Level 1
Pricing and risk-management des options
Cours 1

Jean-François Berger-Lefébure

December 2024

Contents

1 Call, Put, Forward 4
- 1.1 Call Européen 4
- 1.2 Put Européen 4
- 1.3 Forward 4
- 1.4 Physical vs Cash Settlement 4
- 1.5 Pourquoi traiter des options ? 5

2 Exemples de couverture avec les options 6
- 2.1 Options de taux : Caps & Floors 6
- 2.2 Options de change 6
- 2.3 Options sur action ou indice 7

3 L'hypothèse d'AOA et ses Conséquences 9
- 3.1 Hypothèse d'AOA (Absence d'Opportunités d'Arbitrage) 9
- 3.2 Conséquences de l'AOA 9

4 Évaluation d'un contrat forward par réplication 10
- 4.1 Définition d'un forward 10
- 4.2 Formule de valorisation d'un forward 10
- 4.3 Exemple numérique : Calcul du prix d'un forward 10
- 4.4 Impact des dividendes sur le forward 11
  - 4.4.1 Pourquoi soustraire le dividende du prix du forward ? 11
- 4.5 Démonstration par l'absurde (AOA) : 12
- 4.6 Pourquoi soustraire le dividende du prix du forward ? 12
- 4.7 Ce qu'il faur retenir: formules 13

5 Répliquer un forward avec un call et un put 14
- 5.1 Pourquoi ça fonctionne ? 14
- 5.2 Le rôle de la prime du put 14
  - 5.2.1 Payoff inversé d'un put 14
  - 5.2.2 Différence entre acheter et vendre un put 15
- 5.3 Formule de la parité call-put 15
- 5.4 Exemple numérique 15
- 5.5 Ce qu'il faut retenir 15
- 5.6 Exemple: vérification de la parité call-put 16

6 À la monnaie spot vs. à la monnaie forward 17
- 6.1 Exemple : 17

7 Déterminants du prix d'une option 18

8 Exercie: Convexité du prix d'un call 19
- 8.1 Définition d'une fonction convexe 19
- 8.2 Démonstration avec l'AOA 19
- 8.3 Exemple numérique 20

9 Exercices **21**
9.1 Exercice 1 21
9.2 Exercice 2 22
9.3 Exercice 3 23
9.4 Exercice 4 24

1 Call, Put, Forward

1.1 Call Européen

Un call est une option d'achat donnant au détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter un actif sous-jacent S à un prix fixé K (strike) à une date future T (maturité).

Notations :

- S_T : Prix de l'actif sous-jacent à maturité T.
- K : Prix d'exercice (strike).
- Payoff : $\max(S_T - K, 0)$.

1.2 Put Européen

Un put est une option de vente donnant au détenteur le droit, mais non l'obligation, de vendre un actif sous-jacent S à un prix fixé K à une date future T.

Notations :

- S_T : Prix de l'actif sous-jacent à maturité T.
- K : Prix d'exercice (strike).
- Payoff : $\max(K - S_T, 0)$.

1.3 Forward

Un forward est un contrat donnant l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent S à un prix fixé K à une date future T, sans possibilité de renoncer.

Notations :

- Payoff : $S_T - K$.

1.4 Physical vs Cash Settlement

Un **Physical Settlement** signifie que l'acheteur d'une option exerce son droit d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent physiquement au prix d'exercice K. Un **Cash Settlement** signifie que l'acheteur reçoit directement en espèces la différence entre la valeur de l'actif sous-jacent S_T et le prix d'exercice K au moment de l'échéance.

Exemple :

- **Physical Settlement :** Achat d'une action à 100€ (prix d'exercice) si elle vaut 120€, permettant une plus-value potentielle.
- **Cash Settlement :** Paiement direct de $120 - 100 = 20$.

1.5 Pourquoi traiter des options ?

Instrument de couverture et de gestion de bilan

Les options permettent de se protéger contre les fluctuations des marchés en limitant les pertes potentielles, tout en conservant la possibilité de bénéficier des hausses favorables.

Instrument spéculatif : l'effet de levier

Grâce à un faible investissement initial (la prime), les options permettent d'amplifier les gains potentiels, mais aussi d'augmenter les risques de pertes.

