1/ Options : généralités et premières propriétés

Antonin Chaix | antonin.chaix@gmail.com

DIFIQ | DIPLÔME EN FINANCE QUANTITATIVE

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE-PSL I ENSAE PARIS I BÄRCHEN EDUCATION

Plan

Généralités sur les options européennes

- Définition
- Payoff et stratégie d’exercice d’une option
- Utilisations des options
- Vocabulaire

Premières propriétés

- L’hypothèse d’A.O.A.
- Inégalités et parité call-put
- Déterminants des prix d’options

Plan (suite)

Le pricing et la couverture des options

- Modèle binomial
- Modèle et formule de Black & Scholes
- Volatilité historique vs. volatilité implicite, smile de volatilité
- Valeur intrinsèque et valeur temps

La couverture des options

- Les sensibilités (ou « grecques »)
- La couverture en delta-neutre

Options exotiques et méthodes numériques

- Quelques exemples d'options exotiques
- Focus sur la méthode de Monte Carlo

Les options européennes (« vanilles »)

Un **call** européen est une **option d'achat**

Son détenteur a la possibilité, mais pas l'obligation, d'**acheter** un actif S à une date future (*maturité* ou *échéance*) et à un prix fixé à l'avance (*prix d'exercice* ou *strike*).

L'actif S est appelé **actif sous-jacent**.

Exemple :

- Call sur action Orange, strike 10 €, maturité 3 mois.
- NB : cours actuel de Orange : 10.19 €

Put européen

Un **put** européen est une **option de vente**

Il est libellé comme le call, mais donne le droit de **vendre** l'actif sous-jacent à un prix donné à l'échéance de l'option.

Option vs. Forward

Contrairement à une option, un forward est **un engagement ferme**

Avec un call j'ai la possibilité d'acheter l'actif au prix convenu (strike). Je ne le fais que si cela est intéressant et je paye une prime pour détenir ce droit

Si j'achète un forward, je suis tenu quoiqu'il arrive d'acheter l'actif au prix convenu, même si cela m'est défavorable.

Ce prix fixé à l'avance (dit *prix forward* ou *prix à terme*) est fixé aujourd'hui de tel sorte que le contrat soit équitable. Je n'ai aucune prime à payer

Exemple / quiz

Call sur 1 action Orange, strike 10 €, maturité 3 mois

Cours actuel de l'action Orange : 10.19 €

Détenteur de ce call, j'ai donc la possibilité (mais pas l'obligation) d'acheter une action Orange au prix de 10 € dans 3 mois, sachant que son cours est aujourd'hui 10.19 €

Dans des conditions de marché « normales », ce call vaut plutôt :

a) 0.05 €
b) 0.50 €
c) 5.00 €
d) 10.00 €

Réponse…

Environ **0.50** €

Et on saura bientôt calculer cet ordre de grandeur presque de tête !

Stratégie d'exercice

Restons sur cet exemple : je suis détenteur d'un call sur 1 action Orange, strike **10 €**, maturité **3 mois**.

Aujourd'hui, l'action Orange vaut **10.19€.**

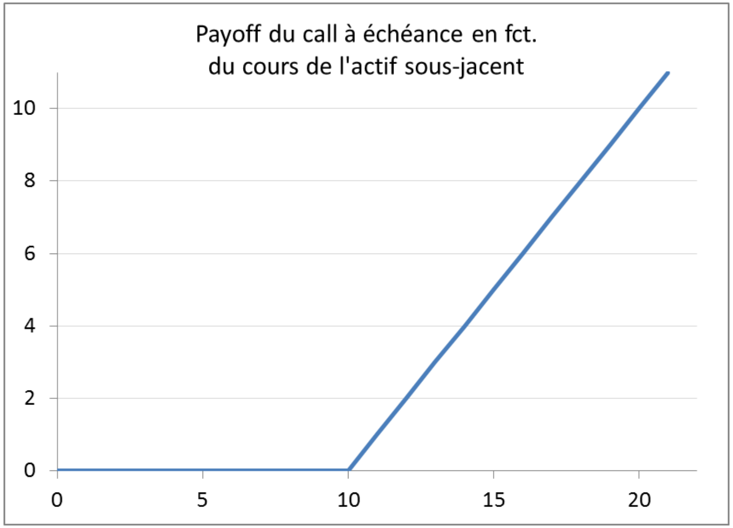
Stratégie d'exercice à l'échéance (dans 3 mois) ?

- J'exerce mon droit d'achat si le cours de l'action est **supérieur** à 10 €.
- En revendant immédiatement l'action achetée j'empoche la différence entre le cours d'Orange et le prix d'exercice.
- Je n'exerce pas mon droit d'achat si le cours de l'action est inférieur à 10 €. Mon profit est nul.

