Questions Exams

jf.bergerlefebure@gmail.com

Décembre 2024

Contents

——-

1 Question 1

Objectif: Savoir identifier un **processus adapté**.

1.1 Notions clés à connaître

Un **processus adapté** est un processus qui utilise uniquement les informations disponibles jusqu'au temps t pour déterminer sa valeur en t.

Définition exacte: Un processus stochastique est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ si l'information contenue dans la filtration en t est suffisante pour connaître la valeur du processus à cette date.

1.2 Analyse des réponses

- (A) **Faux** On peut avoir processus chaotique mais adapté.
- (B) **Correct** Si la valeur est connue en 0 et ne dépend pas du temps, alors il est adapté car déterminé dès le début.
- (C) **Faux** Connaître la valeur passée (X_{t-1}) ne garantit pas l'adaptation, car des informations futures peuvent être utilisées.
- (D) **Faux**

—

1.3 Rappel en plus

1. **Processus aléatoire**: Un processus aléatoire est une suite de variables aléatoires indexées par le temps, représentant l'évolution d'une quantité incertaine au fil du temps. $S := (S_t)_{t=0,1}$
2. **Processus stochastique**: Modèle mathématique représentant une évolution aléatoire dans le temps, souvent utilisé pour modéliser des prix financiers.
3. **Processus adapté**: Un processus est adapté s'il utilise uniquement l'information disponible jusqu'au temps t pour déterminer sa valeur en t.
4. **Processus simples**: Processus construits par morceaux constants sur des intervalles, utilisés pour approximer d'autres processus. Exemple:
$$\int_0^t \phi_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$
5. **Processus admissibles**: Extension des processus simples, définis comme des limites de suites de processus simples, permettant de gérer des dynamiques complexes.
6. **Processus d'Itô**: Processus suivant la dynamique:
$$dX_t = \gamma_t dt + \alpha_t dW_t$$
où γ_t représente la dérive et α_t la volatilité aléatoire.
7. **Processus de portefeuille**: Processus représentant l'évolution de la valeur d'un portefeuille financier dans le temps.
8. **Processus de portefeuille actualisé**: Valeur actualisée au taux sans risque:
$$V_t = e^{-rt} \left(x + \int_0^t \phi_s dS_s \right)$$
9. **Processus multivariés**: Processus généralisant les processus d'Itô à plusieurs dimensions pour modéliser plusieurs actifs:
$$dX_t = \gamma_t dt + \alpha_t dW_t$$
avec des vecteurs et matrices pour γ_t et α_t.

—

2 Question 2

Objectif: Connaître la notion de **marché complet**.

2.1 Notions clés à connaître

Un marché est dit **complet** s'il est possible de répliquer exactement tout payoff (gain futur) en utilisant un portefeuille construit à partir des actifs disponibles sur le marché. Cela signifie que tout payoff peut être atteint par une stratégie de portefeuille dynamique.

2.2 Analys des réponses

- (A) **Faux** La continuité des prix n'est pas une condition nécessaire pour qu'un marché soit complet.
- (B) **Correct** La réplicabilité des options est la définition même d'un marché complet.
- (C) **Faux** Blague ?
- (D) **Faux** Même si l'actif sans risque a une valeur constante, cela n'implique pas nécessairement la complétude du marché.

—

3 Question 3

Objectif: Connaître la définition des **mesures de probabilité équivalentes** et leur rôle dans les calculs de pricing et de probabilités neutres au risque.

3.1 Notion de la question

Mesures de probabilité équivalentes

Deux mesures Q et P sont dites **équivalentes** (noté $Q \sim P$) si elles attribuent une probabilité nulle aux mêmes événements.

Formellement, cela signifie:

$$P(A) = 0 \iff Q(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Cela garantit que tout événement impossible sous P est également impossible sous Q.

Les mesures équivalentes partagent la même structure d'impossibilité (zéro probabilité) mais peuvent donner des valeurs différentes aux probabilités positives.