Acheter ou vendre de la volatilité

Les options offrent un moyen unique de prendre position sur la volatilité des marchés. Elles permettent de parier sur des mouvements futurs de prix, indépendamment de la direction des marchés.

Ce qu'il faut retenir

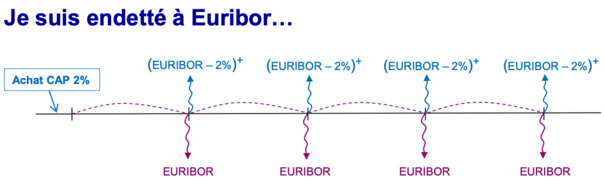
- Un **call** permet d'acheter, un **put** permet de vendre, et un **forward** est un engagement ferme.
- Les notations des payoffs sont essentielles :
  - $(S_T - K)^+$ pour un call.
  - $(K - S_T)^+$ pour un put.
  - $S_T - K$ pour un forward.
- **Physical vs Cash Settlement :** Un **Physical Settlement** consiste à échanger physiquement l'actif au prix d'exercice, tandis qu'un **Cash Settlement** règle directement la différence en espèces entre la valeur de l'actif et le prix d'exercice.
- **Instrument de couverture et de gestion de bilan :** Les options servent à limiter les pertes tout en permettant de profiter des hausses favorables des marchés.
- **Instrument spéculatif : l'effet de levier :** Les options amplifient les gains potentiels grâce à un faible investissement initial, mais augmentent aussi les risques de pertes.
- **Acheter ou vendre de la volatilité :** Les options permettent de spéculer sur l'évolution future de la volatilité du marché, indépendamment des mouvements de prix.

—

2 Exemples de couverture avec les options

2.1 Options de taux : Caps & Floors

Un **Cap** garantit un taux plafond dans le cas d'un emprunt à taux variable, limitant ainsi le coût des intérêts. Un **Floor** garantit un taux plancher dans le cas d'un placement à taux variable, protégeant le rendement minimal.



2.2 Options de change

Pour un contrat libellé en USD, une option de change permet de se garantir un taux de change EUR/USD plancher afin de se protéger contre une baisse du dollar, tout en bénéficiant d'une éventuelle hausse.

Exemple 1 : Change à terme (Forward)

Airbus signe un contrat pour vendre 10 avions à 1 milliard de dollars (1Md$) dans 3 ans. Le taux de change garanti par un contrat forward est fixé à 0.91 (1 USD = 0.91 EUR).

Formule utilisée :

$$1\,\text{Md\$} \times \text{USDEUR}_T + 1\,\text{Md\$} \times (0.91 - \text{USDEUR}_T) = 1\,\text{Md\$} \times 0.91$$

Calcul avec un taux futur à 0.85 :

- Conversion au taux futur réel : $1\,\text{Md\$} \times 0.85 = 850\,\text{M€}$.
- Compensation du forward : $1\,\text{Md\$} \times (0.91 - 0.85) = 1\,\text{Md\$} \times 0.06 = 60\,\text{M€}$.
- Total garanti par le forward : $850\,\text{M€} + 60\,\text{M€} = 910\,\text{M€}$.

Conclusion :

Avec un forward, Airbus reçoit un montant fixe de 910M€ dans 3 ans, quel que soit le taux de change futur.

Exemple 2 : Option de change

Airbus veut aussi profiter d'une éventuelle hausse du dollar tout en se protégeant contre une baisse. Il achète une option garantissant un taux minimum de 0.91.

Formule utilisée :

$$1\,\text{Md\$} \times \text{USDEUR}_T + 1\,\text{Md\$} \times (0.91 - \text{USDEUR}_T)^+$$

Calcul avec un taux futur à 0.85 :

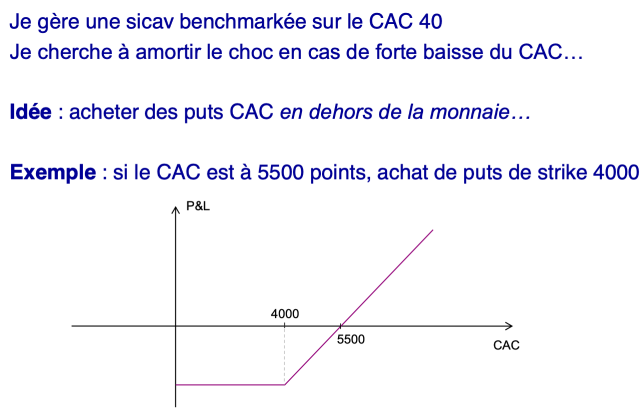
- Conversion au taux futur réel : $1\,\text{Md\$} \times 0.85 = 850\,\text{M€}$.
- Activation de l'option (car le taux est inférieur à 0.91) : $1\,\text{Md\$} \times (0.91 - 0.85)^+ = 1\,\text{Md\$} \times 0.06 = 60\,\text{M€}$.
- Total protégé par l'option : $850\,\text{M€} + 60\,\text{M€} = 910\,\text{M€}$.

