3/ Couvrir les options

Antonin Chaix | antonin.chaix@gmail.com

DIFIQ | DIPLÔME EN FINANCE QUANTITATIVE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE-PSL I ENSAE PARIS I BÄRCHEN EDUCATION

Options : les sensibilités (« grecques »)

Le Delta (Δ)

Sensibilité de la prime de l'option au cours de l'actif sous-jacent

Le Gamma (Γ)

Sensibilité du Delta au cours de l'actif sous-jacent

Le Thêta (θ)

Sensibilité de la prime de l'option à l'écoulement du temps

Le Véga (V)

Sensibilité de la prime de l'option à la volatilité de l'actif sous-jacent

Le Rhô (ρ)

Sensibilité de la prime de l'option au taux d'intérêt sans risque

Expression des grecques

Notations : $$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \qquad n(x) = \mathcal{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Delta, gamma et véga :

$$\Delta_{\text{call}} = \frac{\partial C_0}{\partial S_0} = \mathcal{N}(d_1) \qquad \Delta_{\text{put}} = \frac{\partial P_0}{\partial S_0} = \mathcal{N}(d_1) - 1$$

$$\Gamma_{\text{call}} = \frac{\partial^2 C_0}{\partial S_0^2} = \frac{\partial \Delta_{\text{call}}}{\partial S_0} = \frac{n(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = \Gamma_{\text{put}}$$

$$\mathrm{V}_{\text{call}} = \frac{\partial C_0}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T}\, n(d_1) = \mathrm{V}_{\text{put}}$$

Expression des grecques

Thêta et rho :

$$\theta_{\text{call}} = -\frac{\partial C_0}{\partial T} = -\frac{\sigma S_0\, n(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

$$\theta_{\text{put}} = -\frac{\partial P_0}{\partial T} = -\frac{\sigma S_0\, n(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\mathcal{N}(-d_2)$$

$$\rho_{\text{call}} = \frac{\partial C_0}{\partial r} = TKe^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

$$\rho_{\text{put}} = \frac{\partial P_0}{\partial r} = -TKe^{-rT}\mathcal{N}(-d_2)$$

Pense bête…

Position	Delta	Gamma	Thêta	Vega	Rhô
Achat d’un call	> 0	> 0	< 0	> 0	> 0
Vente d’un call	< 0	< 0	> 0	< 0	< 0
Achat d’un put	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0
Vente d’un put	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

	En dehors de la monnaie	**A la monnaie**	**Dans la monnaie**
Call	$0 < \Delta < 0,5$	$\Delta \approx 0,5$	$0,5 < \Delta < 1$
Put	$-0,5 < \Delta < 0$	$\Delta \approx -0,5$	$-1 < \Delta < -0,5$

TP Excel

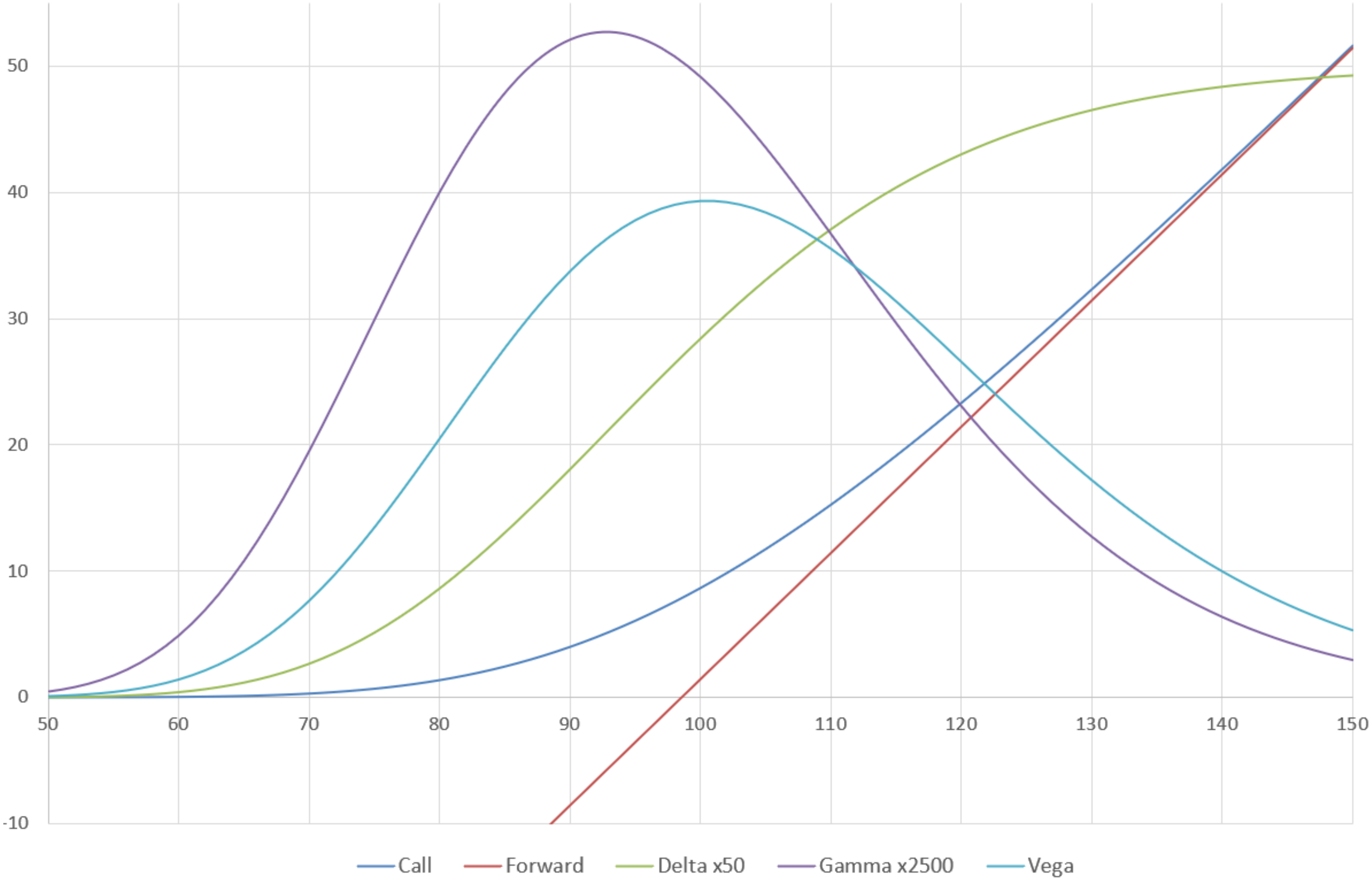
Call 1 an avec $K = S_0 = 100$; $\sigma = 20\%$; $r = 1{,}50\%$

