Niveau 2 - Méthodes Numériques
Cours 4
Simulation de processus stochastiques
Simulation d'une équation différentielle stochastique

Jean-François Berger-Lefébure

10 Octobre 2024

Contents

1 Introduction

1.1 Équations différentielles stochastiques (EDS)

- Les EDS sont définies sous deux formes principales
  - **Forme intégrale** rigoureuse et complète.
  - **Forme différenciée** notation simplifiée mais équivalente, souvent utilisée pour des calculs plus pratiques.
- Exemple de la forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$$

  où
  - X_t processus aléatoire (stochastique).
  - $\mu(s, X_s)$ terme de dérive (tendance moyenne).
  - $\sigma(s, X_s)dW_s$ terme stochastique lié au mouvement brownien W_s.

1.2 Notion de processus stochastique

- Un processus stochastique évolue de manière **non déterministe** et **non prévisible**.
- L'évolution dépend de deux composantes
  - **Composante déterministe (μ)** mouvement "moyen".
  - **Composante aléatoire (σdW_s)** fluctuations imprévisibles.

1.3 Mouvement brownien (W)

- Élément clé des EDS, introduisant la partie aléatoire.
- **Filtration ($\mathcal{F}_t$)** ensemble des informations disponibles jusqu'au temps t, incluant les trajectoires passées de W.

1.4 Application pratique Modèle de Black-Scholes

- Dans le modèle de Black-Scholes, l'évolution du prix d'un actif suit une EDS où
  - μX_t représente la rentabilité moyenne de l'actif proportionnelle à son prix.
  - σX_t représente la volatilité proportionnelle au prix.
- Exemple
  - Si un actif cote 10 000 € avec un rendement moyen de 10%, le gain moyen est $10\,000 \times 0.1 = 1\,000$ €.
  - La volatilité suit une dynamique proportionnelle au prix pour garder une logique d'échelle.

1.5 Importance de la forme multiplicative (μX_t et σX_t)

- Sans cette proportionnalité, le modèle ne respecterait pas l'échelle des prix, ce qui fausserait les prévisions.
- Exemple Si une action est divisée par 100 (split action), les variations doivent rester proportionnelles au cours initial pour garder une cohérence économique.

1.6 Lien entre filtration et mouvement brownien

- Pour simuler X_t, il est nécessaire de connaître
  - Le point de départ X_0.
  - Les fonctions μ et σ.
  - Une trajectoire du mouvement brownien W_t.
- Théoriquement, observer W_t sur $[0, t]$ revient à observer X_t, car X_t est entièrement défini par W_t, X_0, μ, et σ.

1.7 Points à retenir

- **Différence entre une EDO et une EDS**
  - Une EDO (équation différentielle ordinaire) n'a pas de terme stochastique (σdW_s).
  - Une EDS inclut une composante aléatoire via le mouvement brownien.
- **Définitions essentielles**
  - **Termes de l'EDS**
    * μ dérive, donne une direction moyenne.
    * σ volatilité, introduit de l'incertitude.
  - **Mouvement brownien** base des fluctuations stochastiques.
- **Modèle de Black-Scholes**
  - Les termes μX_t et σX_t assurent une cohérence dans l'échelle des variations de l'actif.

—

1.8 Questions - Introduction

- **Question 1 Quelle est la conséquence directe de la présence du terme stochastique σdW_s dans une EDS ?**
  - (a) Le processus devient déterministe.
  - (b) L'évolution du processus est influencée par le mouvement brownien, rendant sa trajectoire non prévisible. **(Réponse correcte)**
  - (c) Le terme de dérive μ devient constant.
  - (d) Le processus est contraint de converger vers une moyenne.
- **Question 2 Dans le modèle de Black-Scholes, pourquoi la volatilité est-elle proportionnelle au prix de l'actif ?**
  - (a) Pour garantir une invariance d'échelle dans les variations relatives de l'actif. **(Réponse correcte)**
  - (b) Pour rendre le modèle linéaire et réduire la complexité des calculs.
  - (c) Pour que le mouvement brownien soit indépendant du prix.
  - (d) Pour compenser une dérive négative du prix moyen.
- **Question 3 Quelle propriété fondamentale du mouvement brownien justifie son utilisation dans les EDS ?**
  - (a) Sa trajectoire est dérivable presque partout.
  - (b) Il possède des incréments indépendants et une variance proportionnelle au temps écoulé. **(Réponse correcte)**
  - (c) Il converge toujours vers une moyenne à long terme.
  - (d) Il est uniquement défini sur un intervalle discret.
- **Question 4 Dans une EDS de la forme $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t$, que représente le terme $\mu X_t\, dt$?**
  - (a) L'évolution moyenne proportionnelle au prix actuel. **(Réponse correcte)**
  - (b) Une fluctuation aléatoire proportionnelle au prix actuel.
  - (c) Une correction pour garantir la stationnarité.
  - (d) Une composante indépendante du temps.
- **Question 5 Quelle est la principale hypothèse sous-jacente à l'utilisation du modèle de Black-Scholes ?**
  - (a) Le rendement de l'actif est constant dans le temps.

