

Level 1  
Pricing and risk-management des options  
Cours 2

Jean-François Berger-Lefébure

December 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Volatilité implicite</b>	<b>4</b>
1.1	Contexte et définition . . . . .	4
1.2	Pourquoi calculer la volatilité implicite ? . . . . .	4
1.3	Formule et explication des paramètres . . . . .	4
1.4	Pourquoi la volatilité implicite varie-t-elle selon les options ? . . . . .	4
1.5	Utilité pratique . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Smile de volatilité</b>	<b>5</b>
2.1	Qu'est-ce qu'un smile de volatilité ? . . . . .	5
2.2	Pourquoi observe-t-on un smile de volatilité ? . . . . .	5
2.3	Exemple numérique . . . . .	5
2.4	Conséquences pour les traders . . . . .	6
2.5	Ce qu'il faut retenir . . . . .	6
2.6	Distinction entre CALL et PUT . . . . .	6
2.7	Exemple avec le CAC 40 . . . . .	7
2.8	Pourquoi la volatilité implicite est plus élevée sur les PUTS ? . . . . .	7
2.9	Exemple: Smile de volatilité . . . . .	7
2.9.1	Analyse du graphique . . . . .	8
2.9.2	Pourquoi cette forme ? . . . . .	8
2.9.3	Cas pratique: Caplets EURIBOR . . . . .	8
2.10	Exemple: Skew de volatilité . . . . .	9
2.10.1	Analyse du graphique . . . . .	9
2.10.2	Pourquoi cette forme ? . . . . .	9
2.10.3	Cas pratique: Options sur le CAC 40 . . . . .	9
2.11	Ce qu'il faut retenir . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Surface de volatilité</b>	<b>11</b>
3.1	Qu'est-ce qu'une surface de volatilité ? . . . . .	11
3.2	Formule mathématique simple . . . . .	11
3.3	Que montre la surface de volatilité ? . . . . .	12
3.4	Exemple pratique: Surface du CAC 40 . . . . .	12
3.5	Pourquoi la surface de volatilité est-elle importante ? . . . . .	12
3.6	Ce qu'il faut retenir . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Valeur intrinsèque</b>	<b>14</b>
4.1	Interprétation . . . . .	14
4.2	Exemple concret . . . . .	15
4.3	Ce qu'il faut retenir . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Formule du portefeuille répliquant</b>	<b>16</b>
5.1	Contexte : Construction du portefeuille . . . . .	16
5.2	Analyse de la formule . . . . .	16
5.3	Inégalité et interprétation . . . . .	16
5.4	Ce qu'il faut retenir . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Valeur temps et formules associées</b>	<b>18</b>
6.1	Définition de la valeur temps . . . . .	18
6.2	Relation entre valeur totale et ses composants . . . . .	18
6.3	Propriétés importantes de la valeur temps . . . . .	18

6.4	Ce qu'il faut retenir . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>20</b>
7.1	Pourquoi la volatilité implicite est-elle résolue numériquement et non analytiquement ? . . . . .	20

# 1 Volatilité implicite

## 1.1 Contexte et définition

La **volatilité implicite** est la volatilité estimée par le marché sur la base des prix observés des options. Contrairement à la **volatilité historique**, qui mesure les fluctuations passées, la volatilité implicite reflète les **anticipations de risque** des investisseurs pour l'avenir.

## 1.2 Pourquoi calculer la volatilité implicite ?

L'objectif est de traduire dans un modèle théorique (Black & Scholes) l'information contenue dans le prix de marché d'une option. Cela permet de:

- Comparer les attentes des investisseurs sur la **volatilité future**.
- Ajuster la couverture de portefeuilles d'options (*hedging*).
- Détecter d'éventuelles anomalies de prix pour des **arbitrages**.

## 1.3 Formule et explication des paramètres

Soit un call sur un actif  $S$  de prix d'exercice  $K$ , maturité  $T$ , observé au prix  $C_0^{MKT}$ .

La volatilité implicite est la valeur de  $\sigma$  telle que:

$$C_0^{BS}(S, K, T, r, \sigma_{imp}) = C_0^{MKT}$$

- $S$ : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- $K$ : Prix d'exercice de l'option.
- $T$ : Temps jusqu'à maturité (en années).
- $r$ : Taux d'intérêt sans risque.
- $\sigma_{imp}$ : Volatilité implicite que nous cherchons.

