Exercice: Pricing d'un AutoCall en Monte Carlo

Jean-François Berger-Lefébure

10 Décembre 2024

Contents

1 Introduction & Rappels

1.1 Définition du produit : Autocall défensif sur Eurostoxx

Un **autocall** est un produit structuré qui combine un rendement fixe (coupon) et une protection partielle du capital avec des conditions spécifiques pour remboursement anticipé ou perte en capital.

Caractéristiques du produit donné :

- **Sous-jacent** : Eurostoxx.
- **Barrière de call (remboursement anticipé)** : 100 % du niveau initial au bout de la 2ème année.
- **Coupon** : 6 % par an, payé uniquement si l'Eurostoxx ne tombe pas sous **50 %** du niveau initial.
- **Maturité** : 8 ans maximum si non remboursé avant.
- **Protection partielle du capital** : À maturité, si l'indice est sous **50 %**, remboursement basé sur un multiplicateur (**x2**).

1.2 Intérêt pour le vendeur et l'acheteur d'un autocall

1.2.1 Intérêt pour le vendeur (Banque ou émetteur du produit)

Le vendeur (souvent une banque) propose cet autocall principalement pour **générer des revenus** tout en maîtrisant les risques liés au marché.

a. Revenus générés par la vente :

- **Encaissement de la prime des coupons :** Les coupons sont conditionnés par le maintien du sous-jacent au-dessus de la barrière (50 %). Si les coupons ne sont pas versés (barrière franchie), le vendeur conserve ces flux non payés.
- **Coût de financement réduit :** Les remboursements anticipés (autocall) réduisent la durée de vie du produit. Moins de temps en circulation = coût de financement plus faible pour le vendeur.
- **Effet de levier avec le gearing (x2 en cas de chute sous 50 %) :** En cas de scénario défavorable, l'investisseur subit une perte calculée sur 50 %, mais multipliée par 2. Cela protège partiellement le vendeur contre des baisses importantes des marchés tout en limitant sa perte potentielle.

b. Contrôle du risque digital et asymétrie des paiements :

- **Risque asymétrique :** Si l'indice dépasse la barrière (100 %) après 2 ans, le produit est remboursé rapidement avec un rendement modéré (6 %). Si l'indice baisse sous 50 %, la perte pour l'investisseur peut être importante, mais le vendeur a sécurisé ses marges avec les primes.
- **Gestion optimisée du risque avec des modèles mathématiques :** Les vendeurs utilisent des modèles comme **Monte Carlo** et des stratégies de couverture en **delta** et **véga**.
- **Hedge partiel avec volatilité implicite :** Une volatilité élevée augmente la probabilité d'un franchissement de barrière, mais elle est compensée par une tarification plus élevée du produit.

1.2.2 Intérêt pour l'acheteur (Investisseur particulier ou institutionnel)

L'acheteur cherche un compromis entre un **rendement attractif** et une **protection partielle** du capital.

a. Rendement attractif par rapport aux taux sans risque :

- **Coupons fixes de 6 % par an :** Tant que l'indice reste au-dessus de la barrière de 50 %, l'acheteur reçoit un rendement régulier. Ce taux est souvent supérieur aux obligations classiques ou aux produits d'épargne traditionnels.
- **Possibilité de remboursement anticipé :** Si l'indice dépasse 100 % après 2 ans, l'investisseur est remboursé avec un rendement immédiat. Cela réduit l'exposition au marché sur une longue durée.

b. Protection partielle du capital :

- **Effet de barrière pour limiter la perte :** Même si l'indice chute sous 50 %, la perte est calculée avec un multiplicateur (x2), ce qui protège partiellement l'investisseur par rapport à une perte totale. **Exemple :** Si l'indice termine à 40 %, l'investisseur récupère :

$$2 \times 40 = 80\%$$

  limitant ainsi la perte à 20 %.
- **Profil défensif adapté à des marchés incertains :** Ce produit est souvent vendu à des investisseurs recherchant une protection relative avec un rendement garanti en cas de stabilité modérée du marché.

c. Simplicité par rapport à un portefeuille d'options complexes :

- **Produit clé en main :** Au lieu d'acheter plusieurs options ou actifs, l'investisseur a un produit unique qui gère automatiquement les remboursements et les coupons.
- **Utilisation pour des stratégies de diversification :** Il peut servir d'alternative aux obligations dans un portefeuille diversifié, offrant des rendements potentiels plus élevés.

Résumé des motivations :

Rôle	**Objectifs principaux**
Vendeur	- Encaisser des primes élevées. - Réduire les coûts grâce aux remboursements anticipés. - Profiter des asymétries et gérer le risque avec des modèles avancés.
Acheteur	- Obtenir des coupons fixes supérieurs aux taux sans risque. - Limiter la perte en capital grâce à la barrière et au gearing. - Diversifier son portefeuille avec un produit semi-protégé.

Ce produit représente un **pari sur la stabilité ou une hausse modérée des marchés**.

- **- Le vendeur** maximise ses revenus en profitant d'un risque digital et d'une gestion fine des sensibilités (**grecques**).
- **- L'acheteur** accepte un risque limité en échange de **coupons réguliers** et d'une **protection partielle**.

Cependant, l'investisseur doit être conscient des risques liés à la volatilité et aux mouvements brusques du marché, qui peuvent compromettre les rendements escomptés.