Payoff du call

Notons :

- S_T : cours de l'actif S à maturité T
- K : prix d'exercice



Le détenteur du call fait
à la date T le profit :

- $S_T - K$ si $S_T > K$
- **0** si $S_T < K$

Soit **max** $(S_T - K , 0)$, encore noté $(S_T - K)^+$

C'est le **payoff** du call

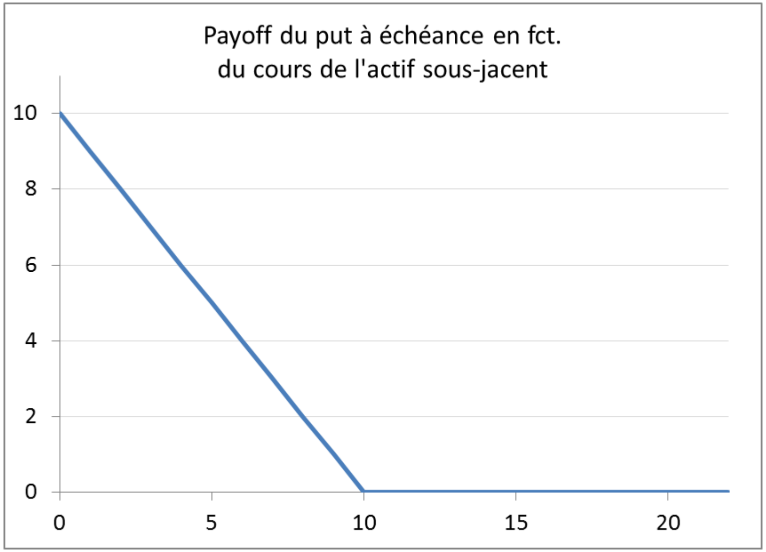
Payoff du put

Le détenteur du put fait à la date T le profit :

- $\boldsymbol{K - S_T}$ si $\boldsymbol{S_T < K}$
- $\mathbf{0}$ si $\boldsymbol{S_T > K}$

Soit $\mathbf{max}\ \boldsymbol{(K - S_T , 0)}$, encore noté $\boldsymbol{(K - S_T)^+}$

C'est le **payoff** du put



Physical settlement vs. Cash settlement

Détenteur d'un call, votre gain à échéance, en *marked-to-market* est :

$$(S_T - K)^+$$

Vous pouvez acheter physiquement l'action au prix d'exercice K, mais rien ne vous oblige à la revendre immédiatement.

C'est un ***Physical settlement***

Mais certaines options sont traitées avec ***Cash settlement***

C-à-d : on encaisse **en cash** le payoff $(S_T - K)^+$

Physical vs cash settlement : exemple

Vous avez acheté un call de prix d'exercice 100 sur une action.

A maturité, le cours de l'action est 120 : on exerce donc le call…

Physical settlement

Vous exercez votre droit d'acheter l'action à 100 et en devenez physiquement propriétaire.

Votre plus value latente au moment de l'exercice s'élève donc à 20, mais rien ne vous oblige à réaliser cette plus value. Vous pouvez conserver l'action en espérant qu'elle monte encore…

Cash settlement

Vous percevez automatiquement $(120 - 100)^{+} = 20$ en cash

Pourquoi traiter des options ?

- Instrument de couverture et de gestion de bilan

- Instrument spéculatif : *l'effet de levier*

- *Mais aussi* : une façon d'« acheter » ou de « vendre » de la volatilité.

Exemples de couverture avec les options

Options de taux : Caps & Floors

Se garantir un taux plafond (cap) dans le cas d’un emprunt à taux variable, ou un taux plancher (floor) dans le cas d’un placement à taux variable

Options de change

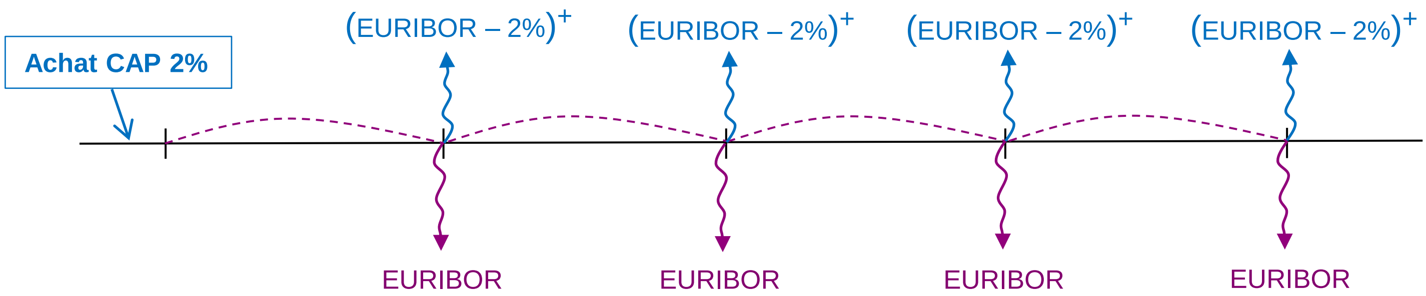
Dans le cas d’un contrat passé en USD, se garantir un taux de change EUR/USD plancher (pour se couvrir d’une baisse du dollar), tout en bénéficiant de la hausse éventuelle du dollar