ANNEXE: L'équation est résolue numériquement, car il est impossible de l'inverser analytiquement.

## 1.4 Pourquoi la volatilité implicite varie-t-elle selon les options ?

En théorie, sous le modèle de Black & Scholes, la volatilité est supposée **constante**. Pourtant, dans la pratique:

- Les investisseurs anticipent des **mouvements extrêmes** non prévus par la normalité des rendements (queues épaisses).
- Le marché valorise différemment les options en fonction des niveaux de prix (*strikes*) car les craintes ne sont pas symétriques:
  - Puts (protection contre un krach) = volatilité implicite souvent plus élevée.
  - Calls éloignés (anticipation d'explosion haussière) = volatilité implicite ajustée.
- Les déséquilibres entre l'**offre et la demande** sur certaines options influencent leur prix, et donc leur volatilité implicite.

## 1.5 Utilité pratique

La volatilité implicite est essentielle pour évaluer les **risques perçus par le marché**. Sur certains marchés (comme les devises), les options sont même cotées directement en volatilité plutôt qu'en prix.

## 2 Smile de volatilité

### 2.1 Qu'est-ce qu'un smile de volatilité ?

Le **smile de volatilité** décrit la relation entre la volatilité implicite et le prix d'exercice (*strike*). Contrairement au modèle de Black & Scholes, qui suppose une volatilité constante, le marché montre une **volatilité variable selon le strike**.

Le graphique typique prend la forme d'un sourire:

- Options **dans la monnaie (ITM)** et **hors de la monnaie (OTM)** = Volatilité plus élevée.
- Options **à la monnaie (ATM)** = Volatilité plus faible.

### 2.2 Pourquoi observe-t-on un smile de volatilité ?

- **Queue épaisse des distributions:** Les investisseurs craignent des mouvements extrêmes, créant une demande plus forte pour les protections (puts OTM).
- **Risque asymétrique:** Les investisseurs paient plus cher pour se protéger des krachs (puts) que pour spéculer sur des hausses (calls).
- **Ajustements dynamiques:** Les market-makers doivent se couvrir en ajustant leurs positions sur le sous-jacent, augmentant ainsi la demande sur certaines options.
- **Effets comportementaux:** Les marchés anticipent des mouvements spécifiques selon les zones de prix critiques (support ou résistance).

### 2.3 Exemple numérique

Supposons un sous-jacent valant 100 € avec 3 options:

- Call 1: Strike 90 €, prix observé 15 €.
- Call 2: Strike 100 €, prix observé 10 €.
- Call 3: Strike 110 €, prix observé 5 €.

Calcul des volatilités implicites:

- Call 1 (ITM) =  $\downarrow$  Volatilité élevée car risque de mouvement fort.
- Call 2 (ATM) =  $\downarrow$  Volatilité faible, prix centré sur l'attente moyenne.
- Call 3 (OTM) =  $\downarrow$  Volatilité plus élevée si anticipation de mouvement extrême.

## 2.4 Conséquences pour les traders

- Le smile force les traders à utiliser des modèles plus complexes (*stochastiques*) pour ajuster leurs stratégies.
- Il peut révéler des **opportunités d'arbitrage** lorsque certaines options sont mal priced par rapport à leurs voisines.
- Les smiles reflètent la psychologie du marché face au risque.

## 2.5 Ce qu'il faut retenir

- La **volatilité implicite** est calculée pour refléter le prix observé d'une option sur le marché en inversant la formule de Black & Scholes.
- Elle varie selon les strikes en raison des anticipations de **risques asymétriques**, des **queues épaisses** dans les distributions, et des **ajustements dynamiques** des traders.
- Le **smile de volatilité** est une courbe montrant des volatilités implicites plus élevées pour les options loin de la monnaie (OTM/ITM).
- La volatilité implicite n'est pas constante, ce qui invalide l'hypothèse simplificatrice de Black & Scholes et nécessite des modèles plus avancés.
- Les traders doivent intégrer ces variations pour ajuster correctement leurs stratégies de couverture et éviter des erreurs coûteuses.

---

## 2.6 Distinction entre CALL et PUT

La **volatilité implicite** affichée sur un **skew** ou un **smile** représente à la fois les **CALLS** et les **PUTS**.