—

1.3 Explication des différents scénarios possibles

Cas favorable (Remboursement anticipé) :

- Si après **2 ans**, l'Eurostoxx est **au-dessus de 100 %** de son niveau initial, le produit est **remboursé par anticipation**.
- Remboursement = **Capital initial (100%)** + Coupon de **6 %** chaque année.

Exemple : Si l'Eurostoxx monte à **110 %** à la 2ème année :

$$Remboursement = 100 + 6 + 6 = 112\%$$

Le gain est fixé et sécurisé.

Cas médian (Aucun remboursement anticipé, mais barrière respectée) :

- L'Eurostoxx oscille entre **50 % et 100 %** du niveau initial tout au long de la vie du produit.
- Les **coupons de 6 %** continuent d'être payés tant que l'indice reste au-dessus de **50 %**.
- Si, à la maturité, l'Eurostoxx est **au-dessus de 50 %**, le capital est **remboursé à 100 %** (pas de perte en capital).

Exemple : Si l'Eurostoxx descend à **70 %**, les coupons sont payés, et le capital est remboursé intégralement à **100 %** à la fin.

Cas défavorable (Perte en capital) :

- L'Eurostoxx tombe **en dessous de 50 %** du niveau initial à n'importe quel moment.
- Aucun coupon n'est payé.
- À la **maturité**, si l'Eurostoxx est toujours **sous 50 %**, le remboursement est calculé avec un **multiplicateur x2** :
$$Remboursement = 2 \times NiveauFinal$$

Exemple : Si l'Eurostoxx tombe à **40 %** du niveau initial :

$$Remboursement = 2 \times 40 = 80\%$$

Il y a donc une **perte de 20 %**.

1.4 Pourquoi ce produit est-il gavé de risque digital ?

Risque digital : Définition Le **risque digital** fait référence aux **discontinuités** dans les paiements. Contrairement aux produits linéaires (actions), ici, le **payoff** (paiement) change brutalement selon qu'un seuil (barrière) est franchi ou non.

Composants digitaux dans cet autocall :

- **Barrière de coupons (50 %)** : Si franchie, les coupons deviennent **zéro** immédiatement.
- **Barrière de remboursement anticipé (100 %)** : Déclenche un remboursement automatique, supprimant les paiements futurs.
- **Mécanisme x2 en cas de chute sous 50 %** : Introduit un effet **levier** qui amplifie les pertes.

Conséquences pratiques :

- **Sensibilité aux mouvements brusques** : Un faible changement dans la valeur de l'Eurostoxx peut entraîner des variations énormes dans le payoff.
- **Volatilité élevée = Scénarios défavorables probables** : Plus la volatilité augmente, plus les chances de franchir la barrière de **50 %** augmentent, générant des pertes.
- **Modèle de pricing complexe** : Black-Scholes n'est pas idéal car il suppose une **volatilité constante** et ne gère pas bien les **discontinuités**.

1.5 Impact sur le pricing et la couverture

Volatilité :

- Hausse de la volatilité → Plus de scénarios défavorables → **Prix baisse**.

Taux d'intérêt :

- Hausse des taux → Actualisation plus forte des flux → **Prix baisse**.

Dividendes :

- Hausse des dividendes → Moins d'appréciation de l'Eurostoxx → **Prix baisse**.

1.6 Résumé pour l'examen

- **Risque digital** : Discontinuités dans le payoff, instabilité de la couverture, et sensibilité à la volatilité.
- **Cas spécifiques** : Modéliser et analyser chaque scénario.
- **Méthode Monte Carlo** : Simule les flux complexes et évalue correctement le prix.
- **Hedging** : Importance du **véga-hedge** et des stratégies avancées.

1.7 Exemple de question d'examen possible :

Question : Pourquoi un autocall avec une barrière présente-t-il un **risque digital** et comment ce risque affecte-t-il son prix et sa gestion en couverture ?

Réponse attendue : - Risque digital = discontinuité des payoffs due aux seuils fixes. - Impact : forte dépendance à la volatilité et sensibilité accrue aux paramètres (taux, dividendes). - Solution : Calibration sur **smile** et utilisation de Monte Carlo pour simuler les scénarios.

—

1.8 Modèle de Black-Scholes et simulation temporelle

Contexte : Le professeur souligne un point clé concernant l'utilisation du modèle de **Black-Scholes** pour simuler l'évolution du sous-jacent dans le cas de l'autocall.
Il insiste sur le fait que, dans ce modèle, **il n'est pas nécessaire de discrétiser finement le temps** pour effectuer la simulation des trajectoires. Cela repose sur la simplicité du modèle et ses hypothèses sous-jacentes.

Modèle utilisé : Le modèle de Black-Scholes suppose une **dynamique log-normale** pour l'évolution du prix du sous-jacent (S_t) :

$$dS_t = S_t \left(r - q\right) dt + S_t \sigma dW_t$$

Propriété clé : La solution de cette équation différentielle stochastique est explicite, ce qui permet d'exprimer directement le prix du sous-jacent à un instant donné (S_t) en fonction de sa valeur initiale (S_0) :

$$S_t = S_0 \cdot e^{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}$$

Conséquence pratique : Grâce à cette solution fermée, il suffit d'évaluer S_t aux dates spécifiques où les événements du produit (comme les paiements de coupons ou les remboursements anticipés) doivent être observés. Cela évite d'avoir à discrétiser le temps de manière fine, contrairement aux modèles plus complexes (par exemple, les modèles à **volatilité locale** ou **volatilité stochastique**) qui exigent une résolution pas à pas.