Options sur action ou indice

L’achat de puts de strike faible permet par exemple de limiter la casse en cas de krach boursier. C’est une forme d’assurance contre la baisse des cours.

Exemple : couverture avec un cap

Je suis endetté à Euribor…



J'achète un cap de strike 2%

A chaque période :

- Si **Euribor** < **2%**, le cap ne rapporte rien, **je paye Euribor**
- Si **Euribor** > **2%**, le cap s'active, **je paye 2%**

Par l'achat du cap 2%, je viens donc de « capper » à 2% les intérêts de ma dette et donc de limiter mon risque de cash-flow

Exemple : couverture du risque de change

Airbus signe un contrat avec une compagnie aérienne pour la livraison de 10 avions à horizon 3 ans. Montant commande : 1Md$

Problème : Airbus est une entreprise européenne et raisonne en €. Le risque de change est donc monumental…

$$\text{Flux dans } T = 3 \text{ ans : } \quad 1\text{Md\$} \times \text{USDEUR}_T$$

Solution 1 : change à terme (avec un change forward à 0.91)

$$\underbrace{1\text{Md\$} \times \text{USDEUR}_T}_{\textit{Opération de change cash}} + \underbrace{1\text{Md\$} \times \left(0.91 - \text{USDEUR}_T\right)}_{\textit{Contrat de change forward}} = 1\text{Md\$} \times 0.91$$

Solution 2 : option de change - plus sympa… mais très cher !

$$\underbrace{1\text{Md\$} \times \text{USDEUR}_T}_{\textit{Opération de change cash}} + \underbrace{1\text{Md\$} \times \left(0.91 - \text{USDEUR}_T\right)^+}_{\textit{Option de change}}$$

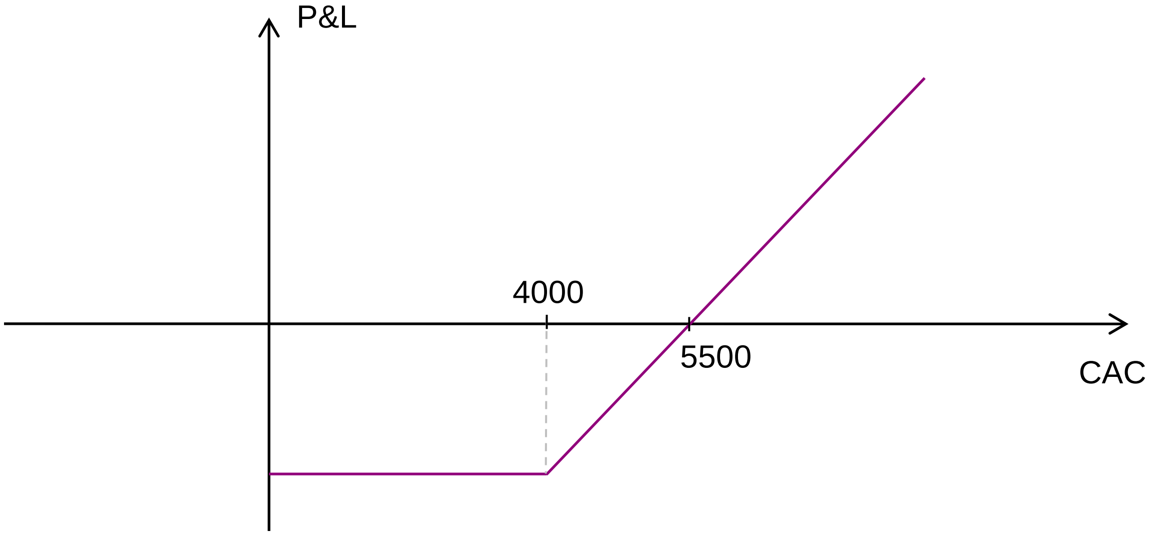
Exemple : couverture du risque action

Je gère une sicav benchmarkée sur le CAC 40

Je cherche à amortir le choc en cas de forte baisse du CAC…

Idée : acheter des puts CAC *en dehors de la monnaie…*

Exemple : si le CAC est à 5500 points, achat de puts de strike 4000



Effet de levier des options

Je souhaite investir **1000 €** sur un horizon de 1 an

Action au cours de **100 €**

Call 1an ATM sur cette action : **prime = 10 €**

Comparer les performances des investissements en actions et en options dans les cas suivants :

