Level 1
Pricing and risk-management des options
Cours 3
Exercices 1 pour cours 3

Jean-François Berger-Lefébure

December 2024

Contents

1 Exercice 1 - Probabilités de baisse avec BSM

1.1 Enoncé

DiFiQ N1 / Options

1/ Calcul dans le modèle de Black & Scholes d'une probabilité de forte baisse de l'actif sur une journée.

On s'intéresse au modèle de Black Scholes abordé en cours. L'équation de diffusion du sous-jacent sous la mesure risque neutre est la suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

On admet qu'elle se résout de la façon suivante entre *t* et *t*+Δ*t* :

$$S_{t+\Delta t} = S_t\ e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma(W_{t+\Delta t}-W_t)}$$

Et que l'accroissement de mouvement brownien ($W_{t+\Delta t}$ - W_t) suit une loi normale centrée de variance Δt.

En utilisant la volatilité historique du CAC sur l'année 2019 estimée en cours (13,34%) et un taux r = 1%, calculer dans le modèle la probabilité que le CAC chute de 5% en une journée. Refaire le calcul pour une baisse de 10%.

—

1.2 Notions à maitriser

Modèle de Black-Scholes:

- **Formule de base:** $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$
- **Hypothèses principales:**
  - Rendements logarithmiques **normaux**.
  - Volatilité (σ) et taux sans risque (r) **constants**.
  - **Absence d'arbitrage** (pas de profit sans risque).

Probabilités de baisse:

- **Calculer la probabilité** d'une chute d'au moins α%: $P\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} < 1 - \alpha\right)$
- **Standardiser la probabilité:** $d = \frac{\ln(1-\alpha)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- **Interpréter les résultats** avec la fonction de répartition normale $N(d)$.

Distribution des prix sous Black-Scholes:

- **Forme exponentielle:** $S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}X}$
- Les prix suivent une **loi log-normale**.
- Les rendements suivent une **loi normale**.

—

1.3 Formule de "variation absolue du prix" BSM

Nous expliquons ici en détail les étapes menant à la formule clé:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

1.3.1 Objectif: Modéliser l'évolution des prix d'un actif

L'objectif est de modéliser comment le prix d'un actif financier S_t évolue au fil du temps.

Pourquoi une modélisation aléatoire ?

- Les prix sur les marchés financiers sont **imprévisibles** à cause des informations nouvelles (résultats d'entreprises, annonces économiques, etc.).
- On veut un modèle capable de représenter cette **incertitude**.
- On utilise un **processus stochastique** basé sur un **mouvement brownien** pour capturer ces fluctuations aléatoires.

1.3.2 Hypothèses de base du modèle

- **Processus continu**: Les variations du prix sont **petites et continues** au lieu de se produire par sauts brusques. Cela reflète un marché où les informations arrivent en continu.
- **Rendement proportionnel**: Les variations du prix sont proportionnelles au niveau actuel du prix. Par exemple, si $S_t = 100$ et varie de 1 %, le changement est de 1 €, mais si $S_t = 10$, le même 1 % donne 0.10 €.
- **Volatilité constante (σ)**: La dispersion des prix reste proportionnelle à leur niveau (hypothèse simplificatrice).
- **Absence d'arbitrage**: Il n'est pas possible d'avoir un gain **sans risque** en utilisant ce modèle.

1.3.3 Le modèle initial: Processus de diffusion géométrique brownien (GBM)

On modélise le prix par une équation différentielle stochastique:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Explication des termes:

- dS_t: Variation infinitésimale du prix de l'actif à l'instant t.
- μ: Rendement moyen espéré (croissance attendue).
- σ: Volatilité (écart-type des variations).
- dW_t: Mouvement brownien standard (processus aléatoire).

1.3.4 Simplification: Division par S_t

Divisons l'équation par S_t pour simplifier l'analyse:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- $\frac{dS_t}{S_t}$: Rendement proportionnel instantané.
- On a séparé la **croissance attendue** (μdt) et la **partie aléatoire** (σdW_t).

Interprétation: On exprime le **rendement relatif** et non la variation absolue, car les prix sont souvent analysés en termes de **rendements**.

1.3.5 Passage à la mesure neutre au risque (Q)

Dans la finance, on travaille souvent sous une mesure particulière appelée **mesure risque-neutre**.

