Level 1
Pricing and risk-management des options
Cours 1
Exercices

Jean-François Berger-Lefébure

December 2024

Contents

1 Exercice 1: Prix forward (sans/avec dividende)

Exercice 1

Calculer le prix forward à maturité 6 mois d'une action valant aujourd'hui 22€, et ne distribuant pas de dividendes pendant les 6 prochains mois. Le taux d'intérêt zéro-coupon 6 mois (convention continue) est 1.25%.

Comment est modifiée la valeur du forward si l'action verse un dividende de 2 euros dans 3 mois. Le taux zéro-coupon 3 mois (convention continue) est 0.90%.

1.1 Sans dividende

- **Hypothèse**: Pas de dividendes.
- **Formule de base**:
$$F_0 = S_0 e^{r(T)T}$$
- **Explication des termes**:
  - F_0: Prix forward à la date T.
  - S_0: Prix spot (actuel) de l'action, ici 22€.
  - $r(T)$: Taux d'intérêt zéro-coupon sur 6 mois (1,25%).
  - T: Durée jusqu'à l'échéance en années. Ici, $T = 0,5$.
  - $e^{r(T)T}$: Facteur d'actualisation exponentielle pour calculer la valeur future. Cela signifie qu'on capitalise les intérêts de manière continue sur une période T.
- **Calcul**:
$$F_0 = 22 \cdot e^{0,0125 \cdot 0,5} = 22,138$$

1.2 Avec dividende

1.2.1 Méthode 1: Directe

On prend le prix actuel de l'action (S_0) et on:

- **Projette sa valeur future** à T en utilisant le **taux sans risque actuel** ($r(T)$).
- **Soustrait la valeur actualisée du dividende**, car ce dernier sera payé avant l'échéance et réduit la valeur future de l'action.
- **Actualise** ce dividende pour calculer sa valeur d'aujourd'hui.

Logique:

- On raisonne directement sur des **formules d'actualisation** basées sur les taux d'intérêts spot et forward.
- On ajuste le prix forward en utilisant les **taux forward** pour réinvestir les flux intermédiaires.
- Pas besoin de visualiser un portefeuille ou d'équilibrer des flux réels ; on utilise uniquement des formules mathématiques.

—

1.2.2 Formules générales utilisées

1. **Actualisation de l'action au taux sans risque:**

$$S_0 e^{r(T)T}$$

Représente la valeur future de l'action après une croissance au taux sans risque $r(T)$.

2. **Actualisation du dividende à sa valeur présente:**

$$D_{act} = De^{-r(t)t}$$

Ramène le dividende à sa valeur d'aujourd'hui.

3. **Réinvestissement du dividende au taux forward:**

$$D_{fut} = D_{act} \cdot e^{r_{fwd}(T-t)}$$

Permet d'évaluer la valeur future du dividende réinvesti jusqu'à l'échéance T.

4. **Taux forward:**

$$r_{fwd} = \frac{r(T)T - r(t)t}{T - t}$$

Sert à calculer le rendement pour la période $[t, T]$.

5. **Prix forward ajusté:**

$$F_0 = S_0 e^{r(T)T} - De^{-r(t)t} e^{r_{fwd}(T-t)}$$

Intègre la valeur actualisée et réinvestie du dividende dans la formule du prix forward.

—

1.2.3 Démonstration

Données:

- Prix actuel: $S_0 = 22$.
- Dividende: $D = 2$ versé dans 3 mois ($t = 0,25$).
- Échéance: 6 mois ($T = 0,5$).
- Taux sans risque: $r(T) = 1,25\%$, $r(t) = 0,9\%$.

