Level 1
Pricing and risk-management des options
Cours 2

Jean-François Berger-Lefébure

December 2024

Contents

1 Volatilité implicite

1.1 Contexte et définition

La **volatilité implicite** est la volatilité estimée par le marché sur la base des prix observés des options. Contrairement à la **volatilité historique**, qui mesure les fluctuations passées, la volatilité implicite reflète les **anticipations de risque** des investisseurs pour l'avenir.

1.2 Pourquoi calculer la volatilité implicite ?

L'objectif est de traduire dans un modèle théorique (Black & Scholes) l'information contenue dans le prix de marché d'une option. Cela permet de:

- Comparer les attentes des investisseurs sur la **volatilité future**.
- Ajuster la couverture de portefeuilles d'options (*hedging*).
- Détecter d'éventuelles anomalies de prix pour des **arbitrages**.

1.3 Formule et explication des paramètres

Soit un call sur un actif S de prix d'exercice K, maturité T, observé au prix C_0^{MKT}.

La volatilité implicite est la valeur de σ telle que:

$$C_0^{BS}(S, K, T, r, \sigma_{imp}) = C_0^{MKT}$$

- S: Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K: Prix d'exercice de l'option.
- T: Temps jusqu'à maturité (en années).
- r: Taux d'intérêt sans risque.
- σ_{imp}: Volatilité implicite que nous cherchons.

ANNEXE: L'équation est résolue numériquement, car il est impossible de l'inverser analytiquement.

1.4 Pourquoi la volatilité implicite varie-t-elle selon les options ?

En théorie, sous le modèle de Black & Scholes, la volatilité est supposée **constante**. Pourtant, dans la pratique:

- Les investisseurs anticipent des **mouvements extrêmes** non prévus par la normalité des rendements (queues épaisses).
- Le marché valorise différemment les options en fonction des niveaux de prix (*strikes*) car les craintes ne sont pas symétriques:
  - Puts (protection contre un krach) = volatilité implicite souvent plus élevée.
  - Calls éloignés (anticipation d'explosion haussière) = volatilité implicite ajustée.
- Les déséquilibres entre l'**offre et la demande** sur certaines options influencent leur prix, et donc leur volatilité implicite.

1.5 Utilité pratique

La volatilité implicite est essentielle pour évaluer les **risques perçus par le marché**. Sur certains marchés (comme les devises), les options sont même cotées directement en volatilité plutôt qu'en prix.

2 Smile de volatilité

2.1 Qu'est-ce qu'un smile de volatilité ?

Le **smile de volatilité** décrit la relation entre la volatilité implicite et le prix d'exercice (*strike*). Contrairement au modèle de Black & Scholes, qui suppose une volatilité constante, le marché montre une **volatilité variable selon le strike**.

Le graphique typique prend la forme d'un sourire:

- Options **dans la monnaie (ITM)** et **hors de la monnaie (OTM)** = Volatilité plus élevée.
- Options **à la monnaie (ATM)** = Volatilité plus faible.

2.2 Pourquoi observe-t-on un smile de volatilité ?

- **Queue épaisse des distributions:** Les investisseurs craignent des mouvements extrêmes, créant une demande plus forte pour les protections (puts OTM).
- **Risque asymétrique:** Les investisseurs paient plus cher pour se protéger des krachs (puts) que pour spéculer sur des hausses (calls).
- **Ajustements dynamiques:** Les market-makers doivent se couvrir en ajustant leurs positions sur le sous-jacent, augmentant ainsi la demande sur certaines options.
- **Effets comportementaux:** Les marchés anticipent des mouvements spécifiques selon les zones de prix critiques (support ou résistance).

2.3 Exemple numérique

Supposons un sous-jacent valant 100 € avec 3 options:

- Call 1: Strike 90 €, prix observé 15 €.
- Call 2: Strike 100 €, prix observé 10 €.
- Call 3: Strike 110 €, prix observé 5 €.

Calcul des volatilités implicites:

- Call 1 (ITM) =¿ Volatilité élevée car risque de mouvement fort.
- Call 2 (ATM) =¿ Volatilité faible, prix centré sur l'attente moyenne.
- Call 3 (OTM) =¿ Volatilité plus élevée si anticipation de mouvement extrême.

2.4 Conséquences pour les traders

- Le smile force les traders à utiliser des modèles plus complexes (*stochastiques*) pour ajuster leurs stratégies.
- Il peut révéler des **opportunités d'arbitrage** lorsque certaines options sont mal pricées par rapport à leurs voisines.
- Les smiles reflètent la psychologie du marché face au risque.

2.5 Ce qu'il faut retenir

- La **volatilité implicite** est calculée pour refléter le prix observé d'une option sur le marché en inversant la formule de Black & Scholes.
- Elle varie selon les strikes en raison des anticipations de **risques asymétriques**, des **queues épaisses** dans les distributions, et des **ajustements dynamiques** des traders.
- Le **smile de volatilité** est une courbe montrant des volatilités implicites plus élevées pour les options loin de la monnaie (OTM/ITM).
- La volatilité implicite n'est pas constante, ce qui invalide l'hypothèse simplificatrice de Black & Scholes et nécessite des modèles plus avancés.
- Les traders doivent intégrer ces variations pour ajuster correctement leurs stratégies de couverture et éviter des erreurs coûteuses.

—

2.6 Distinction entre CALL et PUT

La **volatilité implicite** affichée sur un **skew** ou un **smile** représente à la fois les **CALLS** et les **PUTS**.

