2/ Evaluer les options

Antonin Chaix | antonin.chaix@gmail.com

DIFIQ | DIPLÔME EN FINANCE QUANTITATIVE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE-PSL I ENSAE PARIS I BÄRCHEN EDUCATION

Le modèle binomial : exemple

Parapluie valant aujourd'hui 100 €

- Il augmentera de 10% demain s'il pleut
- Il baissera de 10% s'il ne pleut pas
- Le taux d'intérêt est nul
- Météo France estime qu'il va pleuvoir demain avec une proba 90%

Dans ce modèle, quelle est la valeur d'un call sur le parapluie de prix d'exercice 100 € ?

Réponse naïve….

Le payoff du call est 10 s'il pleut et 0 s'il ne pleut pas

En espérance le call me rapporte donc 0.9 x 10 + 0.1 x 0 = 9 €

Et pourtant le prix du call n'est pas égal à 9 € !

Le modèle binomial

Modèle à une période et deux états du monde :

$$\begin{tikzcd} & u\,S_0 & \text{avec la proba } p \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & d\,S_0 & \text{avec la proba } 1 - p \end{tikzcd}$$

Actif sans risque :

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = 1 + r$$

Le modèle binomial

Première propriété (issue de l'AOA) :

$$d < 1 + r < u$$

Démo :

- Si $1 + r \leq d < u$, achat de l'actif risqué financé par l'emprunt de S_0 à taux sans risque => arbitrage
- Si $d < u \leq 1 + r$ vente (à découvert) de l'actif risqué et placement de S_0 à taux sans risque => arbitrage

Payoff en *t* = 1 du call sur l'actif *S* :

- $C_1^u = (uS_0 - K)^+$ dans l'état up
- $C_1^d = (dS_0 - K)^+$ dans l'état down

Idée : chercher un portefeuille de réplication du call….

Le modèle binomial

Portefeuille de réplication constitué d'une quantité α d'actif risqué et β d'actif sans risque :

Valeur en *t* = 0 : $V_0 = \alpha\, S_0 + \beta$

Valeur en *t* = 1 : $V_1^u = \alpha\, u\, S_0 + \beta\,(1+r)$ dans l'état up

$V_1^d = \alpha\, d\, S_0 + \beta\,(1+r)$ dans l'état down

On cherche donc α et β tels que : $\alpha\, u\, S_0 + \beta\,(1+r) = C_1^u$

$\alpha\, d\, S_0 + \beta\,(1+r) = C_1^d$

Le modèle binomial

Solution :

$$\alpha = \frac{C_1^u - C_1^d}{u\,S_0 - d\,S_0} \qquad\qquad \beta = \frac{C_1^u - \alpha\,u\,S_0}{1+r}$$

La grandeur α est assimilable au *delta* du call : c'est la quantité d'actif sous-jacent qu'il faut détenir pour couvrir le call.

Application : prix du call sur notre parapluie

$S_0 = 100$; $u = 1.1$; $d = 0.9$; $r = 0$; $C_1^u = 10$; $C_1^d = 0$

$\alpha = 0.5$; $\beta = -45$ d'où $\mathbf{C_0 = 5}$ **€**

Anormalement différent du prix « naïf » de 9 €… Pourquoi ?

Réponse : l'exemple est bancal.. le prix du parapluie n'a pas du tout intégré la forte proba de pluie !

Le modèle binomial

Rappelons : $$\alpha = \frac{C_1^u - C_1^d}{u\,S_0 - d\,S_0} \qquad \beta = \frac{C_1^u - \alpha\,u\,S_0}{1+r}$$

Prix du call : $$\begin{aligned} C_0 &= \alpha S_0 + \beta \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\,C_1^u + \frac{u-(1+r)}{u-d}\,C_1^d\right) \end{aligned}$$

Notons : $$q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Compte tenu de $d < 1 + r < u$, on a $0 < q < 1$.

Donc q est interprétable comme une probabilité

Et de plus : $$1 - q = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Modèle binomial : la probabilité risque-neutre

Conclusion :

$$C_0 \;=\; \frac{1}{1+r}\left(q\,C_1^u + (1-q)\,C_1^d\right)$$

On a donc :

$$C_0 \;=\; \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}^Q(C_1)$$

Avec *Q* la mesure de probabilité définit par la proba *q* sur l'état up et 1 – *q* sur l'état down

Q est appelée la mesure (ou probabilité) **risque-neutre**

Sous la mesure risque-neutre, le prix du call est égal à l'espérance actualisée de son payoff

Modèle binomial : la probabilité risque-neutre

On peut réécrire cette relation : $$\frac{C_0}{B_0} = \mathbb{E}^Q\left(\frac{C_1}{B_1}\right)$$

Où *B* désigne l'actif sans risque ($B_0 = 1$ et $B_1 = 1+r$)

Autrement dit, le prix du call actualisé C_t / B_t est une *martingale* sous la mesure risque-neutre *Q*

En langage plus simple : sous la mesure risque-neutre, **rendement espéré** = **taux sans risque**

Il en est de même pour tous les actifs du marché (action, actif sans risque)

NB : pricing en temps continu $$C_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^Q\left((S_T - K)^+\right)$$

Que représente la probabilité risque-neutre ?

