

Niveau 2 - Méthodes Numériques
Cours 5
Simulation de processus stochastiques
Schéma d'Euler

Jean-François Berger-Lefebvre

17 Octobre 2024

Contents

1	Introduction	3
2	Formule de transition : quand et comment l'utiliser ?	4
2.1	Loi de transition : définition et usage	5
3	Passage à la formule discrète et à la loi conditionnelle	6
3.1	Formule discrète du processus avec le schéma d'Euler	6
3.2	Loi conditionnelle de $X_{t_{j+1}}$ sachant \mathcal{F}_{t_j}	6
3.3	Explication intuitive	7
4	Exercice: Estimation du prix d'un Call en volatilité locale	7
4.1	Enoncé	7
4.2	Proposez une méthode de Monte Carlo simple pour estimer $C(T)$ sans méthode de réduction de variance	8
4.2.1	Comparaison entre le code et la formule mathématique	8
4.3	Proposez une méthode de réduction de variance par variable antithétique	9
4.3.1	Simulation des trajectoires normales et antithétiques	9
4.4	Proposez une méthode de réduction de variance par variable de contrôle s'appuyant sur le modèle de Black-Scholes	10
4.4.1	Formule générale pour le mouvement brownien géométrique	10
5	Questions	11

1 Introduction

Le schéma d'Euler est utilisé lorsque nous ne connaissons **pas la loi de transition exacte** du processus stochastique. Cette situation rend impossible une simulation exacte du processus. Ainsi, on utilise une approximation numérique en supposant que **localement, le processus est continu et varie peu**. Cela simplifie le calcul des intégrales dans l'équation.

Équation exacte du processus

L'équation exacte décrivant le processus X_t est donnée par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

où :

- $\mu(s, X_s)$: terme de drift, représentant la tendance moyenne d'évolution du processus.
- $\sigma(s, X_s)$: terme de volatilité, décrivant l'effet aléatoire dépendant du mouvement brownien.
- W_s : mouvement brownien standard, modélisant l'aléa stochastique.

Approximation par le schéma d'Euler

Le schéma d'Euler approxime l'évolution du processus sur un pas de temps discret $[t_j, t_{j+1}]$ par la formule suivante :

$$X_{t_{j+1}}^m = X_{t_j}^m + \mu(t_j, X_{t_j}^m)(t_{j+1} - t_j) + \sigma(t_j, X_{t_j}^m)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

où :

- $t_{j+1} - t_j = \Delta t$: pas de temps (fixe ou variable).
- $W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$: accroissement du mouvement brownien sur $[t_j, t_{j+1}]$.
- $X_{t_j}^m$: valeur approximative du processus à l'instant t_j .

Pourquoi cette approximation est valide

Le professeur souligne les hypothèses nécessaires pour appliquer le schéma d'Euler :

1. **Continuité locale de μ et σ** : Ces fonctions doivent être continues ou Lipschitziennes, assurant qu'elles ne varient pas trop sur de petits intervalles de temps.
2. **Approximation locale constante** : Entre t_j et t_{j+1} , on suppose que $\mu(t, X_t) \approx \mu(t_j, X_{t_j})$ et $\sigma(t, X_t) \approx \sigma(t_j, X_{t_j})$. Cela simplifie les intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mu(s, X_s) ds &\approx \mu(t_j, X_{t_j}) \Delta t, \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(s, X_s) dW_s &\approx \sigma(t_j, X_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}). \end{aligned}$$

Différence entre schéma d'Euler et formule d'Itô

La **formule d'Itô** donne une description exacte de l'évolution du processus, tandis que le schéma d'Euler fournit une approximation discrète. Bien que les deux expressions semblent similaires, la différence réside dans leur méthode :

- **Formule d'Itô** : Exacte, nécessite la connaissance de la loi de transition du processus.
- **Schéma d'Euler** : Approximative, repose sur des hypothèses de continuité locale et sur la discrétisation du temps.

Applications et limites

Le schéma d'Euler est particulièrement utile pour simuler des processus stochastiques dans les cas où la loi de transition est inconnue, mais son **erreur dépend du pas de temps Δt** . Plus Δt est petit, plus l'approximation est proche de la réalité.

