Niveau 2 - Méthodes Numériques
Cours 2
Variable antithétique

Jean-François Berger-Lefébure

26 Septembre 2024

Contents

1 Rappels

1.1 Méthode d'Estimation de l'Espérance

Objectif principal : Calculer une Espérance

L'objectif principal est de calculer l'espérance d'une fonction $f(X)$ d'une variable aléatoire X en utilisant des simulations. Plus précisément, pour obtenir cette espérance, on peut simuler des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) suivant la loi de X, puis calculer la moyenne empirique des valeurs obtenues.

Simulation de Variables Aléatoires i.i.d.

On peut toujours simuler des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi P_X de la variable aléatoire X. Ensuite, on calcule la moyenne empirique des résultats pour obtenir une estimation de l'espérance :

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k)$$

Cette estimation converge vers l'espérance théorique en vertu de la **loi des grands nombres** lorsque n devient grand.

Convergence de la Moyenne Empirique

En vertu de la loi des grands nombres, on sait que la moyenne empirique converge vers la valeur de l'espérance théorique à mesure que la taille de l'échantillon n augmente. Cela signifie que, avec un échantillon suffisamment grand, l'estimation devient de plus en plus précise.

Erreur Probable : Théorème Central Limite (TCL)

Le professeur rappelle que l'erreur d'estimation peut être calculée en utilisant le **théorème central limite**. Selon ce théorème, lorsque le nombre d'observations n est grand, la distribution de la moyenne empirique suit une loi normale, même si la loi de X n'est pas normale. Cette loi normale a une moyenne égale à l'espérance théorique et une variance qui dépend de la variance de X et de n.

Formule du Théorème Central Limite

Le théorème central limite peut être formulé ainsi : $\sqrt{n}\,(\hat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

- $\hat{\mu}_n$ est la moyenne empirique des échantillons,
- μ est l'espérance théorique,
- σ^2 est la variance de la loi de X.

Cela signifie que, pour un grand nombre d'échantillons n, la distribution de la moyenne empirique, centrée et normalisée par $\sqrt{n}$, converge vers une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2.

Variance de la Moyenne Empirique

Le professeur mentionne également que la variance de la moyenne empirique est donnée par :

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Cela montre que la variance de l'estimation diminue à mesure que la taille de l'échantillon augmente, ce qui rend l'estimation plus précise.

Conclusion

En résumé, pour estimer une espérance, on utilise des simulations de variables aléatoires iid et la moyenne empirique. En appliquant la loi des grands nombres et le théorème central limite, on peut quantifier l'erreur d'estimation et comprendre comment elle converge à mesure que le nombre d'échantillons augmente. La variance de la moyenne empirique joue un rôle important dans la précision de l'estimation.

1.2 Stratégies pour Réduire l'Erreur de l'Estimation

Deux leviers pour réduire l'erreur de l'estimateur

Il existe deux leviers principaux pour diminuer l'erreur de l'estimateur :

- **Augmenter le nombre de simulations** : Cela fonctionne bien pour diminuer l'erreur, mais cela implique un coût élevé en temps de calcul.
- **Réduire la variance (σ) de l'estimateur** : Cela permet d'augmenter la précision sans augmenter le nombre de simulations ni le temps de calcul.

Impact de l'augmentation du nombre de simulations

Augmenter le nombre de simulations par un facteur de 4 permet de réduire la variance de l'estimateur par un facteur de 4, mais l'erreur dans un intervalle de confiance est liée à l'écart-type de l'estimateur. L'erreur est proportionnelle à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, où σ est l'écart-type de l'estimateur et n le nombre de simulations. Ainsi :

$$\text{Erreur} \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Cela signifie que si vous quadruplez le nombre de simulations, vous réduisez l'erreur par un facteur de 2, mais vous quadruplez également le temps de calcul nécessaire.

Réduire la variance pour améliorer la précision

Une approche plus efficace consiste à réduire la variance σ de l'estimateur. Cela permet de diminuer l'erreur sans augmenter le nombre de simulations. En réduisant la variance, vous pouvez :

- Soit être plus précis dans les simulations (par exemple, en utilisant des techniques de réduction de variance comme les variables antithétiques ou la variable de contrôle),
- Soit accepter une réduction du temps de calcul tout en maintenant un niveau acceptable de précision.

Optimisation des ressources

L'objectif est de trouver un compromis entre la **précision** et le **temps de calcul**. Il est possible de rendre le processus de simulation plus rapide sans sacrifier la précision, ce qui permet d'optimiser l'utilisation des ressources de calcul.