Conclusion :

L'option garantit au minimum 910M€, mais si le taux devient favorable (par exemple 1.0), Airbus peut choisir de ne pas activer l'option et recevoir 1 milliard d'euros.

2.3 Options sur action ou indice

L'achat de **puts** avec un strike faible fonctionne comme une assurance contre la baisse des marchés, permettant de limiter les pertes en cas de krach boursier.



Le graphique combine:

- La détention de l'action (ou de l'indice CAC 40).
- L'achat d'un put hors de la monnaie (strike = 4000 points).

Exemple : Achat de puts hors de la monnaie

Le gestionnaire achète des **puts** avec un strike à 4000 points pour limiter ses pertes en cas de krach boursier.

Fonctionnement :

- Si le CAC reste **au-dessus de 4000 points**, l'option expire sans valeur et seule la prime est perdue.
- Si le CAC tombe **en dessous de 4000 points**, l'option s'active et compense les pertes supplémentaires.
- CAC chute à 3500 points : Le gestionnaire vend au prix garanti de 4000, limitant sa perte à $5500 - 4000 = 1500$ points au lieu de $5500 - 3500 = 2000$.
- CAC reste à 5500 points : Le put n'est pas exercé, et seule la prime est payée.

Ce qu'il faut retenir :

- Un **put hors de la monnaie** protège contre les baisses extrêmes (krach) à moindre coût.
- Put hors de la monnaie (strike 4000) → Prime faible, mais protège uniquement contre un krach.
- Put à la monnaie (strike 5500) → Prime élevée, protège dès la première baisse.
- Il agit comme une **assurance** : la prime est le coût de la protection.
- La perte maximale est limitée au niveau du strike (ici 4000 points).

—

3 L'hypothèse d'AOA et ses Conséquences

3.1 Hypothèse d'AOA (Absence d'Opportunités d'Arbitrage)

Un arbitrage est une stratégie permettant un **profit sans risque** et **sans investissement initial**. L'hypothèse d'AOA suppose qu'un tel arbitrage est **impossible** sur des marchés efficients.

3.2 Conséquences de l'AOA

1. Égalité des portefeuilles répliqués

Deux portefeuilles ayant les **mêmes flux futurs** doivent avoir la **même valeur aujourd'hui** :

$$X_T = Y_T \implies X_0 = Y_0$$

Exemple : Démonstration par l'absurde

Supposons $X_T = Y_T$ mais $X_0 > Y_0$.

1. - Achetons Y (moins cher) pour un coût de Y_0.
2. - Vendons X (plus cher) pour un gain de X_0.
3. - Plaçons la différence $(X_0 - Y_0)$ au taux sans risque jusqu'à T.

Résultat : À T, on obtient exactement $X_T - Y_T = 0$ mais avec un profit supplémentaire $(X_0 - Y_0)(1 + rT)$, créant un arbitrage interdit par l'AOA.

2. Inégalités sur les prix des options

L'AOA impose des bornes :

- Call : $C_0 \leq S_0$ (le call ne peut pas coûter plus que l'actif).
- Put : $P_0 \leq Ke^{-rT}$ (le put ne peut pas coûter plus que la valeur actualisée du strike).

3. Parité call-put

La relation entre un call et un put de même strike K et maturité T est :

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

Interprétation : Toute violation permettrait d'exploiter un arbitrage en achetant le moins cher et en vendant le plus cher.

Ce qu'il faut retenir :

- L'AOA interdit tout profit sans risque.
- Deux portefeuilles aux flux identiques doivent avoir la même valeur.
- Les prix des options sont encadrés par des bornes pour éviter l'arbitrage.
- La **parité call-put** lie mathématiquement les prix des calls et des puts.