  - (b) Le prix de l'actif suit un processus de diffusion géométrique marqué par des incréments brownien. **(Réponse correcte)**
  - (c) Les taux d'intérêt ne fluctuent pas.
  - (d) La volatilité est une fonction non linéaire du temps.

- **Question 6 Comment la filtration $\mathcal{F}_t$ est-elle définie dans le contexte des EDS ?**
  - (a) Comme l'ensemble des trajectoires futures du processus.
  - (b) Comme l'ensemble des informations observables jusqu'au temps t. **(Réponse correcte)**
  - (c) Comme la moyenne conditionnelle du processus.
  - (d) Comme une propriété des solutions des EDS.

—

2 Propriété de Markov

2.1 Propriété de Markov

- Un processus est dit **Markovien** si son futur (les valeurs à venir) dépend uniquement de son état actuel et non de l'ensemble de sa trajectoire passée.
- Exemple Si W_t est un mouvement brownien, connaître W_t suffit pour prédire le futur, peu importe la trajectoire précédente.

Lien avec la simulation

- La propriété de Markov simplifie les simulations
  - Une fois la valeur X_t à un instant t connue, le passé n'est plus nécessaire pour construire les valeurs futures.
  - Cela permet d'utiliser des accroissements indépendants pour simuler des trajectoires.

2.2 Formule et explication

$$\mathcal{L}((X_u)_{u\geq t}|\mathcal{F}_t) = \mathcal{L}((X_u)_{u\geq t}|X_t)$$

- $(X_u)_{u\geq t}$ Les valeurs futures du processus après t.
- $\mathcal{F}_t$ Ensemble des informations disponibles jusqu'à t, c'est-à-dire tout le passé du processus.
- $\mathcal{L}$ La loi de probabilité ou distribution d'un processus aléatoire.
  Exemple: Pour un mouvement brownien la loi pourrait être une loi normale avec certains paramètres.
- Signification
  - La distribution des valeurs futures $(X_u)_{u\geq t}$, conditionnée par tout le passé ($\mathcal{F}_t$), est la même que si elle était conditionnée uniquement par la valeur actuelle X_t.
  - Connaître X_t suffit pour déterminer l'évolution future du processus.

2.3 Points essentiels à retenir

- La propriété de Markov indique que toute la trajectoire passée est résumée dans la valeur actuelle.
- Utile pour les simulations et les modèles comme Black-Scholes le futur est calculé à partir de la valeur actuelle et des accroissements indépendants.

2.4 Comment lire et interpréter la formule du processus Markovien

Formule :

$$\mathcal{L}((X_u)_{u\geq t}|\mathcal{F}_t) = \mathcal{L}((X_u)_{u\geq t}|X_t)$$

Lecture pas à pas :

- $(X_u)_{u\geq t}$: Les valeurs futures du processus X, pour $u \geq t$.
  - Exemple : Si $t = 2$, alors $(X_u)_{u\geq 2}$ correspond aux valeurs futures $X_3, X_4, \ldots$.
- $\mathcal{F}_t$: Ensemble des informations disponibles jusqu'à l'instant t, incluant toute la trajectoire passée $X_0, X_1, \ldots, X_t$.
- $\mathcal{L}$: La loi ou distribution de probabilité d'un processus aléatoire.
  - Exemple : Pour un mouvement brownien W_t, la loi est souvent une loi normale.
- **Égalité des deux côtés :**
  - La distribution des valeurs futures $(X_u)_{u\geq t}$, conditionnée par toutes les informations passées ($\mathcal{F}_t$), est **la même** que si elle était conditionnée uniquement par la valeur actuelle X_t.