- Pour les **strikes faibles** (à gauche du graphique):
  - On parle surtout des **options PUT**.
  - Ces options protègent contre des **baisses importantes**.
  - Elles ont généralement une **volatilité implicite plus élevée**, car les baisses sont perçues comme **plus brutales** et **plus probables** que les hausses.
- Pour les **strikes élevés** (à droite du graphique):
  - On regarde surtout les **options CALL**.
  - Ces options permettent de **parier sur des hausses**.
  - Leur **volatilité implicite est plus faible**, car les hausses sont souvent vues comme **progressives** et **moins risquées**.

2.7 Exemple avec le CAC 40

Supposons que le CAC 40 soit actuellement à **5000 points**:

- Un **PUT** avec un strike à **4000 points**:
  - Fortement hors de la monnaie (**OTM**).
  - Volatilité implicite élevée (**30%**) car il couvre un **risque de baisse brutale** (krach).
- Un **CALL** avec un strike à **6000 points**:
  - Fortement hors de la monnaie (**OTM**).
  - Volatilité implicite plus faible (**15%**) car une hausse aussi forte est perçue comme **moins probable** et **progressive**.

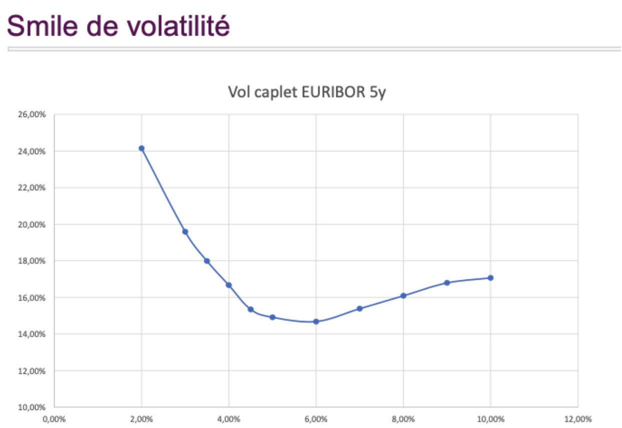
2.8 Pourquoi la volatilité implicite est plus élevée sur les PUTS ?

- **Protection des portefeuilles:** Les investisseurs achètent souvent des **PUTS** pour **se protéger** contre des baisses, ce qui fait monter leur **prix** et donc leur **volatilité implicite**.
- **Nature des baisses:** Les baisses sur les marchés sont souvent **rapides et brutales** (ex: crise de 2008, COVID-19). Cela entraîne une **incertitude accrue** sur les scénarios baissiers, donc une volatilité plus forte.
- **Hausses perçues comme progressives:** À l'inverse, les hausses sont souvent **plus lentes et prévisibles**, réduisant l'incertitude et la **volatilité implicite** sur les CALLS.

—

2.9 Exemple: Smile de volatilité

Volatilité des caplets EURIBOR 5 ans



Le graphique montre une courbe en forme de **U**, appelée **Smile de volatilité**.

2.9.1 Analyse du graphique

Ce graphique concerne un **caplet EURIBOR 5 ans**, qui est une option sur un **taux d'intérêt**.

Important: L'axe des abscisses ici n'est pas un **strike classique** comme pour des actions, mais représente directement des **niveaux de taux d'intérêt** (en %).

- Exemple: 2%, 3%, 4% représentent des **taux d'exercice** pour le caplet.
- Cela signifie qu'on observe la **volatilité implicite** pour des options protégeant contre un taux d'intérêt dépassant 2%, 3%, etc.

La volatilité est **élevée** pour les strikes éloignés (en dehors de la monnaie, OTM ou ITM) et **faible** pour les strikes proches du prix actuel (à la monnaie, ATM).

2.9.2 Pourquoi cette forme ?

- Les investisseurs craignent des **événements extrêmes** comme des krachs ou des hausses brutales.
- Les options éloignées nécessitent donc une **prime de risque** supplémentaire, augmentant la volatilité implicite.
- Ce phénomène reflète une anticipation asymétrique du marché sur les fluctuations des prix.

2.9.3 Cas pratique: Caplets EURIBOR

Les options sur taux d'intérêt, comme les caplets EURIBOR, montrent ce comportement car:

- Les traders se protègent contre des hausses soudaines des taux.
- Ils achètent des options OTM, augmentant leur prix et leur volatilité implicite.

Option call avec un strike à 2%

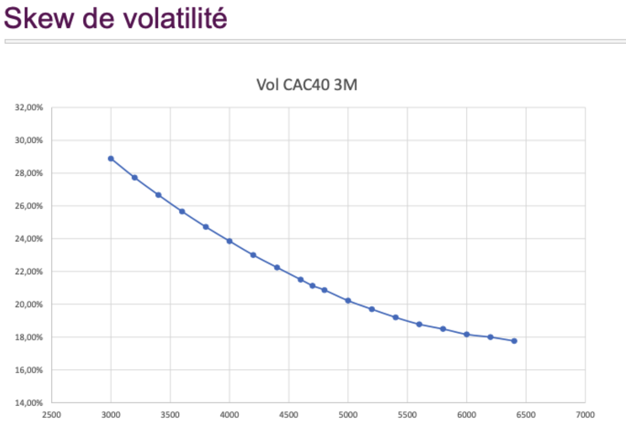
- L'option est **très hors de la monnaie (OTM)**.
- Tu dois utiliser une **volatilité implicite élevée (24%)** pour refléter l'**incertitude** d'un retour vers ces niveaux très bas.
- Cette forte volatilité traduit la **crainte d'une baisse extrême des taux** associée à un scénario de crise ou de politique monétaire ultra-accommodante.