2 Formule de transition : quand et comment l'utiliser ?

La formule de transition est utilisée pour **simuler un processus stochastique de manière exacte**, c'est-à-dire lorsque nous connaissons la loi de probabilité qui décrit l'évolution du processus entre deux instants t et $t + \Delta t$. Voici une distinction précise pour des processus comme ceux de **Vasicek** ou une diffusion stochastique basée sur **Itô**.

Quand utilise-t-on la formule de transition ?

1. Simulations exactes (avec la loi de transition connue) :

- **But** : Si la loi de transition du processus est explicitement connue (par exemple, une loi normale pour un processus linéaire comme Vasicek), alors nous pouvons directement utiliser cette information pour simuler $X_{t+\Delta t}$ sans passer par des approximations comme le schéma d'Euler.
- **Exemple avec Vasicek** :
Le processus de Vasicek est défini par :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t,$$

où a, b, σ sont des paramètres fixes. On sait que X_t suit une loi normale donnée par :

$$X_{t+\Delta t} \sim \mathcal{N}\left(X_t e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})\right).$$

Ici, la **loi de transition** est directement utilisée pour simuler $X_{t+\Delta t}$.

2. Quand a-t-on besoin de connaître cette loi ?

- Pour **simuler exactement** $X_{t+\Delta t}$, en particulier pour des processus linéaires comme Vasicek.
- Pour **valider une simulation** : Si vous utilisez une méthode approximative (par exemple, le schéma d'Euler), connaître la loi de transition permet de comparer les résultats et d'évaluer la précision.

Quand n'a-t-on pas besoin de la formule de transition ?

1. Simulations approximatives (quand la loi de transition est inconnue) :

- Si la loi de transition est inconnue ou trop complexe à calculer, on utilise des méthodes numériques comme le schéma d'Euler.
- **Exemple** : Avec un processus général décrit par la formule d'Itô généralisée, où μ et σ sont des fonctions complexes de t et X_t , il est impossible de dériver une loi de transition explicite. Dans ce cas, on applique :

$$X_{t+\Delta t}^m = X_t^m + \mu(t, X_t^m)\Delta t + \sigma(t, X_t^m)\Delta W,$$

avec $\Delta W \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

2. Processus non-markoviens :

- Si le processus dépend de toute l'histoire passée et non seulement de l'état actuel X_t , il n'existe pas de loi de transition simple.

Résumé pour Itô et Vasicek

- **Processus Vasicek** : La loi de transition est connue et utilisée pour une simulation exacte. Le processus est linéaire et admet une solution fermée.
- **Formule d'Itô généralisée** : On passe au schéma d'Euler si la loi de transition n'est pas explicite ou calculable.

Applications et limites

- La formule de transition est essentielle pour éviter les erreurs numériques dans les cas où elle est connue, comme pour Vasicek.
- Pour des modèles plus complexes ou non linéaires, elle est souvent impraticable, ce qui justifie l'utilisation de méthodes approximatives comme Euler.

2.1 Loi de transition : définition et usage

La **loi de transition** est la loi qui décrit comment un processus stochastique X_t évolue d'un instant t à un instant futur $t + \Delta t$. Elle donne explicitement la distribution de $X_{t+\Delta t}$ en fonction de X_t (et éventuellement d'autres paramètres).

Définition de la loi de transition

Pour un processus stochastique X_t , la loi de transition est définie comme la probabilité conditionnelle :

$$P(X_{t+\Delta t} \in A \mid X_t = x),$$

où A est un ensemble quelconque de l'espace des états du processus.

En d'autres termes, elle permet de générer la prochaine valeur $X_{t+\Delta t}$ à partir de l'état courant $X_t = x$. Cette loi est souvent donnée sous forme d'une distribution connue (par exemple, une loi normale pour des processus linéaires comme Vasicek).

Exemples concrets

1. Mouvement brownien standard :

Le mouvement brownien W_t a une loi de transition bien définie :

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t).$$

Cela signifie que l'accroissement entre deux instants est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 0 et de variance Δt .

2. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck (comme Vasicek) :

Le processus de Vasicek (un cas particulier d'Ornstein-Uhlenbeck) a une loi de transition donnée par une loi normale :

$$X_{t+\Delta t} \sim \mathcal{N}\left(X_t e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})\right).$$

Cela signifie que l'on peut simuler directement $X_{t+\Delta t}$ en tirant une valeur dans cette distribution.

Quand a-t-on besoin de la loi de transition ?

- **Simulation exacte** : Si la loi de transition est connue, on peut simuler directement $X_{t+\Delta t}$ sans utiliser de méthodes approximatives comme le schéma d'Euler.
- **Modélisation et calculs analytiques** : Connaître la loi de transition permet d'évaluer des quantités comme l'espérance ou la variance d'un processus à un instant futur.

Quand ne connaît-on pas la loi de transition ?

- Si $\mu(t, X_t)$ (drift) et $\sigma(t, X_t)$ (volatilité) sont des fonctions complexes ou non linéaires, il est difficile (voire impossible) d'exprimer une loi explicite pour $X_{t+\Delta t}$.
- Dans ce cas, on utilise des méthodes numériques comme le **schéma d'Euler**, qui approximera l'évolution du processus par des petits incrément basés sur μ , σ , et le mouvement brownien.

Résumé

- La loi de transition est bien la **distribution qui génère la prochaine valeur** $X_{t+\Delta t}$ à partir de X_t .
- Si cette loi est connue, on peut simuler directement le processus d'un pas de temps à l'autre.
- Si elle est inconnue ou trop complexe, on doit recourir à des approximations comme le schéma d'Euler.

Cela fait de la loi de transition un concept clé pour comprendre et simuler les processus stochastiques !

3 Passage à la formule discrète et à la loi conditionnelle

La transition d'un point t_j à un autre t_{j+1} se fait en approchant les deux termes de la formule d'Itô par des quantités discrètes, en supposant que μ et σ restent constants localement.

3.1 Formule discrète du processus avec le schéma d'Euler

Le drift : Le premier terme de la formule d'Itô, correspondant à l'évolution moyenne du processus, est :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mu(s, X_s) ds.$$

- Approximativement, on suppose que $\mu(s, X_s)$ reste constant sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$.
- Ce terme devient donc :

$$\mu(t_j, X_{t_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

où $(t_{j+1} - t_j)$ est la longueur de l'intervalle (appelée souvent Δt).

La diffusion (volatilité) : Le second terme de la formule d'Itô, lié aux variations stochastiques dues au mouvement brownien, est :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \sigma(s, X_s) dW_s.$$

- En supposant $\sigma(s, X_s)$ constant sur $[t_j, t_{j+1}]$, ce terme devient :

$$\sigma(t_j, X_{t_j}) \cdot (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}),$$

où $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ représente l'accroissement du mouvement brownien sur l'intervalle. Cet accroissement suit une loi normale :

$$W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \sim \mathcal{N}(0, t_{j+1} - t_j).$$

Combinaison des deux termes : En combinant ces deux approximations, on obtient la formule discrète suivante :

$$X_{t_{j+1}}^m = X_{t_j}^m + \mu(t_j, X_{t_j}^m) \cdot (t_{j+1} - t_j) + \sigma(t_j, X_{t_j}^m) \cdot (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

Cette formule est facile à simuler, car chaque terme est calculable pas à pas.

3.2 Loi conditionnelle de $X_{t_{j+1}}$ sachant \mathcal{F}_{t_j}

L'expression précédente permet aussi de déduire directement la loi conditionnelle de $X_{t_{j+1}}$, puisque :

- Le terme $\mu(t_j, X_{t_j}^m) \cdot (t_{j+1} - t_j)$ est une constante.
- Le terme $\sigma(t_j, X_{t_j}^m) \cdot (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ est une variable normale.

