 - 0.9048} \approx 0.5768$$
2. Construire l'arbre :
$$S_{0,0} = 100$$
$$S_{1,up} = 100 \cdot u = 110.52, \quad S_{1,down} = 100 \cdot d = 90.48$$
$$S_{2,uu} = 110.52 \cdot u = 122.09, \quad S_{2,dd} = 90.48 \cdot d = 81.87$$
3. Calcul des payoffs au dernier nœud :
$$P_{2,uu} = \max(100 - 122.09, 0) = 0$$
$$P_{2,ud} = \max(100 - 100, 0) = 0$$
$$P_{2,dd} = \max(100 - 81.87, 0) = 18.13$$
4. Rétro-propagation :
$$P_{1,u} = e^{-0.05\cdot 0.5}[0.5768 \cdot 0 + (1 - 0.5768) \cdot 0] = 0$$
$$P_{1,d} = e^{-0.05\cdot 0.5}[0.5768 \cdot 0 + (1 - 0.5768) \cdot 18.13] \approx 9.94$$

5. Comparer avec l'exercice immédiat :

$$P_{1,d} = \max(100 - 90.48, 9.94) = 9.94$$

6. Retour au départ :

$$P_{0,0} = e^{-0.05 \cdot 0.5}[0.5768 \cdot 0 + (1 - 0.5768) \cdot 9.94] \approx 5.61$$

—

Résumé:

- L'arbre binomial est idéal pour modéliser les options américaines, car il permet de tester l'exercice anticipé à chaque étape.
- La méthode repose sur une rétro-propagation des prix pour déterminer la meilleure décision.
- Les décisions d'exercice sont basées sur la comparaison entre la valeur future attendue et la valeur intrinsèque immédiate.

—

5 Principes du Pricing des Options Européennes

5.1 Question 1 : Quel est le principe général du pricing des options européennes par AOA ?

L'arbitrage signifie profiter d'un déséquilibre dans les prix pour réaliser un profit **sans risque**. Le principe clé est qu'il **ne doit pas exister d'opportunité d'arbitrage** sur un marché parfait.

Exemple d'arbitrage :

Si une action est cotée 100 € à Paris et 95 € à Londres, on pourrait acheter à Londres et vendre à Paris pour un profit immédiat de 5 €. Un modèle de pricing robuste doit garantir qu'une telle situation n'existe pas.
—

5.1.1 Application au pricing des options européennes

Pour les options européennes, l'AOA impose que leur prix soit égal à celui d'un **portefeuille répliquant** construit avec :

- Une position en **actions** (Δ) pour suivre les variations du sous-jacent.
- Une position en **cash** (B) pour gérer la valeur actualisée.

Formule générale : $V_t = \Delta S_t + B$
où :

- V_t : Valeur du portefeuille répliquant.
- Δ : Nombre d'actions détenues (**delta**).
- S_t : Prix du sous-jacent.
- B : Montant placé au taux sans risque (r).

—

5.1.2 Pricing sous probabilité neutre au risque

Le prix actuel de l'option est la valeur actualisée de son **payoff futur** sous la mesure neutre au risque :

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}[Payoff]$$

où :

- C_0 : Prix actuel de l'option.
- r : Taux sans risque pour actualiser les flux futurs.
- $\mathbb{E}[Payoff]$: Espérance latex Copier le code mathématique du payoff final avec des probabilités neutres au risque.
- e^{-rT} : Facteur d'actualisation ramenant la valeur future au présent.

—

5.1.3 Exemple Numérique : Pricing d'un Call Européen

Données :

- $S_0 = 100$ €, $K = 105$, $T = 1$ an.
- $r = 5\%$, probabilité neutre au risque $p = 50\%$.
- Payoffs possibles : 120 € (hausse) et 90 € (baisse).

