Exercice 3.13 du cours 10-10-24 (Partie 2)

Jean-François Berger-Lefébure

26 Décembre 2024

Contents

Exercice 3.13: Dynamique des prix et couverture

1 Objectif principal

L'exercice 3.13 vise à modéliser l'évolution d'un prix d'actif (noté S_t) dans un cadre stochastique. Il introduit la dynamique d'Itô et montre comment exprimer cette dynamique sous forme différentielle pour étudier les variations des prix en utilisant des processus de type Brownien (W_t). L'objectif final est d'étudier la couverture d'un portefeuille associé à cet actif et de vérifier les conditions d'équilibre sans arbitrage.

Processus et contenu principal

1. **Modélisation stochastique** :
   - On exprime le prix de l'actif sous forme exponentielle :

     $$S_t = S_0 e^{\Theta t + \sigma W_t}$$

     où Θ représente la tendance moyenne corrigée par la variance $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})$ et σ la volatilité.
2. **Calcul différentiel d'Itô** :
   - On applique la formule d'Itô pour obtenir la dérivée stochastique de S_t. Ce calcul met en évidence :

     $$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

     en prenant en compte les termes de dérivées partielles et les termes quadratiques.
3. **Couverture de portefeuille** :
   - On introduit un portefeuille dynamique avec une position ϕ_t dans l'actif S_t et une position sans risque.
   - L'équation dynamique du portefeuille devient :

     $$dV_t = \phi_t dS_t + (V_t - \phi_t S_t)\, r dt$$

     permettant d'étudier la gestion de la couverture pour minimiser les risques liés aux variations du prix.

But final

- Montrer que la stratégie de couverture peut être représentée par un processus de trading dynamique où la variation de la valeur du portefeuille est liée à celle de l'actif.
- Introduire l'idée d'une couverture parfaite (hedging) dans un marché sans arbitrage.
- Préparer la base mathématique pour le pricing d'options et la gestion des risques financiers.

Prochaines étapes

Nous allons ensuite étudier chaque calcul en détail (formule d'Itô, dérivées partielles, erreurs communes à éviter) pour bien comprendre comment ces équations sont utilisées dans les modèles financiers.

—

Exo 3.13 : (Dynamique des prix)

?? dS_t ??

$S_t = S_0 e^{\Theta t + \sigma W_t}$ $\qquad \Theta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$

On note $f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}$

$S_t = f(t, W_t)$

$f_t(t,x) = \Theta f(t,x)$

$f_x(t,x) = \sigma f(t,x)$, $f_{xx}(t,x) = \sigma^2 f(t,x)$

1.1 Introduction - Dynamique des prix

Cet exercice étudie la dynamique des prix d'un actif financier en utilisant un modèle stochastique. Le but est d'analyser l'évolution temporelle du prix S_t à l'aide des processus d'Itô et des équations différentielles stochastiques. Question finale : Quelle est l'expression différentielle pour dS_t ?

1.1.1 Modélisation du prix :

On suppose que le prix de l'actif suit la dynamique suivante :

$$S_t = S_0 e^{\Theta t + \sigma W_t}$$

avec :

- S_0 : Prix initial de l'actif au temps $t = 0$.
- Θt : Tendance moyenne ajustée (dérivée plus loin).
- σW_t : Partie aléatoire représentant l'incertitude ou la volatilité.
- $e^{\cdots}$: Croissance exponentielle reflétant les effets combinés de la tendance et des chocs aléatoires.

Définition de Θ:

$$\Theta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

avec :

- μ : Taux de rendement moyen de l'actif.
- σ^2 : Variance ou carré de la volatilité.
- $\frac{\sigma^2}{2}$: Ajustement lié à l'effet quadratique des variations stochastiques (correction d'Itô).

Remarque : Cet ajustement compense les fluctuations quadratiques pour refléter la croissance réelle attendue après avoir pris en compte l'incertitude.

1.1.2 Notation simplifiée et forme exponentielle

Pour simplifier les calculs et mieux analyser les variations, on réécrit la dynamique du prix sous la forme :

$$f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}.$$

où :

- S_0 : Prix initial de l'actif au temps $t = 0$.

- Θt : Contribution déterministe liée au temps.
- σx : Contribution aléatoire liée aux variations du mouvement Brownien.

Objectif de cette notation : Cette forme met en évidence :

1. La séparation des effets **déterministes** (Θt) et **aléatoires** (σx).
2. La possibilité d'utiliser la formule d'Itô en calculant les dérivées partielles par rapport à t et x.

Remarque : Cette écriture est équivalente à :

$$S_t = S_0 e^{\Theta t + \sigma W_t}.$$

Elle sert uniquement à faciliter les calculs et à généraliser la notation pour les dérivées partielles.

1.1.3 Autre notation simplifiée :

On pose :

$$S_t = f(t, W_t)$$

Cette notation exprime le prix comme une fonction $f(t, x)$, où :

- t : Temps.
- $x = W_t$: Mouvement Brownien représentant les variations aléatoires.