- Pour les **strikes faibles** (à gauche du graphique):
  - On parle surtout des **options PUT**.
  - Ces options protègent contre des **baisses importantes**.
  - Elles ont généralement une **volatilité implicite plus élevée**, car les baisses sont perçues comme **plus brutales** et **plus probables** que les hausses.
- Pour les **strikes élevés** (à droite du graphique):
  - On regarde surtout les **options CALL**.
  - Ces options permettent de **parier sur des hausses**.
  - Leur **volatilité implicite est plus faible**, car les hausses sont souvent vues comme **progressives** et **moins risquées**.

## 2.7 Exemple avec le CAC 40

Supposons que le CAC 40 soit actuellement à **5000 points**:

- Un **PUT** avec un strike à **4000 points**:
  - Fortement hors de la monnaie (**OTM**).
  - Volatilité implicite élevée (**30%**) car il couvre un **risque de baisse brutale** (krach).
- Un **CALL** avec un strike à **6000 points**:
  - Fortement hors de la monnaie (**OTM**).
  - Volatilité implicite plus faible (**15%**) car une hausse aussi forte est perçue comme **moins probable** et **progressive**.

## 2.8 Pourquoi la volatilité implicite est plus élevée sur les PUTS ?

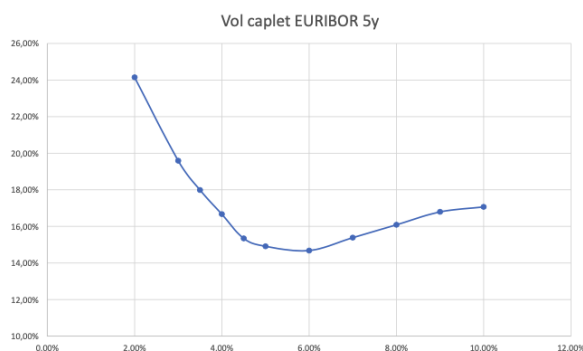
- **Protection des portefeuilles**: Les investisseurs achètent souvent des **PUTS** pour **se protéger** contre des baisses, ce qui fait monter leur **prix** et donc leur **volatilité implicite**.
- **Nature des baisses**: Les baisses sur les marchés sont souvent **rapides et brutales** (ex: crise de 2008, COVID-19). Cela entraîne une **incertitude accrue** sur les scénarios baissiers, donc une volatilité plus forte.
- **Hausses perçues comme progressives**: À l'inverse, les hausses sont souvent **plus lentes et prévisibles**, réduisant l'incertitude et la **volatilité implicite** sur les **CALLS**.

---

## 2.9 Exemple: Smile de volatilité

Volatilité des caplets EURIBOR 5 ans

Smile de volatilité



Le graphique montre une courbe en forme de U, appelée **Smile de volatilité**.

### 2.9.1 Analyse du graphique

Ce graphique concerne un **caplet EURIBOR 5 ans**, qui est une option sur un **taux d'intérêt**.

**Important:** L'axe des abscisses ici n'est pas un **strike classique** comme pour des actions, mais représente directement des **niveaux de taux d'intérêt** (en %).

- Exemple: 2%, 3%, 4% représentent des **taux d'exercice** pour le caplet.
- Cela signifie qu'on observe la **volatilité implicite** pour des options protégeant contre un taux d'intérêt dépassant 2%, 3%, etc.

La volatilité est **élevée** pour les strikes éloignés (en dehors de la monnaie, OTM ou ITM) et **faible** pour les strikes proches du prix actuel (à la monnaie, ATM).

### 2.9.2 Pourquoi cette forme ?

- Les investisseurs craignent des **événements extrêmes** comme des krachs ou des hausses brutales.
- Les options éloignées nécessitent donc une **prime de risque** supplémentaire, augmentant la volatilité implicite.
- Ce phénomène reflète une anticipation asymétrique du marché sur les fluctuations des prix.

### 2.9.3 Cas pratique: Caplets EURIBOR

Les options sur taux d'intérêt, comme les caplets EURIBOR, montrent ce comportement car:

- Les traders se protègent contre des hausses soudaines des taux.
- Ils achètent des options OTM, augmentant leur prix et leur volatilité implicite.

#### Option call avec un strike à 2%

- L'option est **très hors de la monnaie (OTM)**.
- Tu dois utiliser une **volatilité implicite élevée (24%)** pour refléter l'**incertitude** d'un retour vers ces niveaux très bas.
- Cette forte volatilité traduit la **crainte d'une baisse extrême des taux** associée à un scénario de crise ou de politique monétaire ultra-accommodante.