Hypothèse clé: Sous cette mesure, tous les actifs doivent croître au **taux sans risque** (r) et non au rendement espéré réel (μ). Cela garantit **l'absence d'arbitrage**, une condition fondamentale dans les modèles financiers.

On remplace donc le rendement réel (μ) par le taux sans risque (r):

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

Pourquoi changer μ en r ?

- Sous la mesure neutre au risque, on valorise les actifs comme s'ils évoluaient à un taux garanti (r).
- Cela permet de calculer des prix d'options en actualisant les flux futurs au taux sans risque.

1.3.6 Résultat final: Modèle de Black-Scholes

La formule simplifiée:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

est utilisée car:

- Elle sépare clairement:
  - **Croissance déterministe** (rdt).
  - **Composante aléatoire** (σdW_t).
- Elle est **exponentielle**: Les prix évoluent de manière proportionnelle, reflétant la réalité des marchés.
- Elle respecte **l'absence d'arbitrage** et garantit que l'évolution future des prix est cohérente avec les attentes des marchés.

1.3.7 Résumé

- La formule repose sur un **processus de diffusion géométrique brownien (GBM)** qui combine une partie déterministe et une partie aléatoire.
- rdt représente la croissance moyenne au **taux sans risque** sous la mesure neutre au risque.
- σdW_t capture les **variations aléatoires** proportionnelles au prix actuel (S_t).
- Sous la mesure neutre au risque, le rendement espéré est **réduit au taux sans risque** pour éliminer les opportunités d'arbitrage.
- Le modèle produit une distribution **log-normale** pour les prix, ce qui est réaliste dans les marchés financiers.

—

1.4 Différence entre $\frac{dS_t}{S_t}$ et dS_t

Nous expliquons ici en détail la différence entre les deux expressions $\frac{dS_t}{S_t}$ et dS_t utilisées dans le modèle de Black-Scholes.

1.4.1 dS_t: Variation absolue du prix

L'expression dS_t représente la **variation absolue** du prix de l'actif sur un petit intervalle de temps dt.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- $\mu S_t dt$: Variation **déterministe** proportionnelle au prix actuel (S_t) sur la période infinitésimale dt.
- $\sigma S_t dW_t$: Variation **aléatoire** introduite par le processus de Wiener (dW_t).

Interprétation:

- On mesure la **variation en valeur absolue** du prix d'un actif.
- Exemple: Si $S_t = 100$ et $dS_t = 1$, cela signifie que le prix a augmenté de 1 unité (1 € ou 1 dollar).
- Cela correspond à une **variation brute** en euros ou en dollars.

1.4.2 $\frac{dS_t}{S_t}$: Variation relative ou rendement instantané

L'expression $\frac{dS_t}{S_t}$ représente la **variation relative** ou **rendement instantané** de l'actif sur un petit intervalle de temps dt.

Divisons l'équation précédente par S_t:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Interprétation:

- On mesure la variation en **pourcentage** ou en **rendement relatif**.

- Exemple: Si $\frac{dS_t}{S_t} = 0.01$, cela signifie une hausse de **1 %**.
- Cette mesure est préférée en finance car elle permet de comparer différents actifs indépendamment de leur prix.

1.4.3 Différence fondamentale: Échelle absolue vs relative

Expression	Signification	Exemple ($S_t = 100$)
dS_t	Variation **absolue** (en unités)	$dS_t = 1$ signifie une hausse de 1 €
$\frac{dS_t}{S_t}$	Variation **relative** (rendement)	$\frac{dS_t}{S_t} = 0.01$ signifie une hausse de 1 %

1.4.4 Pourquoi utilise-t-on $\frac{dS_t}{S_t}$ dans Black-Scholes ?

- **Propriété multiplicative des prix:** Les prix d'actifs financiers évoluent généralement en **pourcentage** et non en valeurs fixes. Exemple: Une hausse de 10 % d'un prix de 100 donne +10 €, mais la même hausse de 10 % d'un prix de 200 donne +20 €.
- **Distribution des rendements:** Les rendements relatifs ($\frac{dS_t}{S_t}$) suivent une loi **normale**, tandis que les prix eux-mêmes suivent une loi **log-normale**.
- **Facilité mathématique:** En utilisant $\frac{dS_t}{S_t}$, on peut facilement appliquer des transformations logarithmiques, simplifiant les calculs analytiques.