- Cours action dans 1 an = 80
- Cours action dans 1 an = 100
- Cours action dans 1 an = 130

Effet de levier des options

Cours action dans 1 an	**Investissement en actions** (n = 10 actions)	**Investissement en options** (n = 100 options)
80	Valeur portefeuille = **800** Perf = **-20%**	Valeur portefeuille = **0** Perf = **-100%**
100	Valeur portefeuille = **1000** Perf = **0%**	Valeur portefeuille = **0** Perf = **-100%**
130	Valeur portefeuille = **1300** Perf = +**30%**	Valeur portefeuille = **3000** Perf = +**200%**

En investissant en options, on démultiplie ses gains en cas de hausse du titre, mais on peut tout perdre en cas de baisse !

Prendre position sur la volatilité

Traiter des options peut aussi permettre de prendre position sur la volatilité de l’actif sous-jacent

Une option permet en général de prendre position sur le niveau de l’actif sous-jacent (cf. effet de levier).

Mais dès lors que l’on couvre une option en delta-neutre, ce n’est plus sur l’actif sous-jacent que l’on fait un pari, mais sur l’évolution future de la volatilité.

Nous étudierons ces aspects un peu plus tard…

A la monnaie, dans et en dehors de la monnaie

Une option est **dans la monnaie** (*in the money*) si, exercée immédiatement, elle procurerait un gain positif.

Une option est **en dehors de la monnaie** (*out of the money*) si, exercée immédiatement, elle ne procurerait aucun bénéfice.

Une option est **à la monnaie** (*at the money*) lorsque son strike est égal au cours actuel du sous-jacent.

A la monnaie, dans et en dehors de la monnaie

ATM / ITM / OTM dans le cas d’un call et d’un put :

	Dans la monnaie	**A la monnaie**	**Hors la monnaie**
Call	$K < S$	$K = S$	$K > S$
Put	$K > S$	$K = S$	$K < S$

Attention : cette notion peut aussi se définir par rapport au cours forward (à terme) du sous-jacent.

Plus une option est dans la monnaie, plus elle est chère

Plus une option est en dehors de la monnaie, moins elle est chère

Vérifions si tout le monde a compris…

Un call de strike 80€ sur une action dont le cours aujourd'hui est 97€ est...

1. *Dans monnaie*
2. *A la monnaie*
3. *En dehors de la monnaie*

Le CAC40 est actuellement autour de 4200 points. Un put CAC de strike 3200 est :

1. *Dans monnaie*
2. *A la monnaie*
3. *En dehors de la monnaie*

L’hypothèse d’AOA

L’hypothèse d’**A**bsence d’**O**pportunités d’**A**rbitrages (AOA) signifie que sur les marchés, on ne peut pas gagner de l’argent à coup sûr sans prendre de risques

Un arbitrage = un portefeuille de valeur nulle aujourd’hui et de valeur future positive et strictement positive avec une proba non nulle. Formellement : $X_0 = 0$, $X_T \geq 0$ et $\mathbf{P}(X_T > 0) > 0$.

L’hypothèse d’A.O.A suppose que de tels portefeuilles n’existent pas sur le marché.

L’A.O.A. implique que deux portefeuilles de valeurs finales identiques ont la même valeur aujourd’hui

Conséquences de l'AOA

Sous hypothèse d'AOA, deux portefeuilles *X* et *Y* de mêmes valeurs finales ont donc même valeur aujourd'hui.

Formellement : $X_T = Y_T$ implique $X_0 = Y_0$

Démo (par l'absurde) : si $X_T = Y_T$ mais $X_0 > Y_0$ alors il suffit d'acheter aujourd'hui d'acheter *Y*, de vendre *X* et de placer la plus value jusqu'en *T* => Arbitrage !

On souhaite évaluer un call. Supposons que l'on soit en mesure de déterminer un portefeuille *X* tel que $X_T = (S_T - K)^+$

Ce portefeuille X est dit *portefeuille de couverture* - ou *portefeuille de réplication* - du call

Dans ce cas, on connaît le prix de notre call : c'est la valeur X_0 en $t = 0$ de son portefeuille de réplication !

