Modèle de Black & Scholes

Jean-François Berger-Lefébure

26 Novembre 2024

Contents

1 Introduction

1.1 Contexte historique et origines

Le modèle de Black & Scholes a été introduit en 1973 par **Fischer Black** et **Myron Scholes**, avec une contribution majeure de **Robert Merton**. À cette époque, les marchés financiers connaissaient une forte croissance des produits dérivés, notamment les options. Cependant, il manquait un cadre théorique rigoureux pour évaluer leur prix.

Avant cette avancée, l'évaluation des options reposait sur des règles empiriques et des méthodes peu formalisées, ce qui rendait les marchés inefficaces. Les chercheurs se sont donc posé une question fondamentale: *comment évaluer correctement une option de manière scientifique ?*

Le problème posé était:

- *Quel est le prix équitable d'une option aujourd'hui, sachant que son rendement futur est incertain ?*

Pour répondre à cette question, il était nécessaire d'exploiter la théorie des probabilités, la dynamique des processus stochastiques et la finance quantitative.

1.2 Hypothèses Clés du Modèle

Pour simplifier l'analyse, Black et Scholes ont posé plusieurs hypothèses sur les marchés:

- **Absence d'opportunités d'arbitrage**: Il est impossible de réaliser un profit sans risque.
- **Évolution continue des prix**: Les variations des prix suivent un mouvement brownien géométrique (modèle log-normal).
- **Marchés parfaits**: Pas de coûts de transaction ni de taxes, et la possibilité d'acheter ou vendre des fractions d'actifs.
- **Taux d'intérêt constant et connu**: Les emprunts et placements se font à un taux fixe.
- **Aucune distribution de dividendes** pendant la durée de vie de l'option.
- **Volatilité constante**: La variabilité des rendements reste stable sur la période étudiée.

Ces hypothèses simplifient les calculs tout en posant la base d'un modèle analytique solide.

1.3 Formules

La formule initiale de Black & Scholes permet de calculer le prix d'un **call européen** (droit d'acheter un actif):

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Avec:

- S_0: Prix initial de l'actif sous-jacent.
- K: Prix d'exercice (strike).
- T: Temps jusqu'à la maturité (en années).
- r: Taux d'intérêt sans risque.
- $N(.)$: Fonction de répartition de la loi normale.
- d_1 et d_2 calculés par:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où σ représente la **volatilité** de l'actif.

1.4 Problématiques soulevées

Bien que ce modèle soit révolutionnaire, il n'était pas exempt de limites:

- **Volatilité non constante**: La volatilité réelle observée sur les marchés dépend du niveau des prix.
- **Sauts dans les prix**: Les prix des actifs peuvent connaître des variations soudaines, ce que le modèle ne peut pas capturer.
- **Dividendes non pris en compte**: Hypothèse restrictive dans de nombreux cas.

Ces limites ont conduit à des extensions telles que:

- **Modèle de Black-Scholes-Merton avec dividendes.**
- **Modèles à volatilité locale et stochastique**.

Le modèle Black & Scholes a marqué le début de la finance quantitative moderne. Il est devenu la base de nombreux modèles plus complexes utilisés pour évaluer des produits financiers exotiques tels que les options barrières, les options asiatiques et les produits quantos.

—

2 Démonstration du modèle

2.1 Formules de base

2.1.1 Forme multiplicative

La forme multiplicative est la **formule fondamentale** utilisée pour modéliser l'évolution du prix de l'actif sous-jacent $S(t)$:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

où:

- $S(t)$: Prix de l'actif sous-jacent à l'instant t.
- μ: Taux de croissance moyen (*drift*).
- σ: Volatilité constante de l'actif.
- $dW(t)$: Variation infinitésimale d'un mouvement brownien sous la mesure historique $\mathbb{P}$.

Cette équation combine deux composantes:

- $\mu S(t)dt$: Croissance déterministe, proportionnelle au prix actuel $S(t)$.
- $\sigma S(t)dW(t)$: Composante aléatoire, proportionnelle à $S(t)$ et influencée par un bruit blanc.