Option call avec un strike à 10%

- L'option est aussi **hors de la monnaie (OTM)**, mais **moins extrême** que dans le cas précédent.
- Tu prends une **volatilité implicite plus faible (17%)** car les **hausses de taux** sont perçues comme plus **progressives et prévisibles**.
- Le risque est jugé **moins incertain** pour des taux élevés, ce qui réduit la volatilité implicite.

2.10 Exemple: Skew de volatilité

Exemple: Volatilité sur le CAC 40 à 3 mois



Le graphique montre une courbe **décroissante**, appelée **Skew de volatilité**.

2.10.1 Analyse du graphique

- Axe vertical: Volatilité implicite (%).
- Axe horizontal: Prix d'exercice (*strike*) des options.

La volatilité est **plus élevée** pour les strikes faibles et **diminue progressivement** pour les strikes plus élevés.

2.10.2 Pourquoi cette forme ?

- Les investisseurs ont tendance à craindre davantage les **baisses brutales des marchés** (krachs) qu'une montée progressive.
- Ils paient une prime pour les **puts hors de la monnaie (OTM)** qui protègent contre ces baisses.
- En conséquence, la volatilité implicite est **plus forte pour les puts** que pour les calls.
- Ce comportement reflète une **asymétrie de risque** liée à l'aversion au risque des investisseurs.

2.10.3 Cas pratique: Options sur le CAC 40

Dans ce cas:

- Les investisseurs achètent des **puts protecteurs** pour couvrir leurs portefeuilles en cas de baisse rapide.
- Cette demande augmente les prix des puts et donc leur **volatilité implicite**.

2.11 Ce qu'il faut retenir

- Le **Smile de volatilité** présente une courbe en U où la volatilité est plus forte pour les options loin de la monnaie (OTM ou ITM).
- Le **Skew de volatilité** montre une courbe décroissante où les strikes faibles ont une volatilité plus forte (effet de protection contre les baisses).
- Ces phénomènes prouvent que la volatilité implicite n'est **pas constante**, contredisant le modèle de **Black & Scholes**.
- Les investisseurs anticipent des **risques asymétriques** et paient plus pour se protéger contre les scénarios extrêmes.
- Les modèles avancés (volatilité stochastique) sont souvent nécessaires pour mieux refléter ces effets.
- Un **skew** représente la **volatilité implicite** des **CALLS** (strikes élevés) et des **PUTS** (strikes faibles).
- **Strikes faibles (PUTS):** Volatilité plus **élevée** car ils protègent contre des **baisses brutales**.
- **Strikes élevés (CALLS):** Volatilité plus **faible** car les hausses sont jugées **progressives et moins risquées**.
- La forte volatilité sur les **PUTS** reflète une **aversion au risque** et une crainte des **krachs**, tandis que la volatilité plus faible sur les **CALLS** traduit une perception de **hausse maîtrisée**.
- Le skew ne reflète pas forcément un **pessimisme général**, mais plutôt une **prudence face aux risques asymétriques**.

—

3 Surface de volatilité

3.1 Qu'est-ce qu'une surface de volatilité ?

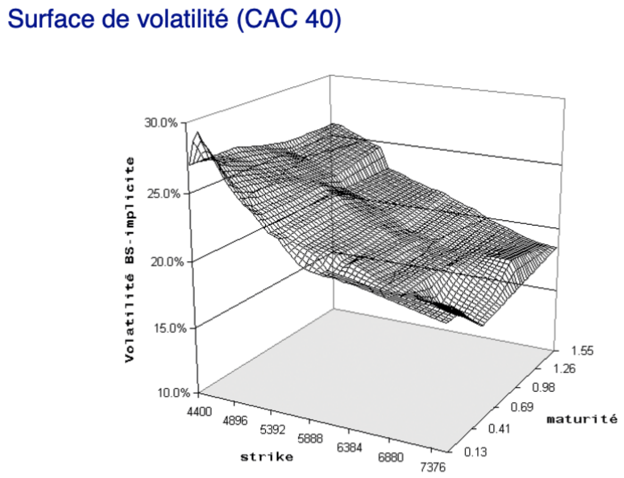


Figure 1: Support de cours - Antonin CHAIX

La **surface de volatilité** est une représentation en **3 dimensions** qui montre comment la **volatilité implicite** dépend de:

- Le **strike (K)**: Le prix d'exercice de l'option.
- La **maturité (T)**: La durée restante avant l'expiration de l'option.

Cette surface permet de visualiser:

- Comment la volatilité varie en fonction du **niveau de prix** (strike).
- Comment elle change selon la **durée** jusqu'à l'échéance (maturité).

3.2 Formule mathématique simple

La surface de volatilité est décrite par:

$$Vol_{implicite} = F(K, T)$$

où:

- K = Strike (prix d'exercice).
- T = Maturité (temps restant avant expiration).
- F = Fonction qui relie ces deux variables à la volatilité.

Interprétation: La volatilité implicite est une **fonction du strike et du temps**, ce qui crée une **surface 3D** avec:

- Axe des **X**: Strike (K).
- Axe des **Y**: Maturité (T).
- Axe des **Z**: Volatilité implicite (σ_{imp}).