Conséquences de l'AOA

La propriété précédente vaut aussi pour une inégalité :

$$X_T \leq Y_T \text{ implique } X_0 \leq Y_0$$

Conséquences :

Prix du call ≤ cours de l'actif sous-jacent : $\mathbf{C_0 \leq S_0}$

En effet : $C_T = (S_T - K)^+ \leq S_T$ donc $C_0 \leq S_0$

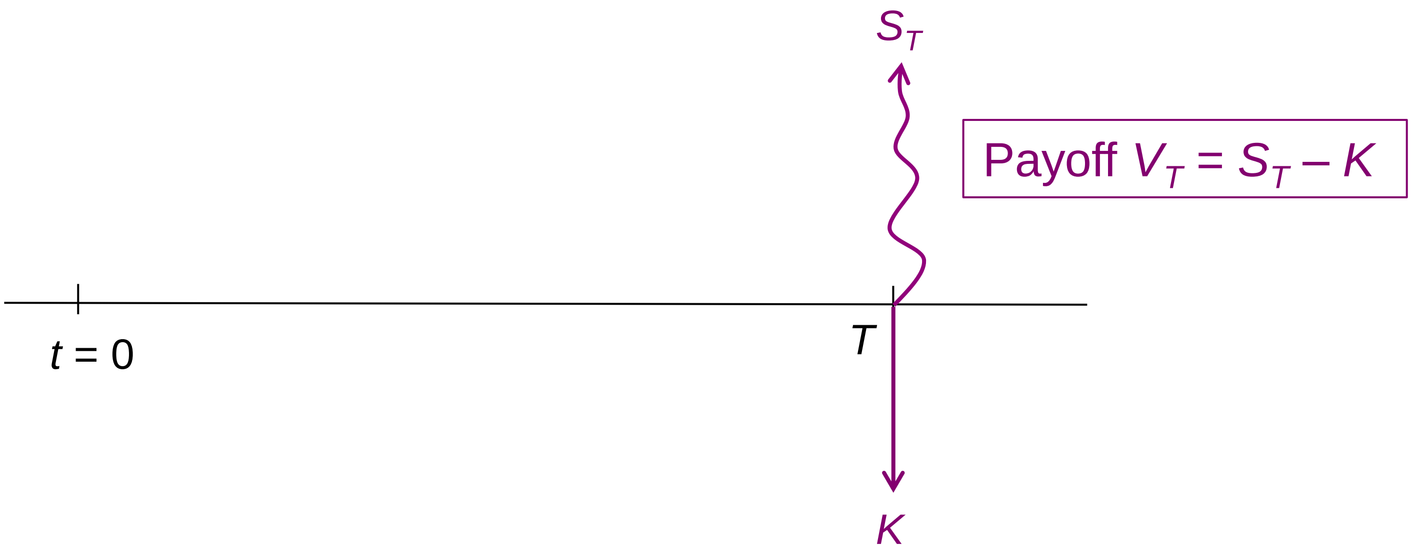
Prix du put ≤ strike actualisé : $\boldsymbol{P_0 \leq K e^{-rT}}$ (*)

En effet : $P_T = (K - S_T)^+ \leq K$ donc $P_0 \leq K e^{-rT}$

(*) Pour l'actualisation on utilise désormais une convention de taux continu : $DF(T) = e^{-rT}$

Evaluation d'un contrat forward par réplication

On s'intéresse au **contrat forward** consistant à s'engager fermement à acheter à la date T l'action S au prix K.



Quelle est la valeur V_0 en $t = 0$ de ce contrat ?

Evaluation d’un contrat forward par réplication

Idée : chercher un portefeuille permettant de répliquer ce contrat

- Pour recevoir S_T en T, il suffit d’acheter une action aujourd’hui
- Pour avoir à payer K en T, il suffit d’emprunter Ke^{-rT}

Le portefeuille constitué de ces 2 éléments réplique le contrat forward. La valeur en $t = 0$ du contrat forward est donc égale à la valeur de ce portefeuille :