2.2 Passage à la forme relative

2.2.1 Division par $S(t)$

En divisant chaque terme de l'équation $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ par $S(t)$ (en supposant $S(t) > 0$), on obtient:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{\mu S(t)dt}{S(t)} + \frac{\sigma S(t)dW(t)}{S(t)}.$$

Ce qui donne, après simplification:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t).$$

2.2.2 Interprétation de la forme relative

L'équation relative obtenue,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t),$$

représente le **rendement instantané** de l'actif sous-jacent.

- $\frac{dS(t)}{S(t)}$: Variation proportionnelle (ou relative) du prix de l'actif sur un petit intervalle dt.
- μdt: Composante déterministe, représentant le rendement moyen attendu sur l'intervalle dt.
- $\sigma dW(t)$: Composante aléatoire, représentant l'incertitude due aux fluctuations aléatoires modélisées par le mouvement brownien $W(t)$.

2.2.3 Pourquoi cette transformation ?

La reformulation relative est essentielle car:

- Elle simplifie les calculs en exprimant les variations relatives plutôt qu'absolues.
- Elle montre que les rendements logarithmiques peuvent être modélisés comme une somme d'un terme déterministe et d'un terme aléatoire.
- Cette forme est une étape clé pour résoudre l'équation stochastique et obtenir une solution explicite.

—

2.3 Passage de $dX(t)$ à partir de $S(t)$

Pour transformer la dynamique de $S(t)$ en une équation pour $X(t) = \ln(S(t))$, nous utilisons la **formule d'Itô**. Cette formule permet de dériver une fonction différentiable d'un processus stochastique.

2.3.1 Rappel de la formule d'Itô

Si $S(t)$ suit la dynamique:

$$dS(t) = a(S,t)dt + b(S,t)dW(t),$$

et si $X(t) = f(S(t))$, où f est une fonction différentiable deux fois, alors la formule d'Itô donne:

$$df(S(t)) = f'(S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f''(S(t))b(S,t)^2dt.$$

2.3.2 Application à $X(t) = \ln(S(t))$

Nous posons $f(S) = \ln(S)$. Les dérivées de f sont:

$$f'(S(t)) = \frac{1}{S(t)}, \quad f''(S(t)) = -\frac{1}{S(t)^2}.$$

2.3.3 Dynamique de $S(t)$

La dynamique de $S(t)$ est donnée par:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

où:

- $a(S,t) = \mu S(t)$: Composante déterministe.
- $b(S,t) = \sigma S(t)$: Composante aléatoire.

2.3.4 Appliquer la formule d'Itô

En utilisant la formule d'Itô pour $X(t) = \ln(S(t))$, nous avons:

$$dX(t) = f'(S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f''(S(t))b(S,t)^2dt.$$

2.3.5 Calcul des termes

- Premier terme: En remplaçant $f'(S(t)) = \frac{1}{S(t)}$ et $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, nous obtenons:

  $$f'(S(t))dS(t) = \frac{1}{S(t)}\left(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\right).$$

  Simplifions:

  $$f'(S(t))dS(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

- Second terme: En remplaçant $f''(S(t)) = -\frac{1}{S(t)^2}$ et $b(S,t)^2 = \sigma^2 S(t)^2$, nous avons:

  $$\frac{1}{2}f''(S(t))b(S,t)^2dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S(t)^2}\right)\sigma^2 S(t)^2dt.$$

  Simplifions:

  $$\frac{1}{2}f''(S(t))b(S,t)^2dt = -\frac{1}{2}\sigma^2dt.$$

2.3.6 Regrouper les termes

En combinant les deux termes, on obtient:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2dt.$$

Regroupons les termes similaires:

$$dX(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t).$$

2.3.7 Résultat final

La dynamique pour $X(t) = \ln(S(t))$ est donnée par:

$$dX(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW(t).$$

Interprétation

- $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$: Le **drift corrigé**, qui tient compte de l'impact de la volatilité (σ^2) sur la croissance moyenne.
- $\sigma dW(t)$: La composante aléatoire, représentant les variations stochastiques du prix.