3.2 Analyse des réponses

- (A) **Faux** Pas forcément.
- (B) **Faux** La vraie définition repose sur la **nullité conjointe des événements** et non sur leurs valeurs absolues.
- (C) **Correct**

3.3 Rappel en plus

- Différence entre équivalence et égalité des mesures:
  - **Équivalence:** Même structure d'impossibilité.
  - **Égalité:** Les mesures assignent exactement les mêmes probabilités à tous les événements (ce qui n'est pas exigé pour l'équivalence).
- Les mesures Q et P sont liées par une densité de probabilité appelée **densité de Radon-Nikodym**:

  $$Q(A) = \int_A H(\omega) P(d\omega)$$

  où $H > 0$ et $\mathbb{E}[H] = 1$ et avec

  $$H = \frac{dQ}{dP}$$

- Théorème de Girsanov: Permet un **changement de mesure** pour transformer une probabilité réelle P en une **probabilité risque-neutre** Q. Ce changement conserve la structure des martingales après transformation.

—

4 Question 4

Objectif: Il faut savoir relier les **espérances conditionnelles** sous différentes mesures à l'aide de la densité de **Radon-Nikodym**.

4.1 Notions clés à connaître

Espérance conditionnelle sous une nouvelle mesure

Soit H la densité de la mesure Q par rapport à P. Si ξ est une variable aléatoire bornée, alors son espérance sous P ou Q peut être reliée grâce à la densité H.

Définition exacte: La densité de Radon-Nikodym permet de relier deux mesures par:

$$H = \frac{dQ}{dP}, \quad H > 0, \quad \mathbb{E}_P[H] = 1.$$

—

4.2 Analyse des réponses

- (A) **Faux** L'espérance $\mathbb{E}^P[\xi]$ est calculée directement sous la mesure P et ne tient pas compte de la densité de changement de mesure H.
- (B) **Faux** L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}^Q[\xi|H]$ utilise la densité H mais nécessite un ajustement pour s'appliquer correctement sous la mesure Q.
- (C) **Correct** La relation exacte est:

  $$\mathbb{E}^P[\xi] = \mathbb{E}^Q\left[\frac{\xi}{H}\right]$$

  ce qui montre que pour passer d'une mesure à l'autre, la densité doit être explicitement prise en compte dans le calcul.

—

4.3 Rappel en plus

- **Théorème de Girsanov**: Explique comment changer de mesure tout en conservant la structure des martingales.
- **Autre changement de mesure:** $\mathbb{E}^Q[\xi] = \mathbb{E}^P[\xi H]$

—

5 Question 5

Objectif: Il faut appliquer les **propriétés statistiques du mouvement brownien**, en particulier les **moments** et leurs formules associées (propriétés du mouvement brownien, la distribution normale et les moments exponentiels).

5.1 Notions clés à connaître

5.1.1 Propriétés du mouvement brownien

Un processus $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un **mouvement brownien** sous $\mathbb{P}$ s'il satisfait les 4 propriétés suivantes:

- **Condition initiale:** $W_0 = 0$
- **Continuité:** La trajectoire $t \mapsto W_t$ est une fonction continue presque sûrement ($\mathbb{P} - p.s.$).
- **Accroissements gaussiens:** Les variations $(W_t - W_s)$ suivent une loi normale centrée avec variance proportionnelle au temps écoulé: $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ pour tout $t \geq s \geq 0$.
- **Indépendance des accroissements:** Les accroissements sont indépendants. Si $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, alors: $W_{t_1} - W_{t_0},\ W_{t_2} - W_{t_1},\ \ldots,\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendants.

—

5.1.2 Les moments

Les **moments** d'une variable aléatoire décrivent ses propriétés statistiques, comme sa moyenne et sa dispersion. Pour un mouvement brownien W_t, on étudie principalement les moments d'ordre 2 et 3.

- **Moments impairs:** Les moments impairs d'une loi normale centrée sont toujours **nuls**, car la distribution est **symétrique** autour de 0.
- **Moments pairs:** Les moments pairs sont **positifs** et croissent avec la puissance. Exemple:

$$E[W_t^2] = t, \quad E[W_t^4] = 3t^2.$$

5.2 Analyse des réponses

- (A) **Correct** Puisque W_t suit une loi normale centrée, ses moments impairs (comme W_t^5) ont une espérance égale à 0.
- (B) **Faux** La formule correcte inclut une racine carrée: $E[|W_t - W_s|^2]^{1/2} = \sqrt{t - s}$.
- (C) **Faux** En utilisant la propriété:

$$E[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}},$$

on trouve:

$$E[e^{3W_t}] = e^{\frac{9t}{2}},$$

5.3 Développement en plus

5.3.1 Calcul de $E[W_t^2]$

Nous voulons calculer l'espérance du carré d'un mouvement brownien:

$$E[W_t^2]$$

La formule est:

$$E[W_t^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

où: $f(x)$ est la densité de probabilité de la loi normale.