Étapes :

- Payoffs :
  - Hausse : $Payoff = \max(120 - 105, 0) = 15$.
  - Baisse : $Payoff = \max(90 - 105, 0) = 0$.
- Espérance mathématique :
$$\mathbb{E}[Payoff] = (0.5 \cdot 15) + (0.5 \cdot 0) = 7.5$$
- Actualisation :
$$C_0 = e^{-0.05 \cdot 1}(7.5) \approx 7.14$$

—

5.1.4 Question : Le principe d'AOA s'applique-t-il aussi aux options américaines ?

Oui, l'AOA s'applique également aux options américaines. Cependant, il y a une **différence clé** :
Pour une **option américaine**, l'AOA doit tenir compte de la possibilité d'**exercice anticipé**.

- La valeur d'une option américaine est la **plus grande** entre sa valeur obtenue par réplication et sa **valeur intrinsèque** (si exercée immédiatement).
- La méthode d'évaluation repose souvent sur des modèles d'arbres binomiaux, car ils permettent d'évaluer chaque instant de décision.

Formule ajustée :

Pour une option américaine :
$$C_t = \max\left[\Delta S_t + B, Payoff\ immediat\right]$$

Exemple :

- Une option put américaine, avec $S = 90$ et $K = 100$.
- Payoff immédiat : $K - S = 10$.
- Valeur attendue (réplication) : 8 €.
- Résultat : On exerce immédiatement, car $10 > 8$.

—

5.2 Question 2 : Qu'est-ce que la parité call-put et pourquoi est-elle importante ?

Formule de la parité call-put :

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

où :

- C_0 et P_0 : Prix du call et du put.
- S_0 : Prix actuel du sous-jacent.
- K : Prix d'exercice.
- r : Taux sans risque.
- T : Maturité de l'option.

Interprétation :

Cette relation garantit l'absence d'arbitrage entre un call et un put européens ayant le même strike et la même maturité.

Exemple numérique :

- $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 5\%$, $T = 1$ an.
- $C_0 = 8$.
- Calcul de P_0 :

$$P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-rT}$$
$$P_0 = 8 - 100 + 105e^{-0.05} \approx 8 - 100 + 99.51 = 7.51$$

—

5.3 Question 3 : Quelles sont la valeur intrinsèque et la valeur temps d'une option ?

5.3.1 Valeur intrinsèque :

C'est la valeur immédiate si l'option était exercée maintenant :

- Call : $\max(S - K, 0)$
- Put : $\max(K - S, 0)$

5.3.2 Valeur temps :

La différence entre le prix actuel de l'option et sa valeur intrinsèque. Elle reflète l'incertitude sur l'évolution future du sous-jacent.

$$\text{Valeur Temps} = \text{Prix de l'option} - \text{Valeur intrinsèque}$$

Exemple :

- Call avec $S = 110$, $K = 100$, prix du call $= 15$.
- Valeur intrinsèque : $110 - 100 = 10$.
- Valeur temps : $15 - 10 = 5$.

—

5.4 Question 4 : Qu'est-ce que le smile et le skew de volatilité ?

5.4.1 Smile de volatilité :

La volatilité implicite observée sur les marchés forme souvent une courbe en U (smile).

- Options **ITM** et **OTM** ont des volatilités implicites plus élevées.
- Cela traduit une peur du marché pour les mouvements extrêmes.

5.4.2 Skew de volatilité :

Le skew représente l'asymétrie dans la volatilité implicite.

- Sur actions, le skew est souvent **négatif** (volatilité plus élevée pour les puts).
- Sur matières premières, il peut être **positif** (volatilité plus élevée pour les calls).

—

5.5 Volatilité Implicite (IV)

La **volatilité implicite (IV)** représente la volatilité anticipée sur la durée de vie de l'option. Elle est :

- Non observée directement sur le marché.
- Déduite des prix des options via des modèles mathématiques comme Black-Scholes.
- Utilisée pour refléter les anticipations des investisseurs sur la volatilité future.