Faire varier le cours S_0 de 50 à 150 et représenter sur le même graphique, en fonction de S_0 :

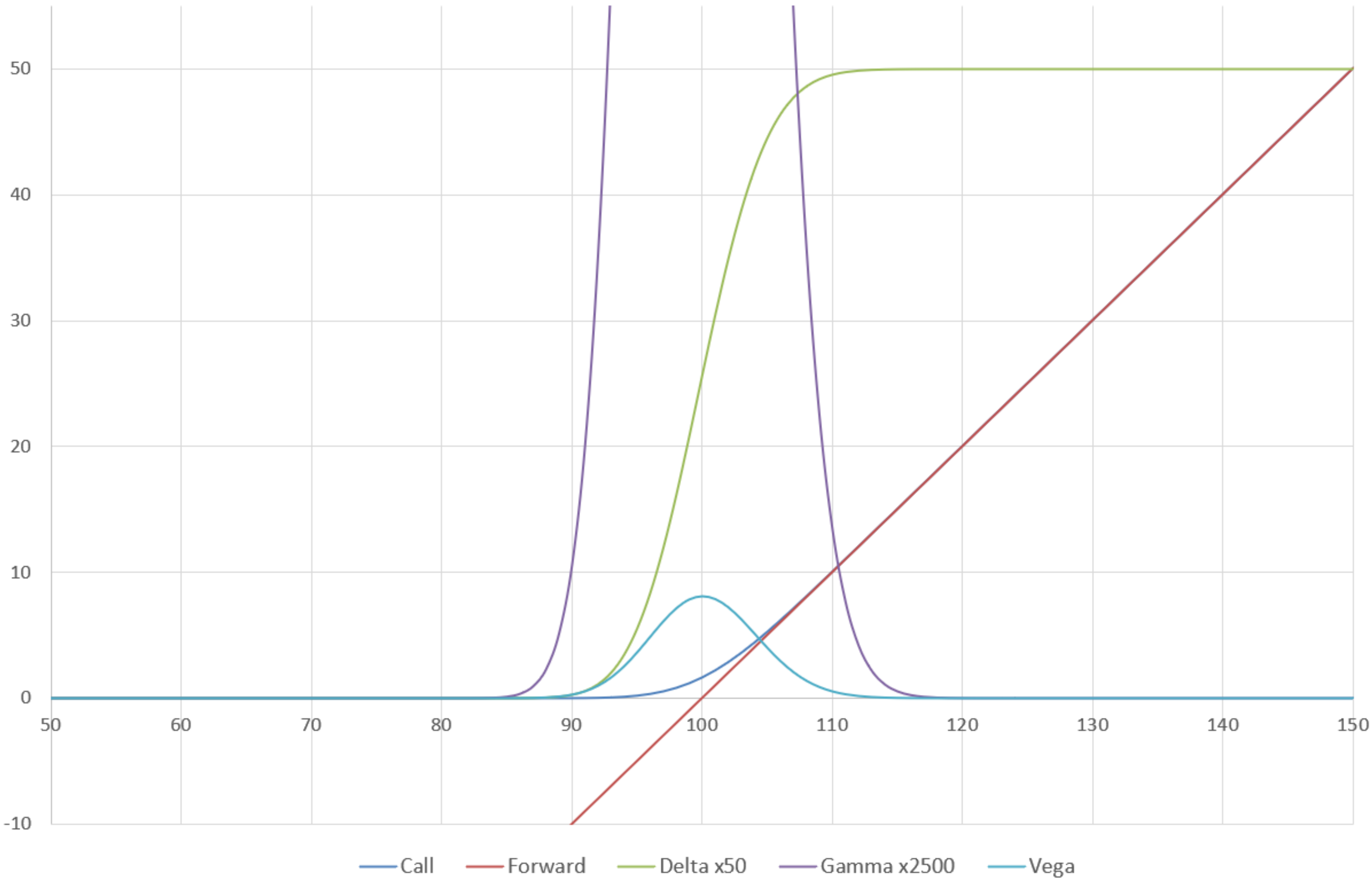
- Le prix du call
- La valeur du contrat forward sous-jacent
- Le delta du call
- Le gamma du call
- Le véga du call

Regarder ensuite ce que ça donne avec une maturité de 2 semaines, puis une maturité de 5 ans