Espérance conditionnelle : L'espérance conditionnelle de $X_{t_{j+1}}$, sachant \mathcal{F}_{t_j} , est simplement donnée par la contribution déterministe :

$$\mathbb{E}[X_{t_{j+1}}^m | \mathcal{F}_{t_j}] = X_{t_j}^m + \mu(t_j, X_{t_j}^m) \cdot (t_{j+1} - t_j).$$

Variance conditionnelle : La variance conditionnelle provient uniquement du terme aléatoire lié au mouvement brownien :

$$\text{Var}[X_{t_{j+1}}^m | \mathcal{F}_{t_j}] = \sigma(t_j, X_{t_j}^m)^2 \cdot (t_{j+1} - t_j).$$

Distribution conditionnelle : Ainsi, $X_{t_{j+1}}^m$ suit une loi normale conditionnelle :

$$X_{t_{j+1}}^m | \mathcal{F}_{t_j} \sim \mathcal{N}\left(X_{t_j}^m + \mu(t_j, X_{t_j}^m) \cdot (t_{j+1} - t_j), \sigma(t_j, X_{t_j}^m)^2 \cdot (t_{j+1} - t_j)\right).$$

3.3 Explication intuitive

- **Le drift est constant sur l'intervalle :**

On approime $\mu(s, X_s)$ par sa valeur au début de l'intervalle (t_j) , ce qui simplifie le calcul en une multiplication par la taille de l'intervalle $(t_{j+1} - t_j)$.

- **La volatilité est constante sur l'intervalle :**

L'intégrale stochastique dépend de l'accroissement $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$, qui est une variable normale $\mathcal{N}(0, t_{j+1} - t_j)$. On multiplie cet accroissement par $\sigma(t_j, X_{t_j})$.

- **Loi conditionnelle normale :**

En combinant le terme déterministe (drift) et le terme aléatoire (diffusion), on obtient une somme qui suit une loi normale.

- **Algorithme itératif :**

Le processus est simulé pas à pas. À chaque étape, on utilise la valeur précédente $X_{t_j}^m$, et on calcule $X_{t_{j+1}}^m$ avec la formule discrète.

Conclusion

Le passage à ces formules repose sur deux hypothèses clés du schéma d'Euler : la constance locale des coefficients μ et σ , et l'utilisation de la propriété du mouvement brownien ($W_{t_{j+1}} - W_{t_j} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$). Cela permet une simulation simple et directe des trajectoires et de déduire la loi conditionnelle des valeurs futures.

4 Exercice: Estimation du prix d'un Call en volatilité locale

4.1 Enoncé

Exercice 12 (Estimation du prix d'un Call en volatilité locale). Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ le processus de prix d'un actif sous la probabilité risque-neutre et caractérisé (admis) par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t,$$

avec $\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$ et $S_0 > 0$. On admettra qu'on peut appliquer le schéma d'Euler. Le prix d'un Call de maturité $T > 0$ et de prix d'exercice $K > 0$ est

$$C(T) = e^{-rT} \mathbb{E} [(S_T - K)^+].$$

On pose $r = 0$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 0.8$, $S_0 = 1$, $K = 1.2$ et $T = 1$.

- Proposez une méthode de Monte Carlo simple pour estimer $C(T)$ sans méthode de réduction de variance.
- Proposez une méthode de réduction de variance par variable antithétique.
- Proposez une méthode de réduction de variance par variable de contrôle s'appuyant sur le modèle de Black-Scholes.

4.2 Proposez une méthode de Monte Carlo simple pour estimer $C(T)$ sans méthode de réduction de variance

```

# Proposez une méthode de Monte Carlo simple pour estimer C(T)
# sans méthode de réduction de variance.
#
# Paramètres de simulation
n, m = 10**4, 10**3 # Nombre de simulations et de pas de temps
T = 1                 # Temps total
dt = T / m             # Discrétisation temporelle
sdt = np.sqrt(dt)      # Racine carrée de l'intervalle de temps

# Paramètres financiers
r = 0                  # Taux d'intérêt
sigma = 0.2              # Volatilité
gamma = 0.8              # Gamma
S0 = 1.                  # Prix initial
K = 1.2                # Prix d'exercice

# Initialisation du prix du sous-jacent
S = np.full(n, S0) # Tableau initialisé en float64

# Simulation du processus de prix
for j in range(m):
    S += r * S * dt + sigma * S**gamma * np.random.normal(0, sdt, n)

# Calcul des gains pour chaque trajectoire
Y = np.maximum(S - K, 0.)

# Calcul des estimations de Monte Carlo
emc = np.exp(-r * T) * np.mean(Y)          # Estimation de l'espérance
sdmc = np.exp(-r * T) * np.std(Y)           # Estimation de l'écart-type

# Affichage de l'estimation avec intervalle de confiance
print("Estimation : %.5f +/- %.5f" % (emc, 2 * sdmc / np.sqrt(n)))