Exemple : Pour un produit observé à des dates spécifiques (par exemple, chaque année), on calcule directement les valeurs de S_t aux instants $t_1, t_2, ..., t_n$:

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \cdot e^{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z_i}$$

où Z_i suit une loi normale centrée réduite ($N(0,1)$).

Implications : Ce processus est particulièrement adapté pour des produits comme les **autocalls**, où les flux sont calculés à des dates discrètes. Cependant, le professeur rappelle aussi que cette approche est simpliste et peut être améliorée avec des modèles prenant en compte des volatilités variables dans le temps.

Limites du modèle : Le modèle de Black-Scholes suppose une volatilité constante et ne capture pas les effets de **smile de volatilité**. Cela signifie que, pour des produits à **risque digital**, ce modèle peut donner des résultats approximatifs, ce qui est reconnu par le professeur. Toutefois, il reste utilisé ici pour sa simplicité et sa facilité d'implémentation en **Monte Carlo**.
—

1.9 Simulation exacte dans le modèle Black-Scholes:

Simulation exacte dans le modèle Black-Scholes

Équation différentielle stochastique : L'évolution du prix de l'actif S_t suit l'équation différentielle stochastique suivante dans le modèle de **Black-Scholes** :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t$$

Solution exacte : Cette équation peut être intégrée de manière exacte pour obtenir la solution explicite au temps t_{i+1}. En appliquant la **formule d'Itô**, nous devons inclure le terme correctif lié à la variance, ce qui donne :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1}-t_i)+\sigma\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right)}$$

Interprétation des termes :

- $(r - q - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1} - t_i)$: **Drift ajusté**, comprenant le rendement moyen ajusté par les dividendes et corrigé par la variance (**terme d'Itô**).
- $\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$: Composante aléatoire liée à la volatilité et au mouvement brownien.

1.9.1 Flexibilité temporelle dans la simulation

Observation à des intervalles irréguliers : Le professeur souligne que, dans le modèle Black-Scholes, il est possible d'évaluer directement l'évolution de l'actif sur des intervalles de temps **irréguliers**. Exemples :

- Observation à $t = 1$ an, puis à $t = 3$ ans, et enfin à $t = 10$ ans.

Grâce à la solution exacte, on peut calculer S_t uniquement aux dates d'observation nécessaires, sans avoir besoin de discrétiser finement le temps.

Avantage pour les produits structurés : Cette propriété est particulièrement utile pour les produits comme les **autocalls**, qui dépendent uniquement des valeurs du sous-jacent à des dates spécifiques (ex. paiement de coupons, remboursement anticipé). Ainsi, il n'est pas nécessaire de simuler chaque jour ou chaque mois, ce qui simplifie considérablement les calculs.

1.9.2 Cas nécessitant une discrétisation fine

Modèles plus complexes : Lorsque l'on passe à des modèles de volatilité plus sophistiqués, une discrétisation plus fine devient nécessaire :

- **Volatilité locale (Local Volatility)** : $\sigma = \sigma(t, S_t)$ dépend du temps et du niveau de l'actif.
- **Volatilité stochastique (SABR, Heston)** : σ suit une dynamique aléatoire supplémentaire.

Pourquoi discrétiser finement ?

- Ces modèles ne permettent pas de solution fermée, obligeant à une simulation pas à pas.
- Une discrétisation fine est nécessaire pour capturer correctement les variations complexes de la volatilité.
- Les modèles comme **SABR** et **Heston** nécessitent donc des calculs plus longs et une approche numérique plus avancée.

Résumé : Dans Black-Scholes, on peut se contenter d'observer le sous-jacent aux moments-clés pour évaluer un produit structuré. En revanche, les modèles de volatilité locale ou stochastique exigent une **discrétisation fine** pour intégrer correctement la dynamique plus complexe des prix et des volatilités.
—

2 Correction

2.1 Questions/Réponses basées sur l'exercice et les remarques du professeur

1. Objectif principal de l'exercice

Question : Pourquoi implémenter une simulation Monte Carlo dans cet exercice alors qu'elle n'est pas forcément utilisée en pratique ?

Réponse : L'objectif est de **s'entraîner** à modéliser les dynamiques des prix d'un produit dérivé (autocall) en utilisant la méthode Monte Carlo. Cela permet de :

- Comprendre l'impact des paramètres clés (r, q, σ) sur les payoffs.
- Réfléchir aux scénarios possibles sans dépendre de modèles avancés comme ceux utilisant la pente du **smile de volatilité**.
- Vérifier les résultats théoriques et anticiper les comportements en cas de **volatilité élevée** ou de **baisse importante** du sous-jacent.

2. Quel est l'impact des paramètres clés sur le prix du produit ?

Question : Comment les paramètres r, q, σ influencent-ils le prix et le comportement de l'autocall dans cet exercice ?

Réponse :

- **Taux sans risque** (r) **:**
  - Une **hausse** du taux entraîne une **baisse** des prix car les flux futurs sont actualisés à un taux plus élevé, ce qui les rend moins attractifs.
  - Impact direct sur l'actualisation des paiements anticipés.
- **Taux de dividende** (q) **:**
  - Une **hausse** des dividendes réduit la **croissance attendue** du sous-jacent.
  - Cela augmente le risque de franchir la barrière des **50 %**, impactant négativement le prix.
- **Volatilité** (σ) **:**
  - Une **augmentation** de la volatilité accroît la probabilité de franchir la **barrière basse (50 %)**, augmentant les scénarios défavorables.
  - Résultat : Le prix diminue car plus de simulations tombent dans des zones de **perte** ou de **non-paiement des coupons**.