1.4.5 Formule finale

La solution finale de l'équation différentielle est:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}X}$$

Cela montre que:

- Les prix suivent un processus **exponentiel**.
- Les rendements logarithmiques sont **normaux**.
- La volatilité et la croissance sont capturées séparément (drift + diffusion).

1.4.6 Exemple illustrant la différence entre dS_t et $\frac{dS_t}{S_t}$

Prenons un actif dont le prix actuel est $S_t = 100$. Supposons que cet actif suit un modèle simple de croissance avec un rendement moyen de 5% par an et une volatilité (écart-type) de 10%.

Cas 1: Variation absolue (dS_t)

Le modèle de l'évolution est:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- $\mu = 0.05$ (rendement moyen annuel de 5%)
- $\sigma = 0.10$ (volatilité annuelle de 10%)
- $dt = \frac{1}{365}$ (une journée)

Calcul: Pour une journée:

- Partie déterministe: $\mu S_t dt = 0.05 \times 100 \times \frac{1}{365} \approx 0.0137$
- Partie aléatoire: Supposons dW_t tiré d'une loi normale centrée réduite $N(0,1)$, par exemple $dW_t = 0.02$:

$$\sigma S_t dW_t = 0.10 \times 100 \times 0.02 = 0.2$$

Résultat:

$$dS_t = 0.0137 + 0.2 \approx 0.2137$$

L'évolution absolue est donc **+0.2137**.

Cas 2: Variation relative ($\frac{dS_t}{S_t}$)

La formule devient:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Calcul: Pour une journée:

- Partie déterministe: $\mu dt = 0.05 \times \frac{1}{365} \approx 0.000137$
- Partie aléatoire: $\sigma dW_t = 0.10 \times 0.02 = 0.002$

Résultat:

$$\frac{dS_t}{S_t} = 0.000137 + 0.002 \approx 0.002137$$

La variation relative est donc **+0.2137%**.

1.4.7 Résumé

- dS_t mesure la **variation absolue** (en valeur) du prix.
- $\frac{dS_t}{S_t}$ mesure la **variation relative** (en rendement ou pourcentage).
- La formule Black-Scholes utilise $\frac{dS_t}{S_t}$ car elle modélise des **rendements logarithmiques normaux**, ce qui est plus réaliste pour les actifs financiers.
- $\frac{dS_t}{S_t}$ permet de travailler avec des **échelles proportionnelles** et de comparer différents actifs plus facilement.
- Sous la mesure neutre au risque, le rendement est égal au **taux sans risque** r et non au rendement réel μ, garantissant l'absence d'arbitrage.

—

1.5 Formule explicite de l'EDS du modèle de BSM

Formule:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)}$$

Cette formule représente la **solution explicite** de l'équation différentielle stochastique du modèle de **Black-Scholes**.

1.5.1 Objectif de la formule:

Elle décrit comment le prix d'un actif S_t évolue entre l'instant actuel t et un instant futur $t+\Delta t$ en tenant compte:

- d'une **croissance déterministe** au taux sans risque r.
- d'une **composante aléatoire** modélisée par un mouvement brownien standard (W_t) et pondérée par la volatilité σ.

1.5.2 Décomposition des termes:

$S_{t+\Delta t}$**:**

- Prix de l'actif au temps $t + \Delta t$.
- Dépend de sa valeur actuelle S_t et des variations futures dans l'exponentielle.

S_t**:**

- Prix de l'actif à l'instant initial t.
- Point de départ pour calculer l'évolution future.

Partie déterministe dans l'exponentielle:

$$\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$$

- $r\Delta t$: **Croissance moyenne déterministe** au taux sans risque sur la période Δt.
- $-\frac{\sigma^2}{2}\Delta t$: Correction liée au biais de la **loi log-normale**. Ce terme ajuste la tendance pour compenser l'impact de la volatilité.

Interprétation: La partie déterministe ajuste la croissance attendue pour inclure l'effet des fluctuations aléatoires.

Partie aléatoire dans l'exponentielle:

$$\sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

- $W_{t+\Delta t} - W_t$: Différence d'un mouvement brownien. Suivant une loi normale centrée:

  $$\mathcal{N}(0, \Delta t)$$

  Il modélise les **chocs aléatoires** du marché.
- σ: **Volatilité** représentant l'intensité des fluctuations aléatoires.