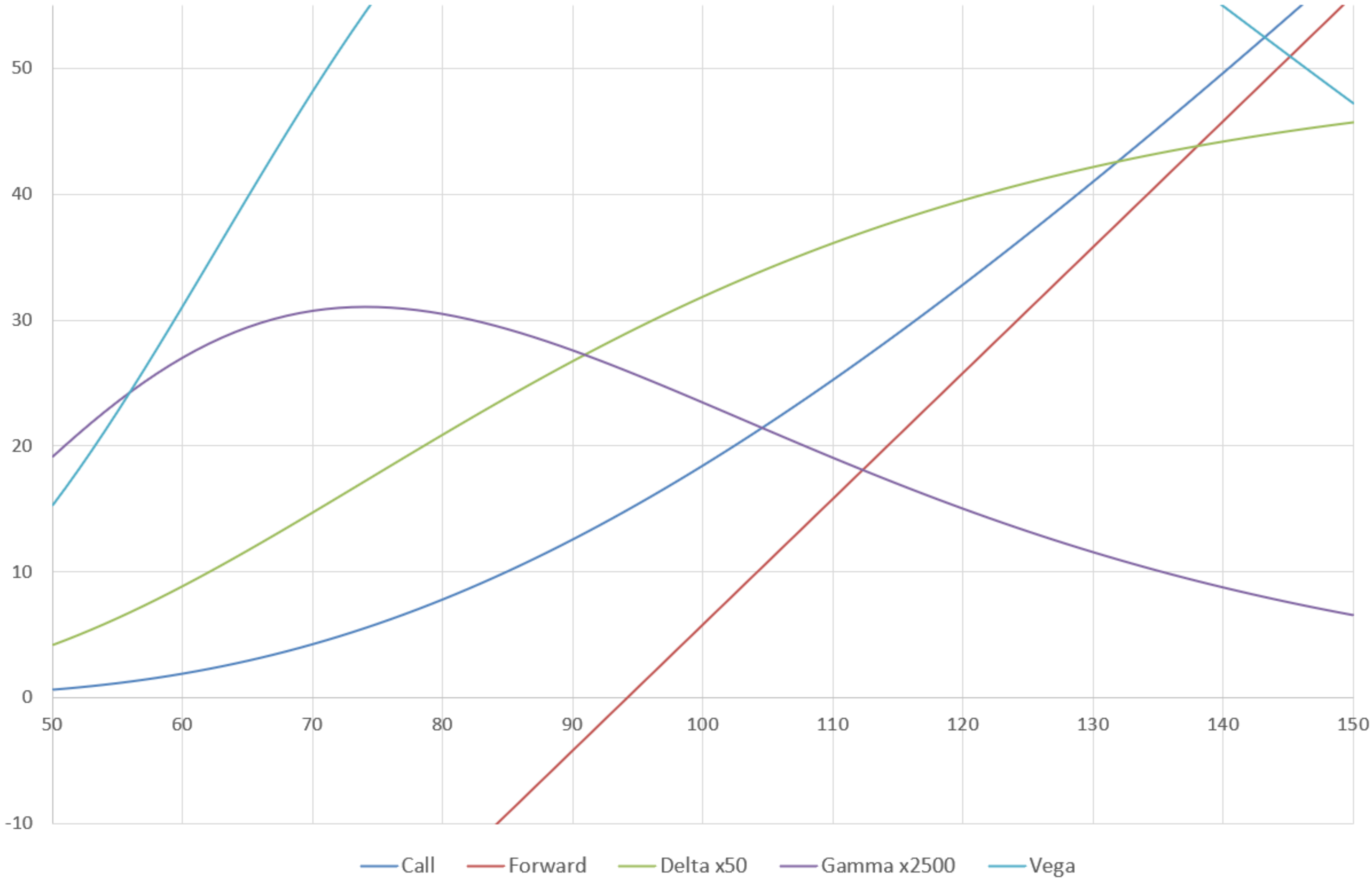
Grecques en fonction de S_0 (T = 1 an)



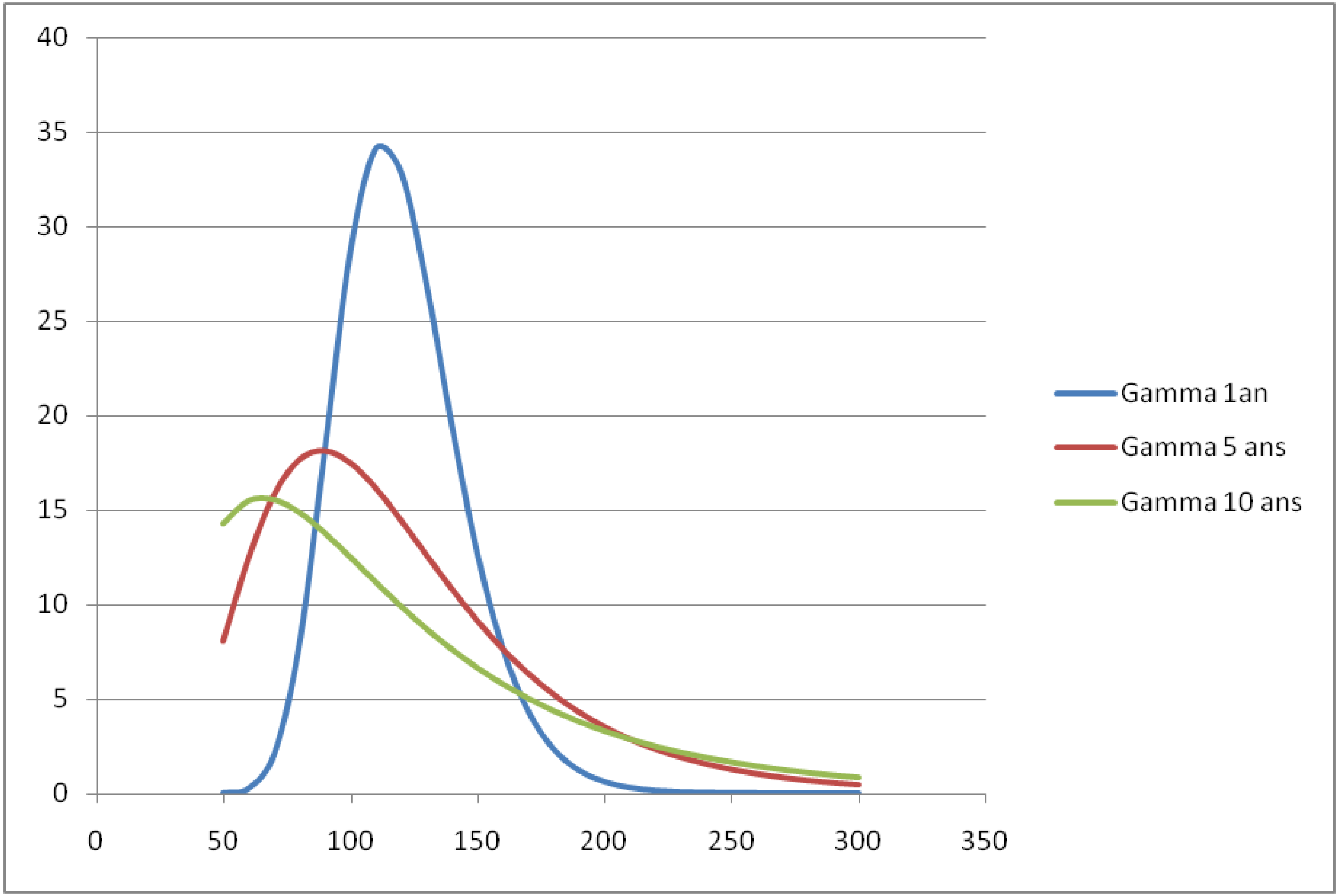
Grecques en fonction de S_0 (T = 2 semaines)