La loi normale de W_t a pour densité:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

On insère cette densité dans l'espérance¡:

$$E[W_t^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

Les termes constants sont sortis de l'intégrale:

$$E[W_t^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

Formule d'intégrale est connue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

avec:

$$a = \frac{1}{2t}$$

On remplace:

$$E[W_t^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1}{2t}\right)^{3/2}}$$

Calculons chaque terme:

$$E[W_t^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot (2t)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}$$

Simplifions:

$$E[W_t^2] = \frac{(2t)^{3/2}}{(2t)^{1/2}} = t$$

$$E[W_t^2] = t$$

—

5.3.2 Calcul de $E[W_t^3]$

Nous voulons maintenant calculer:

$$E[W_t^3]$$

Formule de l'espérance

On utilise la formule:

$$E[W_t^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx$$

où $f(x)$ est:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Symétrie de la fonction

La fonction $f(x)$ est **symétrique**:

$$f(x) = f(-x)$$

La fonction x^3 est **impair**:

$$x^3 = -(-x)^3$$

Cela signifie que les valeurs positives et négatives s'annulent.

Décomposer l'intégrale

On divise l'intégrale:

$$E[W_t^3] = \int_0^{+\infty} x^3 f(x)dx + \int_{-\infty}^0 x^3 f(x)dx$$

Utiliser la symétrie

Comme $f(x) = f(-x)$, on a:

$$\int_{-\infty}^0 x^3 f(x)dx = -\int_0^{+\infty} x^3 f(x)dx$$

Additionner les deux parties

Les deux parties s'annulent:

$$E[W_t^3] = 0$$

—

5.3.3 Démonstration réponse (C)

On veut calculer l'espérance:

$$E[e^{\lambda W_t}]$$

avec:

- $\lambda = 3$,
- W_t suit une loi normale centrée $\mathcal{N}(0, t)$.

—

Formule clé pour l'espérance exponentielle

Pour une variable normale $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, l'espérance exponentielle suit la formule:

$$E[e^{\lambda W_t}] = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

où:

- λ est le coefficient dans l'exponentielle,
- t est la variance du mouvement brownien.

—

Application de la formule

Ici, nous avons:

- $\lambda = 3$,
- t est donné.

Appliquons la formule:

$$E[e^{3W_t}] = e^{\frac{(3)^2 \cdot t}{2}}$$

Calculons étape par étape:

1. $3^2 = 9$.
2. Multiplier par t: $9t$.
3. Diviser par 2: $\frac{9t}{2}$.

Ainsi, on obtient:

$$E[e^{3W_t}] = e^{\frac{9t}{2}}.$$

—

6 Question 6

Objectif: Il faut connaître l'**espérance croisée** entre deux processus stochastiques et utiliser les **propriétés des intégrales stochastiques** pour calculer leur produit.

6.1 Notions clés à connaître

1. Processus prévisibles bornés
   Un processus prévisible (Proposition 2.7) borné est un processus adapté qui peut être déterminé uniquement à partir des informations disponibles juste avant un instant donné, et dont les valeurs sont limitées (bornées) dans un intervalle fixé.
   Cette propriété garantit que le processus peut être utilisé pour représenter des stratégies de trading réalistes, où les décisions doivent être prises en fonction des informations disponibles avant un événement.
2. Espérance et variance de l'intégrale stochastique
3. Produit de deux processus stochastiques
4. Espérance croisée

—

6.2 Démonstration

Développement du produit

$$X_t^1 X_t^2 = \left(x^1 + \int_0^t \beta_s^1 dW_s\right)\left(x^2 + \int_0^t \beta_s^2 dW_s\right)$$

$$= x^1x^2 + x^1 \int_0^t \beta_s^2 dW_s + x^2 \int_0^t \beta_s^1 dW_s + \left(\int_0^t \beta_s^1 dW_s\right)\left(\int_0^t \beta_s^2 dW_s\right).$$