#### Option call avec un strike à 10%

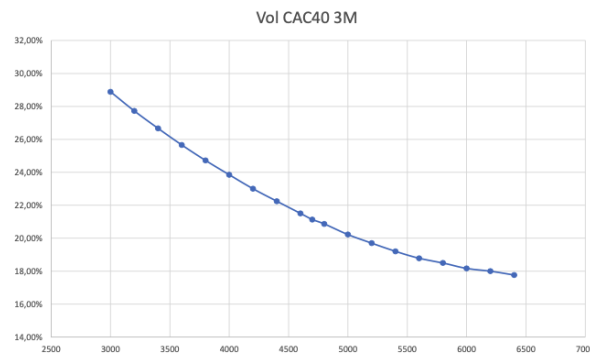
- L'option est aussi **hors de la monnaie (OTM)**, mais **moins extrême** que dans le cas précédent.
- Tu prends une **volatilité implicite plus faible (17%)** car les **hausses de taux** sont perçues comme plus **progressives et prévisibles**.
- Le risque est jugé **moins incertain** pour des taux élevés, ce qui réduit la volatilité implicite.



## 2.10 Exemple: Skew de volatilité

Exemple: Volatilité sur le CAC 40 à 3 mois

### Skew de volatilité



Le graphique montre une courbe **décroissante**, appelée **Skew de volatilité**.

### 2.10.1 Analyse du graphique

- Axe vertical: Volatilité implicite (%).
- Axe horizontal: Prix d'exercice (*strike*) des options.

La volatilité est **plus élevée** pour les strikes faibles et **diminue progressivement** pour les strikes plus élevés.

### 2.10.2 Pourquoi cette forme ?

- Les investisseurs ont tendance à craindre davantage les **baisses brutales des marchés** (krachs) qu'une montée progressive.
- Ils paient une prime pour les **puts hors de la monnaie (OTM)** qui protègent contre ces baisses.
- En conséquence, la volatilité implicite est **plus forte pour les puts** que pour les calls.
- Ce comportement reflète une **asymétrie de risque** liée à l'aversion au risque des investisseurs.

### 2.10.3 Cas pratique: Options sur le CAC 40

Dans ce cas:

- Les investisseurs achètent des **puts protecteurs** pour couvrir leurs portefeuilles en cas de baisse rapide.
- Cette demande augmente les prix des puts et donc leur **volatilité implicite**.

## 2.11 Ce qu'il faut retenir

- Le **Smile de volatilité** présente une courbe en U où la volatilité est plus forte pour les options loin de la monnaie (OTM ou ITM).
- Le **Skew de volatilité** montre une courbe décroissante où les strikes faibles ont une volatilité plus forte (effet de protection contre les baisses).
- Ces phénomènes prouvent que la volatilité implicite n'est **pas constante**, contredisant le modèle de **Black & Scholes**.
- Les investisseurs anticipent des **risques asymétriques** et paient plus pour se protéger contre les scénarios extrêmes.
- Les modèles avancés (volatilité stochastique) sont souvent nécessaires pour mieux refléter ces effets.
- Un **skew** représente la **volatilité implicite** des **CALLS** (strikes élevés) et des **PUTS** (strikes faibles).
- **Strikes faibles (PUTS):** Volatilité plus élevée car ils protègent contre des **baisses brutales**.
- **Strikes élevés (CALLS):** Volatilité plus faible car les hausses sont jugées **progressives et moins risquées**.
- La forte volatilité sur les **PUTS** reflète une **aversion au risque** et une crainte des **krachs**, tandis que la volatilité plus faible sur les **CALLS** traduit une perception de **hausse maîtrisée**.
- Le skew ne reflète pas forcément un **pessimisme général**, mais plutôt une **prudence face aux risques asymétriques**.