Étape 1: Valeur future de l'action sans dividende

$$S_0 e^{r(T)T} = 22 \cdot e^{0,0125 \cdot 0,5}$$

$$S_0 e^{r(T)T} = 22 \cdot e^{0,00625} \approx 22 \cdot 1,0063 \approx 22,138$$

Étape 2: Actualisation du dividende

$$D_{act} = 2 \cdot e^{-0,009 \cdot 0,25}$$

$$D_{act} = 2 \cdot e^{-0,00225} \approx 2 \cdot 0,9978 \approx 1,9956$$

Étape 3: Réinvestissement du dividende au taux forward Calculons d'abord le taux forward:

$$r_{fwd} = \frac{0,0125 \cdot 0,5 - 0,009 \cdot 0,25}{0,5 - 0,25}$$

$$r_{fwd} = \frac{0,00625 - 0,00225}{0,25} = \frac{0,004}{0,25} = 0,016$$

Valeur future du dividende:

$$D_{fut} = 1,9956 \cdot e^{0,016 \cdot 0,25}$$

$$D_{fut} = 1,9956 \cdot e^{0,004} \approx 1,9956 \cdot 1,004 \approx 2,0036$$

Étape 4: Prix forward ajusté

$$F_0 = 22,138 - 2,0036$$

$$F_0 \approx 20,134$$

—

1.2.4 Méthode 2: Par réplication des flux (portefeuille)

Cette approche alternative montre comment calculer la valeur forward en intégrant directement l'effet du dividende en utilisant des flux actualisés et des emprunts. Le but est de démontrer que la valeur forward ajustée peut être obtenue en équilibrant les flux d'emprunts et d'investissements tout en prenant en compte l'actualisation.

1.2.5 Description de la méthode étape par étape

1. Position initiale à $t = 0$

- **Achat de l'actif sous-jacent S_0**: On achète l'actif aujourd'hui pour répliquer le payoff futur.
- **Emprunt pour financer l'achat**:
  - Montant emprunté égal au prix forward sans dividende, ajusté avec les intérêts continus:
    $$Xe^{-r(T)T}$$
    où X représente le prix à payer à l'échéance.
  - Emprunt supplémentaire pour couvrir la valeur actualisée du dividende:
    $$De^{-r(t)t}$$
    afin de neutraliser l'effet du dividende.

2. Flux à t (date du dividende)

- L'actif sous-jacent verse un dividende D.
- Ce dividende est utilisé pour rembourser l'emprunt de $De^{-r(t)t}$ afin de conserver un flux net nul.

3. Flux à l'échéance T

- L'actif sous-jacent vaut S_T.
- Le montant dû sur l'emprunt est:

$$X = F_0 = S_0 e^{r(T)T} - De^{-r(t)t} \cdot \frac{e^{r(T)T}}{e^{r_{fwd}(T-t)}}$$

- Ce calcul inclut l'actualisation continue pour le dividende et ajuste sa valeur avec le taux forward r_{fwd}.

Formule finale

En utilisant les flux actualisés, la valeur forward corrigée est donnée par:

$$F_0 = S_0 e^{r(T)T} - De^{-r(t)t} \cdot e^{r(T)T - r_{fwd}(T-t)}$$

Interprétation financière

- **Neutralisation du dividende**: Le dividende reçu est immédiatement réinvesti au taux forward pour compenser sa perte future.
- **Cohérence temporelle**: Cette méthode assure que tous les flux sont actualisés correctement, en respectant les conventions d'intérêts continus et d'ajustement des taux.
- **Équilibre des flux**: Les emprunts sont calculés pour neutraliser à la fois le coût d'achat de l'actif et la perte due au dividende.

1.2.6 Démonstration

Données:

- Prix actuel: $S_0 = 22$.
- Dividende: $D = 2$ versé dans 3 mois ($t = 0,25$).
- Échéance: 6 mois ($T = 0,5$).
- Taux sans risque: $r(T) = 1,25\%$, $r(t) = 0,9\%$.

Étape 1: Achat de l'actif sous-jacent à $t = 0$ On achète l'actif au prix spot actuel:

$$S_0 = 22$$

Étape 2: Emprunt pour financer l'achat de l'actif On emprunte un montant égal à la valeur future actualisée au taux sans risque:

$$Xe^{-r(T)T}$$

où X est la valeur future nécessaire pour compenser l'achat.