3. Pourquoi ne pas utiliser directement la pente du smile de volatilité ?

Question : Pourquoi le professeur a-t-il choisi d'ignorer la pente du **smile de volatilité** dans cet exercice ?

Réponse :

- L'exercice se concentre sur les **bases du modèle Black-Scholes** avec une **volatilité constante**.
- Introduire la pente du smile nécessite un modèle plus complexe (**volatilité locale ou stochastique**), qui demande une discrétisation plus fine et des calculs plus lourds.
- L'objectif est d'abord de **raisonner sur l'impact des paramètres fondamentaux** avant d'ajouter des structures de volatilité plus complexes.

4. Pourquoi la méthode Monte Carlo est-elle pertinente pour ce produit ?

Question : Pourquoi utilise-t-on la méthode Monte Carlo pour un produit comme un autocall ?

Réponse :

- Le payoff de l'autocall dépend de **dates spécifiques** (observation annuelle des barrières).
- Monte Carlo permet de :
  - **Simuler des trajectoires multiples** et estimer la probabilité d'atteindre les barrières (100 % pour remboursement anticipé, 50 % pour pertes).
  - Évaluer les **scénarios extrêmes** et tester l'impact de la **volatilité** et des **taux** sur les probabilités de paiement ou de perte.

5. Exemple de question sur les résultats simulés

Question : Si la volatilité augmente de **28,6 %** à **35 %**, quel impact cela a-t-il sur :

- Le prix du produit ?
- Les coupons attendus ?

Réponse :

- **Prix :** Une **augmentation de la volatilité** augmente la probabilité de franchir la barrière des **50 %**, diminuant les paiements de coupons et augmentant les scénarios de remboursement réduit (**gearing à x2**). Résultat : **le prix baisse.**
- **Coupons attendus :** Moins de trajectoires respectent la condition de paiement des **6 %**, donc les coupons deviennent **plus rares** et leur valeur espérée diminue.

6. Question sur la précision de la simulation

Question : Pourquoi n'a-t-on pas besoin de discrétiser finement le temps dans cet exercice ?

Réponse :

- Dans le modèle **Black-Scholes**, les valeurs ne sont observées qu'aux **dates discrètes** (fin d'année pour les coupons, 2 ans pour la barrière).
- Il est donc inutile de discrétiser finement, car on peut calculer directement les valeurs du sous-jacent avec une **formule explicite**.
- Les modèles plus complexes (**volatilité locale ou stochastique**) nécessitent en revanche une **discrétisation plus fine**.

7. Résumé des objectifs et compétences attendues pour l'examen

- **Simulation Monte Carlo :**
  - Simuler des trajectoires de prix d'actifs dans Excel.
  - Comprendre comment modéliser la dynamique d'un produit structuré.
- **Analyse de paramètres :** Étudier l'effet de r, q, σ sur les probabilités de remboursement anticipé, de coupons, et de pertes.
- **Structure du produit :** Identifier les cas **favorables**, **défavorables** et **médians**.
- **Limites du modèle Black-Scholes :** Comprendre pourquoi il est adapté ici, mais insuffisant pour des modèles plus avancés avec **smile de volatilité**.

—

2.2 Première étape du calcul: Drift ajusté avec le modèle Black-Scholes

Objectif : Calculer la composante déterministe du modèle (μ_{adj}) sur un intervalle donné.

Formule utilisée :

$$\mu_{\text{adj}} = (r - q - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot \Delta t$$

où :

- $r = 2.5\% = 0.025$ (taux sans risque)
- $q = 5.0\% = 0.05$ (taux de dividendes)
- $\sigma = 28.6\% = 0.286$ (volatilité)
- $\Delta t = 1$ (pas de temps)

Étapes du calcul à la main :

1. Calcul de la variance de la volatilité :

$$\sigma^2 = (0.286)^2 = 0.081796$$

2. Division par 2 :

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{0.081796}{2} = 0.040898$$

3. Soustraction :

$$r - q - \frac{\sigma^2}{2} = 0.025 - 0.05 - 0.040898$$

$$= 0.025 - 0.090898 = -0.065898$$

4. Multiplication par $\Delta t = 1$:

$$\mu_{\text{adj}} = (-0.065898) \cdot 1 = -0.0659$$

Résultat :

Le drift ajusté est :

$$\mu_{\text{adj}} \approx -0.0659$$

soit environ -6.59% sur la période. Ce résultat sera utilisé pour calculer l'évolution du prix du sous-jacent dans l'étape suivante.
—

2.3 Deuxième étape : Calcul de la volatilité ajustée pour la simulation

Objectif : Calculer la contribution de la volatilité (σ) au modèle Black-Scholes sur un intervalle donné (Δt).

Formule utilisée :

Le terme à calculer correspond à la **composante aléatoire** liée au mouvement brownien dans la formule :

$$\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$$

où :

- $\sigma = 28.60\% = 0.286$ (volatilité).
- $\Delta t = 1$ (intervalle de temps en années).

Étapes du calcul :

1. Racine carrée de Δt :

$$\sqrt{1} = 1$$

2. Multiplication par la volatilité σ :

$$0.286 \cdot 1 = 0.286$$

Résultat :

La volatilité ajustée sur l'intervalle est :

$$\sigma \cdot \sqrt{\Delta t} = 0.286$$

soit **28.6 %**.

Interprétation :

Ce résultat représente l'ampleur des fluctuations potentielles (incertitudes) du sous-jacent sur un pas de temps $\Delta t = 1$.