—

5.5.1 Calcul de la Volatilité Implicite

Formule de Black-Scholes pour un Call Européen

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

où :

- C_0 : Prix de l'option observé sur le marché.
- S_0 : Prix actuel du sous-jacent.
- K : Prix d'exercice.
- T : Temps à l'échéance (en années).
- r : Taux sans risque.
- $N(.)$: Fonction de répartition de la loi normale.
- σ : Volatilité (paramètre inconnu).

—

Étapes de Calcul

1. Connaitre tous les paramètres sauf la volatilité

On utilise :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

—

2. Inversion Numérique

La valeur de σ est obtenue par **résolution numérique** :

- On ajuste σ pour que le prix calculé (C_0) corresponde au prix observé sur le marché.
- Méthodes utilisées : algorithmes d'itération comme Newton-Raphson.

—

Exemple Numérique

Données :

- $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$ an, $r = 5\%$, $C_0 = 10$.

Résultat :

$$\sigma_{IV} \approx 22.4\%$$

5.5.2 Pourquoi un Smile de Volatilité ?

- **Risque d'événements extrêmes (Fat Tails)** : Les investisseurs anticipent des mouvements extrêmes et exigent une **prime supplémentaire** pour les options ITM/OTM.
- **Distribution asymétrique (Skewness)** : Les prix ne suivent pas toujours une loi normale, ce qui entraîne une IV plus forte sur certains strikes.
- **Illiquidité des extrêmes** : Moins de transactions pour les options très ITM ou OTM, augmentant leur prix.

—

Résumé

- - La
- volatilité implicite (IV)
- est déduite des prix de marché en inversant Black-Scholes.
- - Le **smile de volatilité** montre des IV plus élevées aux extrêmes (ITM/OTM) en raison des primes de risque.
- - Les options
- ATM
- ont un **véga maximal** (sensibilité à IV) et un **gamma élevé** (changement rapide de delta).
- - Le
- skew de volatilité
- reflète une asymétrie dans les attentes de marché (hausse lente, baisse brutale).

—

5.6 Volatilité Implicite (IV) et Incertitude

La **volatilité implicite (IV)** représente l'attente du marché concernant les variations futures du sous-jacent. Elle reflète :

- L'**incertitude sur les variations des prix**.
- Les **risques d'événements extrêmes** (queues de distribution).
- Le **coût de la couverture** pour les vendeurs d'options.

—

5.6.1 IV Élevée pour un Call OTM (Out-of-the-Money)

Pourquoi une IV élevée malgré une faible probabilité d'exercice ?

1. **Risque d'événements extrêmes (Fat Tails)**
   - Même si la probabilité d'exercice est faible, un **choc extrême** (fusion, annonce surprise) peut entraîner un mouvement rapide du sous-jacent.
   - Ce risque est intégré dans l'IV sous forme de **prime de risque**.
2. **Demande spéculative élevée**
   - Les calls OTM sont souvent utilisés comme **paris asymétriques** sur des hausses soudaines.
   - Une demande spéculative accrue pousse les prix à la hausse, augmentant l'IV.
3. **Coût de couverture (Hedging)**
   - Même un petit mouvement du sous-jacent peut transformer un call OTM en ATM, ce qui augmente la **gamma**.
   - Les vendeurs doivent ajuster fréquemment leur couverture, ce qui augmente le coût.
4. **Illiquidité**
   - Les options OTM sont souvent **moins liquides**.
   - Pour compenser ce risque d'illiquidité, les prix incluent une prime, reflétée par une IV plus élevée.

—

5.6.2 IV Élevée pour un Call ITM (In-the-Money)

Pourquoi une IV élevée malgré une probabilité d'exercice élevée ?

1. **Exposition au risque pour le vendeur**
   - Un call ITM agit presque comme une **action linéaire** avec un **delta proche de 1**.
   - Cela rend la position plus sensible aux mouvements du sous-jacent.
2. **Liquidité faible**
   - Les options ITM sont souvent peu échangées, car elles ressemblent à une action.
   - Cette **faible liquidité** entraîne des spreads plus élevés et une IV artificiellement gonflée.
3. **Arbitrage et exercice anticipé**
   - Pour les options américaines, les calls ITM peuvent être exercés pour capter des dividendes.
   - Cette complexité dans la gestion des risques pousse l'IV vers le haut.