Calcul:

$$X = 22,138 \quad \text{(valeur future de l'actif sans dividende)}$$

$$Xe^{-r(T)T} = 22,138 \cdot e^{-0,0125 \cdot 0,5}$$

$$Xe^{-r(T)T} = 22,138 \cdot e^{-0,00625} \approx 22,138 \cdot 0,9938 \approx 21,997$$

Étape 3: Emprunt supplémentaire pour couvrir le dividende On emprunte la valeur actualisée du dividende au taux sans risque à t:

$$De^{-r(t)t}$$

Calcul:

$$2 \cdot e^{-0,009 \cdot 0,25}$$

$$2 \cdot e^{-0,00225} \approx 2 \cdot 0,9978 \approx 1,9956$$

Étape 4: Réinvestissement du dividende jusqu'à T Le dividende actualisé est réinvesti au taux forward:

$$D_{fut} = 1,9956 \cdot e^{0,016 \cdot 0,25}$$

Calcul:

$$D_{fut} = 1,9956 \cdot e^{0,004} \approx 1,9956 \cdot 1,004 \approx 2,0036$$

Étape 5: Prix forward ajusté La valeur finale forward est donnée par la différence entre l'actif actualisé et la valeur future du dividende:

$$F_0 = S_0 e^{r(T)T} - D_{fut}$$

Calcul:

$$F_0 = 22,138 - 2,0036$$

$$F_0 \approx 20,134$$

—

2 Exercice 2: Prix des options dans un straddle

Exercice 2
Un straddle à la monnaie forward cote 16€ sur le marché. Quel est le prix du put à la monnaie forward ? Et celui du call ?
NB : un straddle est une stratégie optionnelle consistant à acheter simultanément un call et un put de mêmes maturités et de mêmes strikes sur un actif sous-jacent.

Cet exercice vise à comprendre la relation entre les prix d'un call et d'un put dans une stratégie appelée **straddle**. Le straddle consiste à acheter simultanément un call et un put ayant le même strike et la même maturité.
L'objectif est de montrer que, lorsque le straddle est à la monnaie forward (ATM), les prix du call et du put sont identiques.

2.1 Straddle et son objectif

Un **straddle** est une stratégie combinant:

- L'achat d'une **option call** avec un prix d'exercice K.
- L'achat d'une **option put** avec le même prix d'exercice K.

Les deux options ont la même maturité (T).

Objectif principal: Le straddle permet de profiter d'un mouvement important du prix de l'actif sous-jacent, peu importe sa direction (hausse ou baisse) à terme.

Coût initial: Le prix d'un straddle est la somme des primes des deux options:

$$P_{straddle} = C(K,T) + P(K,T)$$

où:

- $C(K,T)$: Prix de l'option call.
- $P(K,T)$: Prix de l'option put.

Perte maximale:

$$Perte_{max} = P_{straddle}$$

si le prix du sous-jacent (S_T) est égal au prix d'exercice (K) à l'échéance.

Profits:

- Si le prix monte fortement:

$$Profit = S_T - K - P_{straddle}$$

- Si le prix chute fortement:

$$Profit = K - S_T - P_{straddle}$$

—

2.2 Objectif du straddle sur la volatilité avec couverture delta

Erreur classique: Le straddle **n'est pas un pari direct sur la volatilité globale** pendant toute la durée de vie de l'option.

- **Pourquoi ?** La volatilité peut être forte au cours de la vie du straddle (fluctuations importantes), mais si le prix revient à son niveau initial à **l'échéance**, les deux options expirent **sans valeur**.
- **Conséquence:** Un straddle classique parie sur la **dispersion finale** du prix à l'échéance, pas sur la volatilité en continu.

Couvrir son delta pour parier sur la volatilité réelle: Pour transformer un straddle en un **pari sur la volatilité globale**, il faut:

- **Neutraliser le delta régulièrement.**
  - Le **delta** mesure la sensibilité du prix d'une option aux variations du prix du sous-jacent.
  - La somme des deltas d'un call et d'un put dans un straddle **n'est pas toujours neutre** car elle évolue avec les mouvements du sous-jacent.
  - En ajustant continuellement la position (acheter ou vendre l'actif sous-jacent pour compenser les mouvements), on maintient un **delta neutre**.
- **Profiter des variations (gamma trading).**
  - En couvrant son delta, on exploite la **convexité** des options (**gamma** élevé).
  - Chaque ajustement de la couverture génère des gains lorsque la volatilité est forte, peu importe la direction des mouvements.