## 3 Surface de volatilité

### 3.1 Qu'est-ce qu'une surface de volatilité ?

Surface de volatilité (CAC 40)

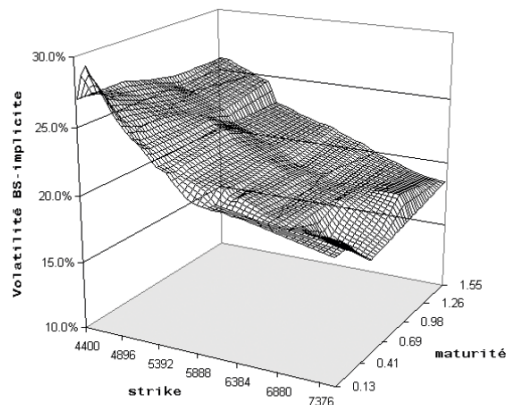


Figure 1: Support de cours - Antonin CHAIX

La **surface de volatilité** est une représentation en **3 dimensions** qui montre comment la **volatilité implicite** dépend de:

- Le **strike (K)**: Le prix d'exercice de l'option.
- La **maturité (T)**: La durée restante avant l'expiration de l'option.

Cette surface permet de visualiser:

- Comment la volatilité varie en fonction du **niveau de prix** (strike).
- Comment elle change selon la **durée** jusqu'à l'échéance (maturité).

### 3.2 Formule mathématique simple

La surface de volatilité est décrite par:

$$Vol_{implicite} = F(K, T)$$

où:

- $K$  = Strike (prix d'exercice).
- $T$  = Maturité (temps restant avant expiration).
- $F$  = Fonction qui relie ces deux variables à la volatilité.

**Interprétation:** La volatilité implicite est une **fonction du strike et du temps**, ce qui crée une **surface 3D** avec:

- Axe des **X**: Strike ( $K$ ).
- Axe des **Y**: Maturité ( $T$ ).
- Axe des **Z**: Volatilité implicite ( $\sigma_{imp}$ ).

### 3.3 Que montre la surface de volatilité ?

#### 1. Variation selon le strike: Skew et Smile

- Pour une maturité donnée, on observe souvent un **skew** (volatilité décroissante) ou un **smile** (volatilité en U).
- Cela signifie que les options **hors de la monnaie (OTM)** ont souvent des volatilités plus élevées.

#### 2. Variation selon la maturité: Term structure

- La volatilité implicite change aussi en fonction de la **maturité**:
  - **Court terme (maturité faible)**: Volatilité souvent plus élevée en raison de l'**incertitude immédiate**.
  - **Long terme (maturité élevée)**: Volatilité plus **faible** car les mouvements futurs sont perçus comme **plus prévisibles**.

### 3.4 Exemple pratique: Surface du CAC 40

Sur le graphique:

- **Axe X (strike)**: Montre différents niveaux de prix d'exercice pour les options sur le CAC 40.
- **Axe Y (maturité)**: Représente différentes échéances pour ces options.
- **Axe Z (volatilité implicite)**: Affiche la volatilité calculée pour chaque combinaison de strike et maturité.

#### Observation:

- La volatilité est **plus élevée** pour les strikes **faibles (PUTS)** et diminue progressivement vers les strikes **élevés (CALLS)**.
- La volatilité est aussi **plus forte** sur les **maturités courtes**, car l'incertitude immédiate est **plus grande**.
- Elle **diminue** sur les **maturités longues**, car les risques futurs sont considérés comme **plus lissés**.

### 3.5 Pourquoi la surface de volatilité est-elle importante ?

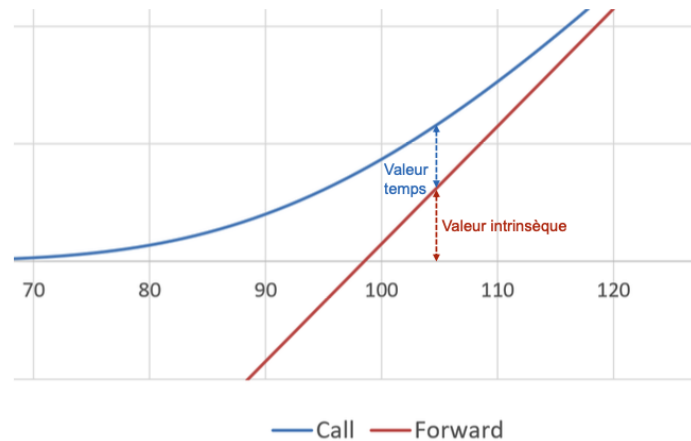
- **Pour évaluer correctement les options**: Les traders doivent utiliser la bonne volatilité implicite pour le strike et la maturité choisis.
- **Pour détecter des anomalies**: Une déformation inhabituelle de la surface peut signaler des **anticipations de crise** ou des **opportunités d'arbitrage**.
- **Pour modéliser des scénarios complexes**: La surface de volatilité permet d'ajuster les modèles pour tenir compte de la **réalité des marchés**, où la volatilité n'est jamais constante.