Cette valeur sera multipliée par un terme Z issu d'une loi normale standard ($N(0, 1)$) pour modéliser la composante stochastique du prix.

Application dans la formule complète :

Dans le modèle Black-Scholes, la formule complète du prix simulé devient :

$$S_{t+1} = S_t \cdot e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z}$$

Ce calcul concerne uniquement la partie :

$$\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}$$

qui intervient dans la **composante aléatoire** liée au mouvement brownien.

—

2.3.1 Pourquoi peut-on et doit-on réécrire le terme $\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ sous la forme $\sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}X$?

1. Origine du terme : Mouvement Brownien

Le modèle de **Black-Scholes** repose sur un **mouvement brownien** (W_t) pour modéliser les fluctuations aléatoires des prix. Le mouvement brownien a les propriétés suivantes :

- $W_0 = 0$ (commence à zéro).
- W_t suit une distribution normale :

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$$

  Cela signifie que l'incrément $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ suit une distribution normale centrée à 0 avec une **variance proportionnelle au temps** :

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$$

2. Justification mathématique

Le terme dans la formule initiale est :

$$\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Puisque $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ suit une loi normale, on peut l'écrire comme un produit :

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = \sqrt{t_{i+1} - t_i}X$$

où :

- X suit une **loi normale standard** : $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $\sqrt{t_{i+1} - t_i}$ ajuste la variance en fonction de la taille de l'intervalle.

En remplaçant dans la formule :

$$\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}X$$

Cette transformation est utilisée dans la dynamique du sous-jacent :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \cdot e^{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1}-t_i)+\sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}X}$$

3. Pourquoi cette réécriture est-elle nécessaire ?

A. Simplification des simulations numériques :

- En pratique (par exemple dans Excel), on n'utilise pas directement un processus brownien continu W_t.
- On génère plutôt des nombres aléatoires X avec :

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

  à l'aide de la fonction Excel : `LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())`.

B. Normalisation :

- Cette transformation standardise l'incrément brownien, ce qui facilite les calculs pour des modèles complexes.
- Cela permet d'appliquer la même méthode, même pour des modèles avec **volatilité locale** ou **volatilité stochastique**.

C. Adaptation aux intervalles irréguliers :

- Le facteur $\sqrt{t_{i+1} - t_i}$ ajuste automatiquement l'effet du bruit aléatoire en fonction de la durée de l'intervalle.
- Utile lorsque les observations se font à des pas irréguliers (par exemple, 1 an, puis 3 ans, puis 10 ans).

4. Exemple numérique

Paramètres :

- $\sigma = 0.286$
- $t_{i+1} - t_i = 1$
- $X = -0.5$

Calcul :

$$\sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}X = 0.286 \cdot 1 \cdot (-0.5)$$

$$= -0.143$$

Ce terme est ensuite utilisé dans la formule exponentielle pour modéliser la composante aléatoire.

5. Résumé clair :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \cdot e^{\text{drift+aléatoire}}$$

où :

- **Drift** : $\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i)$
- **Aléatoire** : $\sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}X$

—

2.4 Calcul du payoff et du prix dans un autocall avec Monte Carlo

1. Simulation des flux annuels

a. Condition sur la barrière (50 %) :

Objectif : Verser un **coupon fixe (6 %)** si le sous-jacent est au-dessus de la barrière (50 %), sinon **0**.

Formule Excel :

=SI(C10¿50; $B$6; 0)

Formule mathématique :

$$\text{Flux}_t = \begin{cases} C & \text{si } S_t > 0.5 \cdot S_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où :

- $C = 6$ (coupon).
- S_t : Niveau du sous-jacent à la date t.
- S_0 : Niveau initial du sous-jacent.

b. Condition sur le remboursement anticipé (100 %) :

Objectif : Rembourser le capital (100) + coupon (6) si le sous-jacent dépasse **100 %**.

Formule Excel :

=SI(D10¿50; $B$6; 0) + SI(D10¿100; 100; 0)

Formule mathématique :

$$\text{Flux}_t = \begin{cases} C + K & \text{si } S_t > S_0 \\ C & \text{si } S_t > 0.5 \cdot S_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où :

- $K = 100$ (capital remboursé).
- $C = 6$ (coupon).

c. Condition pour arrêt anticipé (MAX) :

Objectif : Si un remboursement a déjà eu lieu dans une période précédente (niveau ¿ 100 %), tous les flux suivants sont **0**.

Formule Excel :

=SI(MAX($D10:D10)¿100; 0;...)

Formule mathématique :

$$\text{Flux}_t = \begin{cases} 0 & \text{si } \max(S_{t'}) > S_0 \text{ pour } t' \leq t \\ \text{Calcul précédent} & \text{sinon} \end{cases}$$

d. Condition finale à maturité (8 ans) :

Objectif : Verser **106 %** si le sous-jacent est au-dessus de **50 %**. Sinon, verser **2 fois** le niveau final (protection partielle).

Formule Excel :

=SI(MAX($D10:D10)¿100; 0; SI(E10¿50; 106; 2*E10))

Formule mathématique :

$$\text{Flux}_T = \begin{cases} 0 & \text{si remboursement anticipé} \\ 106 & \text{si } S_T > 0.5 \cdot S_0 \\ 2 \cdot S_T & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Actualisation des flux

Objectif : Ramener chaque flux futur à sa **valeur présente** en tenant compte du taux sans risque (r) et du temps (t).