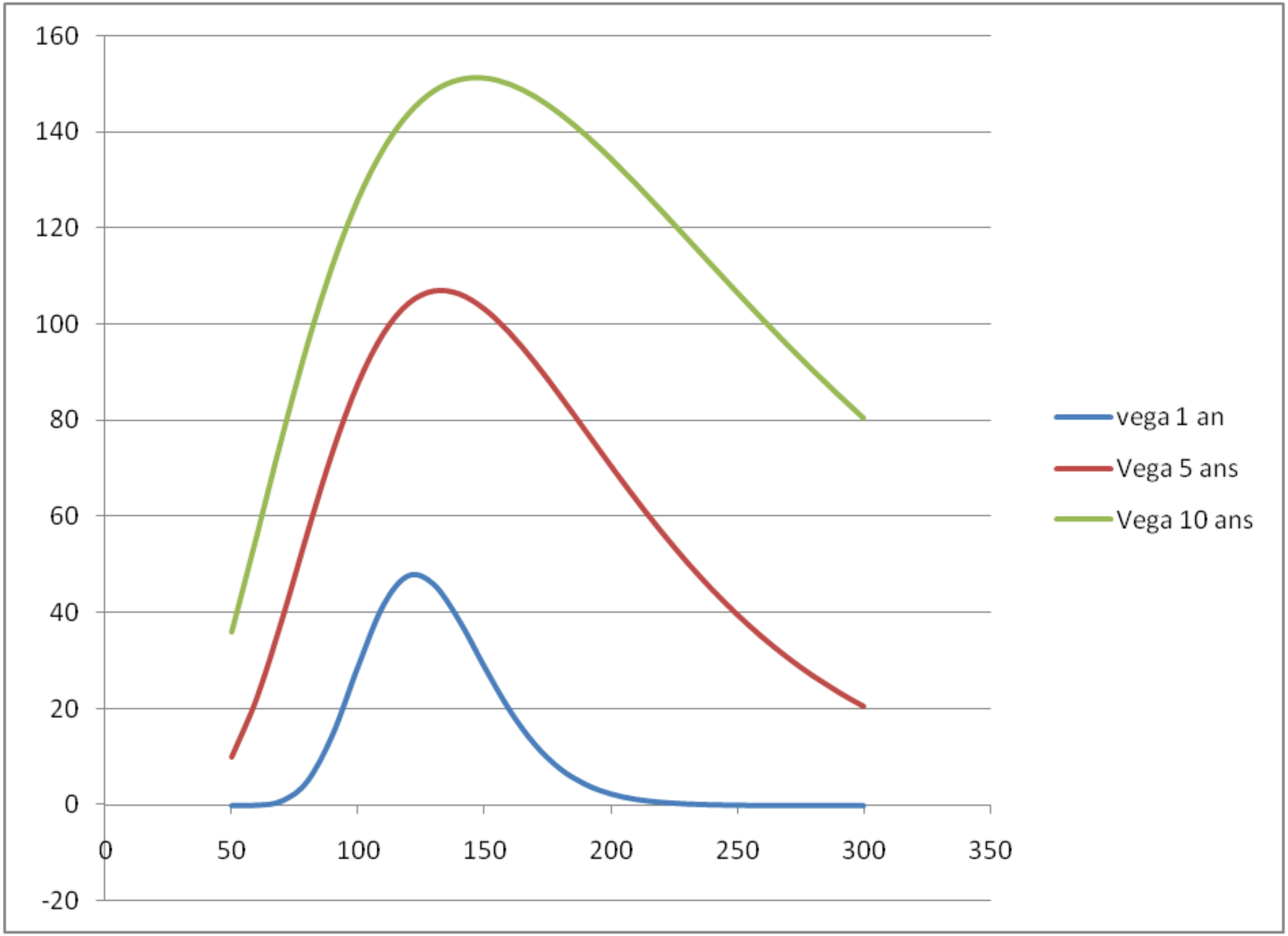
Grecques en fonction de S_0 (T = 4 ans)



Effet maturité sur le gamma



Effet maturité sur le véga



Couverture en delta des options

Un trader options couvre systématiquement son portefeuille vis-à-vis des variations du marché

Risque principal : variation de l'actif sous-jacent.