Elle est à considérer comme un outil de calcul, une probabilité artificielle, différente de la probabilité « objective »

Et elle permet d’écrire le prix d’un produit dérivé comme l’espérance de son payoff actualisé…

… ce qui est bien utile pour faire des calculs !

Mais de manière générale, dès qu’il y a de l’incertain, donc du risque (pour lequel on a tous une certaine aversion), un prix n’est pas une espérance sous la probabilité objective…

Rappelez-vous du parapluie !

Un prix n'est pas une espérance objective !

On lance un pièce de monnaie…

1 M€ si pile (p = 0.5)

Loterie

E^P(Gain) = 500 K€

0 € si face (1 – p = 0.5)

Préférez-vous participer (gratuitement) à cette loterie, ou bien recevoir de manière certaine la somme de **400 K€** ?

Tout le monde préfère recevoir 400 K€ à coup sûr : on accorde moins de valeur à cette loterie que son espérance objective de gain !

Un prix n'est pas une espérance objective !

Supposons que la participation à cette loterie :

Loterie

1 M€ si pile $\quad q = 0.1$

0 € si face $\quad 1 - q = 0.9$

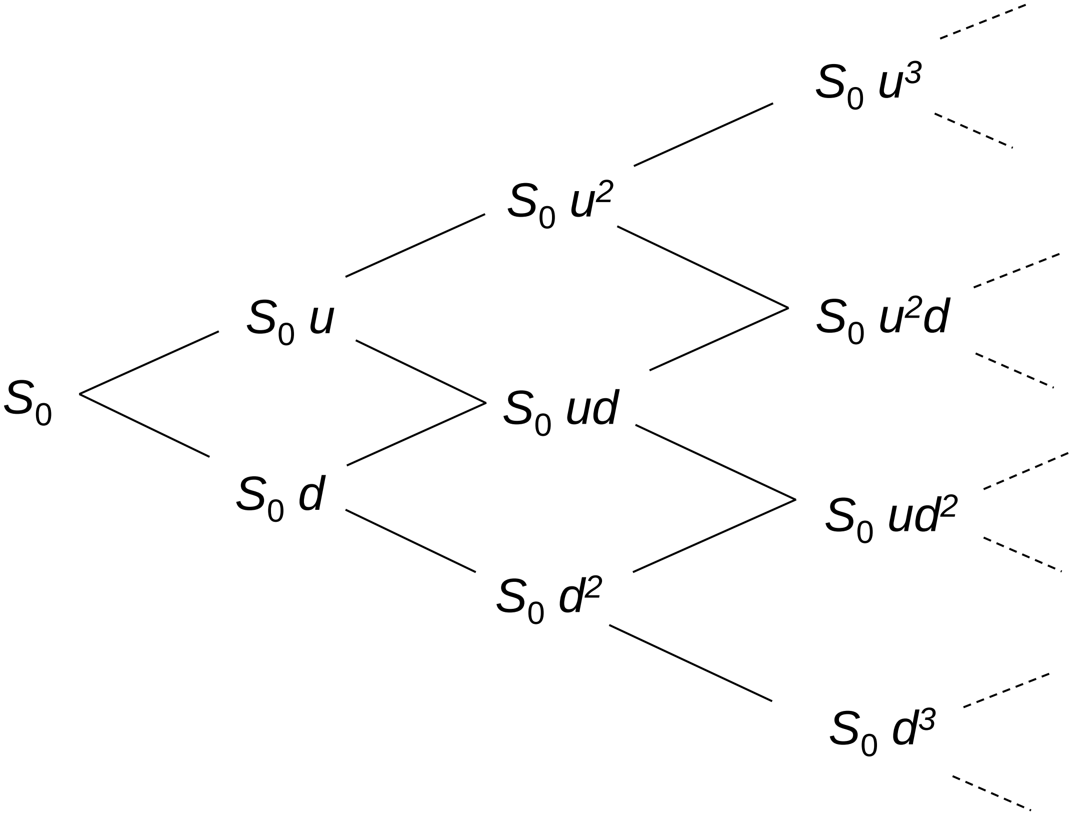
S'échange sur le marché au prix de **100 K€**…

On peut alors écrire **Prix = E^Q(Gain)** avec *Q* la mesure risque-neutre, qui met une proba 0.1 sur pile et 0.9 sur face.

Averse au risque, on sous pondère l'événement favorable (pile) et surpondère l'événement défavorable (face) !