```

Estimation : 0.02025 +/- 0.00133

4.2.1 Comparaison entre le code et la formule mathématique

Dans la boucle de simulation, la ligne de code :

```
S += r * S * dt + sigma * S**gamma * np.random.normal(0, sdt, n)
```

correspond à la formule discrétisée suivante, issue d'une équation stochastique de type Itô :

$$S_{t_{j+1}} = S_{t_j} + rS_{t_j}\Delta t + \sigma S_{t_j}^\gamma \Delta W_j,$$

où :

- $rS_{t_j}\Delta t$ représente le terme déterministe ou **drift**, qui correspond à l'évolution moyenne du processus entre deux instants t_j et t_{j+1} .
- $\sigma S_{t_j}^\gamma \Delta W_j$ représente le terme stochastique ou **diffusion**, où $\Delta W_j \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ est un accroissement brownien simulé par `np.random.normal(0, sdt, n)`.
- Le paramètre γ contrôle la dépendance non linéaire de la volatilité par rapport à S . Pour $\gamma = 1$, on retrouve le mouvement brownien géométrique classique avec une volatilité proportionnelle à S . Pour $\gamma \neq 1$, la volatilité est ajustée de manière non linéaire.

Ainsi, cette ligne de code implémente une discrétisation de l'équation stochastique en utilisant un **schéma d'Euler** pour simuler l'évolution du processus stochastique S_t .

4.3 Proposez une méthode de réduction de variance par variable antithétique

```

# Initialisation des prix du sous-jacent et de son antithétique
S = np.full(n, S0) # Trajectoire "normale"
SA = np.full(n, SA0) # Trajectoire "antithétique"

# Simulation des trajectoires
for j in range(m):
    Z = sigma * np.random.normal(0, sdt, n) # Accroissement brownien
    S += r * S * dt + S**gamma * Z # Trajectoire normale
    SA += r * SA * dt - SA**gamma * Z # Trajectoire antithétique

# Calcul des gains pour les deux trajectoires
Y = np.maximum(S - K, 0.0) # Gain pour la trajectoire normale
YA = np.maximum(SA - K, 0.0) # Gain pour la trajectoire antithétique

# Estimation sans antithétique
emc = np.exp(-r * T) * np.mean(Y) # Espérance Monte Carlo
sdmc = np.exp(-r * T) * np.std(Y) # Écart-type Monte Carlo

# Estimation avec antithétique
emcA = np.exp(-r * T) * np.mean(Y + YA) * 0.5 # Moyenne des deux trajectoires
sdmcA = np.exp(-r * T) * np.std(Y + YA) * 0.5 # Écart-type réduit

# Résultats
print("Estimation : %.5f +/- %.5f" % (emc, 2 * sdmc / np.sqrt(n)))
print("Estimation Antithétique : %.5f +/- %.5f" % (emcA, 2 * sdmcA / np.sqrt(n)))
print("Amélioration : %.2f, soit %.2f fois moins de simu" % (sdmc / sdmcA, (sdmc / sdmcA)**2))

```

Estimation : 0.03233 +/- 0.00174
Estimation Antithétique : 0.03180 +/- 0.00112
Amélioration : 1.56, soit 2.42 fois moins de simu

4.3.1 Simulation des trajectoires normales et antithétiques

Dans cette section, on met à jour les trajectoires normales (S) et antithétiques (SA) à chaque pas de temps t_j . Les équations discrétisées utilisées sont les suivantes :

$$S_{t_{j+1}} = S_{t_j} + rS_{t_j}\Delta t + \sigma S_{t_j}^\gamma \Delta W_j,$$

$$SA_{t_{j+1}} = SA_{t_j} + rSA_{t_j}\Delta t - \sigma SA_{t_j}^\gamma \Delta W_j,$$

où :

- $\Delta W_j \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ est un accroissement brownien simulé, tiré d'une loi normale centrée avec une variance proportionnelle au pas de temps Δt .
- $Z = \sigma \cdot \Delta W_j$ est le terme représentant l'impact de la volatilité sur le processus.
- S correspond aux trajectoires normales, mises à jour en utilisant $+\sigma S^\gamma \cdot \Delta W_j$.
- SA correspond aux trajectoires antithétiques, mises à jour en utilisant $-\sigma SA^\gamma \cdot \Delta W_j$.