3.3 Que montre la surface de volatilité ?

1. **Variation selon le strike: Skew et Smile**

   - Pour une maturité donnée, on observe souvent un **skew** (volatilité décroissante) ou un **smile** (volatilité en U).
   - Cela signifie que les options **hors de la monnaie (OTM)** ont souvent des volatilités plus élevées.

2. **Variation selon la maturité: Term structure**

   - La volatilité implicite change aussi en fonction de la **maturité**:
     - **Court terme (maturité faible)**: Volatilité souvent plus élevée en raison de l'**incertitude immédiate**.
     - **Long terme (maturité élevée)**: Volatilité plus **faible** car les mouvements futurs sont perçus comme **plus prévisibles**.

3.4 Exemple pratique: Surface du CAC 40

Sur le graphique:

- **Axe X (strike)**: Montre différents niveaux de prix d'exercice pour les options sur le CAC 40.
- **Axe Y (maturité)**: Représente différentes échéances pour ces options.
- **Axe Z (volatilité implicite)**: Affiche la volatilité calculée pour chaque combinaison de strike et maturité.

Observation:

- La volatilité est **plus élevée** pour les strikes **faibles (PUTS)** et diminue progressivement vers les strikes **élevés (CALLS)**.
- La volatilité est aussi **plus forte** sur les **maturités courtes**, car l'incertitude immédiate est **plus grande**.
- Elle **diminue** sur les **maturités longues**, car les risques futurs sont considérés comme **plus lissés**.

3.5 Pourquoi la surface de volatilité est-elle importante ?

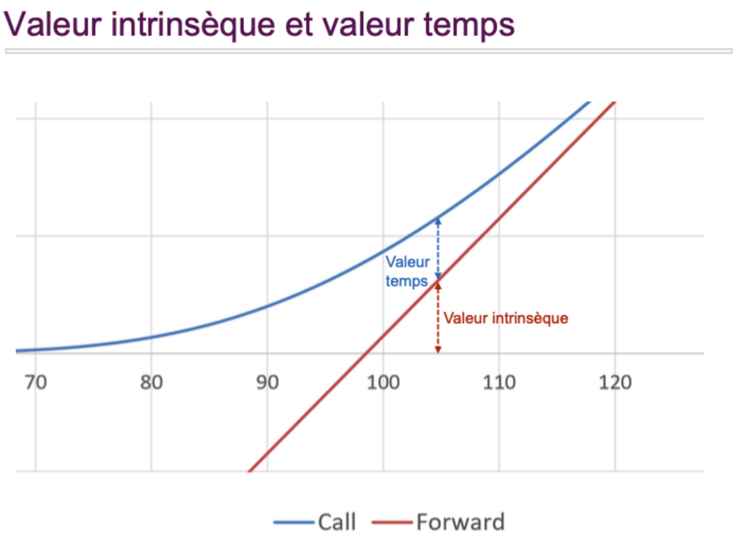
- **Pour évaluer correctement les options:** Les traders doivent utiliser la bonne volatilité implicite pour le strike et la maturité choisis.
- **Pour détecter des anomalies:** Une déformation inhabituelle de la surface peut signaler des **anticipations de crise** ou des **opportunités d'arbitrage**.
- **Pour modéliser des scénarios complexes:** La surface de volatilité permet d'ajuster les modèles pour tenir compte de la **réalité des marchés**, où la volatilité n'est jamais constante.

3.6 Ce qu'il faut retenir

- Une **surface de volatilité** montre comment la **volatilité implicite** varie en fonction du **strike** et de la **maturité**.
- La volatilité dépend:
  - Du **strike (K)** — Effet **skew** ou **smile** selon la position par rapport au prix actuel.
  - De la **maturité (T)** — Volatilité plus forte à **court terme** et plus faible à **long terme**.
- Elle sert à corriger les limites du modèle de **Black & Scholes** qui suppose une volatilité **constante**, ce qui n'est pas réaliste.
- Une **surface déformée** peut refléter des **anticipations de crise**, des **craintes asymétriques** ou des effets liés à des **événements économiques** (annonces de la BCE, etc.).

—

4 Valeur intrinsèque



La formule donnée pour la valeur intrinsèque d'un **call** est :

$$VI_{call} = \left(S_0 - Ke^{-rT}\right)^+ \leq C_0$$

- S_0 : Prix actuel du sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (strike).
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- T : Temps jusqu'à l'échéance (en années).
- e^{-rT} : Facteur d'actualisation pour ramener la valeur future du strike à aujourd'hui.
- $(x)^+$: Prend seulement la **valeur positive** (si résultat négatif, on prend 0).
- C_0 : Prix actuel de l'option call.

4.1 Interprétation

1. **Actualisation du strike :** Ke^{-rT} représente la **valeur actualisée** du prix d'exercice à aujourd'hui, car ce paiement est effectué dans le futur.
2. **Différence avec le prix du sous-jacent :** $S_0 - Ke^{-rT}$ mesure combien l'option serait dans la monnaie si exercée immédiatement.
3. **Valeur positive uniquement :** $(x)^+$ signifie qu'on ne garde que la **valeur positive** de la différence. Si elle est négative, on met **0**.
4. **Comparaison au prix de l'option :** La valeur intrinsèque est toujours **inférieure ou égale** au prix de l'option (C_0), car le prix inclut aussi une **valeur temps**.