Le modèle de Black & Scholes

Ce modèle est issu du passage à la limite d'un modèle binomial multi-périodes



$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Le modèle de Black & Scholes

Le modèle de Black & Scholes suppose une dynamique **log-normale** sur le prix de l'actif sous-jacent

Sous la mesure risque-neutre : $$\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\,dW_t$$

Solution explicite : $$S_T = S_0\, e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma W_T}$$

W_T est la valeur en T du mouvement brownien : c'est une loi normale de variance T

Le log de S_T est donc une loi normale

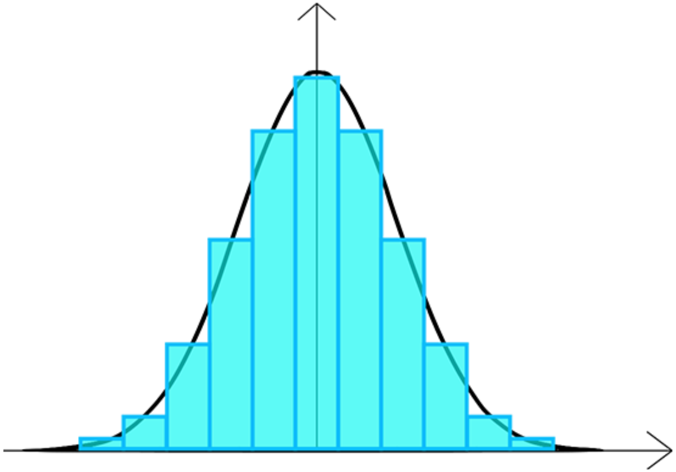
Le modèle de Black & Scholes

Que signifie financièrement le modèle ?

Discrétisons l'équation de B&S sur Δt = 1 journée :

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \approx r\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - Wt)$$

B&S suppose que le rendement de l'actif est gaussien !



Réaliste ou pas ?

En pratique, plutôt pas !

Volatilité

Solution de B&S entre t et $t + \Delta t$:

$$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = (r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)$$
$$\approx \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}$$

L'accroissement $(W_{t+\Delta t} - W_t)$ est une loi normale centrée de variance Δt .

Donc sous B&S le (log) rendement entre t et $t + \Delta t$ est une loi normale d'écart-type :

$$s = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

La volatilité σ est donc **l'écart-type annualisé des rendements**

Estimer une volatilité historique

Il suffit de considérer un historique de l'actif (quotidien, hebdomadaire, mensuel, annuel…), de calculer les rendements, et d'estimer leur écart-type…

Exemple : CAC 40, historique quotidien

$\Delta t \approx 1/255$

A partir de l'écart-type *s* estimé des rendements du CAC, la volatilité estimée est :

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{s}}{\sqrt{\Delta t}} \approx \hat{s}\sqrt{255}$$

Formule de Black & Scholes

Principe du calcul :

$$C_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}^Q\left((S_T - K)^+\right)$$
$$= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_0\,e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}\,x} - K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

Qui nous donne après calcul le prix du call et du put :

$$\boxed{\begin{aligned} C_0 &= S_0\,\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \\ P_0 &= Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\,\mathcal{N}(-d_1) \end{aligned}}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \qquad \mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du$$

Inputs de la formule de Black & Scholes

- T : temps (en années) restant jusqu'à la maturité de l'option
- K : prix d'exercice de l'option
- S_0 : cours actuel de l'actif sous-jacent
- σ : volatilité de l'actif sous-jacent
- r : taux d'intérêt continu sans risque

Modèle de Black & Scholes avec dividendes

On utilise un taux continu *d* de dividendes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - d)dt + \sigma dW_t$$

Formules de pricing modifiées du call et du put :

$$\boxed{\begin{aligned} C_0 &= S_0 e^{-dT}\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \\ P_0 &= Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0 e^{-dT}\mathcal{N}(-d_1) \end{aligned}}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - d + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

TPs Excel

Implémenter en VBA les formules de Black & Scholes pour le pricing d'un call et d'un put

Exercice 1

Reprendre l'exemple du call Orange de strike 10€, maturité 3 mois et l'évaluer au moyen de Black & Scholes (pas de dividendes)

Le cours d'Orange est 10.19 €, on utilisera r = 0.50% et σ = 20%

Exercice 2

Call et put 1 an avec $K = S_0 = 100$ (ATM spot) ; σ = 20% ; r = 1,50%

Evaluer le call et le put, vérifier la parité call-put, vérifier que chacun des facteurs impacte le prix dans le sens attendu

Volatilité implicite

Dès qu'un marché d'options est liquide il est possible de calculer des volatilité implicites…

Définition

Soit un call sur un actif *S,* de maturité *T* et strike *K,* coté sur le marché au prix C_0^{MKT}. Sa volatilité implicite est σ_{imp} telle que :

$$C_0^{\mathrm{MKT}} = \mathbf{BScall}(T, K, S_0, \sigma_{\mathrm{imp}}, r)$$

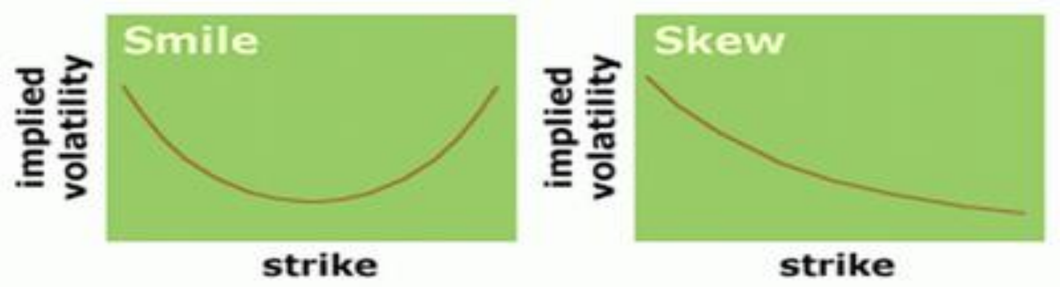
La vol implicite est très utilisée. Elle est devenue une donnée de marché à part entière… Sur certains marchés (FX) les options sont même cotées en vol implicite !