—

1.1.4 Différence entre $S_t = S_0 e^{\Theta t + \sigma W_t}$ et $S_t = f(t, W_t)$

—

2 Question 1: Calcul des dérivées partielles :

2.1 Correction des notes

$$S_t = S_0 e^{\Theta t + \sigma W_t}, \Theta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}, f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}, S_t = f(t, W_t)$$

Dérivées partielles calculées :

$$f_t(t,x) = \Theta f(t,x)$$

$$f_x(t,x) = \sigma f(t,x)$$

$$f_{xx}(t,x) = \sigma^2 f(t,x)$$

2.2 Dérivée partielle par rapport au temps "On fait tomber l'exponentiel"

Nous voulons calculer la dérivée partielle suivante :

$$f_t(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}.$$

—

1. Formule donnée :

La fonction est :$f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}$.

Objectif : Trouver $f_t(t,x)$.

—

2. Rappel : Dérivée d'une exponentielle

La règle générale pour dériver une exponentielle est :

$$\frac{d}{dt}[e^{u(t)}] = e^{u(t)} \cdot \frac{du(t)}{dt}.$$

- L'exponentielle est spéciale car sa dérivée reproduit elle-même.
- Ensuite, on dérive l'exposant $u(t)$ à l'aide de la **règle de la chaîne**.

—

3. Application à notre cas

Nous avons :

$$f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}.$$

—

Étape 1 : Identifier l'exposant L'exposant est :

$$u(t,x) = \Theta t + \sigma x.$$

—

Étape 2 : Dériver l'exposant

On calcule la dérivée par rapport à t :

L'exposant est:

$$u(t, x) = \Theta t + \sigma x.$$

On cherche :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}.$$

—

Étape 1 : Séparer les termes

L'exposant contient deux termes :

- Θt : dépend de t.
- σx : ne dépend pas de t (constante).

—

Étape 2 : Dériver chaque terme

- $\frac{\partial(\Theta t)}{\partial t} = \Theta$.
- $\frac{\partial(\sigma x)}{\partial t} = 0$.

Résultat :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Theta.$$

—

Exemple numérique :

Prenons :

$$u(t, x) = 0.03t + 0.2x.$$

Calculons :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 0.03.$$

Interprétation : Chaque augmentation de 1 unité dans t ajoute 0.03 au résultat, ce qui reflète la pente constante Θ.

—

Le résultat repose sur la règle :

$$\frac{\partial(ax)}{\partial x} = a,$$

ce qui capture directement la vitesse de variation d'un terme linéaire.

—

Étape 3 : Appliquer la règle de la chaîne

En utilisant :

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = f(t, x) \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial t},$$

on obtient :

$$f_t(t, x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x} \cdot \Theta.$$

—

Principe de la règle de la chaîne

La fonction donnée est une **composition** :

$$f(t,x) = S_0 \cdot g(u(t,x)),$$

où :

- $g(u) = e^u$ est une fonction exponentielle.
- $u(t,x) = \Theta t + \sigma x$ est l'exposant.

Pour dériver une fonction composée, on utilise la **règle de la chaîne** :

$$\frac{d}{dt}[g(u(t))] = g'(u(t)) \cdot \frac{du(t)}{dt}.$$

—

Étape 1 : Identifier chaque composante

- $g(u) = e^u$, donc sa dérivée est :

$$g'(u) = e^u.$$

- $u(t,x) = \Theta t + \sigma x$, donc sa dérivée est :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Theta.$$

—

Étape 2 : Appliquer la règle de la chaîne

En utilisant la règle :

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = f(t,x) \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial t},$$

on décompose le calcul :

1. La **valeur de la fonction** :

$$f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}.$$

2. La **dérivée de l'exposant** :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Theta.$$

—

Étape 3 : Assemblage final

En combinant les résultats, on obtient :

$$f_t(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x} \cdot \Theta.$$

—

Exemple numérique pour vérifier

Prenons :

$$f(t,x) = e^{2t+3x}.$$

Étape 1 : Calculons $f_t(t,x)$

1. La fonction exponentielle reste identique :

$$e^{2t+3x}.$$

2. On dérive l'exposant :

$$\frac{\partial(2t+3x)}{\partial t} = 2.$$

Étape 2 : Résultat final

$$f_t(t,x) = e^{2t+3x} \cdot 2.$$

—

Résultat final :

Pour toute fonction exponentielle de la forme :

$$f(t,x) = e^{u(t,x)},$$

la dérivée suit :

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = e^{u(t,x)} \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}.$$

Dans notre cas :

$$f_t(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x} \cdot \Theta.$$

Ce qui donne :

$$f_t(t,x) = \Theta f(t,x).$$

Cette expression montre que l'évolution temporelle est proportionnelle à la valeur actuelle, avec un taux de croissance donné par Θ.

—

NB: Pourquoi "faire tomber l'exponentiel" fonctionne ?

La phrase du professeur — **"on fait tomber l'exponentiel"** — vient de l'observation suivante :

- Lorsqu'on dérive une exponentielle, **elle se reproduit dans la réponse**.
- Ensuite, on multiplie simplement par la **dérivée de l'exposant**.

Interprétation : L'exponentielle est une fonction spéciale qui agit comme une **copie parfaite** lorsqu'on la dérive. Le changement réel provient uniquement de l'**exposant**, qui contrôle la vitesse de variation.

—

2.3 Calcul de la première dérivée partielle par rapport à x

Cette dérivée mesure la sensibilité du prix à la variable aléatoire x (le mouvement Brownien). Elle reflète l'effet proportionnel de la volatilité sur les variations du prix.