Exemple: Supposons un straddle avec un strike à $K = 100$.

- **Jour 1:** Le prix monte de 100 à 105. On vend 5 unités de l'actif pour neutraliser le delta.
- **Jour 2:** Le prix redescend à 98. On rachète 7 unités pour compenser la baisse.

Résultat:

- Chaque ajustement génère un **profit sur les fluctuations**, même si le prix revient à **100 à l'échéance**.
- **Stratégie:** Exploiter la volatilité intrajournalière et non uniquement la valeur finale.

—

Résumé de la stratégie avec couverture delta

- **Objectif sans couverture delta:** Parier sur un déplacement important du prix à l'échéance.
- **Objectif avec couverture delta:** Parier sur une **volatilité élevée tout au long de la durée de vie** en exploitant les variations intermédiaires grâce à des ajustements continus.

- **Outil clé: Gamma trading.** On utilise la sensibilité des options (**gamma**) pour maximiser les gains sur les fluctuations.
- **Avantage:** Gagner de l'argent même si le prix revient à sa valeur initiale, à condition que la volatilité soit élevée.

—

2.3 Démonstration

Données de l'exercice

- Le straddle (combinaison d'un call et d'un put) cote:

$$Str_0 = C_0 + P_0 = 16$$

- Le straddle est à la monnaie forward ($K = F_0$), donc $C_0 - P_0 = 0$.

—

1. Relation entre le call et le put: La formule de parité call-put est donnée par:

$$C_0 - P_0 = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}$$

Le straddle est à la monnaie forward ($K = F_0$), ce qui implique: $C_0 - P_0 = 0$

2. Prix du call et du put:

- Puisque $C_0 - P_0 = 0$, alors:

$$C_0 = P_0$$

- Comme la somme des deux primes vaut 16€:

$$C_0 + P_0 = 16$$

- En remplaçant:

$$2C_0 = 16 \quad \Rightarrow \quad C_0 = 8$$

$$P_0 = 8$$

—

Résultat final

- Prix du call:

$$C_0 = 8$$

- Prix du put:

$$P_0 = 8$$

—

Ce qu'il faut retenir

- **Straddle classique:** Parie sur la volatilité terminale, pas sur la volatilité globale.
- **Erreur fréquente:** Une forte volatilité pendant la vie du straddle n'est pas suffisante si le prix final est proche du prix initial.
- **Straddle avec couverture delta:**
  - Parie sur la **volatilité continue** en ajustant la position pour rester delta neutre.
  - Profite des mouvements de prix intermédiaires grâce au **gamma trading**.
- **Formules clés:**
  - Coût initial:
  $$P_{straddle} = C(K,T) + P(K,T)$$
  - Profits sans couverture delta:
  $$Profit = \max(S_T - K, K - S_T) - P_{straddle}$$
- **Notions clés:**
  - Identifier un straddle dans une stratégie d'options.
  - Expliquer pourquoi il parie sur la **dispersion finale** et non la volatilité intermédiaire.
  - Comprendre l'ajustement delta pour exploiter la volatilité globale.

—

3 Exercice 3: Convexité du Prix d'un Call par Absence d'Arbitrage

Exercice 3

Montrer par AOA que le prix d'un call est une fonction convexe de son strike.