4.2 Exemple concret

Soit :

$$S_0 = 110, \quad K = 100, \quad r = 5\%, \quad T = 1$$

1. Calcul du strike actualisé :

$$Ke^{-rT} = 100e^{-0.05(1)} \approx 95.12$$

2. Valeur intrinsèque :

$$VI_{call} = (110 - 95.12)^+ = 14.88$$

3. Comparaison avec le prix de l'option : Si $C_0 = 17$, alors :

$$14.88 \leq 17$$

4.3 Ce qu'il faut retenir

- La **valeur intrinsèque** mesure la **valeur immédiate** d'une option si exercée tout de suite.
- Pour un **call** :

$$VI_{call} = \left(S_0 - Ke^{-rT}\right)^+$$

- Elle utilise le **strike actualisé** pour tenir compte de la **valeur temporelle de l'argent**.
- On prend uniquement la **valeur positive** ou 0 si l'option est hors de la monnaie.
- La valeur intrinsèque est toujours **inférieure ou égale** au prix de l'option, car celui-ci inclut aussi une **valeur temps**.

—

5 Formule du portefeuille répliquant

La formule donnée est :

$$(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

5.1 Contexte : Construction du portefeuille

Ce portefeuille est construit dans une situation où :

- On **achète une action** aujourd'hui au prix S_0.
- On **emprunte** une somme équivalente à Ke^{-rT}, soit la **valeur actualisée du prix d'exercice**.

L'objectif est de **répliquer un call européen** à l'échéance T.

5.2 Analyse de la formule

Partie gauche : $(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}}$

1. $S_T - K$: C'est la **valeur intrinsèque potentielle** du call à maturité. Elle est :
   - Positive si $S_T > K$.
   - Nulle ou négative sinon.
2. $\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}}$: C'est un **indicateur binaire (1 ou 0)** qui vérifie :
   - 1 si le portefeuille est **anticipé dans la monnaie** aujourd'hui ($S_0 > Ke^{-rT}$).
   - 0 sinon (le portefeuille n'est pas construit).
3. Produit des deux termes : Ce portefeuille ne génère un gain que si :
   - L'option est **anticipée dans la monnaie aujourd'hui**.
   - L'option reste **dans la monnaie à maturité**.

Partie droite : $(S_T - K)^+$

Cette partie représente la **valeur intrinsèque standard** d'un call européen classique :

- Il prend la valeur **positive** de $S_T - K$ ou 0 si l'option est **hors de la monnaie**.
- Il représente le **call classique** sans condition initiale.

5.3 Inégalité et interprétation

L'inégalité :

$$(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

montre que :

- Le portefeuille répliquant (gauche) est **inférieur ou égal** à un **call classique** (droite).

- Le portefeuille fonctionne uniquement si l'option est **anticipée dans la monnaie** au départ, alors que le call classique peut capturer toute la valeur intrinsèque **sans condition**.

- Le call standard inclut aussi une **valeur temps**, ce que le portefeuille construit ne garantit pas.

5.4 Ce qu'il faut retenir

- Ce portefeuille est construit avec l'achat d'une **action** et un **emprunt** égal au **strike actualisé**.

- La condition $S_0 > Ke^{-rT}$ signifie que l'option doit être **anticipée dans la monnaie** pour construire ce portefeuille.

- L'inégalité montre que ce portefeuille réplique **partiellement** un call, mais est toujours **inférieur ou égal** au call classique.

- Le **call classique** capture toute la valeur intrinsèque sans condition initiale et inclut une **valeur temps**, ce que le portefeuille ne peut pas garantir.

- Cette démonstration illustre que le call classique est plus **flexible** et donc **plus cher** qu'un portefeuille répliquant.

—

6 Valeur temps et formules associées

6.1 Définition de la valeur temps

La **valeur temps** est définie comme la différence entre :

- Le **prix total** de l'option (C_0).
- Sa **valeur intrinsèque** (VI_{call}).

Formule :

$$VT_{call} = C_0 - VI_{call}$$

6.2 Relation entre valeur totale et ses composants

La formule clé reliant le prix total et ses deux composants est :

$$C_0 = VT_{call} + VI_{call}$$

- C_0 : Prix total de l'option.
- VT_{call} : Valeur temps (prix de l'incertitude future).
- VI_{call} : Valeur intrinsèque (valeur immédiate).

6.3 Propriétés importantes de la valeur temps

1. **Maximum à la monnaie (ATM) :** La valeur temps est **maximale** lorsque le prix spot (S_0) est **proche du strike (K)**, car l'incertitude est la plus forte.
2. **Dépendance à la volatilité :** Plus la **volatilité** est élevée, plus la **valeur temps** est grande, car il y a davantage d'opportunités pour que l'option devienne profitable.
3. **Dépendance au temps restant :** Plus il reste de **temps avant l'échéance**, plus la valeur temps est élevée. Elle diminue avec le temps, un phénomène connu sous le nom de **décroissance temporelle (time decay)**.
4. **Cas limite :** À l'échéance, la valeur temps devient **nulle**, car il n'y a plus d'incertitude sur l'évolution du prix.