Smile de volatilité

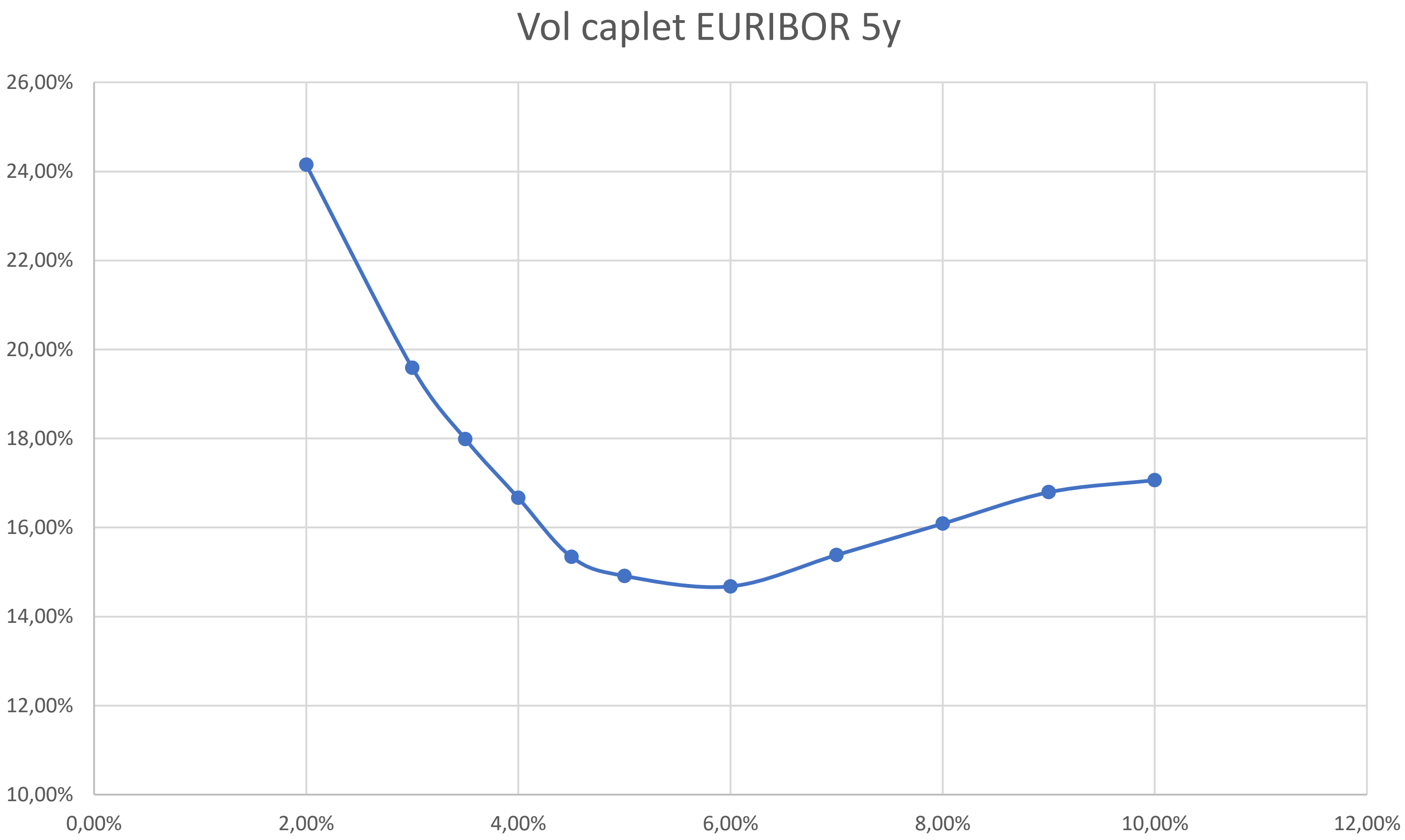
Sur les marchés d'options, pour un même actif sous-jacent, et pour une maturité donnée, **la volatilité implicite observée diffère d'un strike à l'autre.**

Cela infirme le modèle de Black & Scholes !