Nous voulons calculer :

$$f_x(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}.$$

La fonction est :$f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x}$.

—

Étape 1 : Identifier les termes dépendants de x

Dans cette formule :

- S_0 est une constante, donc **indépendant** de x.
- Θt ne dépend pas de x.
- σx **dépend de x**, c'est ce terme qui va contribuer à la dérivée.

—

3. Étape 2 : Application de la règle de la chaîne

On remarque que la fonction est de la forme exponentielle :

$$f(t,x) = S_0 e^{u(t,x)},$$

Rappel de la règle : Pour une exponentielle

$$\frac{\partial}{\partial x}[e^{u(x)}] = e^{u(x)} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x}.$$

—

Étape 3 : Calcul de la dérivée de l'exposant

L'exposant est : $u(t,x) = \Theta t + \sigma x$.

Sa dérivée par rapport à x est :

- $\frac{\partial(\Theta t)}{\partial x} = 0$ (car Θt ne dépend pas de x).
- $\frac{\partial(\sigma x)}{\partial x} = \sigma$.

—

Étape 4 : Appliquer la règle de la chaîne

Utilisons la règle :

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = f(t,x) \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}.$$

Assemblage final :

$$f_x(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x} \cdot \sigma.$$

—

Étape 5 : Simplification finale

Puisque :

$$f(t,x) = S_0 e^{\Theta t + \sigma x},$$

on peut simplifier en :

$$f_x(t,x) = \sigma f(t,x).$$

- Cette dérivée reflète l'effet proportionnel de la **volatilité** σ sur les variations du prix.
- Elle représente la sensibilité immédiate aux chocs aléatoires.

—

Exemple numérique

Prenons :$f(t,x) = e^{2t+3x}$.

Étape 1 : Calculons $f_x(t,x)$

1. La fonction exponentielle reste identique :

$$e^{2t+3x}.$$

2. La dérivée de l'exposant :

$$\frac{\partial(2t+3x)}{\partial x} = 3.$$

Étape 2 : Résultat final

$$f_x(t,x) = e^{2t+3x} \cdot 3.$$

—

2.4 Calcul de la deuxième dérivée partielle par rapport à x

Cette dérivée seconde mesure l'effet quadratique des chocs aléatoires, jouant un rôle clé dans la formule d'Itô pour inclure la variance.

Nous voulons calculer :

$$f_{xx}(t,x) = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}.$$

—

Étape 1 : Identifier les termes dépendants de x

Dans cette formule :

- S_0 est une constante, donc **indépendant** de x.
- Θt ne dépend pas de x.
- σx **dépend de x** et contribue aux variations.

—

Étape 2 : Appliquer la première dérivée

La première dérivée par rapport à x a déjà été calculée :

$$f_x(t,x) = \sigma f(t,x).$$

Ce résultat sera maintenant utilisé pour calculer la **deuxième dérivée**.

—

Étape 3 : Appliquer la règle de la chaîne pour la deuxième dérivée

Nous devons dériver une deuxième fois :

$$f_{xx}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma f(t,x)\right].$$

—

Étape 4 : Calcul de la dérivée

1. Le facteur σ est une **constante**, donc il reste inchangé :

$$f_{xx}(t,x) = \sigma \cdot \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}.$$

2. On remplace la première dérivée :

$$f_x(t,x) = \sigma f(t,x).$$

Ce qui donne :

$$f_{xx}(t,x) = \sigma \cdot [\sigma f(t,x)].$$

—

Étape 5 : Simplification finale

$$f_{xx}(t,x) = \sigma^2 f(t,x).$$

—

Interprétation :

- - Le premier dérivé (f_x) mesure **l'impact direct** des variations de x.
- - Le second dérivé (f_{xx}) mesure **l'impact cumulatif et amplifié** dû à la croissance ou décroissance continue des variations.
- - Ce comportement quadratique est lié à la **variance**, qui est une mesure de la dispersion des fluctuations aléatoires.

—

Exemple numérique

Prenons :

$$f(t,x) = e^{2t+3x}.$$

Étape 1 : Première dérivée :

$$f_x(t,x) = 3e^{2t+3x}.$$

Étape 2 : Deuxième dérivée :

$$f_{xx}(t,x) = 3 \cdot 3e^{2t+3x}.$$

Résultat final :

$$f_{xx}(t,x) = 9e^{2t+3x}.$$

—

Interprétation : Cette dérivée est **cruciale** pour la **formule d'Itô**, car elle intervient dans le calcul des termes quadratiques liés aux **variances** des chocs aléatoires :

- Le terme σ^2 reflète l'effet amplifié des variations aléatoires.
- Ce comportement est nécessaire pour modéliser les processus stochastiques, car les fluctuations aléatoires ont un effet cumulé qui dépend de leur **dispersion** (variance).

—

Conclusion intermédiaire

Ces calculs préparent l'application de la **formule d'Itô**, qui combine :

- La première dérivée (f_t) pour l'évolution **déterministe**.
- La première dérivée par rapport à x (f_x) pour les **chocs aléatoires**.
- La deuxième dérivée (f_{xx}) pour inclure les effets **quadratiques** liés à la **variance**.