NB : pour démontrer ce résultat il suffit de montrer que pour tout strikes $K_1 < K_2$ on a :

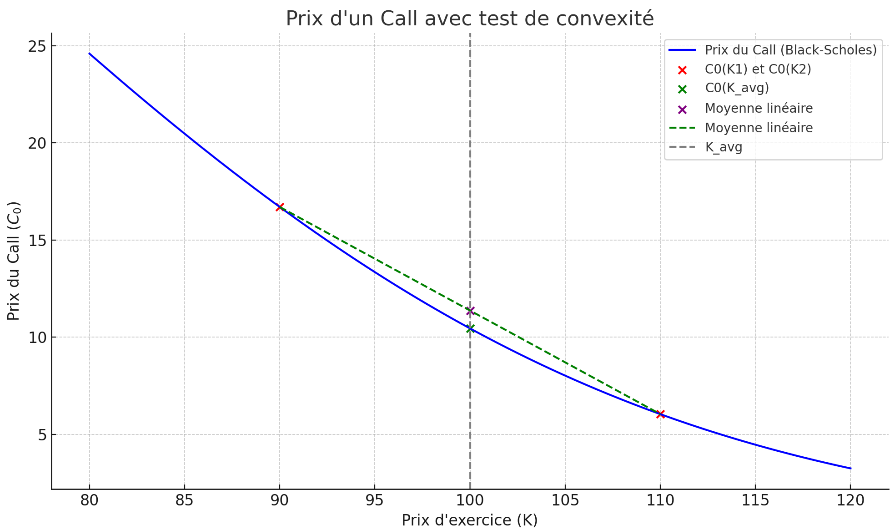
$C_0((K_1+K_2) / 2) \leq (C_0(K_1) + C_0(K_2)) / 2$

3.1 Introduction

On souhaite vérifier si le prix du call au strike moyen K_{avg} donné par notre modèle:

- Respecte la convexité (ne sous-évalue pas ou ne surévalue pas).
- N'introduit pas d'arbitrage sans risque (AOA), c'est-à-dire un profit gratuit qui violerait les règles d'un marché efficient.

En gros: Est-ce que ce modèle est fiable pour prédire des prix réalistes ?



Formule donnée:

$$C_0\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) \leq \frac{C_0(K_1)+C_0(K_2)}{2}$$

1. Analyse des termes:

Terme de gauche: $C_0\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right)$

- **Prix du call** avec un **prix d'exercice moyen** entre K_1 et K_2.
- Cela représente **le coût d'une seule option** au prix moyen (K_{avg}).

Terme de droite: $\frac{C_0(K_1)+C_0(K_2)}{2}$

- **Moyenne arithmétique** des prix des options avec des strikes K_1 et K_2.
- Suppose qu'on achète **2 options distinctes** et qu'on calcule leur **coût moyen**.

—

2. Objectif de la formule:

- Montrer que les prix d'options sont **convexes** par rapport au prix d'exercice (K).
- Prouver qu'acheter 2 calls distincts est forcément **plus cher** que d'acheter **un seul call au strike moyen**.

—

4. Exemple illustratif:

- $C_0(90) = 8$ et $C_0(110) = 4$.
- Prix au strike moyen ($K_{avg} = 100$):

$$C_0(100) = 5$$

- Comparaison:

$$5 \leq \frac{8+4}{2} = 6$$

- **Vérification:** L'inégalité est respectée.

—

3.2 Pourquoi il y a-t'il de la conxevité ?

Origine de la Convexité

La convexité provient du fait qu'une option ATM capture:

- Plus de potentiel de gain si le prix fluctue autour du strike.
- Plus de risque dynamique (gamma), donc son prix est ajusté à la hausse pour compenser ces variations potentielles.

Sans convexité

Si j'achète 2 calls (1 à $K_1 = 90$ et 1 à $K_2 = 110$) pour 6€, je devrais pouvoir répliquer le call au strike moyen $K_{\text{avg}} = 100$ et obtenir le même payoff.

Dans ce cas:

- On regarde uniquement le payoff final à maturité (ce qui semble identique).
- On suppose que les prix initiaux doivent refléter exactement ce payoff.

Problème: Ce raisonnement ignore un facteur crucial → Le comportement avant l'échéance (volatilité et gamma).

—

3.3 Pourquoi le Payoff Final ne Suffit Pas ?

L'option au strike moyen K_{avg} n'est pas équivalente à une combinaison linéaire de 2 calls pour une raison clé: le gamma et la volatilité pendant la vie du produit.