Espérance terme par terme

1. Premier terme:
$$E[x^1x^2] = x^1x^2.$$
2. Deuxième et troisième termes:
$$E\left[x^1 \int_0^t \beta_s^2 dW_s\right] = 0,$$
$$E\left[x^2 \int_0^t \beta_s^1 dW_s\right] = 0.$$
3. Dernier terme:
$$E\left[\left(\int_0^t \beta_s^1 dW_s\right)\left(\int_0^t \beta_s^2 dW_s\right)\right] = E\left[\int_0^t \beta_s^1\beta_s^2 ds\right].$$

En combinant tout:

$$E[X_t^1 X_t^2] = x^1x^2 + E\left[\int_0^t \beta_s^1\beta_s^2 ds\right].$$

—

7 Question 7

Objectif: Tester la capacité à identifier l'**EDP satisfaite par le prix d'une option européenne**, en utilisant les propriétés des processus stochastiques et de la formule d'Itô pour construire l'équation dynamique.

7.1 Notions clés à connaître

- Equation différentielle stochastique (EDS):
  Une EDS est une équation décrivant l'évolution aléatoire d'un processus dans le temps, en utilisant un terme déterministe et un terme lié à un mouvement brownien.
- Processus sous la mesure risque-neutre:
  La mesure $\mathbb{Q}$ rend les rendements attendus égaux au taux sans risque.
- Équation aux dérivées partielles (EDP):
  Une EDP est une équation qui relie une fonction inconnue $p(t, x)$ à ses dérivées partielles par rapport au temps (t) et à l'espace (x).

7.2 Démonstration

La dynamique de l'actif suit une **équation différentielle stochastique (EDS)** donnée par:

$$dS_t = rS_t dt + S_t \sigma(S_t) dW_t,$$

Le prix de l'option dépend du temps et de l'actif: $p = p(t, S_t)$.

Nous applique la **formule d'Itô** pour exprimer la dérivée stochastique de $p(t, S_t)$:

$$dp = p_t dt + p_x dS_t + \frac{1}{2} p_{xx} (dS_t)^2,$$

—

Développement des termes un par un

1er terme: $p_t dt$

Le premier terme représente la contribution liée à la variation temporelle:

$$p_t dt.$$

—

2e terme: $p_x dS_t$

Nous savons que:

$$dS_t = rS_t dt + S_t \sigma dW_t.$$

Substitution:

$$p_x dS_t = p_x \left(rS_t dt + S_t \sigma dW_t \right)$$

Développement:

$$p_x dS_t = p_x r S_t dt + p_x S_t \sigma dW_t.$$

—

3e terme: $\frac{1}{2}p_{xx}(dS_t)^2$

Calculons:

$$(dS_t)^2 = (rS_t dt + S_t\sigma dW_t)^2$$

Règles des différentiels:

- $(dt)^2 = 0$
- $(dt)(dW_t) = 0$
- $(dW_t)^2 = dt$

Développement des termes:

1. Premier terme:
$$(rS_t dt)^2 = r^2 S_t^2 (dt)^2 = 0$$

2. Deuxième terme:
$$2(rS_t dt)(S_t\sigma dW_t) = 0$$

3. Troisième terme:
$$(S_t\sigma dW_t)^2 = S_t^2\sigma^2(dW_t)^2 = S_t^2\sigma^2 dt$$

Substitution dans le 3e terme:

$$\frac{1}{2}p_{xx}(dS_t)^2 = \frac{1}{2}p_{xx}\left(S_t^2\sigma^2 dt\right)$$

Simplification:

$$\frac{1}{2}S_t^2\sigma^2 p_{xx} dt.$$

—

Regroupons les termes un par un:

$$dp = p_t dt + p_x r S_t dt + \frac{1}{2}S_t^2\sigma^2 p_{xx} dt + p_x S_t \sigma dW_t.$$

—

Séparation des parties déterministe et stochastique

Partie déterministe (en dt)

$$\left[p_t + rS_t p_x + \frac{1}{2}S_t^2\sigma^2 p_{xx}\right] dt$$

Partie stochastique (en dW_t)

$$p_x S_t \sigma dW_t$$

—

7.3 Sous la mesure neutre au risque

Pour que $p(t, S_t)$ soit une **martingale** sous la mesure $\mathbb{Q}$:

$$E[dp] = 0$$

On élimine la partie stochastique (dW_t) car:

$$E[dW_t] = 0$$

Il reste la partie déterministe:

$$p_t + rS_t p_x + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 p_{xx} = 0$$