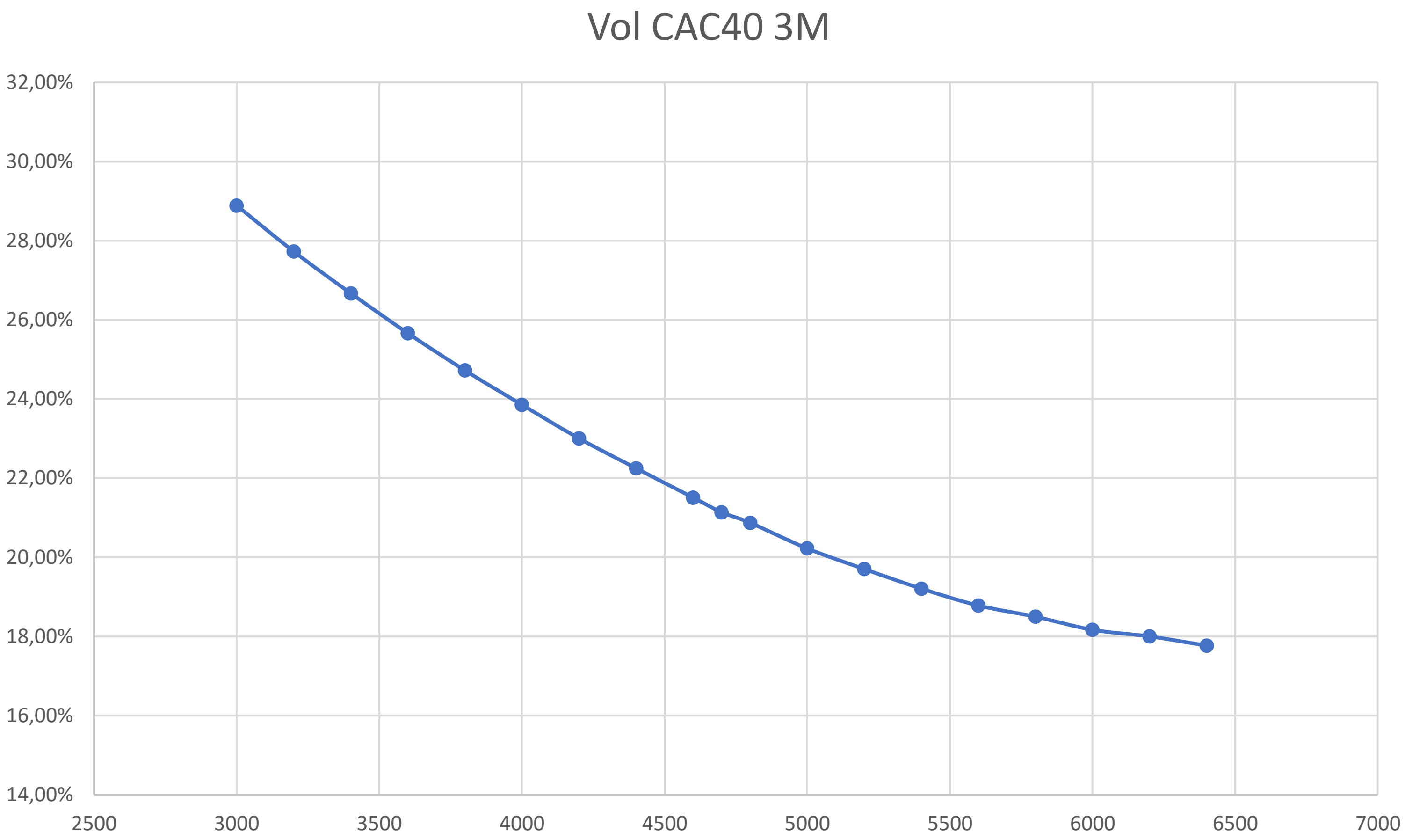
On parle de ***smile* de volatilité** à cause de la forme en « U » de la vol. implicite en fonction du strike. Quand la vol implicite décroit en fonction du strike, on parle de ***skew***.



Smile de volatilité



Skew de volatilité



Surface de volatilité

La volatilité implicite observée dépend aussi de la **maturité** de l'option.