Conclusion

Bien que l'augmentation du nombre de simulations réduise l'erreur, elle augmente également le temps de calcul. La méthode la plus efficace consiste souvent à réduire la variance de l'estimateur, ce qui permet d'améliorer la précision sans alourdir le processus de calcul.

—

2 Variables Antithétiques

2.1 Introduction

Objectif des Variables Antithétiques

L'objectif principal des **variables antithétiques** est de **réduire la variance** de l'estimation d'une espérance en utilisant des variables opposées mais ayant la même loi. Cela permet de créer un estimateur plus précis sans ajouter de simulations supplémentaires. L'idée est de trouver une variable X telle que :

$$X \stackrel{d}{=} a - X$$

C'est-à-dire que X et $a - X$ ont la même distribution.

Exemples de Lois Vérifiant Cette Propriété

- **Loi uniforme sur** $[0, 1]$: Si U est une variable uniforme sur $[0, 1]$, alors $a-U$ a la même loi que U. Ce résultat est dû à la symétrie de la loi uniforme. Si vous inversez U, vous obtenez une nouvelle variable uniforme, mais l'intervalle est inversé.
- **Loi normale** : Pour une variable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a aussi $X \stackrel{d}{=} -X$ car la loi normale est symétrique autour de zéro. Ce fait est utilisé dans des intervalles de confiance, où les valeurs des quantiles sont symétriques.

Propriétés des Variables Antithétiques

Si X et $a - X$ ont la même loi, **toutes les fonctions** de X et $a - X$ auront également la même loi. C'est-à-dire que si $f(X)$ est une fonction appliquée à X, alors :

$$f(X) \stackrel{d}{=} f(a - X)$$

Cela implique que X et $a - X$ ont **la même espérance**, car elles suivent la même loi.

Corrélation Négative entre X et $a - X$

Bien que X et $a - X$ ne soient pas indépendantes, elles sont **corrélées négativement**. Cela est intéressant car, par exemple, si $f(X)$ est une fonction croissante, une grande valeur de X entraînera une petite valeur pour $a - X$, et vice versa. Cela réduit la variance de l'estimation de $f(X)$ en combinant ces deux variables.

Réduction de la Variance

Cette corrélation négative aide à réduire la **variance de l'estimation**, ce qui est l'objectif principal des variables antithétiques : augmenter la précision sans augmenter le nombre de simulations. En combinant deux variables qui sont opposées mais corrélées négativement, la méthode permet d'obtenir une estimation plus précise de $f(X)$ tout en réduisant le temps de calcul nécessaire.
—

2.2 Estimateur Antithétique et Coût Supplémentaire

Introduction de l'Estimation Antithétique

L'estimateur introduit est basé sur la **moyenne empirique**, mais au lieu de simplement prendre $f(X)$, on utilise la combinaison $f(X) + f(a - X)$, où X et $a - X$ ont la même loi. Cela permet de conserver la même espérance.

L'estimateur est défini comme :

$$\hat{\theta}_n^A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(X_k) + f(a - X_k)}{2}$$

Cet estimateur conserve la même espérance que l'estimateur basé uniquement sur $f(X)$, mais permet de réduire la variance grâce à l'utilisation des variables antithétiques.

Le Coût Supplémentaire

Le professeur souligne un coût supplémentaire lorsque l'on utilise cette méthode. En effet, il faut simuler à la fois X et $a - X$, et calculer $f(X)$ et $f(a - X)$.

- Bien que $a - X$ soit facile à calculer (il suffit de soustraire X de a), le coût réel provient du calcul de f, surtout si f est une fonction coûteuse à évaluer.

Bénéfice de l'Estimation Antithétique

Il faut être certain que l'amélioration en précision (réduction de la variance) l'emporte sur le coût supplémentaire en termes de calcul. Si le calcul de f est trop coûteux, on pourrait ne pas obtenir de gain en efficacité.

L'idée est donc de comparer l'augmentation de la précision (réduction de la variance) avec le temps de calcul supplémentaire. Si l'amélioration en précision est suffisante pour justifier le coût supplémentaire, l'utilisation des variables antithétiques est bénéfique.

Conclusion

L'estimateur antithétique permet de réduire la variance en combinant $f(X)$ et $f(a - X)$, mais il introduit un coût supplémentaire lié au calcul de $f(a - X)$. Il est important de s'assurer que l'amélioration en précision justifie ce coût, surtout si la fonction f est coûteuse à calculer.