6.4 Ce qu'il faut retenir

- La **valeur temps** est la différence entre le **prix total** d'une option (C_0) et sa **valeur intrinsèque** (VI_{call}) :
$$VT_{call} = C_0 - VI_{call}$$
- La formule clé reliant les deux valeurs est :
$$C_0 = VT_{call} + VI_{call}$$
- La **valeur intrinsèque** est le minimum que vaut l'option dans un **contexte déterministe** ($\sigma = 0$).
- La **valeur temps** représente le **prix de l'incertitude**.

  - Elle est **maximum à la monnaie (ATM)**.
  - Elle augmente avec la **volatilité** et le **temps restant**.
  - Elle diminue à mesure que l'échéance approche (**décroissance temporelle**).
- À l'échéance, la valeur temps devient **nulle**, et l'option ne vaut que sa **valeur intrinsèque**.

—

7 Expression des grecques : Fonction de répartition et densité de probabilité

1. Fonction de répartition normale cumulative ($\mathcal{N}(x)$)

La première formule est :

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

Définition :

- $\mathcal{N}(x)$ est la **fonction de répartition** de la **loi normale centrée réduite** $N(0, 1)$.
- Elle donne la **probabilité cumulée** qu'une variable aléatoire suive une valeur **inférieure ou égale à x**.

Structure de la formule :

- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: Facteur de normalisation pour que l'aire totale sous la courbe soit **1**.
- $e^{-u^2/2}$: Fonction exponentielle définissant la **forme en cloche**.
- du : Intégrale pour calculer l'aire sous la courbe jusqu'à x.

Utilisation :

- Estimer la **probabilité cumulée** d'un événement sous une loi normale.
- Sert dans le modèle de **Black-Scholes** pour évaluer les probabilités d'être **dans la monnaie**.

2. Densité de probabilité ($n(x)$)

La deuxième formule est :

$$n(x) = \mathcal{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Définition :

- $n(x)$ est la **densité de probabilité** de la **loi normale centrée réduite**.
- Elle mesure la **probabilité instantanée** d'observer une valeur précise x.

Structure de la formule :

- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: Facteur de normalisation garantissant une probabilité totale égale à 1.
- $e^{-x^2/2}$: Fonction exponentielle qui diminue lorsque x s'éloigne de 0.

3. Pourquoi la densité de probabilité mesure-t-elle la sensibilité d'une option ?

La densité de probabilité $n(x)$ intervient directement dans les **grecques**, notamment :
Delta (Δ) : Mesure la **sensibilité** du prix d'une option à une **variation du prix du sous-jacent**.

$$\Delta_{call} = \mathcal{N}(d_1)$$

- - Le lien avec $n(x)$ vient du fait que la **variation marginale** d'une probabilité cumulée dépend de la **densité ponctuelle**.
- - Plus la densité est élevée, plus la probabilité de variation est forte, ce qui influence les calculs de delta.

Gamma (Γ) : Mesure la **sensibilité de Delta** par rapport au prix du sous-jacent.

$$\Gamma = \frac{n(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

- - $n(d_1)$ contrôle cette formule car il évalue à quel point la densité est concentrée autour de la moyenne.
- - Plus la densité est forte, plus Γ réagit fortement, indiquant une **sensibilité accrue** aux variations de prix.

Theta (Θ) :

- - Mesure l'impact du **temps qui passe** sur la valeur d'une option.
- - La **valeur temps** est reliée à la volatilité et à l'incertitude, qui sont modélisées par la densité $n(x)$.

4. Ce qu'il faut retenir

- $\mathcal{N}(x)$ est la **fonction cumulative** de la loi normale, utilisée pour calculer des **probabilités cumulées**.
- $n(x)$ est la **densité de probabilité**, donnant la **probabilité instantanée** pour une valeur donnée.
- $n(x)$ est essentielle pour mesurer la **sensibilité** des options via :
  - **Delta :** Probabilité d'être dans la monnaie.
  - **Gamma :** Variation de delta selon les mouvements du sous-jacent.
  - **Theta :** Décroissance de la valeur temps.
- Plus la densité est élevée ($n(x)$), plus les changements sont **rapides et sensibles**.
- Ces formules sont au cœur des modèles de **pricing d'options** et des **grecques**.

—

8 Explication des grecques

8.1 Pour un CALL

Pense bête…

Position	Delta	Gamma	Thêta	Vega	Rhô
Achat d'un call	>0	>0	<0	>0	>0
Vente d'un call	<0	<0	>0	<0	<0
Achat d'un put	<0	>0	<0	>0	<0
Vente d'un put	>0	<0	>0	<0	>0

1. Achat d'un CALL

Delta ($\Delta > 0$)

- Mesure la **sensibilité du prix de l'option** à une **variation du prix du sous-jacent**. - Pour un CALL, $\Delta > 0$ signifie que la valeur du CALL **augmente** lorsque le prix du sous-jacent **augmente**. - Plus le CALL est **dans la monnaie (ITM)**, plus Δ se rapproche de **1** (réplication proche de l'actif).

Exemple : Si $\Delta = 0.6$, alors une hausse de **1€** du sous-jacent entraîne une hausse de **0.60€** du CALL.

Gamma ($\Gamma > 0$)

- Mesure la **sensibilité de Delta** à une **variation du prix du sous-jacent**. - Pour un CALL, $\Gamma > 0$ signifie que la **variation de Delta** est **positive** lorsque le prix du sous-jacent augmente. - Γ est plus élevé lorsque l'option est **à la monnaie (ATM)**, ce qui rend le CALL **plus sensible** aux mouvements du sous-jacent.