Interprétation intuitive :

- Dans un processus Markovien, le futur ($(X_u)_{u\geq t}$) dépend uniquement de la valeur actuelle X_t.
- Toute autre information passée, incluse dans $\mathcal{F}_t$, est inutile pour prédire le futur.

Exemple : Mouvement Brownien

- Supposons que W_t soit un mouvement brownien.
- Si à $t = 2$, on sait que $W_2 = 1.5$, alors pour prédire $W_3, W_4, \ldots$, il est inutile de connaître W_0, W_1. La valeur $W_2 = 1.5$ suffit.

Utilité pratique :

- Cette propriété simplifie les simulations : il suffit de connaître l'état actuel X_t pour générer les valeurs futures du processus.

Phrase à retenir : *"Dans un processus Markovien, connaître l'état actuel suffit pour prédire l'avenir. Tout le passé est résumé dans la valeur présente."*

—

2.5 Simulation discrète d'un processus Markovien

Objectif : Simuler un processus X_t à des points discrets $t_0, t_1, \ldots, t_m$, en utilisant la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_{t_j}|X_{t_{j-1}})$.

Notation :

- $X_0^m = x$: La valeur initiale du processus.
- $X_{t_j}^m := Z_j$, où Z_j est un tirage selon la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_{t_j}|X_{t_{j-1}})$.
- Chaque point X_{t_j} est simulé indépendamment en se basant uniquement sur le point précédent $X_{t_{j-1}}$.

Exemple : Mouvement Brownien

- Loi d'évolution :
$$W_{t+\Delta t}|W_t \sim \mathcal{N}(W_t, \Delta t),$$
où :
  - La moyenne est W_t.
  - La variance est Δt (l'accroissement est indépendant).

Proposition 4.5 :

$$(X_{t_j})_{0\leq j\leq m} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_j}^m)_{0\leq j\leq m}.$$

- La trajectoire simulée $(X_{t_j}^m)$ en points discrets suit la même loi que la trajectoire continue (X_{t_j}) évaluée aux mêmes points.

Points à retenir :

- La simulation discrète repose sur la loi conditionnelle entre deux points successifs.
- Chaque X_{t_j} dépend uniquement de $X_{t_{j-1}}$, pas du reste de la trajectoire passée.
- La trajectoire discrète et la trajectoire continue évaluée aux mêmes instants ont la même loi.

2.6 Différence entre processus Markovien et Martingale

Processus Markovien :

- Un processus est **Markovien** si son futur dépend uniquement de son état présent, et non de toute sa trajectoire passée.
- Formule associée :
$$\mathcal{L}((X_u)_{u\geq t}|\mathcal{F}_t) = \mathcal{L}((X_u)_{u\geq t}|X_t),$$
où $\mathcal{F}_t$ représente l'ensemble des informations jusqu'à l'instant t, et X_t suffit pour décrire l'évolution future du processus.

- Exemple : Le mouvement brownien W_t est Markovien. Si vous connaissez W_t, le futur ne dépend plus de W_s pour $s < t$.

Martingale :

- Un processus est une **martingale** si sa valeur actuelle est égale à l'espérance conditionnelle de sa valeur future, donnée les informations disponibles jusqu'à présent.
- Formule associée :
$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{pour } s \leq t.$$
- Cela signifie que le processus n'a **pas de dérive prédictible** : la meilleure estimation de X_t, à partir des informations présentes, est simplement X_s.
- Exemple : Le mouvement brownien W_t est une martingale sous certaines conditions, comme $\mathbb{E}[W_t] = 0$.

Différences principales :

- **Dépendance au passé** :
  - Markovien : Le futur dépend uniquement de l'état actuel X_t.
  - Martingale : La valeur actuelle est une espérance neutre du futur.
- **Indépendance** :
  - Markovien : Le futur est indépendant du passé, sauf via X_t.
  - Martingale : Le futur est imprévisible (pas de dérive prédictible).
- **Condition nécessaire** :
  - Markovien : Peut inclure une dérive, comme μ ou $-a(X_t - \mu)$.
  - Martingale : Aucune dérive, le processus est "neutre".
- **Exemples typiques** :
  - Markovien : Mouvement brownien, processus de Vasicek, modèle Black-Scholes.
  - Martingale : Mouvement brownien standard sous mesure neutre.