Formule Excel :

=L2*S10

Formule mathématique :

$$V_t = \frac{\text{Flux}_t}{(1+r)^t}$$

où :

- V_t : Valeur actualisée au temps t.
- $r = 2.5\%$: Taux sans risque.

3. Somme des flux actualisés

Objectif : Additionner tous les flux actualisés pour une trajectoire donnée.

Formule Excel :

=SOMMEPROD($L$2:$S$2; L10:S10)

Formule mathématique :

$$PV = \sum_{t=1}^{T} V_t$$

où :

- PV : Valeur présente totale pour une trajectoire.

4. Prix final par moyenne empirique

Objectif : Calculer la **moyenne empirique** des valeurs présentes (PV) obtenues pour **10 000 simulations Monte Carlo**.

Formule Excel :

=MOYENNE(Toutes les PV simulées)

Formule mathématique :

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} PV_i$$

où :

- P : Prix estimé du produit.
- $N = 10000$: Nombre de simulations.

5. Résumé des étapes

- **Simulation des trajectoires :** Générer S_t en utilisant la formule Black-Scholes :

$$S_{t+1} = S_t e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1}-t_i)+\sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}X}$$

- **Calcul des flux :** Vérifier les conditions sur les coupons et remboursements anticipés.
- **Actualisation :** Ramener chaque flux à sa valeur présente avec :

$$V_t = \frac{\text{Flux}_t}{(1+r)^t}$$

- **Prix final :** Moyenne empirique des résultats sur les 10 000 simulations :

$$P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} PV_i$$

—

3 Interprétation qualitative de l'impact des paramètres sur le prix de l'EMTN

3.1 Impact de la volatilité (σ) sur le prix

Effet de l'augmentation de la volatilité : Lorsque la volatilité passe de **28%** à **30%**, le prix de l'EMTN **diminue**. Cela s'explique par le fait que le produit est **vega négatif**.

Explication qualitative : Une volatilité plus élevée signifie qu'il y a une **probabilité accrue** que le sous-jacent :

- Descende sous la **barrière fatidique de 50 %** avant maturité, ce qui conduit à une **perte en capital**.
- Soit **jamais remboursé anticipativement**, augmentant ainsi le risque global associé au produit.

Exemple avec Excel : - Si la volatilité est augmentée à **50 %**, on observe un nombre significatif de scénarios avec des pertes sévères, car l'actif devient **très volatil** et franchit fréquemment la barrière de **50 %**. - Résultat : la valeur à maturité est souvent faible, ce qui entraîne un prix réduit pour le produit.

Cas opposé : faible volatilité :

- Si la volatilité est réduite à **14 %**, le produit devient **cher**.
- Les scénarios avec pertes en capital sont **moins fréquents**, et les pertes lorsqu'elles surviennent sont **modérées**.
- Cela reflète une situation où le sous-jacent est **stable**, rendant les coupons et remboursements anticipés **plus probables**.

Lien avec la volatilité implicite : La volatilité implicite permettant une **émission au pair** est environ **25.5 %**. Cela reflète l'équilibre entre les gains potentiels des coupons et le risque de perte en capital.

—

3.2 Impact du taux d'intérêt (r) sur le prix

Effet de l'augmentation du taux d'intérêt : Une hausse des taux d'intérêt entraîne une **baisse du prix** de l'EMTN.

Explication qualitative :

- Une augmentation des taux accroît le taux d'actualisation utilisé pour ramener les flux futurs (coupons et remboursement) à leur **valeur présente**.
- Plus le taux est élevé, plus la **valeur actualisée** des flux est faible.

Lien avec les flux : Les coupons sont fixés à **6 %** dans cet exemple, donc un taux d'intérêt plus élevé rend ces flux futurs moins attractifs par rapport aux investissements alternatifs à **rendement garanti**. Cela diminue la demande pour le produit, ce qui réduit son prix.

—

3.3 Impact du taux de dividende (q) sur le prix

Effet de l'augmentation du taux de dividende : Une hausse des dividendes réduit la **croissance attendue** du sous-jacent, car une partie de la performance est **distribuée sous forme de dividendes**.

Explication qualitative :

- Les dividendes sont déduits du prix du sous-jacent, ce qui réduit sa performance future attendue.
- Cela augmente le risque que l'actif passe sous la **barrière des 50 %**, diminuant ainsi les paiements des coupons et augmentant les scénarios de perte en capital.

Conséquence sur la structure du produit :

- Avec un taux de dividende plus élevé, le produit devient plus **risqué**, car il y a moins de chances d'atteindre la barrière de **100 %** pour un remboursement anticipé.
- Cela se traduit par un prix plus faible pour l'EMTN.

—

3.4 Interprétation intuitive : L'investisseur est short d'un put down-and-in

Analyse simplifiée : Le professeur utilise l'image d'un investisseur **short d'un put down-and-in** pour décrire le comportement du produit :

- L'investisseur reçoit des **coupons fixes** tant que l'actif reste au-dessus de la barrière.
- Si la barrière est franchie, l'investisseur subit une perte en capital, comme dans une **vente de put** où il accepte de racheter un actif déprécié.

Lien avec la perte potentielle : À maturité, si le sous-jacent est sous la barrière, la perte est calculée proportionnellement au niveau atteint (**gearing x2**). Ce comportement est similaire à un **put optionnel activé** lorsque le prix passe sous un seuil prédéfini.

—

3.5 Niveau approximatif pour une émission au pair

Volatilité implicite au pair : Pour que le produit soit **émis au pair** (prix = 100), la volatilité doit être autour de **25.5 %**.

