L'isométrie stochastique

Jean-François Berger-Lefébure

15 Octobre 2024

Contents

1 Introduction à la notion d'isométrie

1.1 Origine et sens général du mot "isométrie"

Le mot "isométrie" provient du grec ancien, où *iso* signifie "égal" et *metron* signifie "mesure". En mathématiques, une isométrie désigne une transformation qui **préserve les distances**. Autrement dit, si deux points A et B ont une certaine distance avant une transformation, cette distance reste inchangée après l'application de l'isométrie.

Exemples d'isométries dans le plan:

- Une rotation: tourner une figure autour d'un point sans changer sa forme ou la distance entre ses points.
- Une translation: déplacer une figure dans le plan tout en conservant ses proportions et les distances entre ses points.
- Une symétrie: refléter une figure par rapport à une droite sans altérer les distances internes.

Ainsi, en géométrie, l'isométrie est souvent associée à des transformations qui préservent la "forme" ou la "structure" d'un objet.

—

1.2 Pourquoi cette propriété est appelée "isométrie"?

L'origine du mot "isométrie" dans ce cas vient de l'idée de **préserver une mesure**, ici la norme quadratique moyenne. Plus précisément:

- L'intégrale stochastique $\int_0^t \phi_s \, dW_s$ est un objet aléatoire: sa "taille moyenne" (quadratique) est mesurée par $\mathbb{E}\left[(\cdot)^2\right]$.
- L'intégrale déterministe $\int_0^t \phi_s^2 \, ds$ est un calcul simple qui représente la même taille quadratique moyenne, mais sans aléa.
- L'isométrie établit que ces deux quantités sont **égales**, ce qui garantit une correspondance entre les objets stochastiques et déterministes en termes de "taille quadratique".

Cette propriété préserve donc une certaine "mesure" entre deux mondes: celui des processus aléatoires et celui des intégrales classiques.

---

2 Origine de l'isométrie stochastique

L'isométrie stochastique, utilisée aujourd'hui dans le calcul stochastique, a été découverte et formalisée dans les travaux fondamentaux de **Kiyoshi Itô** (1915-2008), un mathématicien japonais.

—

2.1 Contributions de Kiyoshi Itô

a) Création du calcul d'Itô : Dans les années 1940, Kiyoshi Itô a développé une théorie révolutionnaire appelée **calcul stochastique**, qui permet de manipuler rigoureusement des processus aléatoires comme le mouvement brownien.

- Il a introduit la notion d'intégrale stochastique $\int_0^t \phi_s \, dW_s$, qui est aujourd'hui un outil fondamental pour analyser les phénomènes aléatoires.
- Sa définition des intégrales stochastiques a permis d'établir des propriétés clés, dont **l'isométrie stochastique**.

b) Propriété d'isométrie : L'isométrie stochastique découle directement des définitions d'Itô pour l'intégrale stochastique. Cette propriété relie:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s\, dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \phi_s^2\, ds.$$

Elle établit un lien entre les fluctuations aléatoires d'un processus (membre de gauche) et une intégrale déterministe plus simple (membre de droite).

c) Applications de l'isométrie : L'isométrie a simplifié l'étude des processus aléatoires en :

- Permettant des calculs exacts pour des mesures moyennes comme la norme quadratique moyenne.
- Facilitant l'analyse des propriétés des systèmes soumis à des perturbations aléatoires.

—

2.2 Héritage de Kiyoshi Itô

Le travail de Kiyoshi Itô a eu un impact majeur:

- Il a posé les bases du **calcul stochastique moderne**, utilisé aujourd'hui en finance, physique, ingénierie et bien d'autres domaines.
- L'isométrie stochastique, en particulier, est devenue un outil fondamental pour relier les propriétés statistiques des processus aléatoires à des outils analytiques déterministes.

L'isométrie stochastique, découverte par **Kiyoshi Itô** dans les années 1940, est une propriété clé du calcul stochastique. Elle relie la norme quadratique moyenne d'une intégrale stochastique à une intégrale déterministe équivalente. Les travaux d'Itô ont révolutionné la manière d'analyser et de manipuler les processus aléatoires, et son héritage est toujours au cœur de nombreuses applications modernes.