—

2.4 Résolution de l'équation différentielle stochastique

Nous cherchons à résoudre l'équation différentielle stochastique donnée par:

$$dX(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW(t),$$

pour obtenir une solution explicite pour $X(t) = \ln(S(t))$, et donc pour $S(t)$.

2.4.1 Équation à résoudre

L'équation différentielle stochastique est composée de deux termes:

- $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt$: Terme déterministe.
- $\sigma dW(t)$: Terme aléatoire lié au mouvement brownien.

2.4.2 Intégration des deux termes

Nous intégrons chaque composante séparément sur l'intervalle $[0, T]$.

a) Composante déterministe L'intégrale du terme déterministe est donnée par:

$$\int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T.$$

b) Composante aléatoire L'intégrale du terme aléatoire est donnée par:

$$\int_0^T \sigma dW(t) = \sigma W(T),$$

où $W(T)$ est la valeur du mouvement brownien au temps T, qui suit une loi normale:

$$W(T) \sim \mathcal{N}(0, T).$$

2.4.3 Combinaison des deux composantes

En combinant les deux termes, on obtient:

$$X(T) = X(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W(T),$$

où $X(0) = \ln(S(0))$.

2.4.4 Exponentiation pour retrouver $S(T)$

En exponentiant, nous obtenons la solution explicite pour $S(T)$:

$$S(T) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W(T)}.$$

2.4.5 Résultat final

La solution explicite pour le prix $S(T)$ est donnée par:

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)}.$$

Cette expression est essentielle pour la prochaine étape, où nous passons à la mesure risque-neutre pour valoriser les options.
—

2.5 Passage à la Mesure Risque-Neutre

Pour valoriser les options et garantir l'absence d'arbitrage, nous passons à la **mesure risque-neutre** $\mathbb{Q}$. Sous cette mesure, tous les actifs financiers croissent au taux sans risque r, et non au taux historique μ.

2.5.1 Dynamique sous $\mathbb{P}$ (résultat précédent)

La solution explicite obtenue sous la mesure historique $\mathbb{P}$ est donnée par:

$$S(T) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)},$$

où $W(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$ sous $\mathbb{P}$.

2.5.2 Passage à $\mathbb{Q}$

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, le taux de croissance historique μ est remplacé par le taux sans risque r. Ainsi, la dynamique devient:

$$S(T) = S(0)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W^Q(T)},$$

où:

- $W^Q(T)$ est un mouvement brownien sous la mesure $\mathbb{Q}$,
- $W^Q(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$, comme $W(T)$ sous $\mathbb{P}$.

2.5.3 Interprétation du passage à $\mathbb{Q}$

- **Pourquoi remplacer μ par r ?** Sous $\mathbb{Q}$, l'hypothèse d'absence d'arbitrage impose que la croissance moyenne de tout actif financier doit être égale au taux sans risque r. Cela garantit que les prix calculés sont cohérents avec les marchés financiers.
- **Impact du changement** La composante aléatoire $\sigma W(T)$ reste inchangée, mais le drift devient $r - \frac{\sigma^2}{2}$, reflétant la dynamique sous la mesure $\mathbb{Q}$.

2.5.4 Résultat sous la mesure risque-neutre

Sous $\mathbb{Q}$, la solution explicite pour $S(T)$ est:

$$S(T) = S(0)e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W^Q(T)}.$$

2.5.5 Résumé

Le passage à la mesure risque-neutre garantit que les prix calculés reflètent un marché sans arbitrage. Cette dynamique est essentielle pour valoriser les options via l'espérance actualisée sous $\mathbb{Q}$.

2.6 Calcul du prix via une intégrale

Pour calculer le prix d'un call européen, nous utilisons la formule suivante, qui repose sur l'espérance actualisée sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^Q\left[(S(T)-K)^+\right].$$

Cette formule exprime le prix comme l'espérance du payoff futur $(S(T)-K)^+$, actualisé au taux sans risque r.