Solution : s'immuniser contre les variations du sous-jacent en achetant (ou vendant) de l'actif sous-jacent en proportion du **delta** de l'option.

Cette couverture doit être réajustée régulièrement à mesure que le delta évolue.

On parle de **delta-hedging** ou encore de **gestion en delta-neutre**.

Couverture en delta des options : exemple

Je vends un call ATM ($K = S_0 = 100$) de maturité 1 an au prix $C_0 = 10$

Couverture en delta à $t = 0$?

$\Delta_{call} \approx 0.5$ donc ma position short call a un delta de -0.5

Pour annuler mon delta **j'achète donc 0.5 action**

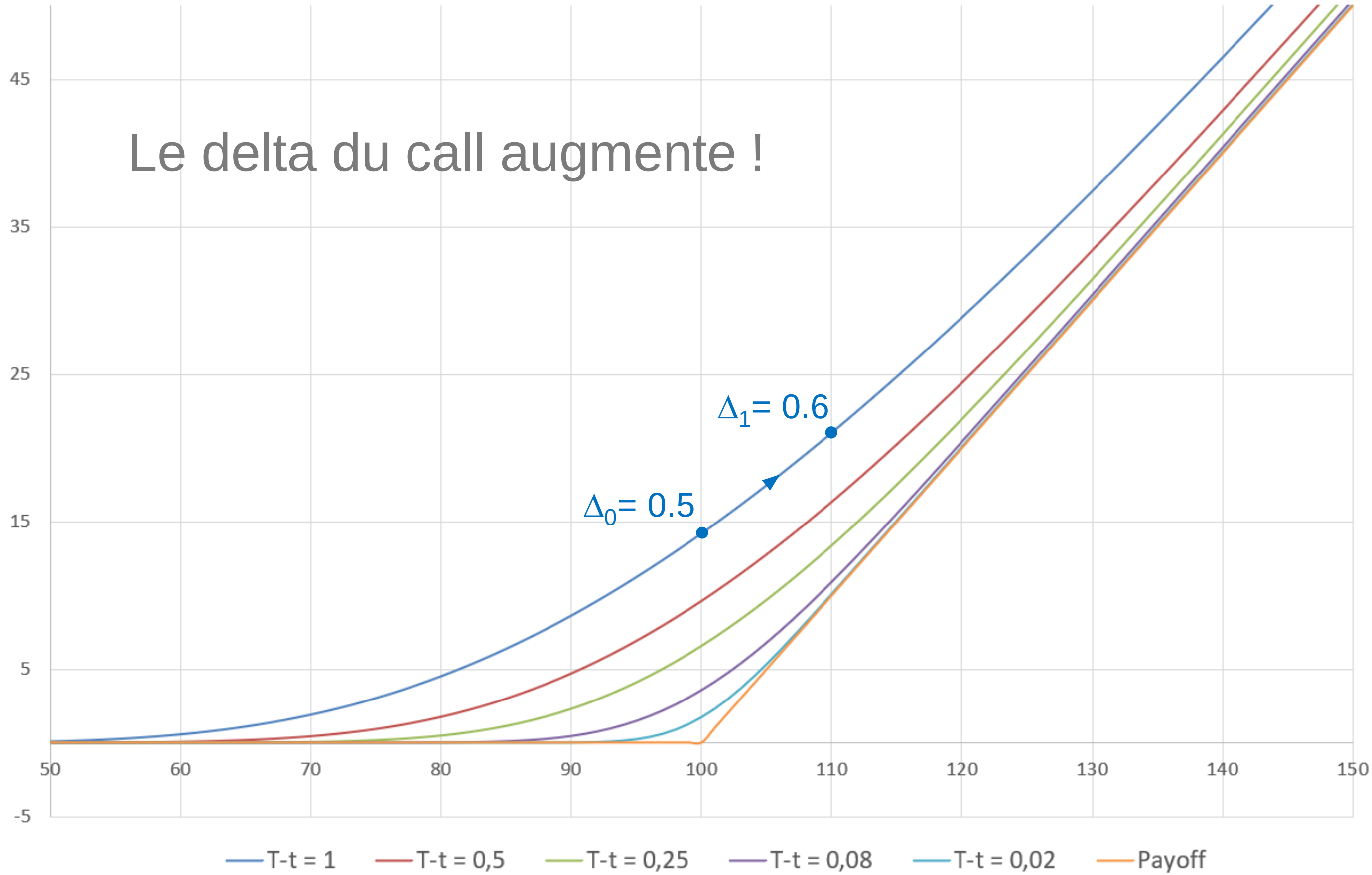
(*i.e.* si j'ai vendu 100 calls j'achète 50 actions)

Concrètement : +10 de prime, -50 pour acheter la demi action, j'emprunte donc 40….

Couverture en delta des options : exemple

Supposons que le lendemain (*t* = 1) l'action monte à 110…

Que se passe-t-il et que dois-je faire ?