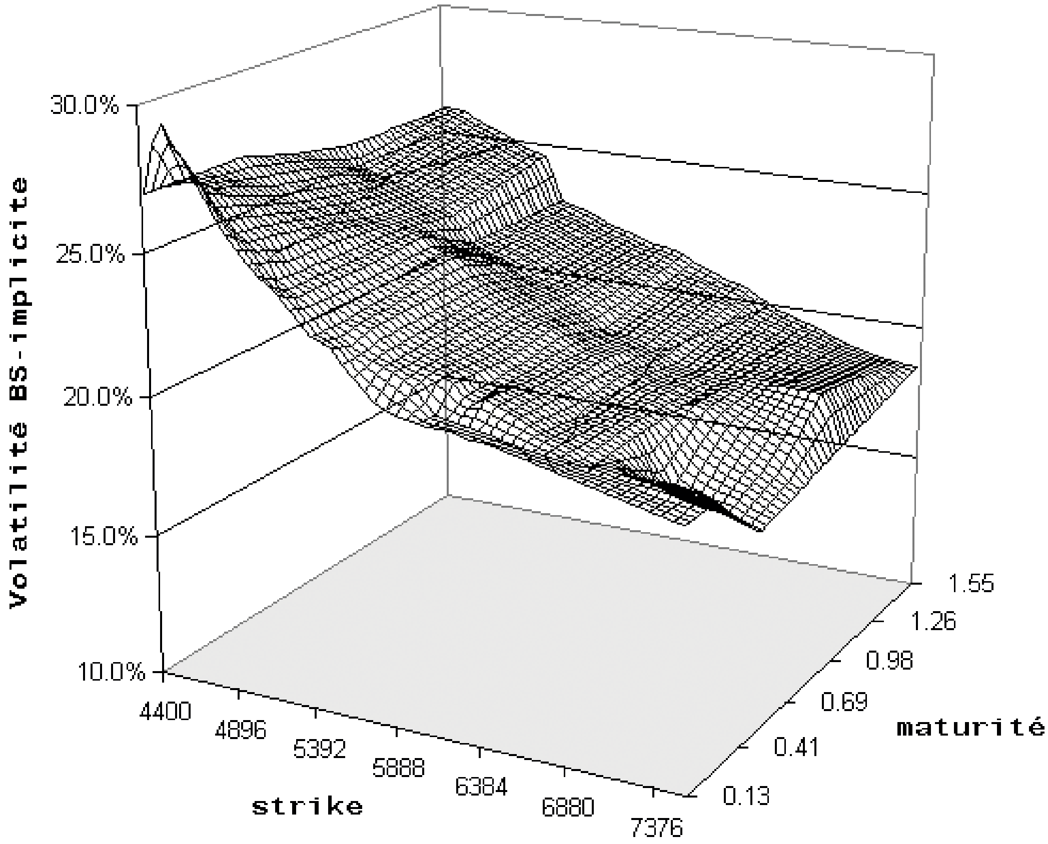
On parle de ***term structure*** de la volatilité implicite.

Pour un actif sous-jacent donné, le prix des options peut donc être représenté par une **surface de volatilité** :

Vol. implicite = ***F*** (strike, maturité)

Surface de volatilité

Surface de volatilité (CAC 40)



TP Excel

Call 1 an avec $K = S_0 = 100$; $\sigma = 20\%$; $r = 1{,}50\%$

Calculer le prix du call en faisant varier S_0 de 50 à 150

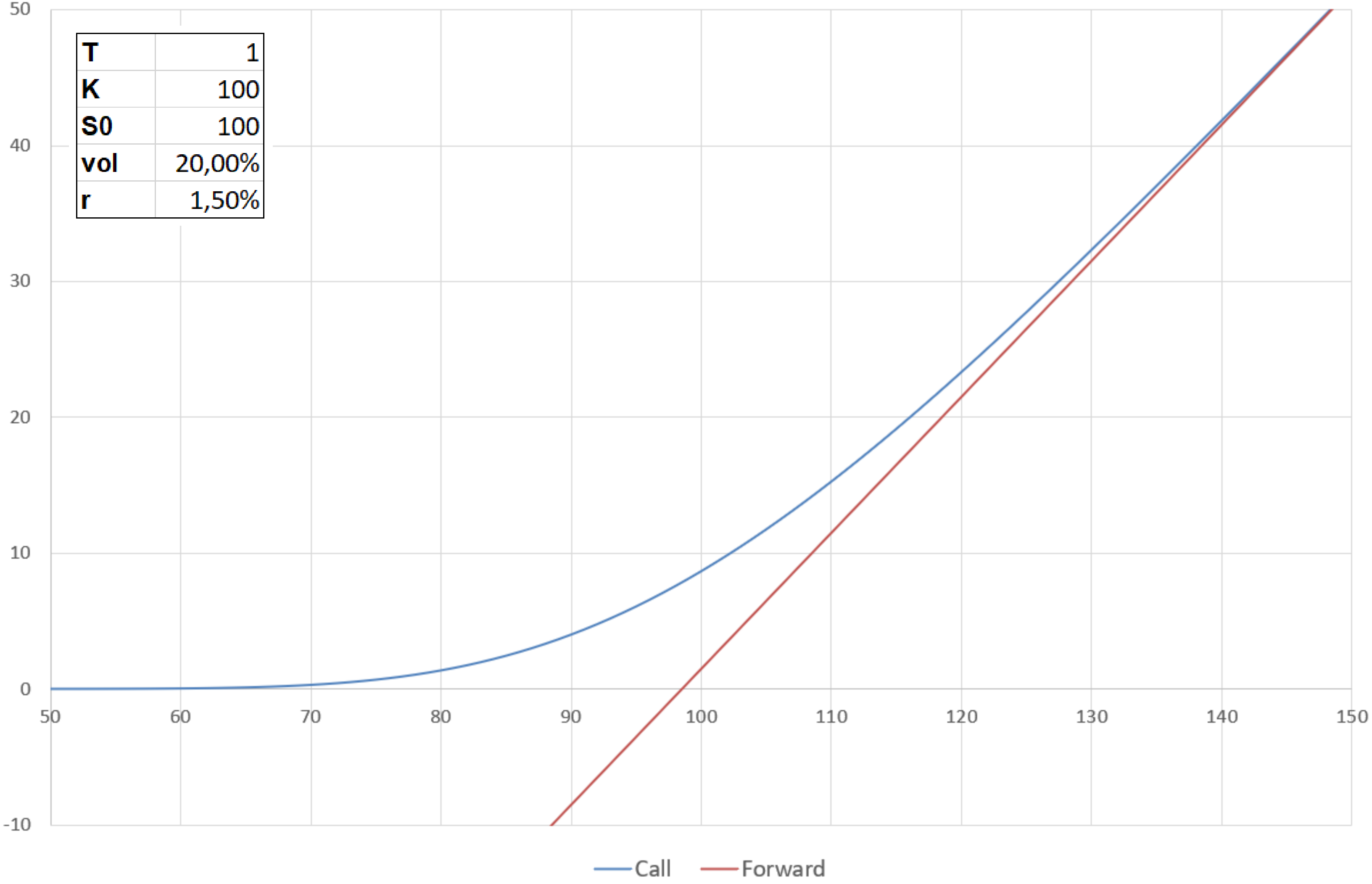
Représenter graphiquement le prix de call en fonction de S_0

