Pourquoi l'amplitude des variations accumulées augmente au fil du temps ?

Jean-François Berger-Lefébure

Décembre 2024

Contents

1 Pourquoi l'amplitude des variations accumulées augmente au fil du temps ?

Nous étudions un processus stochastique X_t qui suit un mouvement brownien. Ce modèle représente des variations aléatoires, comme les prix d'une action sur un marché financier.

Propriétés fondamentales

- **Espérance des variations :**
$$\mathbb{E}[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}] = 0.$$
Cela signifie qu'en moyenne, il n'y a pas de mouvement net : les fluctuations se compensent.
- **Variance des variations (carré des écarts) :**
$$\mathbb{E}\left[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\right] \neq 0.$$
Même si la moyenne est nulle, l'amplitude des variations accumulées augmente avec le temps. C'est ce qu'on va démontrer.

1.1 Définition mathématique : Processus en temps discret

Considérons un intervalle de temps total T, divisé en n sous-intervalles égaux.

- Temps total : T.
- Pas de temps :
$$\Delta t = \frac{T}{n}.$$
- Variation aléatoire :
$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t),$$
ce qui signifie :
  - Moyenne : 0.
  - Variance : Δt.

1.2 Démonstration complète de la variance

Nous voulons démontrer :

$$\mathbb{E}\left[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\right] = \Delta t.$$

Étape 1 : Propriétés d'une variable normale

Pour une variable normale $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

- Espérance :
$$\mathbb{E}[Z] = 0.$$
- Variance :
$$\mathbb{E}[Z^2] = \sigma^2.$$

Étape 2 : Application au processus X_t

Dans notre cas :

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t).$$

Donc :

$$\mathbb{E}[X_{t_{i+1}} - X_{t_i}] = 0,$$

et :

$$\mathbb{E}\left[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\right] = \Delta t.$$

Étape 3 : Cas particulier avec $\Delta t = \frac{1}{n}$

Si $T = 1$ (temps standardisé), alors :

$$\Delta t = \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\right] = \frac{1}{n}.$$

1.3 Interprétation : Accumulation des variations

Imagine qu'on suit un marcheur ivre :

- Il part de 0 (position initiale).
- Chaque pas est aléatoire (gauche ou droite).
- En moyenne, il ne bouge pas ($E[0] = 0$), mais ses déplacements s'accumulent.

1.4 Exemple numérique

Après 4 pas ($n = 4$) avec $\Delta t = 0.25$:

- Variations : [0.1, -0.05, 0.07, -0.02].
- Carré des variations :

$$0.1^2 + (-0.05)^2 + 0.07^2 + (-0.02)^2 = 0.0178.$$

- Moyenne théorique attendue :

$$\frac{1}{n} = 0.25.$$

1.5 Effet accumulé

Après n pas, les variations s'accumulent en moyenne :

$$\text{Total} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Cela explique pourquoi l'amplitude des fluctuations augmente avec le temps.

2 Justification du terme quadratique

Le terme quadratique :

$$\frac{1}{2} f_{xx}(t_i, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

corrige précisément cette accumulation de fluctuations.

- Chaque variation $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ a une **moyenne nulle** mais une **variance non nulle** $(1/n)$.
- Le carré de ces fluctuations introduit une **erreur d'ordre $O(1/n)$** dans la somme globale.

2.1 Pourquoi est-ce essentiel ?

Sans ce terme quadratique, les erreurs s'accumuleraient au fil du temps, rendant la formule inexacte. En ajoutant ce terme, on stabilise l'approximation globale.

3 Résumé des points clés

1. **Variation linéaire ($O(1/\sqrt{n})$) :** Fluctue autour de 0, mais a un effet local aléatoire.
2. **Variation quadratique ($O(1/n)$) :** S'accumule au fil du temps et doit être corrigée pour modéliser les effets stochastiques globaux.
3. **Terme quadratique :** Corrige l'erreur en tenant compte des fluctuations accumulées.

Ce comportement distingue un processus stochastique d'un modèle déterministe classique de Taylor et justifie la présence des termes quadratiques dans la formule d'Itô.

4 Pourquoi l'amplitude des variations accumulées augmente au fil du temps ? (Compléments d'explications)

Nous allons approfondir pourquoi l'amplitude des variations accumulées dans un processus stochastique comme le mouvement brownien augmente avec le temps.