—

4 Évaluation d'un contrat forward par réplication

4.1 Définition d'un forward

Un **forward** est un contrat qui engage à **acheter ou vendre** un actif sous-jacent S à un prix fixé K à une date future T.

- **Achat forward :** Obligation d'acheter l'actif au prix K.
- **Vente forward :** Obligation de vendre l'actif au prix K.

4.2 Formule de valorisation d'un forward

Prix aujourd'hui (V_0) :

$$V_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

Notations :

- S_0 : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K : Prix fixé dans le contrat.
- r : Taux d'intérêt sans risque (continu).
- T : Temps jusqu'à l'échéance.
- e^{-rT} : Facteur d'actualisation au taux r.

4.3 Exemple numérique : Calcul du prix d'un forward

Valeur au temps t_0 :

Données :

- $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 3\%$, $T = 1$ an.

Calcul :

- Actualisation du prix fixé :

$$Ke^{-rT} = 105e^{-0.03\cdot 1} = 105 \times 0.9704 = 101.90$$

- Valeur du forward :

$$V_0 = 100 - 101.90 = -1.90$$

Interprétation : La valeur du forward aujourd'hui est **-1.90€** (négative pour l'acheteur), ce qui signifie qu'un ajustement est nécessaire pour équilibrer le contrat.

Valeur au temps t :

À un moment intermédiaire t avant l'échéance T :

$$V_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Exemple : Si au bout de 6 mois ($t = 0.5$) :

- $S_t = 102$.
- Actualisation du prix :

$$Ke^{-r(T-t)} = 105e^{-0.03(1-0.5)} = 105 \times 0.9851 = 103.44$$

- Valeur du forward :

$$V_t = 102 - 103.44 = -1.44$$

4.4 Impact des dividendes sur le forward

Si l'actif sous-jacent verse un dividende D pendant la période, la formule devient :

$$F_0 = (S_0 - De^{-rT})e^{rT}$$

Exemple avec dividendes : Données :

- $S_0 = 100$, $K = 105$, $r = 3\%$, $T = 1$ an.
- Dividende : $D = 2$ versé dans 6 mois.

Calcul :

- Actualisation du dividende :

$$De^{-r(0.5)} = 2e^{-0.03 \cdot 0.5} = 2 \cdot 0.9851 = 1.97$$

- Valeur ajustée du forward :

$$F_0 = (100 - 1.97)e^{0.03} = 98.03 \cdot 1.0305 = 101.08$$

4.4.1 Pourquoi soustraire le dividende du prix du forward ?

Impact des dividendes sur la valeur d'un actif

Un dividende est un **paiement en cash** versé aux actionnaires. Lorsqu'un dividende est payé, le prix de l'action baisse immédiatement du montant du dividende.

Exemple :

- Si une action vaut 100€ et verse un dividende de 2€, son prix devient 98€.

Pourquoi ? Le dividende sort de l'entreprise, réduisant ainsi la valeur de l'actif.

Effet sur un forward

Un forward permet d'acheter l'actif **dans le futur**.

- L'acheteur ne reçoit **pas les dividendes** puisqu'il ne détient pas encore l'actif.
- Ces dividendes réduisent donc la valeur de l'actif dans le futur.

4.5 Démonstration par l'absurde (AOA) :

Supposons $X_T = Y_T$ mais $X_0 > Y_0$:

- Acheter Y (moins cher) pour Y_0.
- Vendre X (plus cher) pour X_0.
- Placer la différence $(X_0 - Y_0)$ au taux sans risque.

Résultat : À T, on obtient un gain certain grâce à l'intérêt accumulé, ce qui est un arbitrage interdit par l'AOA.

$$(X_0 - Y_0)(1 + rT) > 0$$

4.6 Pourquoi soustraire le dividende du prix du forward ?

Impact des dividendes sur la valeur d'un actif

Un dividende est un **paiement en cash** versé aux actionnaires. Lorsqu'un dividende est payé, le prix de l'action baisse immédiatement du montant du dividende.

Exemple :

- Si une action vaut 100€ et verse un dividende de 2€, son prix devient 98€.

Pourquoi ? Le dividende sort de l'entreprise, réduisant ainsi la valeur de l'actif.

Effet sur un forward

Un forward permet d'acheter l'actif **dans le futur**.