Sur le même graphique, faire apparaître la valeur du contrat forward $V_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

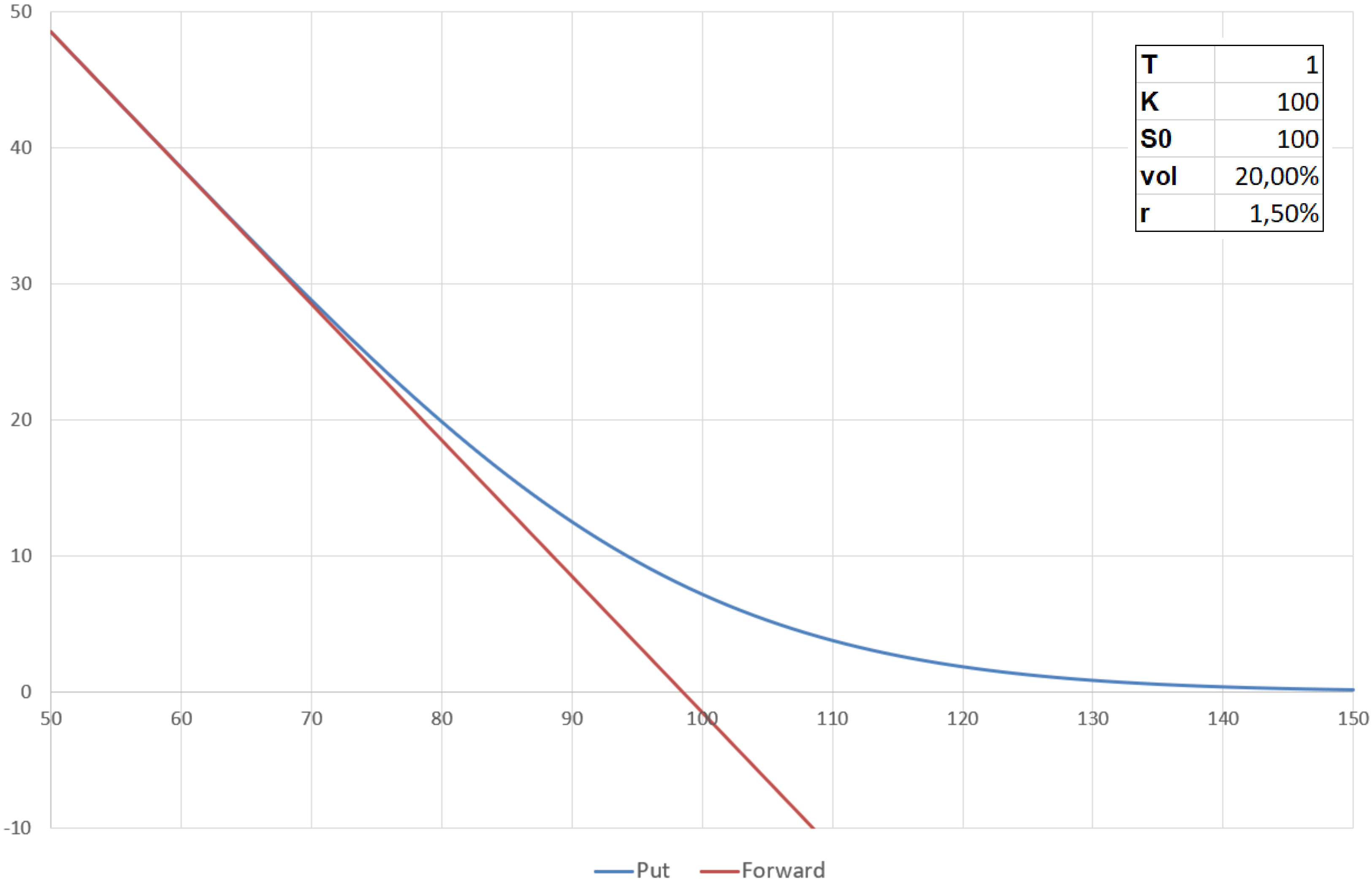
Que remarque-t-on ?