### 3.6 Ce qu'il faut retenir

- Une **surface de volatilité** montre comment la **volatilité implicite** varie en fonction du **strike** et de la **maturité**.
  - La volatilité dépend:
    - Du **strike (K)** — Effet **skew** ou **smile** selon la position par rapport au prix actuel.
    - De la **maturité (T)** — Volatilité plus forte à **court terme** et plus faible à **long terme**.
  - Elle sert à corriger les limites du modèle de **Black & Scholes** qui suppose une volatilité **constante**, ce qui n'est pas réaliste.
  - Une **surface déformée** peut refléter des **anticipations de crise**, des **craintes asymétriques** ou des effets liés à des **événements économiques** (annonces de la BCE, etc.).
-

## 4 Valeur intrinsèque

### Valeur intrinsèque et valeur temps



La formule donnée pour la valeur intrinsèque d'un **call** est :

$$VI_{call} = (S_0 - Ke^{-rT})^+ \leq C_0$$

- $S_0$  : Prix actuel du sous-jacent.
- $K$  : Prix d'exercice (strike).
- $r$  : Taux d'intérêt sans risque.
- $T$  : Temps jusqu'à l'échéance (en années).
- $e^{-rT}$  : Facteur d'actualisation pour ramener la valeur future du strike à aujourd'hui.
- $(x)^+$  : Prend seulement la **valeur positive** (si résultat négatif, on prend 0).
- $C_0$  : Prix actuel de l'option call.

### 4.1 Interprétation

1. **Actualisation du strike** :  $Ke^{-rT}$  représente la **valeur actualisée** du prix d'exercice à aujourd'hui, car ce paiement est effectué dans le futur.
2. **Différence avec le prix du sous-jacent** :  $S_0 - Ke^{-rT}$  mesure combien l'option serait dans la monnaie si exercée immédiatement.
3. **Valeur positive uniquement** :  $(x)^+$  signifie qu'on ne garde que la **valeur positive** de la différence. Si elle est négative, on met **0**.
4. **Comparaison au prix de l'option** : La valeur intrinsèque est toujours **inférieure ou égale** au prix de l'option ( $C_0$ ), car le prix inclut aussi une **valeur temps**.

## 4.2 Exemple concret

Soit :

$$S_0 = 110, \quad K = 100, \quad r = 5\%, \quad T = 1$$

1. Calcul du strike actualisé :

$$Ke^{-rT} = 100e^{-0.05(1)} \approx 95.12$$

2. Valeur intrinsèque :

$$VI_{call} = (110 - 95.12)^+ = 14.88$$

3. Comparaison avec le prix de l'option : Si  $C_0 = 17$ , alors :

$$14.88 \leq 17$$

## 4.3 Ce qu'il faut retenir

- La **valeur intrinsèque** mesure la **valeur immédiate** d'une option si exercée tout de suite.
- Pour un **call** :
$$VI_{call} = (S_0 - Ke^{-rT})^+$$
- Elle utilise le **strike actualisé** pour tenir compte de la **valeur temporelle de l'argent**.
- On prend uniquement la **valeur positive** ou 0 si l'option est hors de la monnaie.
- La valeur intrinsèque est toujours **inférieure ou égale** au prix de l'option, car celui-ci inclut aussi une **valeur temps**.

---

## 5 Formule du portefeuille répliquant

La formule donnée est :

$$(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

### 5.1 Contexte : Construction du portefeuille

Ce portefeuille est construit dans une situation où :

- On **achète une action** aujourd'hui au prix  $S_0$ .
- On **emprunte** une somme équivalente à  $Ke^{-rT}$ , soit la **valeur actualisée du prix d'exercice**.

L'objectif est de **répliquer un call européen** à l'échéance  $T$ .

