4/ Pour aller plus loin…

Antonin Chaix | antonin.chaix@gmail.com

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE-PSL I ENSAE PARIS I BÄRCHEN EDUCATION

Quelques exemples d'options exotiques

- Options américaines
- Options digitales
- Options à barrière
- Options à départ forward
- Options sur spread
- Options « best of » et « worst of »
- Options « lookback »
- Options asiatiques
- Options quantos
- Etc…

Risques liées aux options exotiques

On peut distinguer **3 grands types de risques** sur les exotiques:

- Risque **digital** (ou de discontinuité)
- Risque de **volatilité forward**
- Risque de **corrélation**

Un modèle candidat à l'évaluation d'un produit exotique doit toujours appréhender correctement les différents risques du produit

- Dynamique adéquate
- Mais surtout : calibration adéquate !

Les méthodes numériques

Il est souvent impossible de trouver des **formules explicites (closed form)** pour évaluer certains payoffs:

- Produits trop complexes
- Modèles trop complexes
- Les deux !

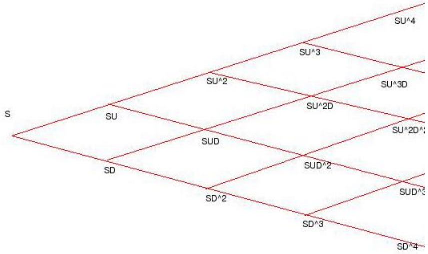
On utilise des **méthodes numériques**

Elles consistent à résoudre numériquement les équations dont les prix d'options sont la solution.

Les méthodes numériques

Deux catégories de méthodes numériques :

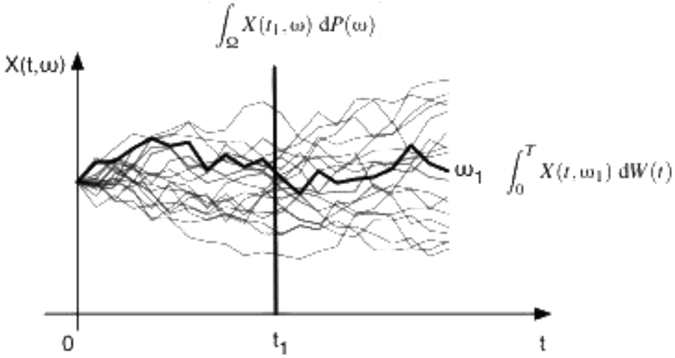
- **Les méthodes *backward***
  - Arbres



  - EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) - r(t,x)v(t,x) = 0$$

- **Les méthodes *forward***
  - *Monte Carlo*



Focus sur la méthode de Monte Carlo

Tout prix d'actif financier s'exprime sous forme d'une **espérance mathématique**, calculée sous une mesure de probabilité spécifique appelée *probabilité risque-neutre*

L'espérance mathématique peut être estimée à l'aide d'une **moyenne empirique** (Loi des Grands Nombres).

On peut également obtenir un **intervalle de confiance** pour le prix obtenu (Théorème Central Limite)

Loi des grands nombres

Soit X_1, X_2, …, X_n,… une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.)

Alors leur **moyenne empirique** converge vers l'espérance de ces variables

Formellement :

$$\widehat{m}_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1]$$

L'idée de la méthode de Monte Carlo est d'estimer cette espérance en **simulant les variables aléatoires X_i** et en calculant leur moyenne empirique

Théorème central limite

Soit X_1, X_2, …, X_n,… une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.). Alors :

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}[X_1])$$

On a également :

$$\frac{\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}_n}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right)\mathbf{1}_{\widehat{\sigma}_n > 0} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1)$$

Avec la variance empirique : $\widehat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)^2$

Intervalle de confiance à 95% : $\left[\widehat{m}_n - 1,96\,\frac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\,;\,\widehat{m}_n + 1,96\,\frac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$

Génération de lois uniformes et gaussiennes

La plupart des générateurs aléatoires (y compris sur Excel) fournissent des tirages indépendants d'une loi uniforme sur [0,1]

Pour transformer ces tirages en lois normales N(0,1):

- Appliquer l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale
- Algorithme de Box-Muller

Pour simuler les accroissement d'un mouvement brownien :

$$(W_{t+\Delta t} - W_t) \text{ suit une loi normale de variance } \Delta t$$

On peut donc le simuler comme $\varepsilon\ (\Delta t)^{1/2}$ où ε suit une loi N(0,1)

Pricing d'un call européen en Monte Carlo

TP Excel : on souhaite pricer notre call 1 an ($K = S_0 = 100$, $\sigma = 20\%$, $r = 1.50\%$) en Monte Carlo sous Black Scholes et voir si le résultat obtenu coïncide la formule de BS…

1. Tirage de N de loi normales centrées réduites indépendantes. $\Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$

2. $\Rightarrow S_T^1, S_T^2, \ldots, S_T^N$ = N réalisations correspondantes de S_T :

$$S_T^i = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon_i\right), \quad i = 1, \ldots, N$$

3. $\Rightarrow P_1, P_2, \ldots, P_N$ = N réalisations correspondantes du payoff :

$$P_i = \max(S_T^i - K, 0), \quad i = 1, \ldots, N$$

4. Estimation du prix par Monte Carlo : $$P_{\mathrm{MC}} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i$$

Options à barrière

Les options à barrière ont le même payoff que les options vanilles (call / put) mais celui-ci s'active (in) ou se désactive (out) suivant le franchissement par le sous-jacent, pendant la vie de l'option, d'une certaine barrière située à la hausse (up) ou à la baisse (down) par rapport à S_0.