Lien entre les deux concepts :

- Un processus peut être à la fois **Markovien** et une **martingale**, mais ce n'est pas toujours le cas.
- Exemple :
  - Le mouvement brownien est à la fois Markovien et une martingale sous la mesure neutre au risque.
  - Un processus de Vasicek est Markovien mais pas une martingale à cause de sa dérive $-a(X_t - \mu)$.

—

2.7 Questions

2.7.1 Propriété de Markov

1. **Que signifie la propriété de Markov pour un processus ?**
   - (a) Le futur dépend uniquement de toute la trajectoire passée.
   - (b) Le futur est indépendant de l'état présent.
   - (c) Le futur dépend uniquement de l'état présent.

   Bonne réponse : (c)
   Explication : La propriété de Markov stipule que seul l'état présent est nécessaire pour déterminer les valeurs futures.

2. **Que représente la filtration $\mathcal{F}_t$?**
   - (a) Elle détermine les accroissements futurs.

- (b) Elle contient toutes les informations passées jusqu'à l'instant t.
- (c) Elle représente les lois futures du processus.

Bonne réponse : (b)
Explication : La filtration $\mathcal{F}_t$ regroupe toutes les données observées jusqu'à l'instant t, incluant l'ensemble de la trajectoire passée.

3. **Pourquoi la propriété de Markov simplifie-t-elle les simulations ?**

   - (a) Parce que le bruit aléatoire est constant.
   - (b) Parce que les accroissements dépendent du futur.
   - (c) Parce qu'il n'est pas nécessaire de connaître le passé complet pour calculer les valeurs futures.

   Bonne réponse : (c)
   Explication : La propriété de Markov permet de générer des trajectoires en utilisant uniquement l'état actuel, sans référence à tout le passé.

4. **Quelle est l'interprétation intuitive de la formule suivante ?**

$$\mathcal{L}((X_u)_{u \geq t} | \mathcal{F}_t) = \mathcal{L}((X_u)_{u \geq t} | X_t)$$

   - (a) La distribution des valeurs futures dépend uniquement des informations passées.
   - (b) La distribution des valeurs futures dépend uniquement de l'état présent X_t.
   - (c) La distribution des valeurs futures est totalement indépendante des données passées.

   Bonne réponse : (b)
   Explication : La formule indique que l'état actuel X_t résume tout le passé et est suffisant pour déterminer le futur.

2.7.2 Simulation discrète d'un processus Markovien

1. **Quelle est l'utilité de la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_{t_j} | X_{t_{j-1}})$?**

   - (a) Elle sert à déterminer la trajectoire complète du processus.
   - (b) Elle décrit l'intégralité de la trajectoire simulée.
   - (c) Elle permet de simuler un point X_{t_j} à partir de la valeur précédente $X_{t_{j-1}}$.

   Bonne réponse : (c)
   Explication : La loi conditionnelle est utilisée pour générer chaque point de la trajectoire en fonction du point précédent uniquement.

2. **Pourquoi la simulation discrète est-elle équivalente à l'évaluation continue aux mêmes points ?**

   - (a) Parce que les accroissements sont indépendants.
   - (b) Parce que les valeurs futures sont indépendantes des valeurs présentes.
   - (c) Parce que la loi conditionnelle est respectée dans les deux cas.

   Bonne réponse : (c)
   Explication : En respectant la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_{t_j} | X_{t_{j-1}})$, la simulation discrète produit une trajectoire ayant la même distribution que la trajectoire continue évaluée aux mêmes points.

3. **Que signifie l'égalité suivante ?**

$$(X_{t_j})_{0 \leq j \leq m} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X^m_{t_j})_{0 \leq j \leq m}$$

   - (a) Les trajectoires simulée et continue sont identiques.
   - (b) Les trajectoires simulée et continue ont la même loi.
   - (c) Les trajectoires simulée et continue sont totalement indépendantes.

   Bonne réponse : (b)
   Explication : Cette égalité indique que les deux trajectoires ont la même distribution, même si elles ne sont pas identiques point par point.

—

3 Processus de Vasicek

3.1 Formule générale :

Le processus de Vasicek est défini par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$X_t = x + \int_0^t -a(X_s - \mu)\, ds + \int_0^t \sigma\, dW_s,$$

où :

- X_t : Valeur du processus à l'instant t.
- x : Valeur initiale du processus.
- μ : Moyenne long terme vers laquelle X_t tend (retour à la moyenne).
- $a > 0$: Force du retour à la moyenne.
- σ : Intensité du bruit aléatoire.
- W_s : Mouvement brownien.