—

Prochaine étape : Utiliser ces dérivées dans la formule d'Itô pour exprimer explicitement : dS_t.

$$dS_t = d f(t, W_t)$$
$$= \Theta \overbrace{f(t, W_t)}^{S_t} dt$$
$$+ \sigma f(t, W_t) dW_t$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t) \overbrace{d\langle W\rangle_t}^{dt}$$
$$= \Theta S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt$$
$$\boxed{dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t}$$
car $\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2 = \mu$

3 Question 2 - Dynamique de S

3.1 Correction des notes

$$dS_t = df(t, W_t)$$

$$= \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} dt + \sigma \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial x} dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial x^2} d\langle W\rangle_t$$

$$= \Theta S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

car: $\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 = \mu$

3.2 1ère ligne :

$$dS_t = df(t, W_t)$$

Nous analysons ici la dynamique du prix S_t en utilisant la formule d'Itô.

1. Notation et objectif

L'objectif est d'exprimer l'évolution infinitésimale (dS_t) du prix comme une fonction de t (le temps) et W_t (le mouvement Brownien).

Nous posons :

$$S_t = f(t, W_t)$$

où :

- S_t : Prix de l'actif au temps t.
- $f(t, W_t)$: Fonction dépendant du temps t et du processus aléatoire W_t.

2. Interprétation de $df(t, W_t)$

La variation infinitésimale de S_t est donnée par la formule d'Itô, qui décompose cette variation en trois parties :

$$dS_t = df(t, W_t).$$

Ce terme décrit :

- Comment le prix change en fonction du **temps déterministe** (dt).
- Comment il réagit aux **chocs aléatoires** (dW_t).
- Comment il inclut les **effets quadratiques** liés à la variance ($(dW_t)^2$).

3. Application immédiate

Pour calculer explicitement $df(t, W_t)$, on applique la formule d'Itô :

$$dS_t = \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial W_t^2} (dW_t)^2.$$

4. Résultat attendu

Cette équation donne la base pour dériver chaque terme séparément. Elle montre que :

1. Le premier terme est lié au changement **déterministe** avec dt.
2. Le second terme dépend des **chocs aléatoires** avec dW_t.
3. Le dernier terme mesure l'**effet quadratique** dû aux variations aléatoires.

Ainsi, le premier terme introduit simplement la base pour utiliser la formule d'Itô et décomposer les effets du processus aléatoire W_t.

3.2.1 Différence entre $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ et $dS_t = df(t, W_t)$

2ème ligne :

Formule 1 : Version classique

$$dS_t = \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial W_t^2} (dW_t)^2$$

Formule 2 : Version de mon professeur

$$dS_t = \Theta f(t, W_t) dt + \sigma f(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 f(t, W_t) d\langle W \rangle_t$$

3.3 2ème ligne et premier terme : Contribution déterministe (dt)

$$\Theta f(t, W_t) dt$$

Interprétation : Ce terme représente l'**évolution temporelle déterministe** de la fonction $f(t, W_t)$.
Θ est un opérateur différentiel qui agit sur f et correspond à la dérivée partielle par rapport au temps :

$$\Theta f(t, W_t) = \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t}.$$

Différence : La notation avec Θ simplifie l'écriture et est souvent utilisée pour des raisons de **clarté** dans les formules complexes.

—

3.4 2ème ligne et deuxième terme : Contribution aléatoire (dW_t)

$$\sigma f(t, W_t) dW_t$$

Interprétation : Ce terme capture l'effet des **fluctuations aléatoires** dues au mouvement brownien.

- σ contrôle l'**amplitude des variations aléatoires** (volatilité).
- dW_t représente les petites variations aléatoires autour de la moyenne.

—

3.5 2ème ligne et troisième terme : Contribution quadratique (dt)

Formule du prof :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t) d\langle W \rangle_t$$

Interprétation : Ce terme est lié aux **effets quadratiques** des variations aléatoires, qui influencent la **variance**. $d\langle W \rangle_t$ est la **variation quadratique** du mouvement brownien et vaut :

$$d\langle W \rangle_t = dt$$

- σ^2 introduit un facteur lié à la **volatilité au carré** pour ajuster l'impact des variations.
- Ce terme joue un rôle clé dans les corrections liées aux **dérivées secondes**.

3.5.1 Notation : $(dW_t)^2$ et $d\langle W \rangle_t$

Formule donnée :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t) d\langle W \rangle_t$$

1. Pourquoi deux notations ?

Pour un mouvement Brownien :

$$(dW_t)^2 = dt.$$

Mais, pour généraliser, on utilise la **variation quadratique** :

$$d\langle W \rangle_t = dt.$$

—

2. Égalité entre les deux

Pour un mouvement Brownien, les deux notations sont équivalentes :

$$(dW_t)^2 = d\langle W \rangle_t.$$

—

3. Raison d'utiliser $d\langle W \rangle_t$?

- **Généralisation :** Fonctionne pour tous les processus, pas uniquement pour W_t.
- **Rigueur mathématique :** Facilite les extensions aux processus semi-martingales.
- **Notation standard :** Utilisée en finance et en probabilités pour garder la cohérence des modèles avancés.

—

4. Formule finale

En utilisant :

$$d\langle W\rangle_t = dt,$$

le terme devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)dt.$$

—

5. Résumé

- $(dW_t)^2$ est une notation simplifiée et spécifique au mouvement Brownien.
- $d\langle W\rangle_t$ est une notation plus générale pour gérer d'autres processus stochastiques.
- Les deux sont égales pour W_t, mais on préfère $d\langle W\rangle_t$ pour sa **rigueur** et sa **flexibilité**.