Exemple concret:

- **Spot initial**: 100.
- **Scénario 1 - Petit mouvement**:
  - Le spot monte à 105 avant de redescendre à 100 à maturité.
- **Apparence finale**:
  - Les 3 options expirent à 0 (aucun gain).
  - On dirait qu'elles ont le même payoff.
- **Mais pendant la vie du contrat**:
  - L'option à $K_{\text{avg}} = 100$ a eu un delta qui a beaucoup varié (grâce à son gamma élevé).
  - Tu aurais dû rebalancer ta position pour rester couvert.
  - Les coûts d'ajustement créent une prime temps supplémentaire pour le call au strike 100.
- **Résultat**: Le call au strike 100 doit être moins cher initialement (5€ au lieu de 6€) pour compenser ce risque de couverture.

—

3.4 Pourquoi ne pas utiliser la moyenne linéaire ?

Le vrai problème avec la combinaison linéaire

Si on calcule la moyenne:

$$\frac{C_0(K_1) + C_0(K_2)}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$$

Problème: On surestime la valeur de l'option au strike moyen $C_0(K_{\text{avg}}) = 5$.

Le modèle linéaire suppose que les deltas et gammas sont similaires $\rightarrow$ Faux !

En réalité, l'option au strike moyen est plus difficile à gérer (gamma élevé), donc elle coûte moins cher pour éviter des pertes liées à cette dynamique.

—

Si on utilise la moyenne linéaire $C_0(100) = 6$€:

Hypothèse erronée: Les 2 calls combinés (K_1 et K_2) peuvent répliquer parfaitement le comportement d'un call au strike moyen K_{avg}.

Pourquoi c'est faux ?

- **Comportement avant maturité**:
  - Le call au strike 100 est plus sensible aux variations proches du spot car son gamma est plus élevé.
  - Les 2 autres calls sont moins sensibles car leurs strikes sont plus éloignés.

- **Exposition à la volatilité**:
  - Le call au strike 100 profite mieux de la volatilité intrajournalière (variations rapides).
  - La combinaison des 2 autres calls ne capture pas cette dynamique.
- **Coût d'ajustement (hedging)**:
  - Le call au strike 100 coûte moins cher car il impose des coûts supplémentaires liés au gamma-trading pour rester couvert.

Conclusion: La moyenne linéaire surestime la valeur réelle de l'option au strike moyen car elle ignore ces effets dynamiques.

3.4.1 Comparaison des Payoffs vs Comportement Dynamique

- **À maturité (payoff final)**:
  - Tous les calls expirent à 0 ou gagnent proportionnellement → Pas de différence visible.
- **Avant maturité (comportement dynamique)**:
  - Le call au strike 100 réagit beaucoup plus vite.
  - Nécessite un hedging actif → Coût supplémentaire → Prix initial plus bas (5€ au lieu de 6€).

3.4.2 En Résumé

Le payoff final n'explique pas tout.

- Ce n'est pas parce qu'ils ont le même payoff final qu'ils sont équivalents en valeur initiale.
- Le call au strike 100 est plus sensible (gamma élevé).
- Il réagit plus vite aux variations avant l'échéance → Plus coûteux à gérer → Prix initial plus bas pour compenser ce risque.
- Moyenne linéaire ignore la dynamique.
- Un modèle linéaire suppose que les prix sont statiques, mais les options sont dynamiques (volatilité, gamma).
- La convexité corrige ce problème.
- En ajustant les prix avec une courbe convexe, on évite les erreurs de pricing et les pertes cachées liées aux variations avant maturité.

—

3.5 Convexité et Sensibilités des Options

3.5.1 Différents cas

Options ATM (À la Monnaie)

- Un gamma élevé: Elle réagit très vite aux variations du sous-jacent S_T.
- Un delta moyen (≈ 0.5) mais qui peut changer rapidement.

Options OTM (Out of The Money) et ITM (In The Money)

- Des gammas faibles: Elles réagissent moins vite car leur delta est plus stable.
- Des deltas extrêmes:
  - OTM: Delta proche de 0, insensible.
  - ITM: Delta proche de 1, presque comme une action.