Couverture en delta des options : exemple

L'action est maintenant à 110 et le delta du call vendu a augmenté à 0.6

Je ne détiens que 0.5 actions, je suis donc sous-couvert

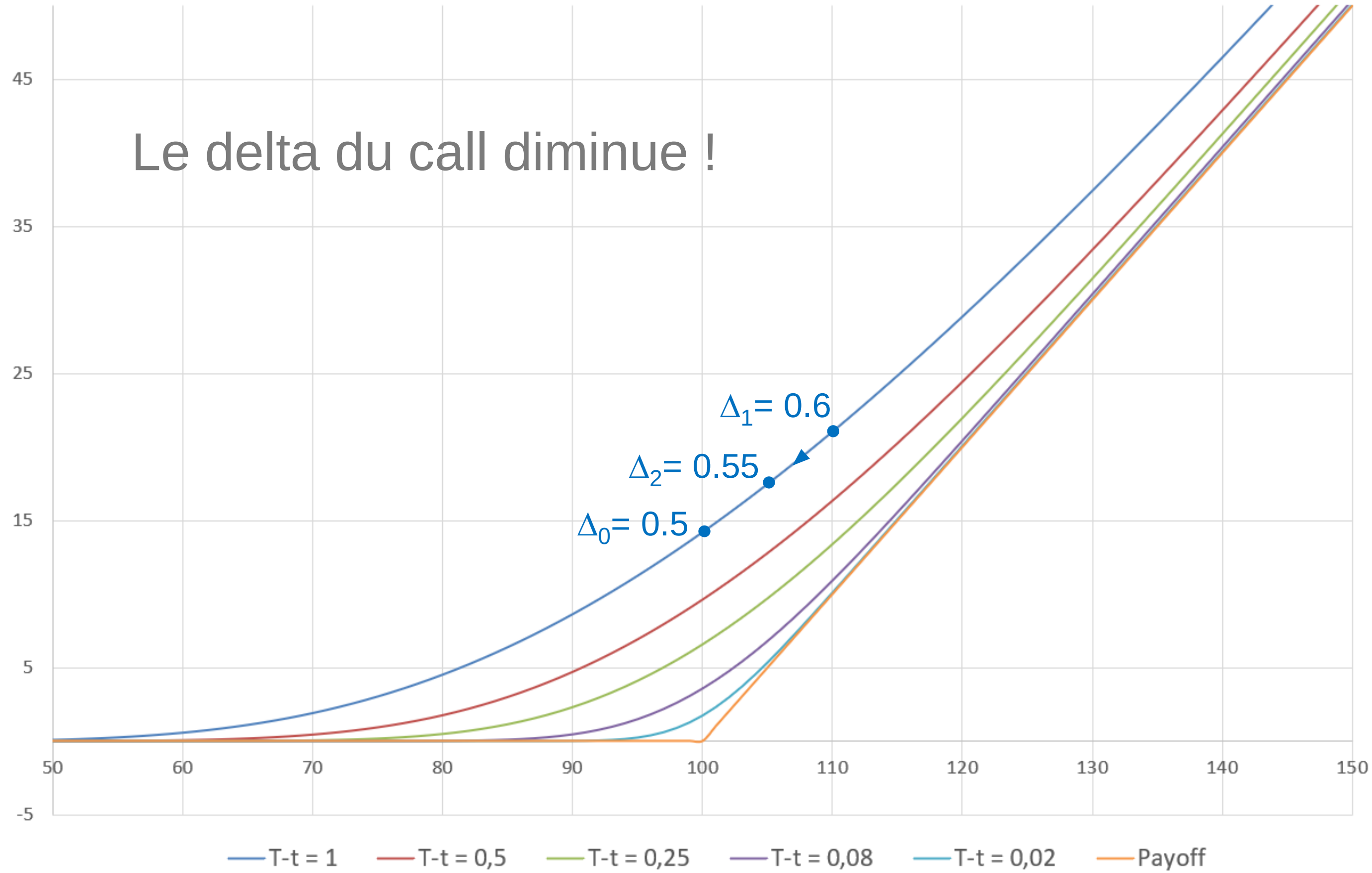
Il me faut racheter 0.1 actions pour être à nouveau delta-neutre

Le réajustement me coûte : – 110 x 0,1 = S_1 x ($\Delta_0 - \Delta_1$)

Couverture en delta des options : exemple

Supposons que jour d'après (*t* = 2) l'action baisse à 105…

Que se passe-t-il et que dois-je faire ?