3.6 Passage de la notation quadratique à la forme finale

1. Formule initiale avec variation quadratique

On part de la formule avec la notation quadratique :

$$dS_t = \Theta f(t, W_t)dt + \sigma f(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)d\langle W\rangle_t.$$

—

2. Remplacement de $d\langle W\rangle_t$

Pour un mouvement Brownien, on utilise :

$$d\langle W\rangle_t = dt.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)d\langle W\rangle_t = \frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)dt.$$

—

3. Remplacement par S_t

Puisque :

$$f(t, W_t) = S_t,$$

chaque terme devient :

- $\Theta f(t, W_t)dt \to \Theta S_t dt$
- $\sigma f(t, W_t)dW_t \to \sigma S_t dW_t$
- $\frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)dt \to \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt$

On obtient la dynamique complète :

$$dS_t = \Theta S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt.$$

3.7 Formule finale

Partons de la formule obtenue par la formule d'Itô :

$$dS_t = \Theta S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt.$$

Étape 1 : Regrouper les termes

Facteur commun :

$$dS_t = S_t \left(\Theta dt + \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \right).$$

= = = == ==

Simplification des termes

Étape 1 : Regrouper les termes

On part de la formule obtenue :

$$dS_t = \Theta S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt.$$

On met S_t en facteur commun :

$$dS_t = S_t \left(\Theta dt + \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \right).$$

—

Étape 2 : Simplifier les termes dt

On combine les termes dépendants de dt :

$$\Theta dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt.$$

D'où :

$$dS_t = S_t \left(\left(\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \right).$$

—

Étape 3 : Analyse du résultat

La formule simplifiée montre clairement deux contributions :

- **Déterministe :** $\left(\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$.
- **Aléatoire :** σdW_t.

Ces deux effets capturent la croissance moyenne ajustée (dt) et les fluctuations aléatoires (dW_t).

—

Conclusion

Le regroupement des termes permet d'écrire la dynamique sous une forme compacte, préparant ainsi la substitution finale avec :

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 = \mu.$$

—

Étape 4 : Résultat final

En remplaçant, on obtient :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Ce résultat combine les effets :

- **Croissance moyenne déterministe :** $\mu S_t dt$
- **Fluctuations aléatoires :** $\sigma S_t dW_t$

—

3.8 Différentes notations possibles

- **Version classique :** Plus explicite, utile pour les calculs pratiques.
- **Version du professeur :** Plus rigoureuse, adaptée pour des démonstrations théoriques sur les **variations quadratiques**.

Terme	**Notation classique**	**Notation du prof**
Contribution déterministe	$\frac{\partial f(t,W_t)}{\partial t}dt$	$\Theta f(t, W_t)dt$
Contribution aléatoire	$\frac{\partial f(t,W_t)}{\partial W_t}dW_t$	$\sigma f(t, W_t)dW_t$
Contribution quadratique	$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,W_t)}{\partial W_t^2}dt$	$\frac{1}{2}\sigma^2 f(t, W_t)d\langle W\rangle_t$

—

3.9 Synthèse générale

But global de ces calculs : Déterminer la dynamique stochastique du prix d'un actif en combinant une croissance exponentielle moyenne et une composante aléatoire proportionnelle à la volatilité.

Raisonnement clé :

1. Décomposer le prix en une fonction dépendant du temps et d'un mouvement brownien.
2. Appliquer la formule d'Itô pour inclure la contribution des fluctuations aléatoires.
3. Ajuster la croissance moyenne pour tenir compte des effets quadratiques liés à la volatilité.

Spécificités importantes :

- L'ajustement quadratique $\frac{1}{2}\sigma^2$ provient des propriétés des processus d'Itô.
- La dynamique finale est donnée par une équation de type SDE (équation différentielle stochastique) utilisée dans la tarification des options et les modèles financiers.

—

Pour définir la valeur d'un portefeuille

Introduction

On cherche à modéliser la valeur d'un portefeuille financier composé d'actifs. Ce modèle permet d'étudier l'évolution temporelle de la valeur du portefeuille en utilisant des processus stochastiques.

Conditions initiales

- ϕ : stratégie d'investissement, qui représente le nombre d'actifs détenus au fil du temps.
- ϕ_t : nombre de titres détenus à l'instant t.
- $V_t^{x,\phi}$: valeur du portefeuille à l'instant t.

3.10 Détails et explications

1. Définition d'un portefeuille On définit la valeur d'un portefeuille par :

$$\Rightarrow \text{Peut définir la valeur d'un portefeuille :}$$

Cette formule établit que la valeur du portefeuille dépend de la stratégie choisie et des fluctuations des prix des actifs.

2. Stratégie admissible La stratégie ϕ est dite admissible si :

- Il n'existe pas de stratégie d'arbitrage permettant d'obtenir un profit sans risque.
- La stratégie est auto-financée : toute variation de valeur provient uniquement des variations des prix des actifs détenus.

On suppose que :

$$\phi_t = \text{nombre de titres détenus en } t$$

3. Processus de la valeur du portefeuille La valeur $V_t^{x,\phi}$ représente la richesse du portefeuille à un instant donné. Sa dynamique dépend de :

- La quantité initiale investie, x.
- Les stratégies d'achat ou de vente au fil du temps, ϕ_t.