- L'acheteur ne reçoit **pas les dividendes** puisqu'il ne détient pas encore l'actif.
- Ces dividendes réduisent donc la valeur de l'actif dans le futur.

Pour compenser cette perte, on ajuste le prix du forward en soustrayant la valeur actualisée des dividendes attendus.

Exemple

Données :

- $S_0 = 100$, $D = 2$, $r = 3\%$, $T = 1$ an.
- Dividende payé dans 6 mois ($t = 0.5$).

Calcul :

- Actualisation du dividende :

$$De^{-r(0.5)} = 2e^{-0.03 \cdot 0.5} = 2 \cdot 0.9851 = 1.97$$

- Prix ajusté du forward :

$$F_0 = (100 - 1.97)e^{0.03} = 98.03 \cdot 1.0305 = 101.08$$

Résultat : Le prix du forward est **101.08€** au lieu de **103.05€** (sans dividende). La différence est due à l'impact des dividendes.

4.7 Ce qu'il faur retenir: formules

Prix d'un contrat forward sans dividende $F_0 = S_0 e^{rT}$

Prix d'un contrat forward avec dividendes $F_0 = (S_0 - De^{-rT})e^{rT}$

Valeur d'un forward aujourd'hui $V_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

Valeur d'un forward au temps t $V_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

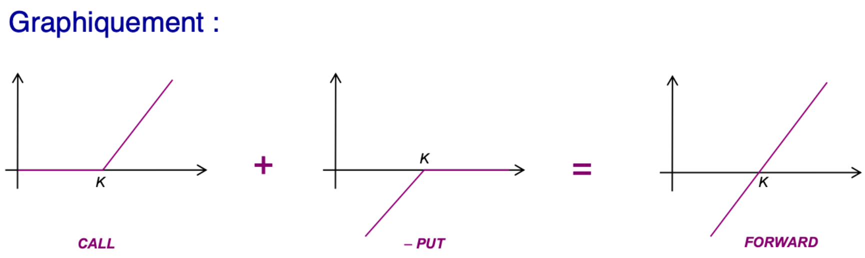
Actualisation des dividendes $D_t = De^{-r(T-t)}$

Relation entre deux portefeuilles répliqués (AOA) $X_T = Y_T \implies X_0 = Y_0$

Démonstration par l'absurde (AOA) $(X_0 - Y_0)(1 + rT) > 0$

—

5 Répliquer un forward avec un call et un put



Objectif : Créer un forward synthétique

Un **forward** peut être répliqué en combinant :

- **Achat d'un call** avec un prix d'exercice K et une maturité T.
- **Vente d'un put** avec le même prix d'exercice K et la même maturité T.

5.1 Pourquoi ça fonctionne ?

- Le **call acheté** donne le **droit d'acheter** l'actif à K.
- Le **put vendu** oblige à **acheter l'actif** si son prix chute sous K.

Résultat combiné : Quel que soit le prix final S_T, la combinaison donne un payoff linéaire :

$$S_T - K$$

Ce payoff est identique à celui d'un **forward**.

5.2 Le rôle de la prime du put

La **prime reçue** en vendant le put peut servir à **financer l'achat du call**.

- Si les primes du put et du call s'équilibrent, le coût initial est **nul**, comme un forward.
- Sinon, la différence ajuste le coût ou l'encaissement initial.

5.2.1 Payoff inversé d'un put

L'expression suivante représente le **payoff inversé d'un put** :

$$-(K - S_T)^+$$

Concrètement :

- - C'est équivalent à **vendre un put** (position courte sur le put).
- - En vendant un put, on reçoit une **prime initiale** et on accepte de couvrir une perte potentielle si l'actif chute sous K.

5.2.2 Différence entre acheter et vendre un put

- **Acheter un put :** $(K - S_T)^+ \to$ Protection contre une baisse (assurance).
- **Vendre un put :** $-(K - S_T)^+ \to$ Parier sur la stabilité ou la hausse en échange d'une prime.

5.3 Formule de la parité call-put

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$$

Explications :

- $(S_T - K)^+$: Payoff d'un **call acheté** $\to$ Gain si l'actif monte.
- $-(K - S_T)^+$: Payoff d'un **put vendu** $\to$ Compense les pertes si l'actif baisse.
- Ensemble, ils reproduisent un **forward linéaire** : $S_T - K$.