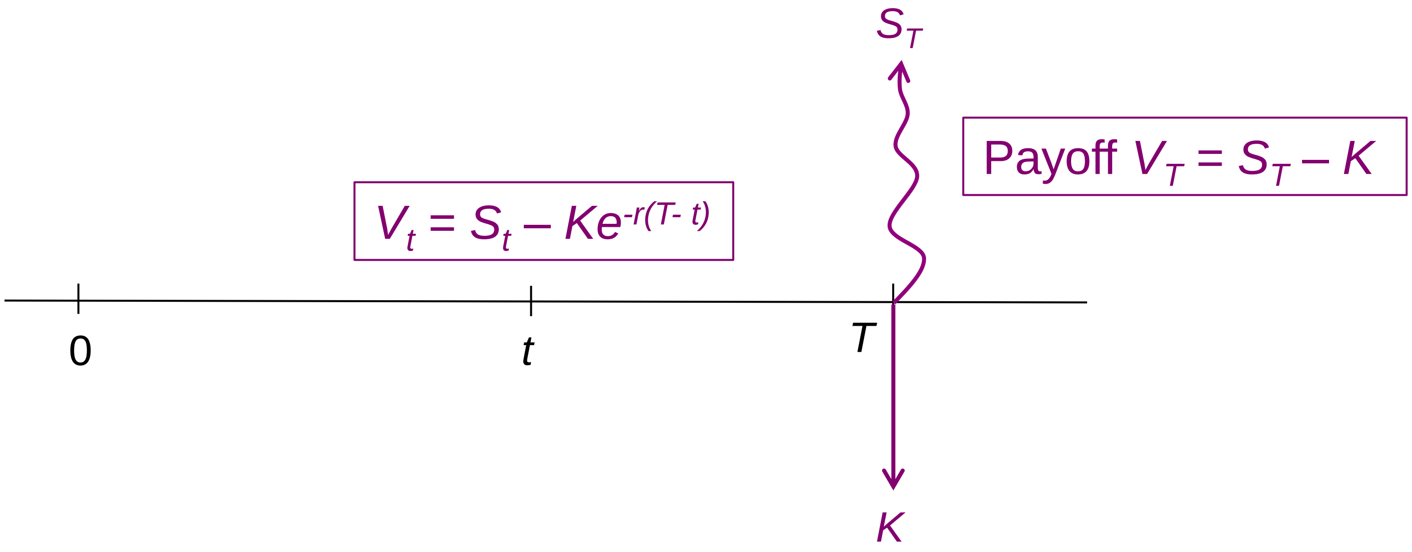
$$\boldsymbol{V_0 = S_0 - K\, e^{-rT}}$$

La valeur de K telle que $\mathbf{V_0 = 0}$ (contrat équitable) est $\boldsymbol{S_0} e^{\boldsymbol{rT}}$

$\boldsymbol{S_0} e^{\boldsymbol{rT}}$ est le **prix forward** de l’action

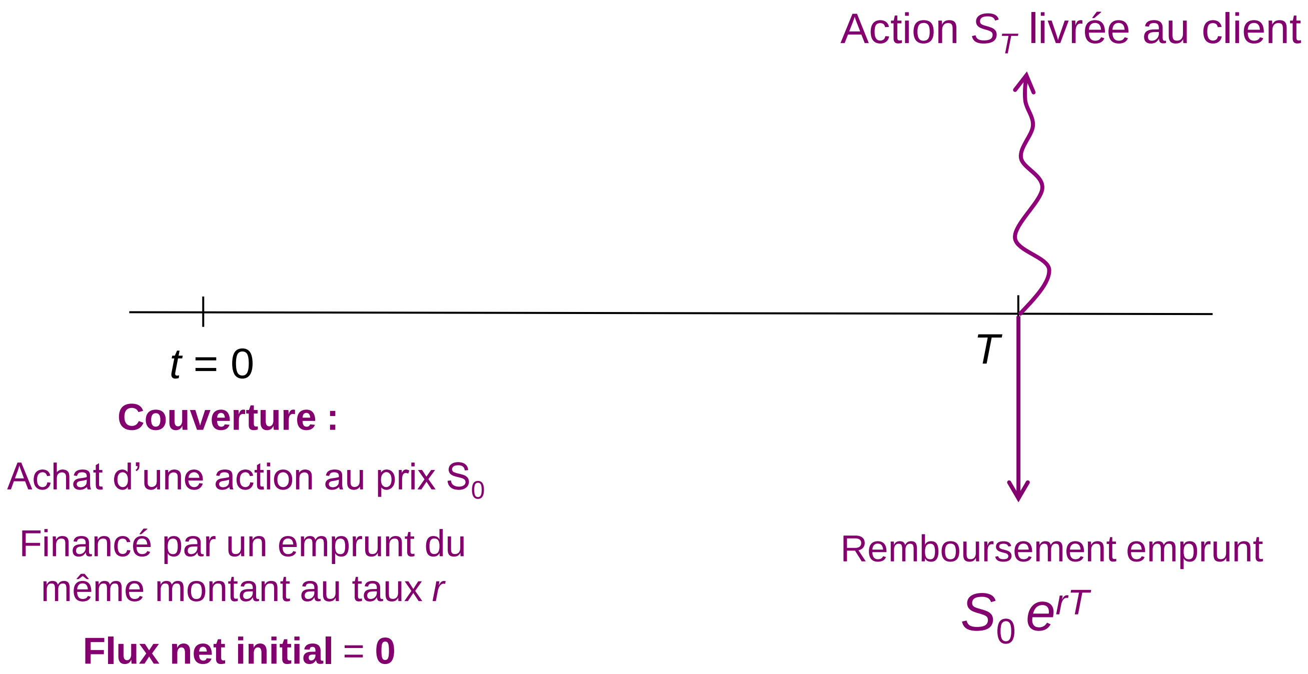
Evaluation d'un contrat forward par réplication