Dans le code Python, cette simulation est implémentée par les lignes suivantes :

```

Z = sigma * np.random.normal(0, sdt, n) (accroissement brownien),
S += r * S * dt + S**gamma * Z (trajectoire normale),
SA += r * SA * dt - SA**gamma * Z (trajectoire antithétique).

```

Cette méthode génère deux trajectoires opposées (S et SA), permettant de compenser les fluctuations aléatoires et de réduire la variance de l'estimation finale.

4.4 Proposez une méthode de réduction de variance par variable de contrôle s'appuyant sur le modèle de Black-Scholes

```

# Initialisation des trajectoires
S, C = np.full(n, S0), np.full(n, S0) # S : trajectoire normale, C : trajectoire exacte

# Simulation des trajectoires
for j in range(m):
    Z = sigma * np.random.normal(0, sdt, n) # Accroissement brownien
    S += r * S * dt + S * Z # Mise à jour trajectoire normale
    C *= np.exp((r - sigma**2 / 2) * dt + Z) # Mise à jour trajectoire exacte

# Calcul des gains pour chaque trajectoire
Y = np.exp(-r * T) * np.maximum(S - K, 0.0) # Payoff pour la trajectoire normale
Yc = np.exp(-r * T) * np.maximum(C - K, 0.0) # Payoff pour la trajectoire exacte

# Calcul des paramètres pour la variable de contrôle
COV = np.cov(Y, Yc) # Matrice de covariance
a = COV[0, 1] / COV[1, 1] # Coefficient de contrôle
M = S0 * norm.cdf((np.log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))) \
    - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf((np.log(S0 / K) + (r - 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))) \
X = Y - a * (Yc - M) # Variable de contrôle ajustée

emc = np.mean(Y) # Estimations sans contrôle
sdmc = np.std(Y)

emcC = np.mean(X) # Estimations avec contrôle
sdmcC = np.std(X)

# Résultats
print("Estimation : %.5f +/- %.5f" % (emc, 2 * sdmc / np.sqrt(n)))
print("Estimation Contrôle : %.5f +/- %.5f" % (emcC, 2 * sdmcC / np.sqrt(n)))
print("Amélioration Contrôle : %.2f, soit %.2f fois moins de simulations" % (sdmc / sdmcC, (sdmc / sdmcC)**2))

Estimation : 10.34545 +/- 0.28958
Estimation Contrôle : 10.44942 +/- 0.00152
Amélioration Contrôle : 190.20, soit 36176.45 fois moins de simulations

```

4.4.1 Formule générale pour le mouvement brownien géométrique

La formule :

$$C_t = C_0 \cdot \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

est la solution exacte de l'équation différentielle stochastique :

$$dC_t = rC_t dt + \sigma C_t dW_t,$$

où :

- r représente le taux de drift (croissance moyenne déterministe),
- σ est la volatilité,
- W_t est un mouvement brownien.

Cette formule modélise l'évolution stochastique d'une quantité C_t soumise à une croissance constante (r), une volatilité (σ) et des fluctuations aléatoires (W_t). Elle est utilisée dans le cadre de la modélisation des prix d'actifs financiers, comme les actions dans le modèle de Black-Scholes.

Interprétation des termes :

- $(r - \frac{\sigma^2}{2})t$: Contribution moyenne corrigée pour la variance.
- σW_t : Composante aléatoire liée aux fluctuations stochastiques.

Dans votre code, cette formule est utilisée pour calculer une trajectoire exacte (C_t) servant de variable de contrôle, afin de réduire la variance des estimations obtenues avec une trajectoire approximative (S_t).

5 Questions

- Dans quels cas utilise-t-on la loi de transition ?