5.4 Exemple numérique

Données :

- Prix d'exercice $K = 100$.
- Prix actuel $S_0 = 100$.
- Prime du **put vendu** = 5€.
- Prime du **call acheté** = 5€.

Calcul :

- Vente du put $\to$ Encaisse 5€.
- Achat du call $\to$ Dépense 5€.
- **Coût initial = 0€.**

Payoff final :

- Si $S_T > 100$, le **call s'exerce** et donne $S_T - 100$.
- Si $S_T < 100$, le **put s'exerce** et donne également $S_T - 100$.
- Résultat final : $S_T - K$.

5.5 Ce qu'il faut retenir

- Le **payoff inversé d'un put** correspond à **vendre un put**.
- Cette stratégie permet de **répliquer un forward** en combinant un **call acheté** et un **put vendu**.
- Le **forward synthétique** a un payoff linéaire identique à un **contrat forward classique** :

$$S_T - K$$

5.6 Exemple: vérification de la parité call-put

Formule sans dividende

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

Étapes pour vérifier la parité

- **Données :** C_0, P_0, S_0, K, r, T.
- **Calculs :**
  - Actualisation du strike : Ke^{-rT}
  - Comparer : $C_0 - P_0 \quad \text{et} \quad S_0 - Ke^{-rT}$

Exemple numérique

Données : $C_0 = 2, P_0 = 2, S_0 = 19.80, K = 20, r = 0.01, T = 1$.
Calculs :

- **Côté gauche :** $C_0 - P_0 = 2 - 2 = 0$
- **Côté droit :**

$$Ke^{-rT} = 20e^{-0.01} = 19.80$$

$$S_0 - Ke^{-rT} = 19.80 - 19.80 = 0$$

Conclusion : Parité vérifiée, pas d'arbitrage.

Formule avec dividendes

$$C_0 - P_0 = S_0 - De^{-rT} - Ke^{-rT}$$

Que faire si la parité n'est pas respectée ?

- **Arbitrage :** Exploiter l'écart en combinant :
  - Achat d'une option sous-évaluée.
  - Vente de l'option surévaluée.
  - Emprunt ou placement au taux sans risque.

Ce qu'il faut retenir :

- **Formule sans dividende :** $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$
- **Formule avec dividendes :** $C_0 - P_0 = S_0 - De^{-rT} - Ke^{-rT}$
- **Formule avec dividendes (continu):** $C_0 - P_0 = S_0e^{-dt} - Ke^{-rT}$
- Si les deux côtés sont **égaux**, pas d'arbitrage.
- Sinon, opportunité d'**arbitrage**.

—

6 À la monnaie spot vs. à la monnaie forward

ATM spot (À la monnaie spot)

- Strike (K) fixé au **prix spot** actuel (S_0).
- Utilisé pour des options avec **exercice immédiat** ou sur **actions sans dividendes**.

ATM forward (À la monnaie forward)

- Strike (K) fixé au **prix forward** (F_0), ajusté pour **taux d'intérêt** et **dividendes**.
- Utilisé pour des options sur **contrats à terme** ou actifs avec **dividendes**.

Formule du prix forward :

$$F_0 = S_0 e^{(r-d)T}$$

6.1 Exemple :

Données :

- Prix spot : $S_0 = 100$.
- Taux sans risque : $r = 3\%$.
- Dividendes : $d = 1\%$.
- Maturité : $T = 1$ an.

Calcul :

$$F_0 = 100e^{(0.03-0.01)\cdot 1} = 100e^{0.02} \approx 102.02$$

—

7 Déterminants du prix d'une option

Sensibilités et impact des facteurs

FACTEUR	CALL	PUT	SENSIS « grecques »
Cours S_0 ↗	↗ $\Delta > 0$	↘ $\Delta < 0$	Delta (Δ)
Volatilité σ ↗	↗ $V > 0$	↗ $V > 0$	Véga (V)
Tps jusqu'à mat. $T - t$ ↘	↘ $\theta < 0$	↘ $\theta < 0$	Théta (θ)
Taux d'intérêt r ↗	↗ $\rho > 0$	↘ $\rho < 0$	Rho (ρ)
Dividendes ↗	↘	↗	-

8 Exercie: Convexité du prix d'un call

Objectif de l'exercice

Démontrer que le prix d'un call $C_0(K)$ est une **fonction convexe** par rapport à son strike (K) en utilisant l'**AOA** (Absence d'Opportunité d'Arbitrage).