On écrit alors :

$$V_t^{x,\phi}$$

Points clés à retenir

- Une stratégie ϕ doit être admissible pour éviter les stratégies d'arbitrage.
- La valeur d'un portefeuille suit des variations définies par des processus d'Itô, ce qui permet d'évaluer les gains ou pertes basés sur les fluctuations aléatoires du marché.

Prochaine étape

Analyser la dynamique exacte de $V_t^{x,\phi}$ et voir comment elle est reliée à l'équation différentielle stochastique des prix des actifs.

—

4 Question3 : Formule de la dynamique de V_t

Formulation continue :

$$V_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_s \, dS_s + \int_0^t (V_s^{x,\phi} - \phi_s S_s) r \, ds.$$

Cette équation décrit la valeur d'un portefeuille avec :

- x : Richesse initiale.
- $\int_0^t \phi_s \, dS_s$: Gains liés aux actifs risqués.
- $\int_0^t (V_s^{x,\phi} - \phi_s S_s) r \, ds$: Gains sur fonds non investis.

—

Formulation différentielle :

$$dV_t^{x,\phi} = \phi_t dS_t + (V_t - \phi_t S_t) r \, dt.$$

Cela décompose les variations en :

- $\phi_t dS_t$: Contribution des actifs risqués.
- $(V_t - \phi_t S_t) r dt$: Rendement des montants non investis.

—

4.1 Remarques

Cette remarque vise à expliquer l'évolution d'un portefeuille dans un cadre sans risque lorsque la stratégie de placement ϕ est nulle (c'est-à-dire aucun actif risqué n'est détenu).

L'objectif est d'étudier la dynamique de la valeur V_t du portefeuille uniquement investi dans un actif sans risque avec un taux d'intérêt r.

L1: Hypothèse sans risque

$$\phi \equiv 0 \quad \text{alors}$$

Aucun actif risqué n'est détenu ($\phi = 0$). On considère uniquement un placement dans un actif sans risque.

L2: Évolution du portefeuille

$$V_t = x + \int_0^t 0 \, dS_s + \int_0^t (V_s - 0 S_s) r \, ds$$

- x : richesse initiale.
- Le premier terme est nul car il n'y a pas d'investissement dans un actif risqué ($\phi = 0$).
- Le second terme accumule les intérêts sur la richesse investie à un taux r.

L3 : Simplification

$$V_t = x + \int_0^t V_s \, r \, ds$$

Seul le rendement sur la richesse initiale x contribue à la croissance de V_t. Ce processus est déterministe, sans bruit stochastique.

L4: Forme différentielle

$$dV_t = r V_t \, dt$$

Équation différentielle montrant que V_t croît proportionnellement à son niveau initial avec un taux d'intérêt constant r.

L5: Solution exponentielle

$$\frac{dV_t}{dt} = rV_t \quad \Rightarrow \quad V_t = xe^{rt}$$

La solution est une croissance exponentielle continue, modèle classique en finance pour un placement sans risque.

4.1.1 Résolution détaillée de l'équation différentielle: $\frac{dV_t}{dt} = rV_t$

—

Discrétisation et approximation

L6 : Approximation discrète

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{rt}{N}\right)^N$$

Montre que la croissance continue peut être approchée par une accumulation discrète. Lorsque $N \to \infty$, cette formule converge vers une exponentielle.

—

L7: Développement logarithmique pour petits pas de temps

1L:

$$\ln\left(\left(1 + r\frac{t}{N}\right)^N\right) = N\ln\left(1 + r\frac{t}{N}\right)$$

But : Approximons la croissance d'un investissement avec un taux d'intérêt composé sur des intervalles discrets.

- r : taux d'intérêt
- t : période totale
- N : nombre de subdivisions (compostages)

On utilise la **propriété des logarithmes** :

$$\ln(A^B) = B\ln(A)$$

Interprétation : On cherche à montrer comment la croissance continue (limite quand $N \to \infty$) converge vers une croissance exponentielle. On passe de la forme discrète à une forme continue exploitant les logarithmes pour simplifier l'analyse.

Vérification : La formule est **correcte** puisqu'elle repose sur une propriété de base des logarithmes.

2L :

$$N\ln\left(1 + r\frac{t}{N}\right) = N\left(\ln 1 + r\frac{t}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)$$

But : Approximons $\ln(1+x)$ en utilisant son **développement de Taylor** autour de 0 :

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Pour $x = r\frac{t}{N}$, nous obtenons :

$$\ln\left(1 + r\frac{t}{N}\right) \approx r\frac{t}{N} + O\left(\left(\frac{t}{N}\right)^2\right)$$

Multipliée par N, cette approximation devient :

$$N \ln \left(1 + r\frac{t}{N}\right) \approx N \left(r\frac{t}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)$$

Interprétation : Cette étape justifie la convergence de la somme discrète vers une forme continue en prenant une approximation. Elle montre que l'erreur d'approximation décroît avec N (erreur d'ordre $\frac{1}{N^2}$).

Vérification : La formule est **correcte** en utilisant l'expansion de Taylor et en négligeant les termes d'ordre supérieur.