—

3.6 Pourquoi cette différence crée-t-elle une convexité ?

3.6.1 Cas de l'option ATM

- Elle est plus sensible aux mouvements du sous-jacent S_T.
- Son prix intègre une prime de risque plus importante liée à cette sensibilité accrue.

3.6.2 Cas des options ITM et OTM

- Elles sont moins sensibles car leur delta est presque fixe (stable).
- Leur prix est plus simple à évaluer car elles réagissent moins fortement.

En résumé:

Le prix d'un call au strike moyen K_{avg} ne peut pas être une simple moyenne des prix des calls ITM et OTM, car il bénéficie d'une réactivité accrue (gamma élevé) que la combinaison linéaire des deux autres options ne capture pas.

3.6.3 Exemple: Delta et Gamma

- $S_0 = 100$
- Strikes:
  - $K_1 = 90$ (ITM)
  - $K_2 = 110$ (OTM)
  - $K_{\text{avg}} = 100$ (ATM)
- Prix des options:
  - $C_0(K_1) = 8$
  - $C_0(K_2) = 4$
  - $C_0(K_{\text{avg}}) = 5$

Strike (K)	Delta (Δ)	Gamma (Γ)	Prix (C_0)
$K_1 = 90$	0.9	0.01	8€
$K_{\text{avg}} = 100$	0.5	0.2	5€
$K_2 = 110$	0.1	0.01	4€

Table 1: Sensibilités des Options

Analyse des Sensibilités

Observations

- Delta ATM = 0.5: Probabilité équilibrée.
- Gamma ATM = 0.2: Très sensible → Nécessite des ajustements fréquents.
- Gamma ITM et OTM = 0.01: Peu de variations → Stabilité.

—

3.7 Facteurs qui influencent le gamma et le delta des options

3.7.1 Facteurs qui augmentent le gamma:

Gamma = Réactivité du delta Le **gamma** mesure **comment le delta change** pour **1€ de variation** du sous-jacent.

- **Proximité du prix spot au strike:** Le gamma est **plus élevé** lorsque le sous-jacent est **proche du strike** (option **à la monnaie**).
  - **Pourquoi ?** Si le prix spot est proche du strike, le delta passe **rapidement** de 0 à 1 (ou inversement). Cette transition rapide crée un **gamma élevé**.
- **Volatilité faible:** Plus la **volatilité est faible**, plus le gamma est **élevé**.
  - **Pourquoi ?** Avec une faible volatilité, le prix reste **proche du strike** → Le gamma reste concentré autour du strike.
- **Temps proche de l'échéance:** Le gamma augmente lorsque l'option approche de la **maturité**.
  - **Pourquoi ?** Proche de l'échéance, les petites variations du sous-jacent ont un **impact énorme** sur la probabilité d'exercice.

Résumé des effets sur le gamma:

Facteur	Effet sur le Gamma
Proximité du strike au spot	Gamma élevé près du strike.
Volatilité faible	Gamma élevé avec faible volatilité.
Temps proche de l'échéance	Gamma augmente à l'approche de T.

3.7.2 Facteurs qui augmentent le delta:

Delta = Sensibilité au sous-jacent Le **delta** mesure **combien le prix d'une option varie** pour **1€ de mouvement** du sous-jacent.

Facteurs qui augmentent le delta:

- **Proximité de l'option dans la monnaie:**
  - Pour un **call:** Si le sous-jacent est **bien au-dessus du strike**, le delta se rapproche de **1**.
  - Pour un **put:** Si le sous-jacent est **bien en dessous du strike**, le delta se rapproche de **-1**.
- **Volatilité faible:** Avec une **volatilité faible**, le delta est **plus stable** et tend à s'approcher de **0 ou 1**.
- **Temps restant élevé:** Au début, il y a **plus d'incertitude** sur l'issue, mais à l'approche de l'échéance, l'issue devient **quasi certaine**.

Résumé des effets sur le delta:

Facteur	**Effet sur le Delta**
Proximité au strike	Delta augmente près de la monnaie.
Volatilité faible	Delta devient plus extrême.
Temps restant élevé	Delta plus neutre au début.