—

2.3 L'Inégalité de Cauchy-Schwarz et Application aux Variables Antithétiques

L'Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de **Cauchy-Schwarz** est une inégalité fondamentale en algèbre linéaire et en analyse qui fournit une borne supérieure pour le produit scalaire de deux vecteurs, ou dans le cadre des variables aléatoires, pour leur covariance. Formulée pour deux variables aléatoires X et Y, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit comme suit :

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

où :

- $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est la covariance entre les variables aléatoires X et Y,
- σ_X et σ_Y sont les écarts-types respectifs de X et Y.

Cette inégalité signifie que la covariance entre X et Y est toujours inférieure ou égale au produit de leurs écarts-types. Autrement dit, la covariance est bornée par la dispersion des variables.

Application à la Covariance entre $f(X)$ et $f(a - X)$

Le professeur applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $f(X)$ et $f(a - X)$. La covariance entre ces deux fonctions est bornée par le produit des écarts-types des deux fonctions :

$$|\mathrm{Cov}(f(X), f(a - X))| \leq \sigma_{f(X)} \cdot \sigma_{f(a-X)}$$

Où $f(X)$ et $f(a - X)$ sont des fonctions de la même variable X, donc la covariance est limitée par le produit des écarts-types des deux fonctions.

Borne de la Covariance

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient une borne pour la covariance :

$$|\mathrm{Cov}(f(X), f(a - X))| \leq \sigma^2_{f(X)}$$

Cela signifie que la covariance entre $f(X)$ et $f(a - X)$ est toujours inférieure ou égale à la variance de $f(X)$. Cette relation est cruciale pour comprendre la réduction de la variance dans les estimateurs antithétiques.

Réduction de la Variance avec les Variables Antithétiques

L'objectif de l'utilisation des variables antithétiques est de réduire la variance de l'estimateur en combinant $f(X)$ et $f(a - X)$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que la covariance entre ces deux variables est limitée par la variance de $f(X)$, ce qui garantit que la variance de l'estimateur antithétique ne sera pas plus grande que celle d'un estimateur standard basé sur $f(X)$.

Conclusion

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un outil fondamental pour comprendre et contrôler la variance des estimateurs, notamment en utilisant les variables antithétiques. Elle permet de garantir que la covariance entre $f(X)$ et $f(a-X)$ est toujours limitée par la variance de $f(X)$, ce qui contribue à la réduction de la variance sans augmenter le nombre de simulations.

—

2.4 Lemme 3.1 : L'estimateur Antithétique est Meilleur que l'Estimateur Standard

Démonstration

Le professeur montre que la variance de l'estimateur antithétique peut être majorée par la variance de l'estimateur standard. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la covariance entre $f(X)$ et $f(a-X)$, on obtient la relation suivante :

$$\mathrm{Cov}(f(X), f(a - X)) \leq \sigma^2_{f(X)}$$

Cela nous permet de conclure que la variance de l'estimateur antithétique est :

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}^A_n) \leq \frac{\sigma^2_{f(X)}}{n}$$

L'estimateur antithétique est donc plus précis que l'estimateur standard, sauf dans le cas où la covariance est positive, c'est-à-dire lorsque $f(X)$ et $f(a - X)$ sont parfaitement corrélés.

Amélioration Universelle de l'Estimation

En général, l'estimateur antithétique permet de réduire la variance. Le pire cas serait une covariance égale à 1, ce qui signifie une corrélation parfaite entre $f(X)$ et $f(a-X)$, auquel cas la variance ne serait pas réduite. Cependant, à moins que la covariance soit exactement 1, on obtient toujours une réduction de la variance.

Coût en Temps de Calcul

Le calcul de l'estimateur antithétique implique un calcul supplémentaire de f pour chaque simulation. Cela augmente le temps de calcul, mais ce coût peut être compensé par la réduction de la variance.

Réduction de la Variance pour les Fonctions Monotones

Si f est une fonction monotone (croissante ou décroissante), la covariance entre $f(X)$ et $f(a - X)$ devient négative, ce qui réduit davantage la variance de l'estimateur antithétique. Dans ce cas, la variance de l'estimateur antithétique est :

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}^A_n) \leq \frac{\sigma^2_{f(X)}}{2n}$$

Cela montre qu'avec des fonctions monotones, l'estimateur antithétique est encore plus précis.

Conclusion

L'estimateur antithétique est généralement meilleur que l'estimateur standard, en particulier lorsqu'une fonction monotone est utilisée. Le principal compromis réside dans le coût supplémentaire de calculer f deux fois par simulation, mais ce coût est compensé par la réduction de la variance, garantissant une amélioration de la précision.