2.6.1 Substitution de $S(T)$

Sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, la dynamique du prix de l'actif est donnée par:

$$S(T) = S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W^Q(T)},$$

où $W^Q(T) \sim \mathcal{N}(0,T)$ (loi normale de moyenne 0 et variance T).
Pour simplifier, introduisons une variable standardisée:

$$x = \frac{W^Q(T)}{\sqrt{T}} \quad \text{donc} \quad W^Q(T) = x\sqrt{T}, \quad x \sim \mathcal{N}(0,1).$$

En remplaçant $W^Q(T)$, on peut écrire $S(T)$ comme:

$$S(T) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x}.$$

2.6.2 Formulation de l'espérance

Le payoff d'un call européen est donné par $(S(T)-K)^+$, ce qui signifie que le payoff est nul si $S(T) \leq K$. En remplaçant $S(T)$, la formule du prix devient:

$$C_0 = e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} - K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx,$$

où:

- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ est la densité de probabilité de la loi normale standard.

2.6.3 Simplification de l'intégrale

Pour simplifier cette intégrale, nous analysons l'expression $\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} - K\right)^+$. Ce terme est nul lorsque $S(T) \leq K$, ce qui équivaut à résoudre:

$$S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}x} \leq K.$$

En prenant le logarithme des deux côtés:

$$\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}x \leq \ln(K).$$

En isolant x, nous obtenons:

$$x \leq \frac{\ln(S_0/K) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Cette valeur correspond à d_2:

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Pour simplifier les calculs liés à S_0, nous introduisons également d_1, défini comme suit:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Les deux termes sont reliés par:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

En utilisant d_1 et d_2, nous séparons l'intégrale en deux parties:

$$C_0 = e^{-rT}\left[S_0\int_{d_1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx - Ke^{-rT}\int_{d_2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\right].$$

2.6.4 Utilisation de la fonction de répartition normale $N(x)$

Après avoir séparé l'intégrale en deux termes, la formule devient:

$$C_0 = e^{-rT} \left[S_0 \int_{d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx - Ke^{-rT} \int_{d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \right].$$

Nous allons maintenant analyser et simplifier chaque terme.

1. Premier terme: $S_0 \int_{d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

- L'intégrale:

$$\int_{d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

  représente la probabilité cumulative d'une loi normale standard au-delà de d_1, soit la probabilité que $x > d_1$.

- En termes de la fonction de répartition cumulative $N(x)$, qui donne la probabilité qu'une variable normale soit inférieure ou égale à x, cette intégrale peut être réécrite comme:

$$\int_{d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - N(d_1).$$

- Substituons cette relation dans le premier terme:

$$S_0 \int_{d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = S_0 \left(1 - N(d_1)\right).$$

2. Deuxième terme: $Ke^{-rT} \int_{d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

- De manière similaire, l'intégrale:

$$\int_{d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

  représente la probabilité que $x > d_2$.

- En termes de $N(x)$, cela devient:

$$\int_{d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - N(d_2).$$

- Substituons cette relation dans le deuxième terme:

$$Ke^{-rT} \int_{d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = Ke^{-rT} \left(1 - N(d_2)\right).$$

3. Réassemblage des termes En substituant les deux expressions simplifiées dans la formule initiale, nous avons:

$$C_0 = e^{-rT} \left[S_0 \left(1 - N(d_1)\right) - Ke^{-rT} \left(1 - N(d_2)\right) \right].$$

Simplifions cette expression:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2).$$

2.6.5 Résultat final: La formule de Black & Scholes

La formule pour le prix d'un call européen est donnée par:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2),$$

avec:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Pourquoi cette étape fonctionne ?

- Nous avons utilisé les propriétés de la fonction de répartition $N(x)$, qui permet de transformer les intégrales de la densité normale en termes de probabilités cumulées.
- La relation $\int_{d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - N(d_1)$ est un résultat standard de la loi normale.

Interprétation finale

- $S_0 N(d_1)$: Correspond à la valeur actualisée pondérée par la probabilité que l'option soit dans la monnaie $(S(T) > K)$.
- $K e^{-rT} N(d_2)$: Correspond à la valeur actualisée du coût d'exercice pondérée par la probabilité d'exercer $(S(T) > K)$.