Réponse : Lorsque la loi de transition du processus est connue, comme dans le cas du processus de Vasicek.

- Pourquoi passe-t-on au schéma d'Euler pour certains processus ?

Réponse : Parce que la loi de transition n'est pas connue ou est trop complexe à calculer.

- Quelle est la différence entre la simulation exacte et approximative ?

Réponse : La simulation exacte utilise la loi de transition connue du processus, tandis que la simulation approximative repose sur des hypothèses locales (comme dans le schéma d'Euler).

- Dans le schéma d'Euler, que représente ΔW_j ?

Réponse : L'accroissement du mouvement brownien, modélisé par une variable $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

- Quelle est l'hypothèse clé pour appliquer le schéma d'Euler ?

Réponse : Les fonctions μ et σ sont localement constantes sur de petits intervalles de temps.

1. Schéma d'Euler et Formule de Transition

1. Pourquoi utilise-t-on le schéma d'Euler pour simuler des processus stochastiques ?

Réponse : Car la loi de transition exacte est inconnue ou trop complexe.

Explication : Le schéma d'Euler approche les intégrales de drift et diffusion localement, permettant de simuler le processus pas à pas.

2. Quelle est l'hypothèse principale pour appliquer le schéma d'Euler ?

Réponse : Les coefficients $\mu(t, X_t)$ et $\sigma(t, X_t)$ sont localement constants.

Explication : Cela garantit que les variations sur un petit intervalle de temps Δt sont suffisamment simples pour être approchées.

3. Quelle est la différence fondamentale entre le schéma d'Euler et la formule d'Itô ?

Réponse : Le schéma d'Euler est une approximation discrète, tandis que la formule d'Itô est exacte.

Explication : La formule d'Itô requiert la connaissance exacte de la loi de transition, contrairement à Euler.

2. Loi de Transition

1. Dans quels cas peut-on utiliser la loi de transition d'un processus ?

Réponse : Lorsqu'elle est connue, comme dans le cas du processus de Vasicek.

Explication : La loi de transition permet une simulation exacte sans besoin d'approximations numériques.

2. Quelle est la distribution de l'accroissement brownien entre deux pas de temps ?

Réponse : Une loi normale $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Explication : Cela découle des propriétés fondamentales du mouvement brownien.

3. Pourquoi la loi de transition est-elle essentielle pour les processus stochastiques comme Vasicek ?

Réponse : Elle assure un comportement stationnaire et un retour précis à la moyenne.

Explication : La loi de transition inclut les paramètres de drift et de variance dans une solution exacte.

3. Réduction de Variance

1. Comment la méthode des variables antithétiques réduit-elle la variance ?

Réponse : En générant deux trajectoires opposées pour compenser les fluctuations aléatoires.

Explication : Cela stabilise l'estimation moyenne en réduisant la dispersion des simulations.

2. Quelle est la formule mathématique utilisée pour simuler une trajectoire antithétique ?

Réponse : $SA_{t_{j+1}} = SA_{t_j} + rSA_{t_j}\Delta t - \sigma SA_{t_j}^\gamma \Delta W_j$.

Explication : Cette formule est obtenue en inversant le terme aléatoire $(-\Delta W_j)$ par rapport à la trajectoire normale.

3. Pourquoi la méthode de la variable de contrôle est-elle efficace ?

Réponse : Car elle réduit la variance en ajustant les résultats en fonction d'une trajectoire dont l'espérance est connue.

Explication : Une correction basée sur une trajectoire exacte minimise les fluctuations non informatives.

4. Simulation de Processus Spécifiques

1. Quelle est la solution fermée pour le processus de Vasicek ?

Réponse : $X_{t+\Delta t} \sim \mathcal{N}\left(X_t e^{-a\Delta t} + \mu(1 - e^{-a\Delta t}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})\right)$.

Explication : Cette solution inclut le drift (retour à la moyenne) et la volatilité stationnaire du processus.

2. Dans quel cas le schéma d'Euler est-il indispensable ?

Réponse : Lorsque la loi de transition du processus est inconnue ou non disponible.

Explication : Euler fournit une approximation discrète en simulant les variations à chaque pas de temps.