2.5 Lemme 3.2 : Fonction Monotone et Réduction de la Variance

Démonstration

Le **lemme 3.2** montre que, lorsque f est une fonction monotone, la variance de l'estimateur antithétique peut être réduite davantage. En effet, la covariance entre $f(X)$ et $f(a-X)$ devient négative lorsque f est monotone (croissante ou décroissante). Cette covariance négative est bénéfique pour la réduction de la variance de l'estimateur.

Pour une fonction monotone f, on a la relation suivante pour la variance de l'estimateur antithétique :

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n^A) \leq \frac{\sigma_{f(X)}^2}{2n}$$

Cela montre que la variance est réduite de moitié par rapport à l'estimateur classique, ce qui améliore la précision de l'estimation.

Exemples Pratiques

Le professeur souligne que cette réduction de la variance est particulièrement intéressante pour des fonctions monotones comme les payoffs d'options (par exemple, un call européen), où la fonction est croissante. Dans ce cas, la covariance négative entre $f(X)$ et $f(a - X)$ permet de réduire encore la variance de l'estimateur antithétique.

Conclusion

Lorsque f est une fonction monotone (croissante ou décroissante), l'estimateur antithétique bénéficie d'une réduction de la variance encore plus marquée grâce à la covariance négative. Cela permet de rendre l'estimation plus précise sans augmenter le nombre de simulations.
—

2.6 Remarque 3.3 : Application Pratique et Gain Potentiel

La **Remarque 3.3** met l'accent sur l'application pratique de l'estimateur antithétique et sur ses avantages en termes de réduction de la variance dans des situations concrètes. Cette remarque va au-delà de la théorie en abordant deux aspects clés :

- Efficacité pratique : L'estimateur antithétique est plus efficace dans la majorité des cas, sauf lorsque la covariance entre $f(X)$ et $f(a - X)$ est nulle ou faible. Dans le pire scénario, la réduction de la variance est minimale, mais dans la majorité des cas, l'estimateur antithétique offre un gain substantiel.
- Coût en calcul : Le calcul de l'estimateur antithétique implique un coût supplémentaire, car il faut calculer $f(X)$ et $f(a - X)$ pour chaque simulation. Cependant, le professeur indique que même avec ce coût supplémentaire, la réduction de la variance peut justifier l'utilisation de cet estimateur, surtout lorsque f est simple à calculer.

2.6.1 Différence entre le Lemme 3.2 et la Remarque 3.3

Lemme 3.2 : Fonction Monotone et Réduction de la Variance

Le **Lemme 3.2** se concentre sur les propriétés théoriques de l'estimateur antithétique lorsqu'une fonction f est monotone. Il montre que si f est croissante ou décroissante, la variance de l'estimateur antithétique est réduite par rapport à l'estimateur classique :

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n^A) \leq \frac{\sigma_{f(X)}^2}{2n}$$

Le lemme repose sur l'idée que la covariance entre $f(X)$ et $f(a - X)$ devient négative lorsque f est monotone, ce qui réduit la variance de l'estimateur antithétique.

Conclusion :

- Lemme 3.2 : Fournit une démonstration théorique expliquant que, pour des fonctions monotones, l'estimateur antithétique réduit la variance par rapport à l'estimateur classique.
- Remarque 3.3 : Explique l'efficacité pratique de l'estimateur antithétique, tout en tenant compte du coût en calcul. Elle précise que l'estimateur antithétique est généralement plus efficace, même dans le pire scénario où la covariance est nulle.

3 Rappel des Notions Évoquées par le Professeur

3.1 Loi Uniforme

Le professeur rappelle que la loi uniforme est un cas fondamental de variable aléatoire antithétique. Elle est la première à connaître pour la méthode des variables antithétiques, et elle vérifie la propriété nécessaire pour cette méthode. La loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ est particulièrement simple et fonctionnelle pour cette approche.

- La loi uniforme est utile car elle permet de simuler toutes les autres lois. En effet, toutes les lois de probabilité peuvent être générées à partir de la loi uniforme via la méthode de l'inversion de la fonction de répartition.

3.2 Loi Normale

La loi normale est un autre exemple fondamental qui vérifie la propriété des variables antithétiques. Elle est parfaitement symétrique autour de zéro, ce qui signifie que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vérifie $X \stackrel{d}{=} -X$. Cette symétrie est cruciale pour la méthode des variables antithétiques, car elle permet d'utiliser les variables opposées tout en conservant la même loi et espérance.

- La loi normale est particulièrement utile dans les contextes où des mouvements browniens sont modélisés. En effet, un mouvement brownien suit une loi normale à chaque instant t fixé, ce qui rend cette loi omniprésente dans de nombreux modèles stochastiques.