### 5.2 Analyse de la formule

**Partie gauche :**  $(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}}$

1.  $S_T - K$  : C'est la **valeur intrinsèque potentielle** du call à maturité. Elle est :
  - Positive si  $S_T > K$ .
  - Nulle ou négative sinon.
2.  $\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}}$  : C'est un **indicateur binaire (1 ou 0)** qui vérifie :
  - 1 si le portefeuille est **anticipé dans la monnaie** aujourd'hui ( $S_0 > Ke^{-rT}$ ).
  - 0 sinon (le portefeuille n'est pas construit).
3. Produit des deux termes : Ce portefeuille ne génère un gain que si :
  - L'option est **anticipée dans la monnaie aujourd'hui**.
  - L'option reste **dans la monnaie à maturité**.

**Partie droite :**  $(S_T - K)^+$

Cette partie représente la **valeur intrinsèque standard** d'un call européen classique :

- Il prend la valeur **positive** de  $S_T - K$  ou 0 si l'option est **hors de la monnaie**.
- Il représente le **call classique** sans condition initiale.

### 5.3 Inégalité et interprétation

L'inégalité :

$$(S_T - K)\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

montre que :

- Le portefeuille répliquant (gauche) est **inférieur ou égal** à un **call classique** (droite).



- Le portefeuille fonctionne uniquement si l'option est **anticipée dans la monnaie** au départ, alors que le call classique peut capturer toute la valeur intrinsèque **sans condition**.
- Le call standard inclut aussi une **valeur temps**, ce que le portefeuille construit ne garantit pas.

## 5.4 Ce qu'il faut retenir

- Ce portefeuille est construit avec l'achat d'une **action** et un **emprunt** égal au **strike actualisé**.
- La condition  $S_0 > Ke^{-rT}$  signifie que l'option doit être **anticipée dans la monnaie** pour construire ce portefeuille.
- L'inégalité montre que ce portefeuille réplique **partiellement** un call, mais est toujours **inférieur ou égal** au call classique.
- Le **call classique** capture toute la valeur intrinsèque sans condition initiale et inclut une **valeur temps**, ce que le portefeuille ne peut pas garantir.
- Cette démonstration illustre que le call classique est plus **flexible** et donc **plus cher** qu'un portefeuille répliquant.

---

## 6 Valeur temps et formules associées

### 6.1 Définition de la valeur temps

La **valeur temps** est définie comme la différence entre :

- Le **prix total** de l'option ( $C_0$ ).
- Sa **valeur intrinsèque** ( $VI_{call}$ ).

Formule :

$$VT_{call} = C_0 - VI_{call}$$

### 6.2 Relation entre valeur totale et ses composants

La formule clé reliant le prix total et ses deux composants est :

$$C_0 = VT_{call} + VI_{call}$$

- $C_0$  : Prix total de l'option.
- $VT_{call}$  : Valeur temps (prix de l'incertitude future).
- $VI_{call}$  : Valeur intrinsèque (valeur immédiate).

### 6.3 Propriétés importantes de la valeur temps

1. **Maximum à la monnaie (ATM)** : La valeur temps est **maximale** lorsque le prix spot ( $S_0$ ) est **proche du strike** ( $K$ ), car l'incertitude est la plus forte.
2. **Dépendance à la volatilité** : Plus la **volatilité** est élevée, plus la **valeur temps** est grande, car il y a davantage d'opportunités pour que l'option devienne profitable.
3. **Dépendance au temps restant** : Plus il reste de **temps avant l'échéance**, plus la valeur temps est élevée. Elle diminue avec le temps, un phénomène connu sous le nom de **décroissance temporelle (time decay)**.
4. **Cas limite** : À l'échéance, la valeur temps devient **nulle**, car il n'y a plus d'incertitude sur l'évolution du prix.

### 6.4 Ce qu'il faut retenir

- La **valeur temps** est la différence entre le **prix total** d'une option ( $C_0$ ) et sa **valeur intrinsèque** ( $VI_{call}$ ) :

$$VT_{call} = C_0 - VI_{call}$$

- La formule clé reliant les deux valeurs est :

$$C_0 = VT_{call} + VI_{call}$$

- La **valeur intrinsèque** est le minimum que vaut l'option dans un **contexte déterministe** ( $\sigma = 0$ ).
- La **valeur temps** représente le **prix de l'incertitude**.

- Elle est **maximum à la monnaie (ATM)**.
- Elle augmente avec la **volatilité** et le **temps restant**.
- Elle diminue à mesure que l'échéance approche (**décroissance temporelle**).
- À l'échéance, la valeur temps devient **nulle**, et l'option ne vaut que sa **valeur intrinsèque**.