Cette méthode nous donne également la valeur en *t* quelconque du contrat forward :



Détermination directe du prix forward

Plaçons-nous du point de vue du banquier qui vend un contrat forward à son client et qui se couvre en conséquence

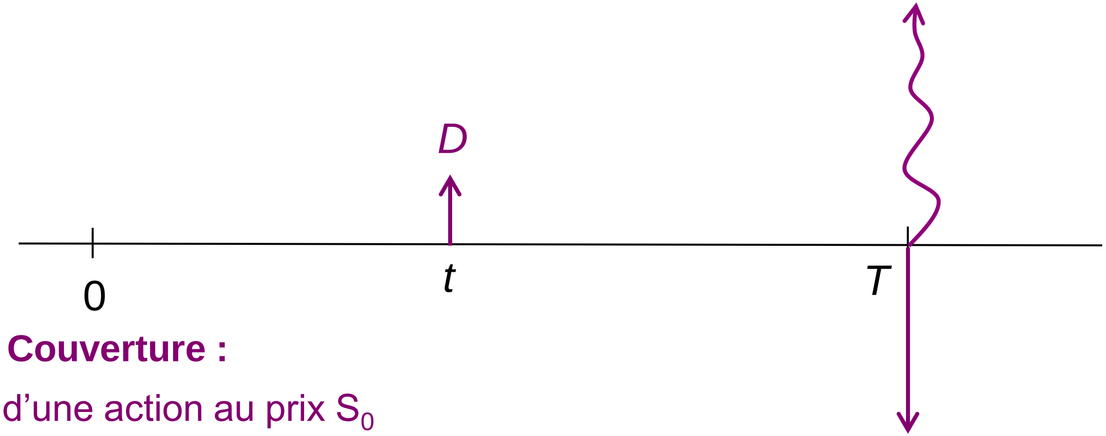


$\boldsymbol{S_0 e^{rT}}$ est donc le montant (hors marge) que je dois facturer au client

Détermination directe du prix forward

Quid de la situation où un dividende D est payé sur l'action entre t = 0 et T ?

Action S_T livrée au client



Couverture :

Achat d'une action au prix S_0

Financé par un emprunt du même montant au taux r

Flux net initial = **0**

Remboursement emprunt – dividende capitalisé

$$S_0\, e^{rT} - De^{r(T-t)}$$

D'où **Prix forward** = $\boldsymbol{S_0 e^{rT} - De^{r(T-t)}}$

Un peu de recul sur l'évaluation d'un forward ;-)

Quel est le prix forward d'une chèvre ?

Prix forward de la chèvre….

Cours spot (comptant)

- Emprunt
- Location du pré
- Vétérinaire
- Assurance

Coût du portage

- Lait

Revenus du portage

Prix forward = Comptant + Portage

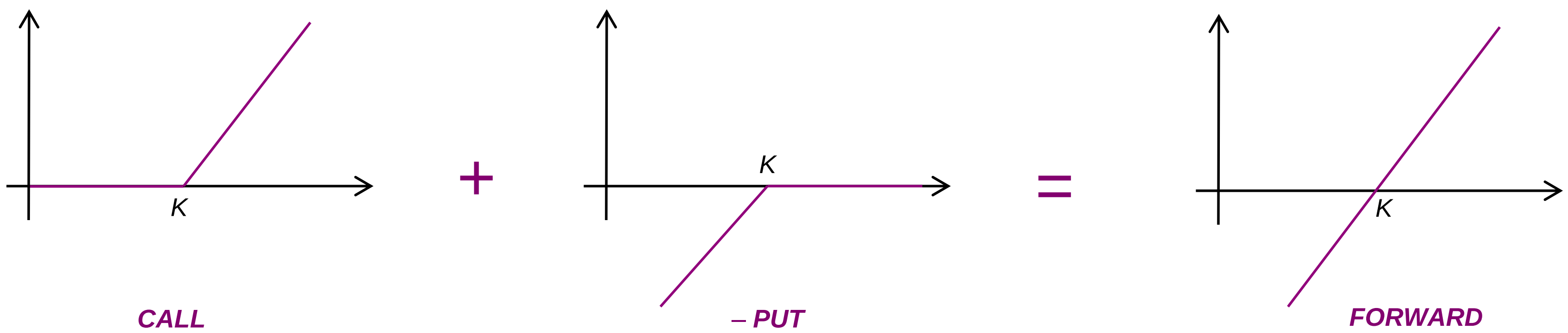
La parité call-put

La différence entre un call et un put de mêmes caractéristiques (sous-jacent, maturité, strike) est très simple :

$$(S_T - K)^+ \; - \; (K - S_T)^+ \; = \; S_T \; - \; K$$

C'est un **contrat forward** ! On parle de *forward synthétique*…

Graphiquement :