Interprétation : - Si Γ est élevé, même un petit mouvement du sous-jacent peut avoir un **fort impact** sur Δ.

Thêta ($\Theta < 0$)

- Mesure la **décroissance du prix de l'option** au fil du temps (**effet temps**). - Pour un CALL, $\Theta < 0$ signifie que sa valeur **diminue avec le temps**.

Pourquoi négatif ? - La **valeur temps** de l'option diminue à mesure que l'échéance approche, car il reste **moins d'opportunités** pour que l'option devienne rentable.

Exemple : Si $\Theta = -0.05$, le CALL perd **0.05€ par jour** si tout le reste reste constant.

Vega ($\nu > 0$)

- Mesure la **sensibilité du prix de l'option** à une **variation de la volatilité implicite**. - Pour un CALL, $\nu > 0$ signifie que sa valeur **augmente** si la **volatilité implicite** augmente.

Pourquoi positif ? - Une volatilité plus élevée signifie plus d'incertitude, donc plus de chances que l'option devienne rentable avant l'échéance.

Exemple : Si $\nu = 0.10$, une hausse de **1%** de volatilité fait augmenter l'option de **0.10€**.

Rhô ($\rho > 0$)

- Mesure la **sensibilité du prix de l'option** à une **variation des taux d'intérêt**. - Pour un CALL, $\rho > 0$ signifie que sa valeur **augmente** si les **taux d'intérêt augmentent**.

Pourquoi positif ? - Une hausse des taux réduit la valeur actualisée du strike (Ke^{-rT}), rendant le CALL **plus attractif**.

Exemple : Si $\rho = 0.05$, une hausse des taux de **1%** augmente la valeur du CALL de **0.05€**.

2. Vente d'un CALL

Pour la vente d'un CALL, les effets sont **inversés** :

- $\Delta < 0$: On perd si le sous-jacent monte (position short).
- $\Gamma < 0$: Plus le sous-jacent varie, plus la perte potentielle est **élevée**.
- $\Theta > 0$: Le vendeur bénéficie de l'érosion du temps.
- $\nu < 0$: Une **hausse de la volatilité** augmente le risque de pertes.
- $\rho < 0$: Une **hausse des taux** augmente la valeur de l'option vendue (**perte**).

8.2 Ce qu'il faut retenir

Achat d'un CALL

- **Delta** (> 0) **:** Hausse du sous-jacent = Hausse du CALL.
- **Gamma** (> 0) **:** Sensibilité croissante près du strike (ATM).
- **Thêta** (< 0) **:** Décroissance avec le temps.
- **Vega** (> 0) **:** Hausse de volatilité = hausse du CALL.
- **Rhô** (> 0) **:** Hausse des taux d'intérêt = hausse du CALL.

Vente d'un CALL

- Inverse tous les signes : risques liés aux hausses, volatilité et effet temps.

8.3 Explication des grecques pour un PUT

1. Achat d'un PUT

Delta ($\Delta < 0$)

- Mesure la **sensibilité du prix de l'option** à une **variation du prix du sous-jacent**. - Pour un PUT, $\Delta < 0$ signifie que la valeur du PUT **augmente** lorsque le prix du sous-jacent **diminue**. - Plus le PUT est **dans la monnaie (ITM)**, plus Δ se rapproche de **-1**.

Exemple : Si $\Delta = -0.4$, alors une baisse de **1€** du sous-jacent entraîne une hausse de **0.40€** du PUT.

Gamma ($\Gamma > 0$)

- Mesure la **sensibilité de Delta** à une **variation du prix du sous-jacent**. - Pour un PUT, $\Gamma > 0$ signifie que la **variation de Delta** est **positive** lorsque le prix du sous-jacent évolue. - Γ est plus élevé lorsque l'option est **à la monnaie (ATM)**, ce qui rend le PUT **plus sensible** aux mouvements du sous-jacent.

Interprétation : - Un Γ élevé indique qu'un petit mouvement du sous-jacent peut provoquer un **fort changement** dans Δ.

Thêta ($\Theta < 0$)

- Mesure la **décroissance du prix de l'option** au fil du temps (**effet temps**). - Pour un PUT, $\Theta < 0$ signifie que sa valeur **diminue avec le temps**.

Pourquoi négatif ? - La **valeur temps** du PUT diminue à mesure que l'échéance approche, car il reste **moins d'opportunités** pour que l'option devienne rentable.

Exemple : Si $\Theta = -0.03$, le PUT perd **0.03€ par jour** si tout le reste reste constant.

Vega ($\nu > 0$)

- Mesure la **sensibilité du prix de l'option** à une **variation de la volatilité implicite**. - Pour un PUT, $\nu > 0$ signifie que sa valeur **augmente** si la **volatilité implicite** augmente.

Pourquoi positif ? - Une volatilité plus élevée signifie plus d'incertitude, donc plus de chances que l'option devienne rentable avant l'échéance.

Exemple : Si $\nu = 0.12$, une hausse de **1%** de volatilité fait augmenter l'option de **0.12€**.

Rhô ($\rho < 0$)

- Mesure la **sensibilité du prix de l'option** à une **variation des taux d'intérêt**. - Pour un PUT, $\rho < 0$ signifie que sa valeur **diminue** si les **taux d'intérêt augmentent**.

Pourquoi négatif ? - Une hausse des taux augmente la valeur actualisée du strike (Ke^{-rT}), rendant le PUT **moins attractif**.