Pourquoi ce niveau ?

- À ce niveau, l'équilibre entre les gains liés aux coupons et les pertes potentielles en capital permet une valeur neutre (**fair price**).
- Une volatilité plus basse ($< 25.5\%$) rend le produit **plus sûr**, augmentant sa demande et son prix.
- Une volatilité plus élevée ($> 25.5\%$) augmente les scénarios défavorables, réduisant le prix.

—

3.6 Résumé des effets des paramètres

- **Volatilité (σ) :** Plus elle est élevée, plus les pertes potentielles augmentent, réduisant le prix.
- **Taux d'intérêt (r) :** Plus il est élevé, plus l'actualisation diminue les flux futurs, réduisant le prix.
- **Taux de dividende (q) :** Plus il est élevé, plus la performance attendue est réduite, augmentant le risque de franchir la barrière.

Questions types pour l'examen

- **Pourquoi l'EMTN est-il vega négatif ?** Expliquer l'impact de la volatilité sur le nombre de scénarios défavorables.
- **Quel est l'effet d'un taux de dividende élevé ?** Justifier la réduction de performance et l'augmentation du risque de perte.
- **Comment l'investisseur est-il exposé au risque de perte ?** Relier le comportement du produit à un put down-and-in.

—

4 Complément d'explications sur les grecques et l'impact des paramètres

4.1 Importance du vega-hedge et des risques liés à la digitalisation

Produits digitaux et réplicabilité : On rappelle que certains produits, comme les options **digitales**, présentent des caractéristiques **binairement asymétriques** (payout de type 0 ou 1).

- Exemple : Une digitale européenne peut être **répliquée** par un **call spread**.
- Problème : Si on ne traite pas directement ce call spread et qu'on se limite à un **delta-hedge** (couverture avec le sous-jacent uniquement), le risque devient **très élevé**.

Illustration du risque : Entre un sous-jacent à 99 et 101 à maturité, la digitale vaut respectivement 0 ou 1.

- On constate une **discontinuité** impossible à répliquer avec uniquement du sous-jacent.
- Une couverture efficace nécessite donc un **vega-hedge**, c'est-à-dire un ajustement basé sur la **volatilité implicite**.

—

4.2 Impact du taux de dividende (q) sur le prix

Baisse du taux de dividende : On démontre qu'en réduisant le taux de dividende de **5 %** à **0 %**, le prix du produit **augmente**.

Explication qualitative : Le taux de dividende joue un rôle direct sur le **drift risque neutre** de l'actif :

$$F_T = S_0 e^{(r-q)T}$$

- $r - q$ détermine l'évolution attendue du sous-jacent sous la **mesure risque neutre**.
- Si q est élevé, la performance attendue du sous-jacent est plus faible (**forward décroissant**).
- Une baisse de q réduit l'effet négatif sur la croissance attendue, augmentant donc les valeurs futures simulées.

Conséquence sur les scénarios :

- Avec un taux de dividende de **5 %**, la moyenne attendue (espérance) de l'actif est **81** après 8 ans.
- Cela entraîne un nombre élevé de **scénarios baissiers**, ce qui augmente la probabilité de pertes en capital.
- En réduisant le dividende à **0 %**, l'espérance est plus élevée, ce qui réduit les scénarios défavorables et donc **augmente le prix**.

—

4.3 Comparaison avec la volatilité (σ)

Rôle différent des paramètres :

- **Dividendes (q) :** Affectent l'**espérance mathématique** de l'actif.
- **Volatilité (σ) :** Affecte principalement la **dispersion** des scénarios, augmentant les probabilités d'atteindre des niveaux extrêmes (fortes baisses).

Scénarios extrêmes et asymétrie : - Le produit est **asymétrique** car :

- En cas de hausse du sous-jacent (+10% ou +100%), les gains sont plafonnés (6%).
- En cas de forte baisse, les pertes peuvent être **considérables**, particulièrement sous la barrière de **50 %**.

- La volatilité augmente donc les scénarios défavorables, ce qui **diminue le prix**.

—

4.4 Résumé des effets des paramètres sur l'EMTN

Taux de dividende (q) :

- Affecte le **drift** (croissance attendue sous risque neutre).
- Un taux élevé réduit la moyenne attendue du sous-jacent, augmentant les scénarios défavorables.
- Une baisse de q augmente donc le prix du produit.

Volatilité (σ) :

- Affecte la **dispersion des scénarios**.
- Plus elle est élevée, plus les pertes potentielles en capital sont importantes, réduisant le prix.

Taux d'intérêt (r) :

- Augmente le taux d'actualisation, réduisant la valeur présente des flux futurs.
- Résultat : Une hausse de r diminue le prix du produit.

—

Exemple chiffré avec les formules

Taux de dividende initial : $q = 5\%$

$$F_T = 100 \cdot e^{(0.025-0.05)\cdot 8}$$

$$F_T = 100 \cdot e^{-0.2} \approx 81.87$$

Taux de dividende réduit : $q = 0\%$

$$F_T = 100 \cdot e^{(0.025-0)\cdot 8}$$

$$F_T = 100 \cdot e^{0.2} \approx 122.14$$

—

4.5 Questions types pour l'examen

- **Pourquoi un vega-hedge est-il nécessaire dans un produit digital ?** Réponse : Car les discontinuités des payoffs ne peuvent pas être répliquées uniquement avec du sous-jacent.
- **Quel est l'impact d'une baisse du taux de dividende sur le prix du produit ?** Réponse : La baisse augmente l'espérance mathématique du sous-jacent, réduisant les scénarios défavorables et augmentant le prix.