Interprétation: Ce terme introduit l'**incertitude** dans le modèle en simulant les variations imprévisibles des prix.

1.5.3 Différence avec la formule $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

- **Forme différentielle:**
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$
  Cette équation décrit les variations **instantanées** et **infinitésimales** du prix d'un actif. Elle sépare deux composantes:

  - $\mu S_t dt$: Croissance **déterministe**.
  - $\sigma S_t dW_t$: Fluctuations **aléatoires**.

- **Forme explicite:**
$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)}$$
  Cette formule donne une **solution fermée** pour $S_{t+\Delta t}$ sur un intervalle de temps fini (Δt).

1. Relation entre les deux formules:

La forme explicite est obtenue en **intégrant** l'équation différentielle sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

- - Forme différentielle: Décrit l'évolution locale des prix. Elle est utile pour modéliser les mouvements en continu.

- - Forme explicite: Donne directement la valeur future du prix. Elle est utile pour des calculs pratiques et pour simuler des trajectoires de prix.

2. Différences dans les applications:

- **Forme différentielle:**
  - Utilisée pour dériver des propriétés statistiques et des formules analytiques.
  - Nécessaire pour calculer des sensibilités (grecs) et effectuer des analyses locales.
- **Forme explicite:**
  - Utilisée pour simuler des trajectoires de prix sur des périodes spécifiques.
  - Permet de calculer directement des probabilités de franchissement de seuils ou des rendements futurs.

—

1.6 Démonstration: Passage de la formule différentielle à la formule explicite

1. Forme différentielle:

L'équation différentielle de départ est:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- $\mu S_t dt$: Croissance **déterministe** proportionnelle au prix.
- $\sigma S_t dW_t$: Variation **aléatoire** liée au mouvement brownien (W_t).

2. Transformation logarithmique:

Posons:

$$Y_t = \ln(S_t)$$

Nous appliquons la formule d'Itô pour calculer la dérivée stochastique:

$$dY_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(dS_t)^2$$

Calculons chaque terme:

- **Premier terme:**

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_t} dS_t &= \frac{1}{S_t}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) \\ &= \mu dt + \sigma dW_t\end{aligned}$$

- **Second terme:** Le seul élément significatif est:

$$(dS_t)^2 = (\sigma S_t)^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$$

  Donc:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt = \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

—

3. Équation pour Y_t:

En combinant les résultats:

$$dY_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

—

4. Intégration:

Intégrons sur $[t, t + \Delta t]$:

$$Y_{t+\Delta t} - Y_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

En remplaçant $Y_t = \ln(S_t)$:

$$\ln(S_{t+\Delta t}) - \ln(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

—

5. Exponentielle pour retrouver S_t:

Exponentions des deux côtés:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)}$$

—

6. Changement pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

Comme:

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

On pose:

$$W_{t+\Delta t} - W_t = \sqrt{\Delta t} X$$

avec $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
—

7. Formule finale:

En remplaçant dans l'équation précédente:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} X}$$

—

1.7 Solution

1.7.1 Objectif: Calculer la probabilité d'une baisse.

On cherche la **probabilité que l'actif chute d'au moins** $\alpha\%$ sur une journée ($\Delta t = 1/365$):

$$P\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} < 1 - \alpha\right)$$

- $P(...)$: Probabilité que l'événement entre parenthèses se produise.
- $\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$: Rapport entre le prix futur ($S_{t+\Delta t}$) et le prix actuel (S_t).
  - Mesure le **rendement relatif** ou la **variation proportionnelle** de l'actif.
- $< 1 - \alpha$: Condition indiquant que le rendement est **inférieur à un certain seuil** fixé par $1 - \alpha$.

Ce que signifie la formule:

On calcule la **probabilité** que le prix futur de l'actif **baisse d'au moins** $\alpha\%$ par rapport à son prix actuel.

Exemple avec $\alpha = 10\%$:

- **Seuil:** $1 - \alpha = 1 - 0.10 = 0.90$.
- On cherche la probabilité que:

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} < 0.90$$

Interprétation: Quel est le risque que l'actif perde **plus de 10%** et que son prix final soit **inférieur à 90%** de sa valeur initiale ?