—

3.7.3 Comparaison Gamma vs Delta:

- **Delta:** Niveau de sensibilité directionnelle → Mesure l'effet immédiat d'un mouvement du sous-jacent.
- **Gamma:** Réactivité du delta → Mesure la vitesse d'évolution de la sensibilité (delta).

Cas pratiques:

- **Exemple 1: Option proche de la monnaie (K = 100)**
  - **Gamma élevé:** Petits mouvements impactent fortement le delta.
  - **Delta = 0.5:** Probabilité équilibrée d'exercice.
- **Exemple 2: Option loin dans la monnaie (K = 80)**
  - **Gamma faible:** Delta est déjà proche de 1, peu de variation.
  - **Delta = 1:** Probabilité d'exercice quasi certaine.

Conclusion:

- **Gamma élevé:** Plus proche du strike, volatilité faible et échéance courte.
- **Delta élevé:** In-the-money, faible volatilité, échéance courte.
- **Pourquoi c'est important ?** Ces facteurs influencent les prix initiaux car ils mesurent les **risques dynamiques** avant l'échéance.

—

4 Exercice 4: Approximations du prix d'une option "Deep in the money"

L'objectif de cet exercice est d'évaluer approximativement le prix d'un call très **dans la monnaie** (Deep In The Money) sans utiliser directement la formule de Black-Scholes. Le raisonnement se base sur le fait que l'option a perdu son **optionalité**, c'est-à-dire qu'elle se comporte presque comme l'actif sous-jacent, avec une probabilité proche de 1 d'être exercée.

4.1 Démonstration

Hypothèse principale: Lorsque l'option est **très dans la monnaie**, son payoff à l'échéance devient quasi-certain. En d'autres termes:

$$(S_T - K)^+ \approx (S_T - K)$$

Cela signifie que la probabilité de non-exercice est pratiquement nulle. Ainsi, la valeur actuelle du call devient:

$$C_0 \approx S_0 - Ke^{-rT}$$

Application

- **Données :**
  - Maturité : $T = 0,25$ an (3 mois).
  - Strike : $K = 100$.
  - Prix spot : $S_0 = 188$.
  - Volatilité : $\sigma = 17\%$.
  - Taux sans risque : $r = 3\%$.
- **Approche par approximation (sans formule BS) :**

$$C_0 \approx S_0 - Ke^{-rT}$$

- **Calcul détaillé :**

$$C_0 \approx 188 - 100 \cdot e^{-0,03 \cdot 0,25}$$

$$C_0 \approx 188 - 100 \cdot e^{-0,0075}$$

$$C_0 \approx 188 - 100 \cdot 0,9925$$

$$C_0 \approx 188 - 99,25 = 88,75 \text{ €}$$

4.2 Analyse et interprétation

Dans cet exemple, l'option se comporte presque comme une **action synthétique**.

- L'évaluation repose sur la **parité call-put**, mais avec un put presque nul car il est très en dehors de la monnaie.
- Remarque importante: La formule

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

  montre que lorsque le put a une valeur proche de 0, la valeur du call s'approche directement de la valeur intrinsèque actualisée.
- Le raisonnement revient à évaluer l'écart entre le prix spot et la valeur actualisée du strike.

Conclusion

- Lorsque l'option est **profondément dans la monnaie**, elle se comporte comme l'actif sous-jacent moins une dette actualisée.
- L'optionalité disparaît presque complètement, ce qui simplifie le calcul.
- En pratique, ces approximations sont particulièrement utiles pour des options **deep in the money** avec une faible volatilité résiduelle.
- Le résultat obtenu correspond bien au raisonnement par parité call-put simplifié.

4.3 Ce qu'il faut retenir

- Une option **deep in the money** peut être approximée par:

$$C_0 \approx S_0 - Ke^{-rT}$$

- Ce résultat est valable lorsque la probabilité d'exercice est proche de 1.
- La parité call-put simplifie encore le raisonnement pour vérifier l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).
- Si un put est très loin de la monnaie, sa valeur est presque nulle, rendant cette approximation encore plus robuste.