- **Pourquoi la volatilité diminue-t-elle le prix du produit ?** Réponse : Elle accroît les scénarios extrêmes (fortes baisses), augmentant les risques de pertes et réduisant la valeur attendue.
- **Quel rôle joue l'asymétrie dans la tarification ?** Réponse : Le produit limite les gains en hausse (plafonnés à 6 %), mais expose à des pertes importantes en cas de baisse, ce qui impacte la tarification.

Ce complément d'explication montre comment les paramètres principaux (q, r, σ) influencent les scénarios de performance et de risque d'un autocall. La combinaison d'une **espérance ajustée par les dividendes** et d'une **dispersion contrôlée par la volatilité** explique la sensibilité du prix aux conditions de marché. Une attention particulière est donnée à la couverture par **vega-hedge** en raison de la nature asymétrique et digitale du produit.
—

5 Autocall Hedios

1. Structure et fonctionnement de l'autocall Hedios

Indice de référence : L'indice utilisé est basé sur l'**Euro Stoxx 70**, comprenant :

- **Équipondération (Equal Weight)** : Chaque action a le même poids.
- **Dividendes réinvestis avec décrément de 5 %** : Les dividendes sont réinvestis, mais on soustrait **5 % par an**, simulant un taux de dividendes fixe ($q = 5\%$).

2. Avantages de la décrémentation des dividendes

Réduction de l'incertitude :

- Élimine l'incertitude liée aux dividendes variables, simplifiant la tarification.
- Modélise un taux de dividendes fixe, permettant d'utiliser un drift égal au **taux sans risque** moins $q = 5\%$.

Modèle simplifié :

- Facilite les calculs en éliminant la nécessité d'estimer des dividendes futurs.
- Permet de travailler avec un indice ajusté au risque neutre, évitant des approximations complexes.

3. Mécanisme de remboursement anticipé automatique

Observations trimestrielles : Dès la fin de la **première année**, possibilité de remboursement anticipé.

Coupon conditionnel :

- Versement d'un **coupon de 2,5 % par trimestre écoulé** (**10 % par an**).
- Exemple : Remboursement après **3 trimestres** $= 3 \times 2.5\% = 7.5\%$.

Gain plafonné :

- Les gains sont **limités à 10 % par an**.
- Produit conçu pour un rendement **régulier** avec un risque maîtrisé.

4. Paiement différé des coupons

Coupons cumulés :

- Les coupons sont versés **en une fois à la fin**.
- Risque de perte totale des coupons si le remboursement anticipé ne se déclenche jamais.

5. Cas de scénario défavorable

À l'échéance (si aucun remboursement anticipé) :

- Si l'indice est **au-dessus de 70 %** : Capital initial remboursé.
- Si l'indice est **sous 70 %** : **Perte proportionnelle à la baisse**.

Exemple : Si l'indice termine à **60 %**, remboursement =

$$60\% \times \text{Capital initial}$$

6. Types de produits similaires

Produits de type Athéna ou Phénix :

- Coupons conditionnels et remboursement anticipé.
- Protection partielle avec perte proportionnelle en cas de baisse.

7. Analyse qualitative des paramètres

A. Taux de dividende ($q = 5\%$)

- Fixé forfaitairement pour simplifier les calculs et éliminer l'incertitude.
- Rend les flux de trésorerie **prévisibles**.

B. Volatilité (σ)

- **Volatilité élevée :**
  - Augmente la probabilité de scénarios défavorables (**indice sous 70 %**).
  - Diminue les paiements attendus et augmente les pertes potentielles.
- **Volatilité faible :**
  - Moins de scénarios défavorables et plus de remboursements anticipés.
  - Prix du produit augmente.

C. Taux d'intérêt (r)

- **Taux plus élevé :**
  - Réduit la **valeur actualisée** des flux futurs.
  - Diminue le prix du produit.
- **Taux plus faible :**
  - Augmente la valeur présente des flux futurs.
  - Prix du produit augmente.

8. Niveau approximatif pour une émission au pair

Volatilité implicite au pair :

- Le produit est émis au pair (**prix = 100**) à une volatilité de **25.5 %**.
- Une volatilité plus faible augmente la stabilité et le prix.
- Une volatilité plus élevée accroît les pertes potentielles et diminue le prix.

9. Résumé des effets des paramètres

- **Volatilité (σ) :** Augmentation = Scénarios défavorables et pertes accrues.
- **Taux d'intérêt (r) :** Hausse = Actualisation des flux réduite, prix en baisse.
- **Taux de dividende (q) :** Plus élevé = Performance réduite, risque accru.

10. Questions types pour l'examen

- **Pourquoi fixer forfaitairement un taux de dividende ($q = 5\%$) ?** Pour simplifier la tarification et éliminer l'incertitude liée aux dividendes variables.
- **Quel est l'impact d'une hausse de la volatilité sur ce produit ?** Plus de scénarios défavorables (baisse sous 70 %), réduction des coupons attendus et pertes accrues.
- **Pourquoi parle-t-on de protection partielle ?** L'investisseur est protégé au-dessus de 70 %, mais subit une perte proportionnelle en dessous.
- **Expliquez le lien entre remboursement anticipé et taux d'intérêt.** Les taux élevés réduisent la valeur actualisée des flux futurs, rendant le remboursement anticipé moins attractif.