1.7.2 Formulation avec la distribution des prix

La solution explicite du prix est donnée par:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}X}$$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ est une **variable normale standardisée**.
On réécrit la condition:

$$P\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} < 1-\alpha\right)$$

Sous forme exponentielle:

$$P\left(e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}X} < 1-\alpha\right)$$

1.7.3 Transformation pour isoler la variable X

Prenons le logarithme pour simplifier:

$$\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}X < \ln(1-\alpha)$$

On cherche à isoler X:

$$\sigma\sqrt{\Delta t}X < \ln(1-\alpha) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$$

Divisons par $\sigma\sqrt{\Delta t}$:

$$X < \frac{\ln(1-\alpha) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

1.7.4 Formule finale pour d

La formule finale est donnée par:

$$d = \frac{\ln(1-\alpha) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Ce d est la **valeur seuil normalisée** permettant d'utiliser la fonction de répartition normale $N(d)$.

1.7.5 Probabilité avec la loi normale

La probabilité devient:

$$P\left(X < d\right) = N(d)$$

où $N(d)$ est la **fonction de répartition** de la loi normale standard, donnant la probabilité cumulée jusqu'à d.

1.7.6 Application numérique

Cas $\alpha = 5\%$:

Paramètres:

- $r = 0.01$, $\sigma = 0.1334$, $\Delta t = \frac{1}{365}$
- $\ln(1 - 0.05) = \ln(0.95) \approx -0.0513$

Calcul de d:

$$d = \frac{-0.0513 - \left(0.01 - \frac{0.1334^2}{2}\right)\frac{1}{365}}{0.1334 \cdot \sqrt{\frac{1}{365}}}$$

Étapes:

- $0.01 - \frac{0.1334^2}{2} = 0.01 - 0.0089 = 0.0011$
- $\frac{0.0011}{365} \approx 3.01 \times 10^{-6}$
- $d = \frac{-0.0513 - 3.01 \times 10^{-6}}{0.1334 \cdot 0.05234}$
- $d = \frac{-0.0513}{0.00698} \approx -7.35$

Probabilité: Pour $d = -7.35$, la probabilité:

$$N(d) \approx 0$$

Cas $\alpha = 10\%$:

Même démarche avec:

$$\ln(1 - 0.10) = \ln(0.90) \approx -0.1054$$

Le d est encore plus négatif, donnant aussi une probabilité proche de **0**.

1.7.7 Conclusion

La probabilité qu'une baisse importante (5 % ou 10 %) se produise en une journée est **quasi nulle** avec:

- Volatilité de 13,34 %.
- Taux d'intérêt de 1 %.
- Intervalle de temps court ($\Delta t = 1/365$).

—

2 Exercice 2 - Pricing: Put très dans la monnaie"

2.1 Énoncé

Je considère un put de strike 90 et de maturité 3 mois sur un actif cotant 50 aujourd'hui. La volatilité implicite au strike 90 est 16%. Le taux d'intérêt à 3 mois est 3%. Calculer approximativement le prix de ce put sans utiliser la formule de Black & Scholes.

Correction : put très très très dans la monnaie => $P_0 \approx Ke^{-rT} - S_0$ soit $P_0 \approx 39{,}32$ €

2.2 Observation: Un put "très dans la monnaie"

Le prix actuel de l'actif est **50 €**, ce qui est **bien inférieur** au strike de **90 €**.

Interprétation:

- Le put est **profondément dans la monnaie** ("deep in the money").
- Il a une **valeur intrinsèque élevée** car il est presque certain d'être exercé.
- On peut alors utiliser une approximation simplifiée.

2.3 Approche simplifiée pour un put profondément dans la monnaie

Lorsque l'option est très dans la monnaie, son prix est approximativement égal à:

1. La **valeur actualisée** du paiement futur K au taux sans risque.
2. Moins la **valeur actuelle** du sous-jacent S_0.

$$P_0 \approx Ke^{-rT} - S_0$$

Pourquoi cette formule ?

- On actualise K pour tenir compte de la **valeur présente** au taux sans risque.
- On soustrait S_0 car l'option permet de vendre l'actif au prix fixé K.

2.4 Solution

Données:

- $K = 90$
- $r = 3\% = 0.03$
- $T = 3/12 = 0.25$
- $S_0 = 50$

Étapes:

1. Actualisation du strike:

$$Ke^{-rT} = 90 \cdot e^{-0.03 \cdot 0.25}$$

$$Ke^{-rT} = 90 \cdot e^{-0.0075}$$

$$Ke^{-rT} = 90 \cdot 0.99253 \approx 89.33$$

2. Prix approximatif du put:

$$P_0 \approx 89.33 - 50$$

$$P_0 \approx 39.33$$

Le prix approximatif de ce put est **39,32 €**, ce qui est cohérent avec la correction.