—

Comparaison : IV sur ITM, ATM et OTM

Type d'Option	Probabilité d'Exercice	Risque d'événements extrêmes	Liquidité	IV attendue
OTM	Faible	Élevée	Faible	Élevée
ATM	Moyenne	Moyenne	Forte	Moyenne
ITM	Forte	Faible	Faible	Élevée

—

Résumé

- **OTM** : IV élevée due au risque d'événements rares, à la demande spéculative et au coût de couverture.
- **ITM** : IV élevée due aux ajustements de couverture, à la faible liquidité et aux arbitrages anticipés.
- **ATM** : Volatilité réalisée maximale, mais IV souvent inférieure car moins exposée aux événements extrêmes.

—

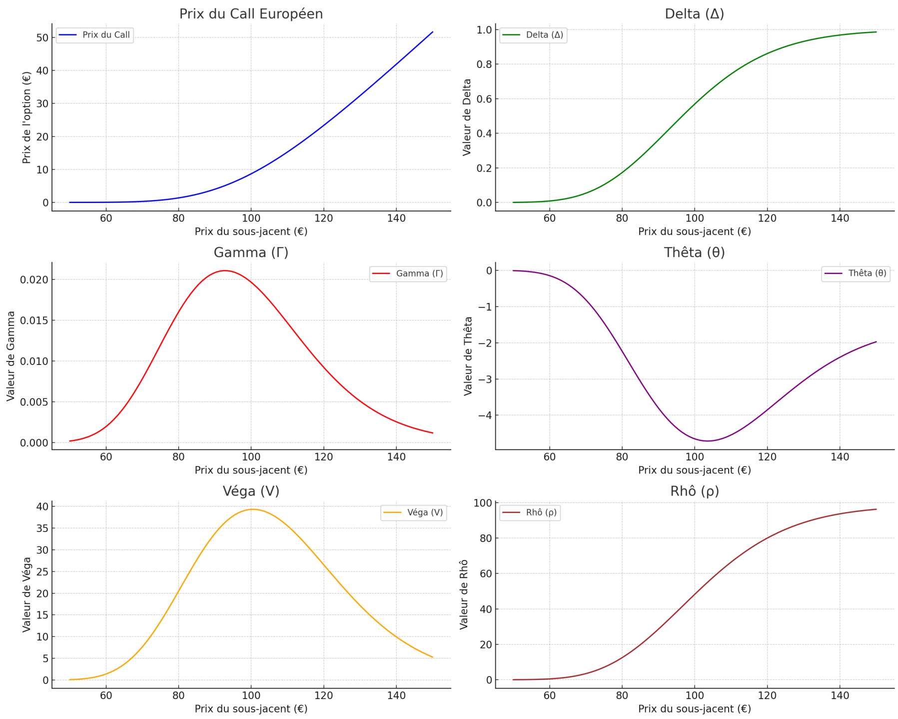
5.7 Question 5 : Quelles sont les grecs et comment les interpréter ?

Principaux grecs :

- **Delta** : Sensibilité au sous-jacent
- **Gamma** : Sensibilité du delta aux variations du sous-jacent
- **Véga** : Sensibilité à la volatilité
- **Theta** : Sensibilité à la décroissance temporelle
- **Rho** : Sensibilité au taux d'intérêt

Position	Delta	Gamma	Thêta	Vega	Rhô
Achat d'un call	> 0	> 0	< 0	> 0	> 0
Vente d'un call	< 0	< 0	> 0	< 0	< 0
Achat d'un put	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0
Vente d'un put	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

5.7.1 Achat d'un call



1. Delta (Δ) :

a. Comprendre le Delta

Le delta mesure **la sensibilité du prix d'une option** par rapport à une variation du prix de l'actif sous-jacent.