La parité call-put

Nous avons deux portefeuilles de même valeur en *T* :

$$C_T - P_T = S_T - K$$

En conséquence, leurs valeurs en $t = 0$ sont identiques :

$$\boxed{C_0 - P_0 = S_0 - K\, e^{-rT}}$$

C'est la **parité call-put** (sans dividendes sur l'actif)

Conséquence : connaissant le prix du call, je peux déterminer celui du put, et inversement. Inutile donc de coter les deux simultanément !

Exercice

Un call et un put européen sur action de maturité 1 an et de strike 20€ valent tous deux 2€. Le taux d'intérêt sans risque est de 1%. Le cours de l'action est 19.80 €. Y'a-t-il opportunité d'arbitrage? Que se passe-t-il si un dividende de 1 € est attendu dans 6 mois ?

Réponse

La parité call put est vérifiée : $2 - 2 = 0 = 19.80 - 20\ e^{-0.01x1}$
Pas d'arbitrage !

Si un dividende de 1€ est annoncé (toutes choses égales par ailleurs), un arbitrage est possible

En effet $S_0 - K\ e^{-rT} - C_0 + P_0 = 0$ et $S_T - K - C_T + P_T = 0$

Arbitrage = Achat action / emprunt $K\ e^{-rT}$ / vente call / achat put

Valeur portefeuille : $V_0 = 0$ et $V_T = 0$ mais je gagne 1€ dans 6 mois

Donc, si dividendes, la parité c/p doit être modifiée (on le savait)

Parité call-put avec dividendes sur l'actif

Dans le cas d'un dividende D (connu) versé à la date $t \leq T$, la valeur d'un contrat forward de payoff $S_T - K$ est modifiée :

$$V_0 = S_0 - D\, e^{-rt} - K\, e^{-rT}$$

La parité call-put s'écrit désormais :

$$\boxed{C_0 - P_0 = S_0 - D\, e^{-rt} - K\, e^{-rT}}$$

En pratique on utilise souvent un taux continu d de dividendes

$$\boxed{C_0 - P_0 = S_0\, e^{-d\,t} - K\, e^{-rT}}$$

À la monnaie spot vs. *à la monnaie forward*

On a jusqu'à présent défini une option (call ou put) *à la monnaie* comme une option dont le strike est égal au cours spot de l'actif sous-jacent : $K = S_0$

On dit que l'option est *à la monnaie spot*

En réalité, il est plus rigoureux de définir cette notion par rapport au *prix forward* de l'actif sous-jacent. En l'absence de dividendes sur l'actif sous-jacent : $K = S_0e^{rT}$

On dit que l'option est *à la monnaie forward*

Dans cette situation la valeur du forward sous-jacent est nulle, et par parité call-put, $C_0 – P_0 = 0$: le call et le put on mêmes prix

Déterminants du prix d'une option

J'ai un call ou un put sur action en portefeuille….

Quels sont, par ordre d'importance, les facteurs de marché qui vont faire le plus bouger son MtM ?

- Le cours de l'actif sous-jacent
- La volatilité
- Le temps restant jusqu'à échéance
- Les taux d'intérêt
- Les dividendes

Sensibilités et impact des facteurs

FACTEUR	CALL	PUT	SENSIS « grecques »
Cours S_0 ↗	↗ $\Delta > 0$	↘ $\Delta < 0$	Delta (Δ)
Volatilité σ ↗	↗ $V > 0$	↗ $V > 0$	Véga (V)
Tps jusqu'à mat. $T - t$ ↘	↘ $\theta < 0$	↘ $\theta < 0$	Théta (θ)
Taux d'intérêt r ↗	↗ $\rho > 0$	↘ $\rho < 0$	Rho (ρ)
Dividendes ↗	↘	↗	-

Exercice

Démontrer en utilisant l'AOA que le prix d'un call est une fonction convexe de son strike

Hint : pour démontrer ce résultat il suffit de montrer que pour tout strikes $K_1 < K_2$

$$C_0\big((K_1+K_2) / 2\big) \leq \big(C_0(K_1) + C_0(K_2)\big) / 2$$