2.5 Pourquoi peut-on ignorer Black-Scholes ici ?

Le modèle de Black-Scholes calcule un prix exact en tenant compte de la **volatilité** et du **temps**.

Mais ici:

- Le put est tellement **dans la monnaie** que son prix dépend principalement de sa **valeur intrinsèque**.
- L'effet de la volatilité devient **négligeable**.

On utilise simplement une actualisation au taux sans risque.

2.6 Résumé

- **Put profondément dans la monnaie:** On peut approximer son prix par:

$$P_0 \approx Ke^{-rT} - S_0$$

- **Pourquoi cette formule fonctionne:** Elle tient compte de la **valeur intrinsèque** et de l'**actualisation au taux sans risque**.
- **Quand utiliser cette approximation:**
  - Si l'option est **très dans la monnaie** (strike bien supérieur ou inférieur au prix actuel).
  - Si la volatilité a un **impact négligeable**.

—

3 Exercice 3 - Borne supérieur d'un Call

3.1 Enoncé – Que cherche-t-on ?

- Actif sous-jacent avec $S_0 = 100$ (prix actuel).
- Pas de **dividendes** et taux d'intérêt **nul** ($r = 0$).
- Un **call** d'échéance **1 an** avec un **strike** de **100** vaut **12 €** sur le marché.

Question: Si le sous-jacent monte à **110**, quelle **inégalité** peut-on écrire pour le prix du call de strike **100**?

L'objectif est d'utiliser des arguments **d'arbitrage** et de **valeur intrinsèque** pour poser une **borne supérieure** au prix du call.

3.2 Démonstration:

Étape 1: Prix actuel à la monnaie (ATM)

- Quand le prix du sous-jacent est **100**, le call est **à la monnaie** (ATM).
- Le prix du call est donné comme **12 €**, qui se décompose en:
  - **Valeur intrinsèque:** 0 € ($S_0 - K = 100 - 100 = 0$).
  - **Valeur temps:** 12 €.

Rappel: La **valeur temps** mesure la probabilité d'un gain futur grâce à la volatilité et au temps restant.

Étape 2: Hausse du sous-jacent à 110

- Si le sous-jacent passe à **110**, la **valeur intrinsèque** du call devient:

$$S - K = 110 - 100 = 10$$

- La **valeur temps** diminue, car la probabilité de gains supplémentaires baisse une fois l'option déjà dans la monnaie.

Pourquoi ? Une option a **sa valeur temps maximale à la monnaie** (ATM). Dès qu'elle devient **dans la monnaie (ITM)**, la valeur temps **diminue** car il y a moins d'incertitude.

Étape 3: Encadrer le prix du call

- Prix total du call après la hausse:

$$C \leq 10 + 12 = 22$$

- Cette borne est basée sur:
  1. **Valeur intrinsèque (10)**: Gain immédiat.
  2. **Valeur temps (< 12)**: Doit être inférieure à celle au départ car il y a moins d'incertitude.

Conclusion: $C \leq 22$ —

4 Exercice 4 - Pricing approximatif d'un call/put ATM forward

Exercice grand classique d'ITW

4.1 Enoncé - Contexte de l'exercice

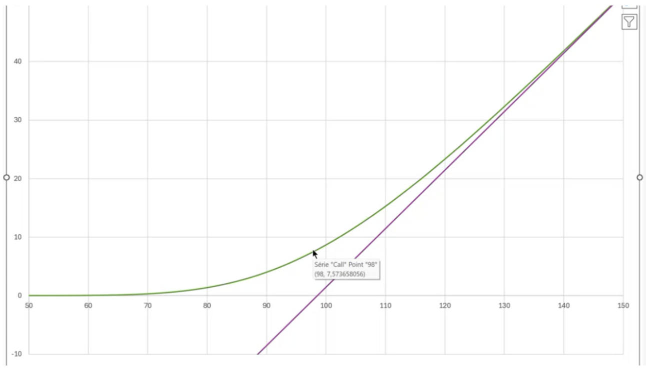
On s'intéresse à un **call** ou un **put à la monnaie forward (ATM)** sur un actif sans dividendes ($K = S_0 e^{rT}$). L'objectif est d'utiliser un **développement limité** appliqué à la formule de **Black-Scholes** pour:

- Déterminer une **formule simplifiée** pour le prix d'un call ou put ATM.
- Vérifier cette approximation en la comparant avec la formule exacte.