- **Pour un call :** $\Delta > 0$. Cela signifie que si le prix du sous-jacent augmente, la valeur du call augmente.
- **Interprétation pratique :** Un delta de 0.5 signifie qu'une augmentation de 1€ du sous-jacent entraîne une augmentation de 0.5€ du prix de l'option.
- **Pourquoi ?** Un call donne le droit d'acheter, donc il devient plus précieux si l'actif monte.
- Pour un **call**, Δ varie entre 0 et 1 .
- Il peut être interprété comme une **probabilité implicite d'être dans la monnaie** à l'échéance.

- Un Delta de 0.5 signifie qu'il y a environ 50 % de chances que l'option soit exercée.

—

b. Pourquoi le Delta atteint 0.5 juste avant le strike ?

Le comportement du Delta dépend des paramètres suivants :

- **Volatilité (σ) :** Une faible volatilité rend le passage de 0 à 1 plus rapide.
- **Temps avant maturité (T) :** À mesure que l'échéance approche, le Delta devient plus abrupt près du strike.

—

c. Calcul détaillé avec nos paramètres :

Paramètres :

- $S = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 1.5\%$, $\sigma = 20\%$.

1. Calcul de $d1$:

$$d1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d1 = \frac{0 + (0.015 + 0.02)}{0.2} = \frac{0.035}{0.2} = 0.175$$

2. Calcul de Δ :

$$\Delta = N(d1)$$

Avec $N(0.175)$ à partir des tables de la loi normale :

$$\Delta \approx 0.569$$

—

d. Pourquoi il est légèrement supérieur à 0.5 avant le strike ?

- Effet de la volatilité :
  Une volatilité positive signifie qu'une partie de la valeur de l'option vient de la **valeur temps**.

  Cela augmente légèrement le Delta au-dessus de 0.5 avant le strike car une hausse augmente davantage la probabilité d'exercice.
- Effet du temps avant maturité :
  Plus l'échéance est proche, plus le Delta évolue rapidement près du strike.
  Mais avec 1 an à courir, le Delta est encore progressif et dépasse 0.5 avant le strike.
- Effet de l'actualisation ($r > 0$) :
  Le taux sans risque ajoute une légère pression haussière sur le Delta pour un call.

—

2. Gamma (Γ) :

a. Comprendre le Gamma

Le gamma mesure **la sensibilité du delta** par rapport à une variation du prix du sous-jacent.

- **Pour un call :** $\Gamma > 0$. Cela signifie que le delta augmente lorsque le sous-jacent monte.
- **Interprétation pratique :** Un gamma élevé indique que le delta varie rapidement.
- **Pourquoi ?** Près de la monnaie (au niveau du strike), la probabilité d'exercice du call change fortement, ce qui impacte beaucoup le delta.

—

b. Différence entre Gamma et Delta

- **Delta (Δ)** : Il mesure la **probabilité implicite d'exercice** de l'option et varie entre 0 et 1.
- **Gamma (Γ)** : Il mesure **le taux de variation du delta** (sensibilité de la probabilité d'exercice). Ce n'est pas une probabilité mais une **dérivée seconde**.

—

c. Le pic du Gamma

Le Gamma n'est pas une probabilité, mais une mesure locale de la vitesse de variation. Il est toujours **faible** et dépend des paramètres du modèle.

Formule du Gamma :

$$\Gamma = \frac{N'(d1)}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}}$$

avec :

- $N'(d1)$: Densité de la loi normale standard.
- S : Prix du sous-jacent.
- σ : Volatilité.
- T : Temps avant maturité.

—

d. Calculs:

Paramètres donnés :

- $S = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 1.5\%$, $\sigma = 20\%$.

1. Calcul de $d1$:

$$d1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d1 = \frac{0 + (0.015 + 0.02)}{0.2} = \frac{0.035}{0.2} = 0.175$$

2. Calcul de $N'(d1)$:

$$N'(d1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(0.175)^2}$$

$$N'(d1) \approx 0.394$$

3. Calcul de Γ :

$$\Gamma = \frac{0.394}{100 \cdot 0.2 \cdot \sqrt{1}}$$

$$\Gamma = \frac{0.394}{20} = 0.0197$$

Résultat : $\Gamma \approx 0.02$, ce qui correspond au graphique.