Par exemple, un **call down & out** de strike K et de barrière $H < S_0$ aura pour payoff à maturité T :

$$(S_T - K)^+ \, \mathbb{1}_{\{\min_{[0,T]} S_t > H\}}$$

Et un **put up & in** (strike K, barrière $H > S_0$) :

$$(K - S_T)^+ \, \mathbb{1}_{\{\max_{[0,T]} S_t > H\}}$$

Pricing d’un call down & out en Monte Carlo

TP Excel : on souhaite évaluer dans le modèle de Black Scholes un call down & out de maturité 1 an avec $K = S_0 = 100$, et une barrière $H = 90$ (on continuera d’utiliser $\sigma = 20\%$, $r = 1.50\%$)

Comment procéder ?

Contrairement au call européen, l’option est **path dependent** : pour calculer chaque payoff, il faut donc simuler **l’ensemble de la trajectoire** de l’actif sous-jacent

On se donne donc un échéancier $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ sur lequel on va simuler l’actif (avec $t_i = t_{i-1} + \Delta t$)

Pricing d'un call down & out en Monte Carlo

Rappel : le modèle de Black Scholes intégré entre t et $t+\Delta t$ donne

$$S_{t+\Delta t} = S_t \; e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma (W_{t+\Delta t} - W_t)}$$

L'accroissement du brownien ($W_{t+\Delta t} - W_t$) étant une gaussienne de variance Δt, il suffit, pour simuler $S_{t+\Delta t}$ à partir de S_t de tirer une loi normale centrée réduite indépendante ε et on a :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \; e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon}$$

Ainsi, pour simuler 1 trajectoire, il faut tirer autant de lois normales indépendantes qu'il y a de pas de temps…

Monte Carlo : simulation d'un delta hedge

On souhaite simuler en Monte Carlo, dans le modèle de Black Scholes, la vente d'un call ATM de maturité 1 an et sa couverture en delta. $S_0 = K = 100$, $r = 1.50\%$

On utilisera pour cela **3 volatilités** distinctes, que l'on prendra initialement toutes égales à 20% mais que l'on pourra ensuite faire varier :

- $\sigma_{\text{traitée}}$ = volatilité implicite à laquelle j'ai vendu le call en $t = 0$
- σ_{gestion} = volatilité avec laquelle je calcule mon delta
- $\sigma_{\text{réelle}}$ = volatilité réalisée (i.e. vol de simulation de l'actif)

Calculer sur l'ensemble des simulations la moyenne, l'écart-type, le min et le max du P&L obtenu.

S'intéresser aux trajectoires provoquant un P&L très négatif…

Petits exos pour réviser

Les taux sont quasi nuls. Je traite un put à la monnaie spot de maturité 3 mois, de vol implicite 25%, sur une action ne distribuant pas de dividendes et cotant 40 € aujourd'hui.

Que vaut approximativement ce put ? (à calculer de tête !)

Réponse

$P_0 = C_0 \approx 0.4\, S_0\, \sigma \sqrt{T} = 0.4 \times 40 \times 25\% \times 0.5 =$ **2 €**

En l'absence de smile de vol, que peut-on dire du put de strike 45 ?

Réponse

Valeur intrinsèque = 5 et valeur temps < 2 => **Prix put < 7€**

Petits exos pour réviser (2)

Je vends un straddle ATM de maturité 6 mois. Quel est approximativement mon delta ?

Réponse

$\Delta \approx -0.5 + 0.5 = 0$ (mais assez approximatif tout de même !)

Je vends un risk reversal 80/120. Pour me couvrir en delta, dois-je acheter ou vendre de l'actif sous-jacent ?

Réponse

RR 80/120 = call 120 – put 80

Donc en vendant le RR je suis short call ($\Delta<0$) et long put ($\Delta<0$)

Ma position est delta négative => j'achète donc de l'actif pour me couvrir en delta

Petits exos pour réviser (3)

Je considère que la volatilité implicite observée sur les options est très élevée par rapport à la volatilité réelle constatée sur le cours de l'actif sous-jacent.

Une stratégie permettant très probablement de tirer profit de cette observation serait :

A. D'acheter des options
B. D'acheter des options et de les couvrir en delta
C. De vendre des options
D. De vendre des options et de les couvrir en delta

Réponse…

D !

Petits exos pour réviser (4)

En l'absence de smile/skew de vol, le prix d'un risk reversal 1 an 80/120 (long call 120 / short put 80), est égal à 1€

A vol à la monnaie inchangée, mais en présence d'un skew de volatilité, comment va évoluer le prix du risk reversal ?

Réponse

Apparition d'un skew de vol : la vol du put augmente, celle du call diminue

Call et put sont véga > 0

Le prix du call diminue, celui du put augmente mais on en est short => Le prix du risk reversal **diminue**