Couverture en delta des options : exemple

L'action est maintenant à 105 et le delta du call vendu a diminué à 0.55

Je détiens que 0.6 actions, je suis donc sur-couvert à présent

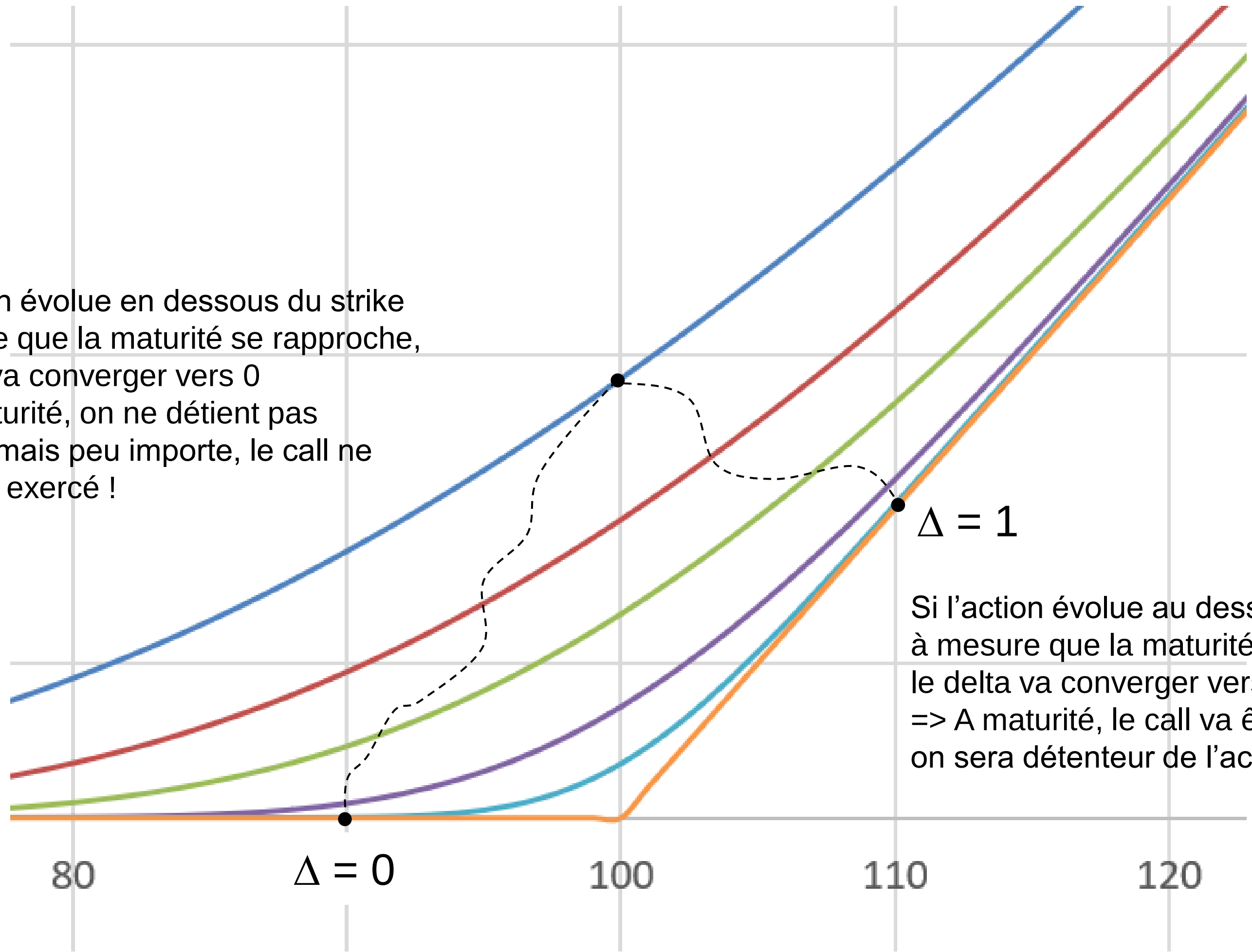
Il me faut revendre 0.05 actions pour être à nouveau delta-neutre

Le réajustement me rapporte : 105 x 0,05 = $S_2 \times (\Delta_1 - \Delta_2)$

Etc etc jusqu'à maturité de l'option…

Delta hedge : pourquoi ça marche ?

Si l'action évolue en dessous du strike
à mesure que la maturité se rapproche,
le delta va converger vers 0
=> A maturité, on ne détient pas
d'action mais peu importe, le call ne
sera pas exercé !



Si l'action évolue au dessus du strike
à mesure que la maturité se rapproche,
le delta va converger vers 1
=> A maturité, le call va être exercé, mais
on sera détenteur de l'action à livrer

Delta hedge : l'impact du gamma

Dans l'exemple pris précédemment (vente d'un call et couverture en delta) on remarque la chose suivante :

- Quand l'actif sous-jacent **monte**, le delta du call augmente et il faut **racheter** de l'actif pour se réajuster en delta

- Quand l'actif sous-jacent **baisse**, le delta du call baisse et il faut **revendre** de l'actif pour se réajuster en delta

Ces réajustements nous sont donc défavorables : on achète de l'actif dès qu'il a monté et on le revend dès qu'il a baissé

Vendeur d'option, je suis **gamma négatif**, la convexité joue contre moi !

Delta hedge : l’impact du gamma

Un call et un put sont gamma positifs

Les **vendre** nous met dans une position **gamma négative** qui peut se révéler dangereuse…

On **encaisse** la prime… mais ensuite chaque réajustement en delta **nous fait perdre de l’argent**

Les pertes sont d’autant plus importantes **que l’actif fluctue beaucoup au voisinage du strike** : c’est l’endroit où le delta varie le plus, c’est-à-dire où le **gamma est maximum**

Plus la maturité se rapproche, plus l’effet est dévastateur, car le delta varie alors encore plus rapidement

Delta hedge : l'impact du gamma

Résumons : en **vendant** des options et en les **couvrant en delta**

- On encaisse la prime, mais on perd sur les réajustements en delta
- Et ce d'autant plus que la volatilité réalisée est importante dans la zone de fort gamma
- Le gain de la prime est connu et limité, ce qu'on peut perdre sur les réajustements en delta ne l'est pas !

Si on regarde le P&L au jour le jour

- On encaisse du thêta (*i.e.* au total on encaisse la prime)
- On perd sur les réajustements en delta (d'autant + que fort gamma)

P&L = Gamma vs. Thêta = Vol implicite vs. Vol réalisée

$$\int_0^T \Gamma \frac{S^2}{2}\left(\sigma_{hedge}^2 - \sigma_t^2\right) dt$$

Delta hedge : l'impact du gamma

A l'inverse si on achète une option et qu'on la couvre en delta, la position est gamma positive :

- On paye la prime
- Mais on gagne sur les réajustements en delta

On espère donc que la volatilité réalisée sera importante, surtout là où il y a du gamma !

« **La vol est chère** » : signifie que la vol implicite des options est élevée par rapport à la vol réelle de l'actif => en vendant des options et les delta hedgant on encaissera une grosse prime, et aura de faibles réajustements en delta : on sera gagnant !

« **La vol est pas chère** » : on a tout intérêt à acheter des options (pas cher) et à les couvrir en delta, on sera alors gagnant !