Exemple : Si $\rho = -0.04$, une hausse des taux de **1%** diminue la valeur du PUT de **0.04€**.

2. Vente d'un PUT

Pour la vente d'un PUT, les effets sont **inversés** :

- $\Delta > 0$: On perd si le sous-jacent baisse (position short).
- $\Gamma < 0$: Plus le sous-jacent varie, plus la perte potentielle est **élevée**.
- $\Theta > 0$: Le vendeur bénéficie de l'érosion du temps.
- $\nu < 0$: Une **hausse de la volatilité** augmente le risque de pertes.
- $\rho > 0$: Une **hausse des taux** est favorable car elle diminue la valeur du PUT vendu.

8.4 Ce qu'il faut retenir

Achat d'un PUT

- **Delta** (< 0) **:** Baisse du sous-jacent = Hausse du PUT.
- **Gamma** (> 0) **:** Sensibilité croissante près du strike (ATM).

- **Thêta** (< 0) **:** Décroissance avec le temps.
- **Vega** (> 0) **:** Hausse de volatilité = hausse du PUT.
- **Rhô** (< 0) **:** Hausse des taux d'intérêt = baisse du PUT.

Vente d'un PUT

- Inverse tous les signes : risques liés aux baisses, volatilité et effet temps.

—

9 Delta Hedge (Fichier distinct)

10 Annexes

10.1 Pourquoi la volatilité implicite est-elle résolue numériquement et non analytiquement ?

Introduction

La **volatilité implicite** est un paramètre clé utilisé pour évaluer les prix des options. Elle représente l'anticipation du marché sur la volatilité future d'un actif. Cependant, contrairement à d'autres paramètres comme le prix du sous-jacent ou le taux d'intérêt, la volatilité implicite **ne peut pas être observée directement sur le marché**.

On doit donc la **déduire** en utilisant un modèle mathématique, comme celui de **Black & Scholes**. Cela implique d'inverser la formule utilisée pour calculer le prix d'une option afin de retrouver la volatilité implicite correspondant au prix observé.

Toutefois, cette inversion est **complexe** car la formule de Black & Scholes ne peut pas être résolue directement. Au lieu de cela, on utilise des méthodes **numériques** qui trouvent progressivement la solution.

Formule et problème d'inversion

La formule de Black & Scholes pour le prix d'un call est donnée par:

$$C_0^{BS}(S, K, T, r, \sigma) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

avec:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- S: Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K: Prix d'exercice (strike).
- T: Temps restant jusqu'à la maturité (en années).
- r: Taux d'intérêt sans risque.
- Φ: Fonction de répartition cumulative d'une loi normale standard.
- σ: Volatilité implicite recherchée.

Pourquoi ne peut-on pas inverser la formule ?

Cette formule est **non linéaire** et implique des éléments mathématiques complexes:

- La volatilité (σ) apparaît dans **plusieurs termes** sous des formes difficiles à manipuler: logarithmes, racines carrées et produits.
- La fonction Φ de la loi normale cumulative n'a pas de formule inversée simple. Elle nécessite elle-même des calculs approximatifs.
- Ces caractéristiques rendent l'équation **impossible à résoudre directement** par des méthodes algébriques classiques.

Méthode numérique utilisée pour la résoudre

Pour trouver la volatilité implicite (σ_{imp}), on doit:

1. Faire une **hypothèse initiale** pour σ (par exemple 20%).
2. Calculer le prix théorique de l'option avec cette valeur dans la formule de Black & Scholes.
3. Comparer ce prix théorique au prix observé sur le marché (C_0^{MKT}).
4. Ajuster la volatilité et recommencer jusqu'à ce que les deux prix correspondent.

Ce processus itératif utilise des algorithmes comme **Newton-Raphson**, qui approchent la solution en corrigeant progressivement l'estimation.

Formellement, on résout:

$$f(\sigma) = C_0^{BS}(\sigma) - C_0^{MKT} = 0$$

et met à jour la volatilité avec:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}$$

où $f'(\sigma)$ est la dérivée par rapport à σ.

Exemple simplifié

Supposons un sous-jacent à 100 € et une option d'exercice 110 €, avec un prix observé de 5 €. On teste plusieurs valeurs de volatilité:

- $\sigma = 15\%$ donne un prix théorique de 4,50 € (**trop bas**).
- $\sigma = 20\%$ donne un prix théorique de 5,10 € (**trop haut**).

On ajuste la volatilité à $18,5\%$ pour atteindre un prix de 5 €.

Pourquoi cette méthode est-elle importante ?

Cette approche permet d'adapter le modèle de Black & Scholes à la réalité des prix observés sur le marché, même si ses hypothèses (volatilité constante, distribution normale) ne sont pas toujours vérifiées.

Ce qu'il faut retenir

- La **volatilité implicite** mesure l'anticipation des fluctuations futures du marché.
- Elle est calculée en ajustant la volatilité dans la formule de Black & Scholes jusqu'à ce que le prix théorique égalise le prix observé.
- La formule ne peut pas être inversée analytiquement car elle contient des termes non linéaires (logarithmes, racines, et la fonction normale cumulative).
- On utilise des méthodes **numériques itératives**, comme celle de **Newton-Raphson**, pour approcher la solution.
- Cette méthode est essentielle pour adapter les modèles théoriques aux **prix réels de marché** et prendre en compte des anticipations complexes sur la volatilité future.