3L:

$$N \ln \left(1 + r\frac{t}{N}\right) \to rt$$

But : Prenons maintenant la **limite** quand $N \to \infty$. Quand N devient très grand, l'approximation devient une **somme continue**, et on converge vers :

$$\lim_{N\to\infty} N \left(r\frac{t}{N}\right) = rt$$

Interprétation : Ce résultat montre que dans un régime de **composition continue**, les intérêts composés deviennent exponentiels avec le taux r et la période t. C'est une justification du passage d'un modèle discret vers un modèle continu.

Conclusion

But global: Montrer la transition entre un **modèle discret** d'intérêts composés et un **modèle continu** d'intérêts exponentiels. Justifier mathématiquement pourquoi les modèles financiers reposent souvent sur des exponentielles pour modéliser la croissance continue.

L'accumulation discrète converge vers rt en continu. Les termes d'ordre supérieur deviennent négligeables lorsque N est très grand.

Visualisation avec une échelle temporelle :

Un graphique illustre la convergence discrète vers le modèle continu :

- Chaque intervalle de temps $\frac{t}{N}$ montre une augmentation légère $(1 + \frac{rt}{N})$.
- Lorsque N augmente, cela se rapproche d'une croissance exponentielle.

Points clés :

- **But :** Montrer que l'évolution d'un portefeuille sans risque suit une croissance exponentielle.
- **Raisonnement :** Approche discrète (intérêts composés) et continue (croissance exponentielle) sont reliées par des approximations logarithmiques.
- **Spécificités mathématiques :** Analyse de convergence entre discrétisation et continuité.

—

5 Question 4 : Déduire la dynamique de S_t

Objectifs de la question

Le but de la question est de :

- Déterminer la dynamique de S_t sous la forme d'un processus stochastique.
- Utiliser la transformation pour simplifier les calculs en supprimant le taux sans risque r.
- Retrouver l'équation du mouvement brownien géométrique, souvent utilisée pour modéliser les prix des actifs financiers.

5.1 Transformation initiale

On commence par introduire les variables suivantes :

$$\beta_t = e^{-rt} \qquad \text{(Facteur d'actualisation)}$$
$$\tilde{S}_t = \beta_t S_t \qquad \text{(Variable actualisée).}$$

Fonction exponentielle

On définit :

$$\tilde{S}_t = f(t, S_t)$$

avec :

$$f(t, x) = e^{-rt} x.$$

Calcul avec Itô

Rappel de la formule d'Itô :

$$d\tilde{S}_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)(dS_t)^2$$

- **Dérivée temporelle :**
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t) = f_t(t, x) = -rf(t, S_t).$$
- **Dérivée spatiale :**
$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) = f_x(t, x) = e^{-rt}.$$
- **Dérivée seconde :**
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t) = f_{xx}(t, x) = 0.$$

En substituant :

$$d\tilde{S}_t = -rf(t, S_t)dt + e^{-rt}dS_t + 0.$$

Substitution de dS_t

On sait que :

$$dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dW_t.$$

En remplaçant :

$$d\tilde{S}_t = -r\tilde{S}_t dt + e^{-rt}(S_t\mu dt + S_t\sigma dW_t).$$

En simplifiant :

$$d\tilde{S}_t = -r\tilde{S}_t dt + \mu\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t$$

$$= (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t.$$

5.2 Passage de S_t à V_t

$$d\tilde{V}_t = df(t, V_t)$$

On cherche à appliquer la **même transformation d'actualisation** qu'avec S_t, mais cette fois sur la valeur du portefeuille V_t.

On suppose que la valeur actualisée du portefeuille est définie comme :

$$\tilde{V}_t = f(t, V_t) = e^{-rt} V_t$$

où $f(t, V_t)$ est une fonction de t et de la valeur du portefeuille V_t.

—

La transformation utilise **Itô** pour gérer l'actualisation temporelle. L'objectif est de simplifier les calculs en **supprimant l'effet du taux sans risque** r.

—

Forme implicite de la fonction $f(t, V_t)$:

Bien que non écrite explicitement dans les notes, la fonction f est **sous-entendue** comme :

$$f(t, V_t) = e^{-rt} V_t$$

Cela suit la même logique que pour S_t, car on utilise un **facteur d'actualisation** e^{-rt}.

—

Application de la formule d'Itô :

La notation :

$$d\tilde{V}_t = df(t, V_t)$$

5.3 Développement des dérivées partielles

5.3.1 Première dérivée partielle par rapport au temps (t) :

Étape 1 : Identifier les termes dépendants de t

La fonction est un produit :

$$f(t, V_t) = e^{-rt} \cdot V_t.$$

- e^{-rt} dépend explicitement de t.
- V_t est traité comme une constante par rapport à t.

—

Nous cherchons la dérivée temporelle de la fonction suivante :

$$f(t, V_t) = e^{-rt} V_t.$$

—

On utilise la **formule d'Itô** pour calculer les variations d'une fonction $f(t, X_t)$ où X_t suit un processus stochastique :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Formule d'Itô :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2.$$

—

Considérons :

$$\tilde{V}_t = f(t, V_t) = e^{-rt} V_t$$

5.4 Passage de la première ligne à la deuxième ligne

Ligne 1 :

$$d\tilde{V}_t = df(t, V_t)$$

—

Développement détaillé :

On applique **la formule d'Itô** sur la fonction composée $f(t, V_t)$.