---

3 Démonstration

Expression initiale

Nous avons une somme discrète:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Nous voulons développer son carré:

$$S^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)^2.$$

—

3.1 Étape 1: Écrire explicitement le carré

Écrivons explicitement ce carré comme un produit de deux sommes:

$$S^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \phi_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right).$$

Cela correspond à une double somme:

$$S^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \phi_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \cdot \phi_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

—

3.2 Étape 2: Séparer les termes selon $i = j$ et $i \neq j$

La double somme peut être décomposée en deux parties:

- Les termes où $i = j$ (les indices i et j sont les mêmes).
- Les termes où $i \neq j$ (les indices i et j sont différents).

Ainsi, on peut écrire:

$$S^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + \sum_{i \neq j} \phi_{t_i} \phi_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

—

3.3 Étape 3: Comprendre les deux types de termes

1. Terme diagonal ($i = j$):

- Ces termes correspondent à la contribution de chaque i lorsqu'il est multiplié par lui-même.
- Ils prennent la forme:

$$\phi_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2.$$

2. Terme croisé ($i \neq j$):

- Ces termes représentent les interactions entre deux indices différents i et j.
- Ils prennent la forme:

$$\phi_{t_i} \phi_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

—

3.4 Étape 4: Écrire la somme totale

En combinant les deux types de termes, on peut écrire le carré S^2 comme:

$$S^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + \sum_{i \neq j} \phi_{t_i} \phi_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

—

3.5 Étape 5: Prendre l'espérance

Prenons maintenant l'espérance de cette expression:

$$\mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{i \neq j} \phi_{t_i} \phi_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right].$$

—

3.5.1 Analyse des deux termes

1. Terme diagonal ($i = j$):

- Par linéarité de l'espérance:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2].$$

- On sait que $\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$, donc:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i).$$

2. Terme croisé ($i \neq j$):

- Par indépendance des accroissements $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ et $W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$ (pour $i \neq j$):

$$\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] = \mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \cdot \mathbb{E}[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}].$$

- Or, comme $\mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] = 0$, ce produit est nul:

$$\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] = 0.$$

- Par conséquent, tous les termes croisés $i \neq j$ ont une espérance nulle.

—

3.6 Étape 6: Résultat final

En combinant les résultats des deux termes, on obtient:

$$\mathbb{E}[S^2] = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i).$$

Cela montre que l'espérance quadratique moyenne de la somme discrète dépend uniquement des termes diagonaux.
—

3.7 Étape 7: Passage à la limite

Lorsque la subdivision devient infiniment fine ($n \to \infty$), la somme discrète converge vers une intégrale déterministe:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) \to \int_0^t \phi_s^2 \, ds.$$

Cela établit la propriété d'isométrie:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \phi_s^2 \, ds.$$

—

Conclusion

En développant le carré de la somme pas à pas, nous avons vu:

- Les termes diagonaux ($i = j$) contribuent au calcul final.
- Les termes croisés ($i \neq j$) disparaissent grâce à l'indépendance des accroissements et leur moyenne nulle.

Cette structure permet de relier la norme quadratique moyenne d'une intégrale stochastique à une intégrale déterministe, via la propriété d'isométrie.

---

4 À quoi sert la norme quadratique moyenne de l'intégrale stochastique ?

La norme quadratique moyenne (L^2) d'une intégrale stochastique, notée $\mathbb{E}[X^2]$, a plusieurs utilités importantes dans le cadre des processus stochastiques. Voici pourquoi elle est essentielle.

—

4.1 Mesurer la taille moyenne du processus

La norme quadratique moyenne représente la **taille moyenne au carré** d'un objet aléatoire, comme une intégrale stochastique. Elle donne une estimation globale des fluctuations moyennes de ce processus sur tous les chemins possibles.
Par exemple, pour l'intégrale stochastique $X = \int_0^t \phi_s \, dW_s$, où W_s est un mouvement brownien:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s\right)^2\right].$$

Cette quantité mesure l'intensité moyenne des variations de X, mais en moyenne sur tous les chemins possibles du mouvement brownien.

—

4.2 Prédire la variabilité du processus

L'intégrale stochastique dépend du chemin suivi par le mouvement brownien W_s. Cependant, grâce à la norme quadratique moyenne, nous pouvons estimer globalement l'amplitude des fluctuations, sans avoir à simuler tous les chemins possibles.
En particulier, cette mesure est cruciale pour comprendre comment un processus fluctue dans des contextes aléatoires.