TP delta hedge

On vend un call ATM spot ($K = S_0 = 100$) de maturité 1 an, au prix $C_0 = 10$ puis on le couvre en delta…

Calculer le P&L final de trading dans les deux scenarii suivants :

1) L'actif monte à 110 le 1er jour, puis reste à 110 jusqu'à maturité

2) L'actif monte à 110 le 1er jour, reste à 110 jusqu'à T – 2 jours, chute à 90 à T – 1 jour, puis remonte à 110 à maturité T

NB : on prendra un taux d'intérêt $r = 0$

TP delta hedge : correction

Scenario 1 : **l'actif monte à 110 le 1er jour, puis reste à 110 jusqu'à maturité**

$\text{Cash}_0 = C_0 \mathbf{-} \Delta_0 \times S_0 = 10 - 0.5 \times 100 = \mathbf{-40}$

$\text{Cash}_1 = \text{Cash}_0 \mathbf{-} S_1 \times (\Delta_1 - \Delta_0) = -40 - 110 \times (0.6 - 0.5) = \mathbf{-51}$

L'action restant à 110, le delta converge vers 1 à mesure qu'on se rapproche de la maturité => rachat progressif de 0.4 actions

$\text{Cash}_{T\text{-}1} = -51 - 110 \times 0.4 = \mathbf{-95}$

Débouclage à maturité :

$\text{Cash}_T = \text{Cash}_{T\text{-}1} - (S_T - K)^+ + S_T = -95 - 10 + 110 \mathbf{= +5}$

Ou en *physical settlement* : $\text{Cash}_T = \text{Cash}_{T\text{-}1} + K = -95 + 100 \mathbf{= +5}$

TP delta hedge : correction

Scenario 2 : **l'actif monte à 110 le 1er jour, reste à 110 jusqu'à *T* – 2J, chute à 90 à *T* – 1J, puis remonte à 110 à maturité *T***

$\text{Cash}_0 = C_0 - \Delta_0 \times S_0 = 10 - 0.5 \times 100 = \mathbf{-40}$

$\text{Cash}_1 = \text{Cash}_0 - S_1 \times (\Delta_1 - \Delta_0) = -40 - 110 \times (0.6 - 0.5) = \mathbf{-51}$

…

$\text{Cash}_{T\text{-}2} = -51 - 110 \times 0.4 = \mathbf{-95}$ (on a maintenant 1 action)

$\text{Cash}_{T\text{-}1} = -95 + 90 = \mathbf{-5}$ (le delta est passé à 0 : action revendue)

Débouclage à maturité :

$\text{Cash}_T = \text{Cash}_{T\text{-}1} - (S_T - K)^+ = -5 - 10 \ \mathbf{= -15}$

En *physical* : $\text{Cash}_T = \text{Cash}_{T\text{-}1} + K - S_T = -5 + 100 - 110 \ \mathbf{= -15}$

Delta hedge en vrai…

Vente d'un call en $t = 0$, réajustement en delta aux dates t_i (avec $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$)

$$\mathrm{Cash}_0 = C_0 - \Delta_0 S_0$$

$$\mathrm{Cash}_{t_1} = \mathrm{Cash}_0\, e^{rt_1} - S_{t_1}(\Delta_{t_1} - \Delta_0)$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Cash}_{t_i} = \mathrm{Cash}_{t_{i-1}}\, e^{r(t_i - t_{i-1})} - S_{t_i}(\Delta_{t_i} - \Delta_{t_{i-1}})$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Cash}_{t_n} = \mathrm{Cash}_{t_{n-1}}\, e^{r(t_n - t_{n-1})} - S_{t_n}(\Delta_{t_n} - \Delta_{t_{n-1}})$$

$$\mathrm{Cash}_T = \mathrm{Cash}_{t_{n-1}}\, e^{r(T - t_{n-1})} - (S_T - K)^+ + \Delta_{t_{n-1}} S_T$$

Vision en P&L quotidien

En t_i , position short call + couverture en delta => d'où position résultante en prêt/emprunt :

$$\text{Cash}_{t_i} = C_{t_i} - \Delta_{t_i} S_{t_i}$$

De sorte que la position globale (short call + delta hedge + prêt/emprunt) est de valeur nulle :

$$V_{t_i} = 0 = -C_{t_i} + \Delta_{t_i} S_{t_i} + \text{Cash}_{t_i}$$

P&L en t_{i+1} :

$$\begin{aligned} V_{t_{i+1}} &= -C_{t_{i+1}} + \Delta_{t_i} S_{t_{i+1}} + \text{Cash}_{t_{i+1}} \quad \text{avec} \quad \text{Cash}_{t_{i+1}} = \text{Cash}_{t_i} e^{r(t_{i+1}-t_i)} \\ &= -(C_{t_{i+1}} - C_{t_i}) + \Delta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + \text{Cash}_{t_i}\left(e^{r(t_{i+1}-t_i)} - 1\right) \end{aligned}$$

Et ainsi de suite sur chaque période…

Gamma vs. Thêta

Supposons $r = 0$. Ayant vendu et couvert le call en t, voici donc le P&L obtenu en $t + \delta t$:

$$V_{t+\delta t} = -(C_{t+\delta t} - C_t) + \Delta_t (S_{t+\delta t} - S_t)$$

Développement de Taylor à l'ordre 2 du prix du call :

$$C_{t+\delta t} - C_t \approx \theta_t \, \delta t + \Delta_t (S_{t+\delta t} - S_t) + \frac{1}{2} \Gamma_t \, (S_{t+\delta t} - S_t)^2$$

En remplaçant dans le P&L :

$$V_{t+\delta t} \approx -\theta_t \, \delta t - \frac{1}{2} \Gamma_t \, (S_{t+\delta t} - S_t)^2$$

Mais, tous les jours on récupère du thêta !

Plus la variation de l'actif est grande, plus on perd sur le P&L à cause du gamma