Notions clés à maîtriser

- **Prix forward:** $F_0 = S_0 e^{rT}$
  où S_0 est le prix actuel, r le taux d'intérêt et T la maturité.
- **Approximation rapide des prix ATM:** $C_{ATM} \approx 0.4 S_0 \sigma \sqrt{T}$
- **Straddle:** Une combinaison d'un call et d'un put avec même strike et maturité.
- **Volatilité implicite (σ):** Calculée à partir du prix observé d'un straddle à l'aide de la formule simplifiée: $C + P \approx 0.8 S_0 \sigma \sqrt{T}$
- **Véga:** Mesure la sensibilité au changement de σ: $Vega \approx 0.4 S_0 \sqrt{T}$

L'exercice teste l'aptitude à effectuer des calculs rapides basés sur des approximations tout en évaluant les sensibilités des options. —



4.2 Rappel de la formule de base de Black-Scholes et définition de d_1 et d_2

1. Formule exacte de Black-Scholes :

La valeur d'un **call européen** est donnée par :

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Signification des termes :

- C_0 : Prix du call aujourd'hui (au temps $t = 0$).

- S_0 : Prix actuel du sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (strike).
- r : Taux d'intérêt sans risque (continu).
- T : Temps jusqu'à l'échéance (en années).
- $N(d_1)$ et $N(d_2)$: Fonction de répartition cumulative d'une loi normale standard.

2. Définitions des termes d_1 et d_2 :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Explication de chaque terme :

- $\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)$: Logarithme du rapport entre le prix actuel du sous-jacent (S_0) et le prix d'exercice (K), mesurant leur écart relatif.
- $\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T$:
  - rT : Effet de la croissance due au taux d'intérêt.
  - $\frac{\sigma^2}{2}T$: Ajustement lié à la volatilité (incertitude sur le prix futur).
- $\sigma\sqrt{T}$: Mise à l'échelle de la volatilité sur la période jusqu'à l'échéance.

3. Interprétation intuitive :

- d_1 : Probabilité ajustée au risque que l'option finisse dans la monnaie.
- d_2 : Probabilité d'exercice corrigée pour la volatilité sur la période restante.

—

4.3 Démonstration pour trouver : $d_1 = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$

1. Cas particulier : ATM forward (Hypothèses)

- L'option est **à la monnaie forward (ATM)**, donc :

$$K = F_0 = S_0 e^{rT}$$

- En prenant cette égalité dans la formule :

$$\frac{S_0}{K} = \frac{S_0}{S_0 e^{rT}} = e^{-rT}$$

- Remplaçons dans d_1 :

$$d_1 = \frac{\ln\left(e^{-rT}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

2. Simplification du logarithme :

Le logarithme de l'exponentielle donne :

$$\ln\left(e^{-rT}\right) = -rT$$

Ainsi :

$$d_1 = \frac{-rT + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

3. Regroupement des termes :

Factorisons T :

$$d_1 = \frac{T\left(-r + r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{T\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

4. Simplification finale :

Simplifions chaque terme :

$$d_1 = \frac{\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Factorisation :

$$d_1 = \frac{\sigma}{2}\frac{\sigma T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_1 = \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}$$

5. Résultat final :

$$d_1 = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Ce résultat montre que dans le cas particulier **ATM forward**, d_1 dépend uniquement de :

- La **volatilité** (σ).
- La **maturité** (T) via sa racine carrée ($\sqrt{T}$).

Cette simplification est très utile pour les calculs rapides en finance, car elle élimine les dépendances complexes au logarithme et au taux d'intérêt (r).

4.4 Approximation simplifiée pour le prix du call ATM forward :

La différence entre les termes $N(d_1)$ et $N(d_2)$ est simplifiée en utilisant un développement limité autour de 0 :

$$N(x) \approx N(0) + N'(0)x$$

Avec :

$$N(0) = \frac{1}{2}, \quad N'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

En remplaçant, on obtient :

$$C_0 \approx S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \sqrt{T}$$

$$C_0 \approx 0.4 S_0 \sigma \sqrt{T}$$

—