—

4.3 Applications pratiques

La norme quadratique moyenne est utile dans plusieurs domaines:

a) Estimation des risques en finance Dans la modélisation financière, les processus stochastiques sont utilisés pour décrire les fluctuations des prix des actifs. La norme quadratique moyenne est liée à la **volatilité**, qui mesure l'amplitude moyenne des variations d'un actif.

b) Conception de systèmes robustes en ingénierie Lorsqu'un système est soumis à des bruits aléatoires, la norme quadratique moyenne permet d'évaluer les perturbations moyennes dues à ces bruits.

c) Calcul de l'énergie moyenne d'un signal bruité Dans le traitement des signaux, la norme quadratique moyenne donne une mesure de l'énergie moyenne d'un signal soumis à un bruit aléatoire.

—

4.4 Relation avec l'isométrie

La propriété d'isométrie permet de relier la norme quadratique moyenne de l'intégrale stochastique à une intégrale déterministe simple:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \phi_s^2 \, ds.$$

Cela simplifie considérablement le calcul, car:

- On peut éviter de manipuler directement les propriétés aléatoires du mouvement brownien W_s.
- On remplace un calcul complexe par une intégrale déterministe facile à évaluer.

—

4.5 Résumé

La norme quadratique moyenne sert à:

- **Quantifier la taille moyenne d'un processus aléatoire**: Elle donne une mesure globale des fluctuations d'un processus.
- **Simplifier les calculs:** Grâce à l'isométrie, elle peut être calculée de manière déterministe.
- **Analyser les propriétés des systèmes soumis à des aléas:** Elle est utilisée en finance, en ingénierie et dans d'autres domaines pour modéliser et prédire les variations.

Ainsi, la norme quadratique moyenne est une mesure clé pour comprendre et manipuler les intégrales stochastiques dans des contextes pratiques.

5 Pourquoi $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$?

La relation $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$ découle directement des propriétés fondamentales du **mouvement brownien**. Voici une explication détaillée étape par étape.

5.1 Définition de ΔW_{t_i}

Dans une subdivision de l'intervalle de temps $[0, t]$, les accroissements du mouvement brownien W_t sur un intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ sont notés:

$$\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}.$$

Le mouvement brownien W_t est défini par trois propriétés fondamentales:

1. $W_0 = 0$ presque sûrement;
2. Les accroissements ΔW_{t_i} sur des intervalles disjoints sont indépendants;
3. Les accroissements ΔW_{t_i} suivent une distribution normale:

$$\Delta W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i),$$

où $t_{i+1} - t_i$ est la longueur de l'intervalle.

5.2 Propriétés des variables normales

Pour une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- L'espérance est $\mathbb{E}[X] = \mu$;
- La variance est $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$;
- La relation entre la variance et l'espérance est donnée par:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Si X a une moyenne nulle ($\mu = 0$), la relation devient simplement:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2].$$

5.3 Application au mouvement brownien

Pour le mouvement brownien W_t, on sait que:

$$\Delta W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i).$$

Cela signifie que:

- $\mathbb{E}[\Delta W_{t_i}] = 0$ (l'accroissement moyen est nul);
- $\mathrm{Var}(\Delta W_{t_i}) = t_{i+1} - t_i$.

Puisque la moyenne de ΔW_{t_i} est nulle, on applique la relation $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = \mathrm{Var}(\Delta W_{t_i}).$$

Ainsi, on obtient:

$$\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i.$$

5.4 Pourquoi cette relation est importante?

Dans la démonstration de l'isométrie pour l'intégrale stochastique, nous approximerons cette dernière par une somme discrète:

$$\int_0^t \phi_s \, dW_s \approx \sum_i \phi_{t_i} \Delta W_{t_i}.$$

Pour calculer l'espérance quadratique de cette somme, on a besoin de $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2]$. La relation $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$ nous permet de relier directement les fluctuations du mouvement brownien à la durée de chaque intervalle de temps.

5.5 Intuition

Cette relation traduit le fait que les fluctuations quadratiques moyennes ($\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2]$) du mouvement brownien sur un intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ sont directement proportionnelles à la longueur de cet intervalle ($t_{i+1} - t_i$).

Exemple: Si $[t_i, t_{i+1}] = [0, 1]$, alors $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = 1$. Si $[t_i, t_{i+1}] = [0, 0.5]$, alors $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = 0.5$. Cela reflète la manière dont les fluctuations du mouvement brownien s'étalent sur le temps.

5.6 Conclusion

La relation $\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$ est une conséquence directe des propriétés fondamentales du mouvement brownien, en particulier sa définition en tant que processus gaussien. Elle est essentielle pour démontrer des propriétés comme l'isométrie dans le calcul stochastique.