Résultat à prouver

Pour deux strikes $K_1 < K_2$, on veut démontrer que :

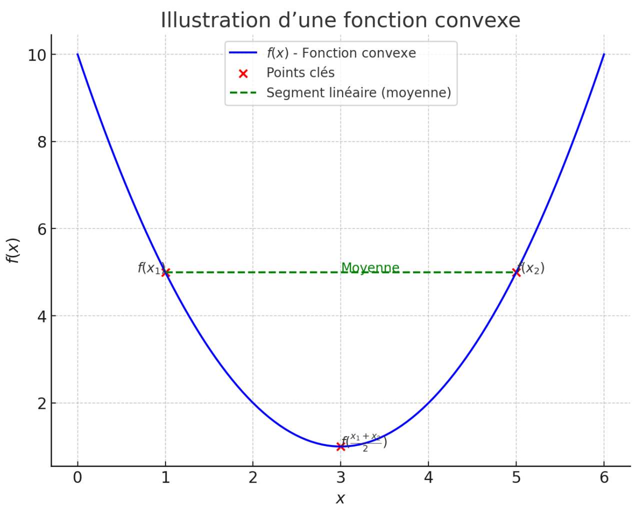
$$C_0\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \leq \frac{C_0(K_1) + C_0(K_2)}{2}$$

8.1 Définition d'une fonction convexe

Une fonction $f(x)$ est **convexe** si :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Interprétation : La **valeur au milieu** est toujours inférieure ou égale à la **moyenne des valeurs** aux extrémités.



8.2 Démonstration avec l'AOA

- On considère deux calls : $C_0(K_1)$ et $C_0(K_2)$.
- On crée un portefeuille avec :
  - Achat d'un call au strike moyen : $K_m = \frac{K_1+K_2}{2}$.
  - Comparaison avec la moyenne des deux autres calls.
- Si l'inégalité ci-dessus est violée, un **arbitrage** est possible (gains sans risque).
- L'AOA interdit l'arbitrage, donc l'inégalité doit être vraie.

8.3 Exemple numérique

Données :

- $K_1 = 95,\ K_2 = 105.$
- $C_0(95) = 8,\ C_0(105) = 3.$

Calculs :

- Strike moyen :

$$K_m = \frac{95 + 105}{2} = 100$$

- Vérifions :

$$C_0(100) \leq \frac{8 + 3}{2} = 5.5$$

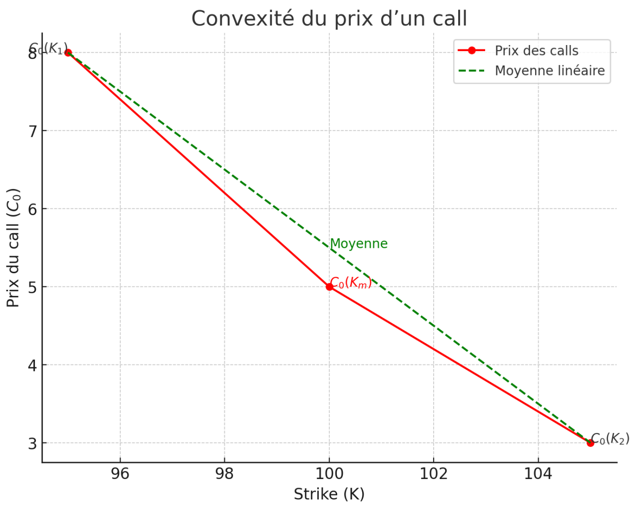
- Supposons que :

$$C_0(100) = 5$$

- Résultat :

$$5 \leq 5.5$$

L'inégalité est respectée $\rightarrow$ **Convexité confirmée.**



Conclusion :

- Le prix d'un call est une **fonction convexe** de son **strike**.
- Cela découle de l'**AOA** (absence d'arbitrage).
- La convexité garantit qu'il est impossible d'exploiter des déséquilibres pour créer un **profit sans risque**.

9 Exercices

9.1 Exercice 1

9.2 Exercice 2

9.3 Exercice 3

9.4 Exercice 4