## 7 Annexes

### 7.1 Pourquoi la volatilité implicite est-elle résolue numériquement et non analytiquement ?

#### Introduction

La **volatilité implicite** est un paramètre clé utilisé pour évaluer les prix des options. Elle représente l'anticipation du marché sur la volatilité future d'un actif. Cependant, contrairement à d'autres paramètres comme le prix du sous-jacent ou le taux d'intérêt, la volatilité implicite **ne peut pas être observée directement sur le marché**.

On doit donc la **déduire** en utilisant un modèle mathématique, comme celui de **Black & Scholes**. Cela implique d'inverser la formule utilisée pour calculer le prix d'une option afin de retrouver la volatilité implicite correspondant au prix observé.

Toutefois, cette inversion est **complexe** car la formule de Black & Scholes ne peut pas être résolue directement. Au lieu de cela, on utilise des méthodes **numériques** qui trouvent progressivement la solution.

#### Formule et problème d'inversion

La formule de Black & Scholes pour le prix d'un call est donnée par:

$$C_0^{BS}(S, K, T, r, \sigma) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

avec:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- $S$ : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- $K$ : Prix d'exercice (strike).
- $T$ : Temps restant jusqu'à la maturité (en années).
- $r$ : Taux d'intérêt sans risque.
- $\Phi$ : Fonction de répartition cumulative d'une loi normale standard.
- $\sigma$ : Volatilité implicite recherchée.

#### Pourquoi ne peut-on pas inverser la formule ?

Cette formule est **non linéaire** et implique des éléments mathématiques complexes:

- La volatilité ( $\sigma$ ) apparaît dans **plusieurs termes** sous des formes difficiles à manipuler: logarithmes, racines carrées et produits.
- La fonction  $\Phi$  de la loi normale cumulative n'a pas de formule inversée simple. Elle nécessite elle-même des calculs approximatifs.
- Ces caractéristiques rendent l'équation **impossible à résoudre directement** par des méthodes algébriques classiques.

## Méthode numérique utilisée pour la résoudre

Pour trouver la volatilité implicite ( $\sigma_{imp}$ ), on doit:

1. Faire une **hypothèse initiale** pour  $\sigma$  (par exemple 20%).
2. Calculer le prix théorique de l'option avec cette valeur dans la formule de Black & Scholes.
3. Comparer ce prix théorique au prix observé sur le marché ( $C_0^{MKT}$ ).
4. Ajuster la volatilité et recommencer jusqu'à ce que les deux prix correspondent.

Ce processus itératif utilise des algorithmes comme **Newton-Raphson**, qui approchent la solution en corrigeant progressivement l'estimation.

Formellement, on résout:

$$f(\sigma) = C_0^{BS}(\sigma) - C_0^{MKT} = 0$$

et met à jour la volatilité avec:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}$$

où  $f'(\sigma)$  est la dérivée par rapport à  $\sigma$ .

## Exemple simplifié

Supposons un sous-jacent à 100 € et une option d'exercice 110 €, avec un prix observé de 5 €. On teste plusieurs valeurs de volatilité:

- $\sigma = 15\%$  donne un prix théorique de 4,50 € (**trop bas**).
- $\sigma = 20\%$  donne un prix théorique de 5,10 € (**trop haut**).

On ajuste la volatilité à 18,5% pour atteindre un prix de 5 €.

## Pourquoi cette méthode est-elle importante ?

Cette approche permet d'adapter le modèle de Black & Scholes à la réalité des prix observés sur le marché, même si ses hypothèses (volatilité constante, distribution normale) ne sont pas toujours vérifiées.

## Ce qu'il faut retenir

- La **volatilité implicite** mesure l'anticipation des fluctuations futures du marché.
- Elle est calculée en ajustant la volatilité dans la formule de Black & Scholes jusqu'à ce que le prix théorique égale le prix observé.
- La formule ne peut pas être inversée analytiquement car elle contient des termes non linéaires (logarithmes, racines, et la fonction normale cumulative).
- On utilise des méthodes **numériques itératives**, comme celle de **Newton-Raphson**, pour approcher la solution.
- Cette méthode est essentielle pour adapter les modèles théoriques aux **prix réels de marché** et prendre en compte des anticipations complexes sur la volatilité future.