3.2 Composantes principales :

- $-a(X_s - \mu)\, ds$:
  - Terme de dérive qui force X_t à retourner vers la moyenne μ.
  - Si $X_t > \mu$, ce terme devient négatif, et X_t diminue.
  - Si $X_t < \mu$, ce terme devient positif, et X_t augmente.
  - Plus X_t s'éloigne de μ, plus la force de rappel est forte.
- $\sigma\, dW_s$:
  - Terme stochastique représentant le bruit aléatoire.
  - σ est constant, donc l'amplitude des oscillations reste uniforme.

3.3 Caractéristiques importantes :

- **Retour à la moyenne :**
  - Le processus oscille autour de μ, et cette oscillation est régulée par la force de rappel $-a(X_t - \mu)$.
  - Plus X_t s'éloigne de μ, plus il est rapidement ramené vers μ.
- **Bruit constant :**
  - Le terme $\sigma\, dW_s$ ne dépend pas de X_t, donc l'intensité du bruit reste constante localement.
- **Utilisation :**
  - Ce processus est souvent utilisé pour modéliser les taux courts en finance, bien que son application soit limitée à des horizons très courts.

3.4 Exemple simplifié :

Si $\mu = 0$, $a > 0$, et X_t démarre très loin de 0 :

- Si $X_t = 10{,}000$, la force de rappel $-a(X_t - 0)$ est extrêmement négative, ce qui ramène rapidement X_t vers 0.
- Le processus reste confiné autour de μ et ne s'éloigne pas indéfiniment grâce à cette force de rappel.

3.5 Questions - Processus de Vasicek

1. **Que représente μ dans le processus de Vasicek ?**
   - (a) La volatilité du processus.
   - (b) La force de rappel vers la moyenne.
   - (c) La moyenne long terme vers laquelle le processus revient.
     (Réponse correcte) : μ est la moyenne autour de laquelle le processus oscille sur le long terme.

2. **Quel est le rôle du paramètre $a > 0$?**
   - (a) Déterminer l'intensité du bruit aléatoire.
   - (b) Fixer la variance locale des accroissements.
   - (c) Contrôler la force de rappel vers la moyenne μ.
     (Réponse correcte C) : Plus a est élevé, plus le processus revient rapidement vers μ.

3. **Pourquoi le terme $\sigma\, dW_s$ est-il constant ?**
   - (a) Parce que le bruit aléatoire a une intensité constante.
   - (b) Pour garantir un retour uniforme vers μ.
   - (c) Parce que le processus ne dépend pas de X_t.
     (Réponse correcte A) : σ ne dépend pas de X_t, donc le bruit est uniforme.

4. **Que se passe-t-il si $X_t > \mu$?**
   - (a) X_t reste stationnaire.
   - (b) X_t s'éloigne encore plus de μ.
   - (c) X_t tend à descendre vers μ.
     (Réponse correcte C) : Le terme $-a(X_t - \mu)$ devient négatif, ramenant X_t vers μ.

5. **Dans quel contexte le processus de Vasicek est-il couramment utilisé ?**
   - (a) Pour modéliser les prix des actions.
   - (b) Pour modéliser les flux de trésorerie.
   - (c) Pour modéliser les taux courts en finance.
     (Réponse correcte C) : C'est un modèle introductif pour les taux d'intérêt.

4 Démonstration: Processus de Vasicek

Un processus de Vasicek est défini comme la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = x + \int_0^t -a(X_s - \mu)\,ds + \int_0^t \sigma\,dW_s$$

Explication des termes :

- X_t : La valeur du processus à l'instant t.
- x : La valeur initiale du processus ($X_0 = x$).
- $\int_0^t -a(X_s - \mu)\,ds$: Terme de retour à la moyenne.
  - $a > 0$: Force du retour à la moyenne.
  - μ : Moyenne long terme vers laquelle X_t tend.
  - Ce terme tend à ramener X_t vers μ lorsqu'il s'en éloigne.
- $\int_0^t \sigma\,dW_s$: Terme stochastique.
  - σ : Intensité du bruit aléatoire (constante dans ce cas).
  - dW_s : Accroissement infinitésimal du mouvement brownien W_s, responsable des variations aléatoires.