4.1 1. Différence entre moyenne et variance

Un processus stochastique comme un mouvement brownien se caractérise par deux aspects :

- **Moyenne nulle** : En moyenne, le processus reste au même endroit :

$$\mathbb{E}[X_T] = 0.$$

  Cela signifie qu'il n'a pas de direction préférentielle.

- **Variance croissante** : L'incertitude sur la position finale croît avec le temps :

$$\text{Var}(X_T) = T.$$

  Cela reflète l'accumulation des fluctuations au fil du temps.

4.2 2. Pourquoi les variations s'accumulent-elles ?

Le modèle suppose des pas indépendants :

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t).$$

Chaque pas peut être positif ou négatif, mais l'accumulation des écarts ne s'annule pas car :

1. **Somme des variances :** Les variances des pas s'ajoutent :

$$\text{Var}(X_T) = n \cdot \Delta t = T.$$

2. **Ecart-type :** L'amplitude typique des variations suit :

$$\sqrt{T}.$$

Ce comportement est connu sous le nom de *accumulation quadratique*.

4.3 3. Exemple concret : Le marcheur ivre

Imaginons un marcheur ivre :

- Chaque pas est de $+1$ ou -1, au hasard.
- Après 2 pas, il peut être à $-2, 0$, ou $+2$.

Même si sa moyenne est 0, sa variance augmente (2) car les écarts s'ajoutent. Cela traduit une dispersion croissante au fil des pas.

4.4 4. Peut-il revenir à 0 ?

Oui, il est possible qu'après 100 millions de pas, il revienne au point de départ. Mais :

- **Probabilité faible :** La probabilité de revenir exactement à 0 diminue très rapidement.
- **Variance non nulle :** Même s'il revient à 0, la variance mesure l'écart moyen à 0, qui reste positif.

Ainsi, **la variance mesure l'incertitude** sur la position finale, pas la position exacte.

4.5 5. Contre-exemple : Processus stationnaire

Considérons un marcheur malin :

- Il avance de $+1$ puis recule de -1.
- Sa position finale est toujours 0.

Ici, la variance est **nulle** car les fluctuations ne s'accumulent pas. Ce processus est *stationnaire*.

4.6 6. Résumé des points clés

- **Espérance nulle :** La position moyenne reste 0.
- **Variance croissante :** Les écarts augmentent linéairement avec le temps (T).
- **Amplitude des fluctuations :** Croît avec $\sqrt{T}$.
- **Importance pour les modèles financiers :** Explique la variabilité des prix d'actifs.

5 Conclusion

Les variations accumulées d'un processus stochastique augmentent car chaque pas, bien qu'indépendant, ajoute une incertitude. Cela se traduit par une croissance quadratique de la variance et un écart-type proportionnel à $\sqrt{T}$. Ces propriétés sont essentielles pour modéliser les fluctuations des prix sur les marchés financiers et comprendre les phénomènes aléatoires.

5.1 3. Approximation de Taylor et termes quadratiques

On considère l'approximation suivante pour une fonction $g(t, X_t)$:

$$Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i} = g(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}) - g(t_i, X_{t_i})$$

En utilisant le développement de Taylor :

$$\approx g_t(t_i, X_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + g_x(t_i, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$
$$+O((t_{i+1} - t_i)^2) + O((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2).$$

5.2 4. Détermination des termes $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$

- **Temps discret :** Le temps est divisé en n sous-intervalles, donc :

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{T}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

- **Variations stochastiques :**

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \Rightarrow \mathbb{E}[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2] = \Delta t = \frac{1}{n}.$$

- **Terme quadratique :** En combinant les ordres d'approximation :
  - Pour le temps : $(t_{i+1} - t_i)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$.
  - Pour les variations : $\frac{1}{n}$.

5.3 5. Résumé des points clés

- **Espérance nulle :** La position moyenne reste 0.
- **Variance croissante :** Les écarts augmentent linéairement avec le temps (T).
- **Amplitude des fluctuations :** Croît avec $\sqrt{T}$.
- **Importance pour les modèles financiers :** Explique la variabilité des prix d'actifs.

6 Conclusion

Les variations accumulées d'un processus stochastique augmentent car chaque pas, bien qu'indépendant, ajoute une incertitude. Cela se traduit par une croissance quadratique de la variance et un écart-type proportionnel à $\sqrt{T}$. Ces propriétés sont essentielles pour modéliser les fluctuations des prix sur les marchés financiers et comprendre les phénomènes aléatoires.