Conclusion

Les deux lois évoquées, uniforme et normale, sont des outils fondamentaux pour appliquer la méthode des variables antithétiques. La loi uniforme est essentielle car elle permet de générer toutes les autres lois, tandis que la loi normale est indispensable dans de nombreux modèles stochastiques, notamment ceux utilisant des mouvements browniens.

3.3 A connaitre par coeur

Exemple 3.4. *Les deux exemples les plus utiles de variables aléatoires antithétiques sont :*

— *Si* $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, $U \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 - U$;

— *Si* $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} -X$.

4 Exercice 5

Exercice 5. *On estime à nouveau via Monte Carlo les quantités de l'exercice 2,*

— $\mathbb{E}[\sin(U)]$ *où* $U \sim \mathcal{U}([0, \pi])$,

— $\mathbb{E}[\log(X)]$ *où* $X \sim \mathcal{E}(1)$,

— $\mathbb{E}[(e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma Z} - 1)^+]$ *où* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *et* $\sigma = 0.2$,

mais en utilisant cette fois des variables aléatoires antithétiques. On utilisera $n = 10^6$ *et on donnera une estimation de l'écart-type pour chacune des estimations, qu'on comparera à la version précédente sans utilisation de variable antithétique. Pour la simulation d'une loi* $\mathcal{N}(0,1)$, *on utilisera la fonction* **random.randn** *du package* **numpy** *(***rnorm** *dans R). Comparez les écarts-types et conclure. Pour une loi normale non centrée réduite, il y a la fonction* **random.normal**.

4.1 Question 1

```
n = 10**6
U = np.random.uniform(0., np.pi, n)
sinU = np.sin(U)
sinUa = (sinU + np.sin(np.pi - U)) / 2.

m = np.mean(sinU)
mA = np.mean(sinUa)
s = np.std(sinU)
sA = np.std(sinUa)

print("Estimation IE(sin(U)) : %.5f +/- %.5f" % (m, 2.*s/np.sqrt(n)))
print("Estimation Antithétique IE(sin(U)) : %.5f +/- %.5f" % (mA, 2.*sA/np.sqrt(n)))
print("Amélioration Antithétique : %.5f / %.5f" % (mA, s/sA))
```

```
Estimation IE(sin(U)) : 0.63659 +/- 0.00062
Estimation Antithétique IE(sin(U)) : 0.63659 +/- 0.00062
Amélioration Antithétique : 0.63659 / 1.00000
```

4.2 Question 2

```
n = 10**6
U = np.random.random(n)

X = -np.log(U)
Xa = -np.log(1 - U)

logX = np.log(X)
logXa = (logX + np.log(Xa)) / 2

mx, mXA = np.mean(logX), np.mean(logXa)
sx, sXA = np.std(logX), np.std(logXa)

print("Estimation IE(log(X)) : %.5f +/- %.5f" % (mx, 2.*sx/np.sqrt(n)))
print("Estimation Antithétique IE(log(X)) : %.5f +/- %.5f" % (mXA, 2.*sXA/np.sqrt(n)))
print("Amélioration Antithétique : %.5f / %.5f" % (sx / sXA, sx / sXA))
```

```
Estimation IE(log(X)) : -0.57939 +/- 0.00257
Estimation Antithétique IE(log(X)) : -0.57743 +/- 0.00061
Amélioration Antithétique : 4.18251 / 4.18251
```

4.3 Question 3

```
sigma = 0.2
n = 10**6
Z = np.random.randn(n)
Y = np.exp(-0.5 * sigma**2 + sigma * Z) - 1
Ya = np.exp(-0.5 * sigma**2 - sigma * Z) - 1
Y[Y < 0] = 0
Ya[Ya < 0] = 0

Ya = (Y + Ya) / 2

my = np.mean(Y)
myA = np.mean(Ya)
sy = np.std(Y)
syA = np.std(Ya)

print("Estimation Y : %.5f +/- %.5f" % (my, 2. * sy / np.sqrt(n)))
print("Estimation Antithétique Y : %.5f +/- %.5f" % (myA, 2. * syA / np.sqrt(n)))
print("Amélioration Antithétique : %.2f, soit %.2f moins de simulations" % (sy / syA, (sy / syA)))
```

```
Estimation Y : 0.07964 +/- 0.00026
Estimation Antithétique Y : 0.07972 +/- 0.00015
Amélioration Antithétique : 1.78, soit 1.78 moins de simulations
```