—

7.4 Ajustement pour l'actualisation au taux sans risque

Pour inclure l'actualisation au taux sans risque r, on ajoute $-rp$:

$$p_t + rS_t p_x + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 p_{xx} - rp = 0$$

—

7.5 Analyse des réponses

- **Réponse (A)**:
$$0 = p_t + rp_x - p + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 p_{xx}.$$

  Correct Inclut tous les termes nécessaires.
- **Réponse (B)**:
$$0 = p_t + \frac{1}{2} \sigma^2 p_{xx}.$$

  Faux Manque les termes liés au taux d'intérêt (rp_x et $-rp$).
- **Réponse (C)**:
$$0 = p_t + rxp_x + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 p_{xx}.$$

  Faux Manque le terme $-rp$.

—

8 Question 8

Objectif: Cherche à évaluer la compréhension de l'impact d'une **mauvaise estimation de la volatilité** dans la couverture d'une option européenne, en lien avec la **convexité (Gamma)** du prix de l'option.

1. Identifier les paramètres du modèle stochastique.
2. Calculer la formule de l'erreur de couverture en tenant compte du Gamma.
3. Analyser l'effet de la convexité sur les erreurs de couverture en fonction des scénarios de volatilité.

8.1 Notions clés à connaître

- **Processus stochastique:** Modélisation de l'évolution d'un actif risqué avec: $dS_t = \sigma dW_t$
- **Volatilité (σ):** Mesure de la dispersion des prix autour de leur moyenne dans le temps.
- **Option européenne:** Contrat permettant d'acheter ou de vendre un actif à un prix fixé au temps T avec un payoff $g(S_T)$.
- **Mesure risque neutre (Q):** Probabilité utilisée pour valoriser les options dans un cadre sans arbitrage.
- **Delta (p_x):** Sensibilité du prix de l'option aux variations du sous-jacent S_t.
- **Gamma (p_{xx}):** Sensibilité du Delta aux variations du sous-jacent, décrivant la convexité du prix de l'option.
- **Erreur de couverture:** Différence entre la valeur du portefeuille et celle du payoff, dépendant de l'écart entre la volatilité réelle σ et supposée σ_0:

$$V_T - g(S_T) = \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma^2 - \sigma_0^2) S_t^2 p_{xx}(t, S_t) dt$$

8.2 Call ou Put?

"On se couvre en conservant à tout instant t un nombre $p_x(t, S_t)$ d'actions en portefeuille, et en partant d'un capital initial égal à $p(0, S_0)$."

- Achat d'actions pour la couverture
- Delta positif
- Capital initial investi en actions: "Le capital initial est égal à $p(0, S_0)$"

On est dans le cas d'un **Call vendu**.

8.3 Réponse rapide

(A): Faux Cette réponse suppose que les erreurs de couverture se compensent en moyenne. Cependant, lorsque la volatilité est surestimée ($\sigma_0 > \sigma$), cela crée un **biais systématique** dans la couverture.
Il n'y a pas de neutralité des erreurs, donc c'est impossible.

(B): Correct avec $p_{xx}(t, S_t) \geq 0$

- Ca implique une **convexité positive** (ex: option Call).
- Avec une volatilité surestimée ($\sigma_0 > \sigma$), la couverture excessive amplifie les gains grâce à la convexité ($gamma > 0$).
- Même en cas de baisse des prix, les pertes sont limitées par la forme convexe.
- Ici, la **volatilité surestimée** et la **convexité positive** $\Rightarrow$ **Gains amplifiés** $\Rightarrow$ **Réponse B**

(C): Faux si $p_{xx}(t, S_t) \leq 0$

- Ca implique une **concavité** (ex: option Put inversée).
- Avec une concavité, la volatilité surestimée amplifie les pertes au lieu des gains.

dqezdqzdqzdqz

8.4 Réponse détaillée

1. Hypothèses et contexte

$$dS_t = \sigma dW_t,$$

Volatilité utilisée pour le pricing : $\sigma_0 > \sigma$: Volatilité implicite surestimée utilisée pour la couverture.