Réécriture explicite :

$$X_t = \mu + (x - \mu)e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\,dW_s$$

Explication des termes :

- $\mu + (x - \mu)e^{-at}$:
  - Contribution déterministe (moyenne) qui tend à ramener X_t vers μ au fil du temps.
  - Le facteur e^{-at} diminue avec le temps, reflétant une décroissance exponentielle.
- $\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\,dW_s$:
  - Contribution stochastique.
  - L'intégrale $\int_0^t e^{as}\,dW_s$ représente une somme pondérée des accroissements brownien (dW_s), pondérée par e^{as}.
  - Cette partie ajoute une composante aléatoire à X_t.

Discrétisation (entre t_j et t_{j+1}) :

$$X_{t_{j+1}} = \mu + (X_{t_j} - \mu)e^{-a\Delta t} + \sigma e^{-a\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{as}\,dW_s$$

Explication des termes :

- $\Delta t = t_{j+1} - t_j$: Pas de temps discrétisé.
- $\mu + (X_{t_j} - \mu)e^{-a\Delta t}$: Composante déterministe dans le cadre discrétisé.
- $\sigma e^{-a\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{as}\,dW_s$: Composante stochastique dans l'intervalle de temps Δt.

Loi conditionnelle discrète :

$$X_{t_{j+1}} \mid X_{t_j} \sim \mathcal{N}\left(\mu + (X_{t_j} - \mu)e^{-a\Delta t}, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t})\right)$$

Explication des termes :

- $\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$: Distribution normale (gaussienne).
- Moyenne :
  - $\mu + (X_{t_j} - \mu)e^{-a\Delta t}$: Composante déterministe centrée autour de μ.
- Variance :
  - $\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2a\Delta t})$: Mesure de la dispersion des valeurs aléatoires ajoutées par le bruit brownien. La variance dépend de σ (intensité du bruit) et du paramètre a (force de rappel).

Concepts clés :

- **Mouvement Brownien (W_t)** :
  - Processus continu ayant des accroissements indépendants et suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,t)$.
  - Source principale d'aléa dans les processus stochastiques.
- **Isométrie d'Itô** :

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \int_0^t f^2(s)\,ds$$

  - Propriété clé pour calculer la variance des intégrales stochastiques.
  - Simplifie les calculs en décomposant les termes d'intégration dans un cadre probabiliste.
- **Intégrale de Wiener** :
  - Cas particulier d'une intégrale stochastique où l'intégrande $f(s)$ est une fonction déterministe.
  - Exemple :

$$\int_0^t \sigma\,dW_s$$

    suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2 t)$ grâce à l'isométrie d'Itô.

5 Démonstration: Variance d'une Intégrale Stochastique

Contexte

Le but est de déterminer la loi et la variance de l'intégrale suivante, en lien avec un processus de Vasicek :

$$I_t = \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

où W_s est un mouvement brownien, et σe^{-at} est une constante liée au processus.

Étape 1 : Application de l'isométrie d'Itô

Pour calculer la variance de I_t, on utilise la propriété suivante :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s) dW_s\right)^2\right] = \int_0^t f^2(s) ds$$

Appliqué ici avec $f(s) = e^{as}$, on a :

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds$$

Étape 2 : Résolution de l'intégrale

L'intégrale à résoudre est :

$$\int_0^t e^{2as} ds$$

Cette intégrale d'exponentielles se résout classiquement :

$$\int_0^t e^{2as} ds = \frac{1}{2a}\left(e^{2at} - 1\right)$$

Étape 3 : Substitution et simplification

En substituant l'intégrale calculée dans l'expression de la variance :

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \sigma^2 e^{-2at} \cdot \frac{1}{2a}\left(e^{2at} - 1\right)$$

Après simplification :

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Résultat Final

La loi de I_t est une loi normale donnée par :

$$I_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$$

Interprétation

- **Moyenne :** La moyenne de I_t est 0, car les accroissements du mouvement brownien W_s sont centrés.
- **Variance :** La variance dépend de :
  - σ^2 : Intensité du bruit stochastique.
  - a : Force de rappel du processus.
  - t : Durée d'observation, modulée par e^{-2at}, qui reflète une décroissance exponentielle.
- Lorsque $t \to \infty$, la variance se stabilise à $\frac{\sigma^2}{2a}$.
- Lorsque $t \to 0$, la variance tend vers 0, car il n'y a pas d'accumulation de variations.