Formule d'Itô : Pour une fonction $f(t, X_t)$, on a :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2.$$

—

Étape 1 : Calcul des dérivées partielles

La fonction utilisée ici est :

$$f(t, V_t) = e^{-rt} V_t.$$

—

1. Première dérivée partielle par rapport au temps (t) : Seul e^{-rt} dépend de t. On calcule :

$$f_t(t, V_t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-rt} V_t\right].$$

On dérive e^{-rt} par rapport à t :

$$\frac{\partial e^{-rt}}{\partial t} = -re^{-rt}.$$

Donc :

$$f_t(t, V_t) = -re^{-rt}V_t.$$

—

2. Première dérivée partielle par rapport à V_t : Seul V_t dépend de lui-même. On calcule :

$$f_V(t, V_t) = \frac{\partial}{\partial V_t}\left[e^{-rt}V_t\right].$$

Puisque e^{-rt} est une constante par rapport à V_t :

$$f_V(t, V_t) = e^{-rt}.$$

—

3. Deuxième dérivée partielle par rapport à V_t : On dérive encore une fois :

$$f_{VV}(t, V_t) = \frac{\partial^2}{\partial V_t^2}\left[e^{-rt}V_t\right].$$

Puisque e^{-rt} est une constante :

$$f_{VV}(t, V_t) = 0.$$

—

Étape 2 : Application de la formule d'Itô :

On combine les dérivées dans la formule :

$$d\tilde{V}_t = df(t, V_t).$$

$$df(t, V_t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial V_t}dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}(dV_t)^2.$$

—

Étape 3 : Substitution des termes :

1. **Premier terme :**
$$\frac{\partial f}{\partial t}dt = (-re^{-rt}V_t)dt = -r\tilde{V}_t dt.$$

2. **Deuxième terme :**
$$\frac{\partial f}{\partial V_t}dV_t = e^{-rt}dV_t.$$

3. **Troisième terme :**
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}(dV_t)^2 = 0 \quad \text{(car la dérivée seconde est nulle).}$$

—

Étape 4 : Résultat final :

En combinant, on obtient :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt} dV_t + 0.$$

—

5.5 Développement de la dynamique de $d\tilde{V}_t$

Nous expliquons ici la ligne suivante des notes du professeur :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt}\left[\phi_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + (V_t - \phi_t S_t) r dt\right]$$

—

1. Rappel de la ligne précédente :

La formule précédente était :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt} dV_t$$

—

2. Remplacement de dV_t :

On utilise la dynamique de dV_t donnée par la formule du portefeuille :

$$dV_t = \phi_t dS_t + (V_t - \phi_t S_t) r dt.$$

—

3. Substitution dans l'équation :

On remplace dV_t dans la formule :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt}\left[\phi_t dS_t + (V_t - \phi_t S_t) r dt\right].$$

—

4. Développement de dS_t :

La dynamique de S_t est donnée par :

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t.$$

En remplaçant :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt}\left[\phi_t(S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t) + (V_t - \phi_t S_t) r dt\right].$$

—

5. Simplification des termes :

Développons chaque terme :

- Premier terme :

$$-r\tilde{V}_t dt$$

- Deuxième terme :

$$e^{-rt}\phi_t \left[S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t\right] = e^{-rt}\left[\phi_t S_t \mu dt + \phi_t S_t \sigma dW_t\right]$$

- Troisième terme :

$$e^{-rt}(V_t - \phi_t S_t) r dt = e^{-rt} V_t r dt - e^{-rt}\phi_t S_t r dt$$

—

6. Résultat final :

En regroupant les termes, on obtient :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt}\left[\phi_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + (V_t - \phi_t S_t) r dt\right]$$

5.6 Passage à la dernière ligne :

Nous expliquons maintenant le passage à la dernière ligne des notes du professeur :

$$d\tilde{V}_t = \phi_t d\tilde{S}_t.$$

—

1. Rappel de la ligne précédente :

La ligne précédente est :

$$d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + \phi_t \left[(\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t\right] + \tilde{V}_t r dt.$$

—

2. Simplification des termes :

Regroupons les termes proportionnels à dt :

- Premier terme :

$$-r\tilde{V}_t dt + \tilde{V}_t r dt = 0.$$

  Ces termes s'annulent car ils sont opposés.

—

3. Regroupement des termes restants :

Après simplification, il reste :

$$d\tilde{V}_t = \phi_t \left[(\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t\right].$$

—

4. Reconnaissance d'une dynamique connue :

On reconnaît que l'expression entre crochets correspond à la dynamique de $d\tilde{S}_t$ obtenue précédemment :

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t.$$

—

5. Substitution :

On remplace dans l'équation précédente :

$$d\tilde{V}_t = \phi_t d\tilde{S}_t.$$

—

6. Interprétation :

Ce résultat montre que la dynamique actualisée de la valeur du portefeuille ($\tilde{V}_t$) peut être entièrement exprimée à partir de la dynamique actualisée du prix de l'actif ($\tilde{S}_t$).

Cela signifie que :

- La valeur du portefeuille suit directement les fluctuations du prix de l'actif pondérées par la quantité détenue (ϕ_t).
- Ce résultat simplifie l'analyse et met en évidence le lien direct entre V_t et S_t dans un cadre actualisé.