—

3. Thêta (θ) :

a. Comprendre le Thêta

Le thêta mesure **la sensibilité du prix de l'option** par rapport au temps qui passe.

- **Pour un call :** $\theta < 0$. Cela signifie que la valeur du call diminue au fil du temps.
- **Interprétation pratique :** Une perte de valeur chaque jour due à la dépréciation de la valeur temps.
- **Pourquoi ?** Le temps joue contre l'acheteur car plus l'échéance approche, moins il reste de temps pour qu'une hausse favorable se produise.
- Le **Thêta (θ)** mesure la **perte de valeur temps** d'une option au fil du temps.
- Pour un **call acheté**, il est **négatif**, car chaque jour qui passe réduit la valeur temps de l'option.
- Cette perte n'est **pas uniforme** et varie selon la position par rapport au strike.

—

b. Pourquoi le Thêta remonte au-dessus du strike ?

Zone au-dessus du strike (ITM - Dans la monnaie) :

- Lorsque le call est **dans la monnaie (ITM)**, sa valeur devient principalement **intrinsèque** (c'est-à-dire $S - K$).
- La valeur intrinsèque ne dépend **pas du temps**, donc la perte liée au thêta devient **moins importante**.
- Cela explique pourquoi le Thêta devient **moins négatif** au-dessus du strike, donnant l'impression d'une **remontée**.

Réduction de la valeur temps :

- Plus une option est profondément dans la monnaie, plus sa probabilité d'exercice devient **certaine**.
- La valeur temps disparaît peu à peu, réduisant l'effet du Thêta.

Influence des taux d'intérêt :

- Le Thêta inclut un terme lié aux **taux d'intérêt** (r) qui **réduit légèrement la perte temporelle**.
- Ce facteur joue davantage lorsqu'on est **dans la monnaie (ITM)**, ce qui contribue à atténuer la décroissance.

—

c. Formule simplifiée du Thêta :

La formule complète du Thêta est donnée par :

$$\theta = -\frac{S \cdot N'(d1) \cdot \sigma}{2\sqrt{T}} - r \cdot K \cdot e^{-rT} \cdot N(d2)$$

- **Premier terme :** Décroissance liée à la volatilité (σ) et au sous-jacent (S).
- **Deuxième terme :** Actualisation de la valeur d'exercice (K), qui ralentit la perte de valeur au-dessus du strike.

—

4. Véga (V) :

Le véga mesure **la sensibilité du prix de l'option** à une variation de la volatilité implicite du sous-jacent.

- **Pour un call :** $V > 0$. Cela signifie qu'une augmentation de la volatilité augmente la valeur de l'option.
- **Interprétation pratique :** Plus la volatilité est élevée, plus les variations possibles du sous-jacent sont grandes, ce qui augmente la probabilité d'un gain élevé.
- **Pourquoi ?** Les options profitent de l'incertitude, et une volatilité élevée accroît cette incertitude.