2. Rappel: Équation d'Itô pour le prix de l'option

Le prix de l'option européenne est $p(t, S_t)$. En appliquant directement la **formule d'Itô** avec σ_0, on a :

$$dp(t, S_t) = p_t(t, S_t)dt + p_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S_t)\sigma_0^2 dt.$$

3. Calcul détaillé de chaque terme

Terme 1 : $p_t(t, S_t)dt$ C'est la variation temporelle du prix de l'option.

Terme 2 : $p_x(t, S_t)dS_t$ En remplaçant $dS_t = \sigma dW_t$:

$$p_x(t, S_t)dS_t = p_x(t, S_t)\sigma dW_t.$$

Terme 3 : $\frac{1}{2}p_{xx}(t, S_t)\sigma_0^2 dt$ Ce terme représente l'effet de la convexité $(p_{xx}(t, S_t))$ sous la volatilité surestimée σ_0.

Équation finale : En regroupant tous les termes :

$$dp(t, S_t) = p_t(t, S_t)dt + p_x(t, S_t)\sigma dW_t + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S_t)\sigma_0^2 dt.$$

—

4. Écart lié à la mauvaise estimation de la volatilité

La volatilité réelle étant σ, on compare la dynamique des prix avec deux volatilités :

Sous volatilité réelle σ: $dV_\sigma(t, S_t) = p_t(t, S_t)dt + p_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S_t)\sigma^2 dt.$

Sous volatilité implicite σ_0: $dV_{\sigma_0}(t, S_t) = p_t(t, S_t)dt + p_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}p_{xx}(t, S_t)\sigma_0^2 dt$

Différence entre les deux dynamiques : En soustrayant les deux formules :

$$d\left(V_{\sigma_0}(t, S_t) - V_\sigma(t, S_t)\right) = \frac{1}{2}p_{xx}(t, S_t)(\sigma_0^2 - \sigma^2)dt.$$

Gain cumulé sur la période [0, T] : En intégrant cette différence sur $[0, T]$:

$$V_{\sigma_0}(T, S_T) - V_\sigma(T, S_T) = \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_0^2 - \sigma^2)p_{xx}(t, S_t)dt.$$

5. Analyse des réponses

A) Gain nul sous la mesure neutre

- Possible uniquement si $\sigma_0 = \sigma$
- **Pas compatible ici**

B) $p_{xx}(t, S_t) > 0$ (convexité positive)

- Typique d'un **Call**.
- Si $\sigma_0 > \sigma$, alors: $(\sigma_0^2 - \sigma^2) > 0$ et $p_{xx}(t, S_t) > 0$.
- Gain **positif**.

C) $p_{xx}(t, S_t) \leq 0$ **(concavité négative)**

- Typique d'un **Put inversé**.
- Si $\sigma_0 > \sigma$, alors: $(\sigma_0^2 - \sigma^2) > 0 \quad \text{et} \quad p_{xx}(t, S_t) \leq 0$.
- Perte amplifiée.

—

9 Question 9

Objectif: Tester la compréhension des stratégies de couverture dans un modèle où la dynamique du sous-jacent est affectée par un second processus stochastique.

9.1 Notions à connaître

- **Processus stochastique**
- **Volatilité stochastique:** Lorsque la volatilité d'un actif dépend d'un processus aléatoire distinct, ce qui introduit un risque supplémentaire.
- **Stratégie de couverture dynamique:** Ajustement continu d'un portefeuille pour répliquer le payoff d'une option.
- **Risque additionnel:** La présence d'un second facteur stochastique implique qu'un seul actif sous-jacent peut ne pas suffire pour couvrir tous les risques.

9.2 Analyse des réponses

(A) Faux: La volatilité $\sigma(Y_t)$ dépend d'un processus supplémentaire Y_t qui suit sa propre dynamique stochastique. Cela introduit un **second risque** lié à Y_t qui ne peut pas être couvert uniquement avec S. Il est donc nécessaire d'avoir un second actif corrélé à Y_t pour gérer ce risque.

(B) Vrai: Puisque le processus Y_t ajoute un risque indépendant, une couverture parfaite nécessite deux actifs. En combinant S et une option liquide sensible aux variations de volatilité, il est possible de compenser les deux sources de risque (provenant des mouvements browniens W^1 et W^2).