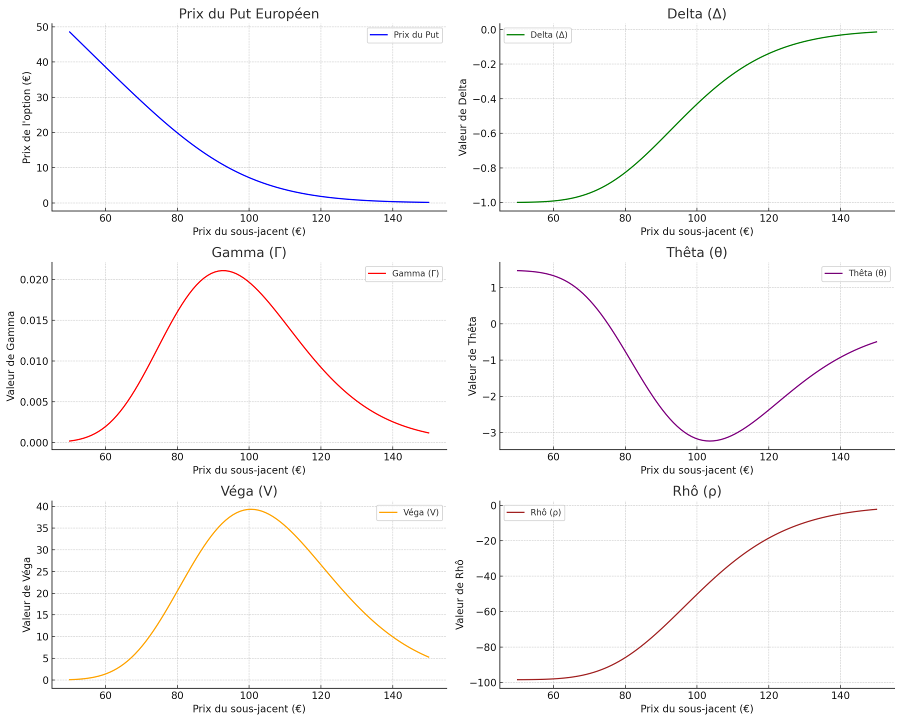
5. Rhô (ρ) :

Le rhô mesure **la sensibilité du prix de l'option** à une variation du taux d'intérêt sans risque.

- **Pour un call :** $\rho > 0$. Cela signifie qu'une augmentation des taux d'intérêt augmente la valeur de l'option.
- **Interprétation pratique :** Les taux d'intérêt élevés réduisent la valeur présente des flux futurs. Comme un call est un droit d'achat futur, il devient plus attractif.
- **Pourquoi ?** Acheter un call revient à reporter un achat, ce qui est plus attractif lorsque l'argent placé en attente rapporte davantage (taux plus élevés).

—

5.7.2 Achat d'un put



1. **Delta (Δ) :**
   - Mesure la **sensibilité au prix du sous-jacent**.
   - $\Delta < 0$, car un put **gagne de la valeur** lorsque le sous-jacent **baisse**.
   - Un delta de -1 signifie que le prix du put varie dans le sens opposé au prix du sous-jacent avec une relation presque linéaire.
   - Interprétation : Si le prix du sous-jacent augmente de 1 €, alors le prix du put diminue de 1 €.

2. **Gamma (Γ) :**
   - Mesure la **variation du delta**.
   - $\Gamma > 0$, atteint son **maximum près du strike**, reflétant des variations rapides du delta.

3. **Thêta (θ) :**
   - Mesure la **perte de valeur avec le temps**.
   - $\theta < 0$ près du strike, mais peut devenir > 0 **dans la monnaie**, car un put gagne en probabilité d'exercice.

4. **Véga (V) :**
   - Mesure la **sensibilité à la volatilité**.
   - $V > 0$, car une **volatilité plus élevée** augmente l'incertitude et donc la valeur du put.

5. **Rhô (ρ) :**
   - Mesure la **sensibilité au taux d'intérêt**.
   - $\rho < 0$, car des **taux plus élevés** réduisent la valeur actualisée du paiement futur.

5.8 Question 6 : Comment mettre en place une couverture en delta ?

5.8.1 Objectif :

Neutraliser l'exposition au sous-jacent en utilisant la couverture en delta :

$$\Delta_{portefeuille} = 0$$

5.8.2 Résumé des cas possibles pour un Delta Hedge

1. **Achat d'un call ($\Delta > 0$) :**
   - **Delta positif** → **Vendre des actions** pour neutraliser.

2. **Vente d'un call ($\Delta < 0$) :**
   - **Delta négatif** → **Acheter des actions** pour compenser.

3. **Achat d'un put ($\Delta < 0$) :**
   - **Delta négatif** → **Acheter des actions** pour neutraliser.

4. **Vente d'un put ($\Delta > 0$) :**
   - **Delta positif** → **Vendre des actions** pour compenser.

—