En faire de même avec le put

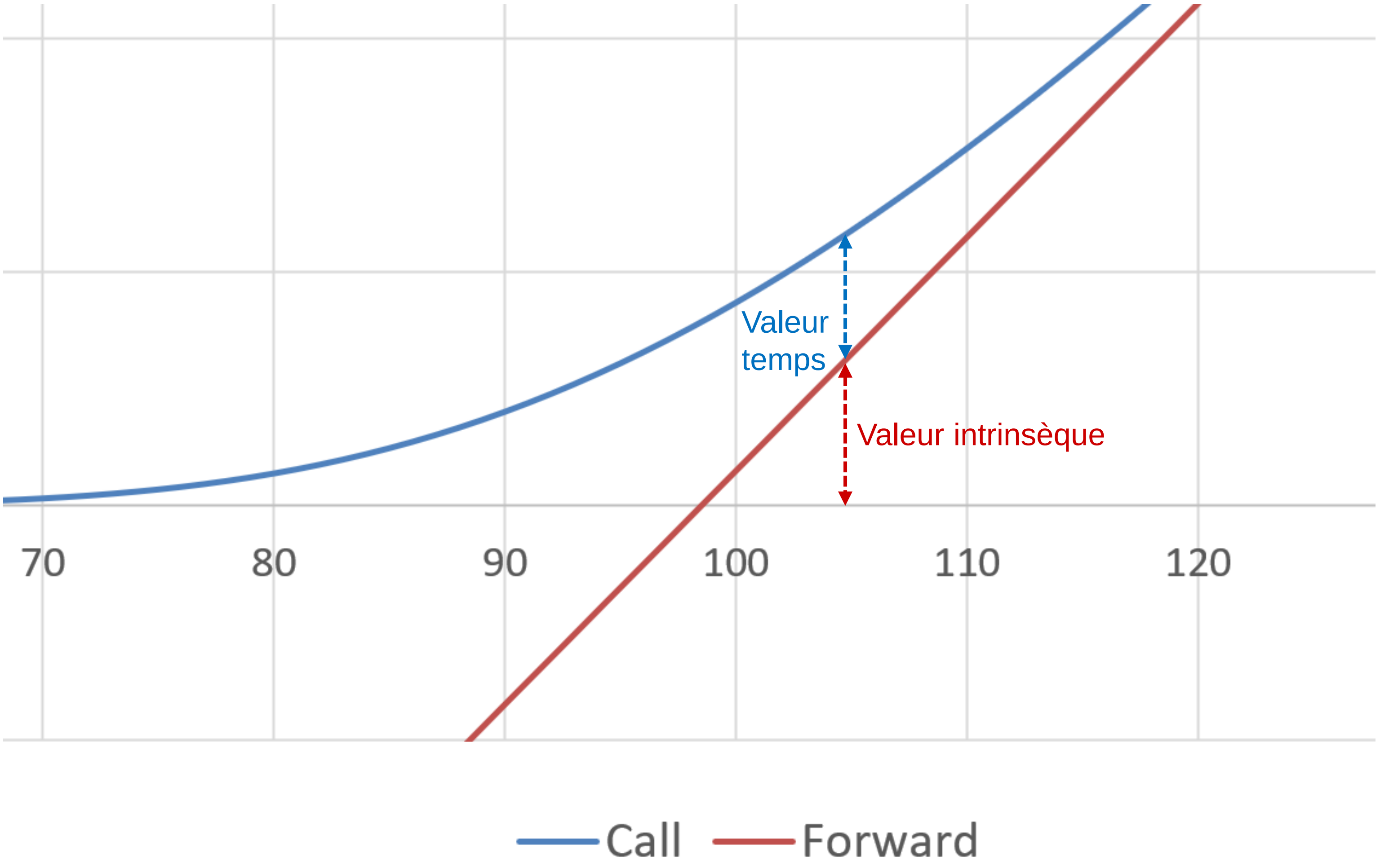
Prix du call en fonction du cours de l'actif



Prix du put en fonction du cours de l'actif



Valeur intrinsèque et valeur temps



Valeur intrinsèque

La valeur intrinsèque d'une option est la partie positive du contrat forward sous-jacent

Pour le call (en l'absence de dividendes) :

$$\mathbf{VI}_{\text{call}} = \left(S_0 - Ke^{-rT}\right)^+ \leq C_0$$

Démo : intéressons nous portefeuille constitué, uniquement si $S_0 > Ke^{-rT}$, de l'achat d'une action et de l'emprunt de Ke^{-rT}

A maturité T ce portefeuille vaut :

$$(S_T - K)\mathbb{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

Par AOA, les prix en t = 0 de ces 2 portefeuilles vérifient la même inégalité :

$$\left(S_0 - Ke^{-rT}\right)\mathbb{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} = \left(S_0 - Ke^{-rT}\right)^+ \leq C_0$$

Valeur temps

La valeur temps est définie comme la différence entre le prix de l'option et sa valeur intrinsèque

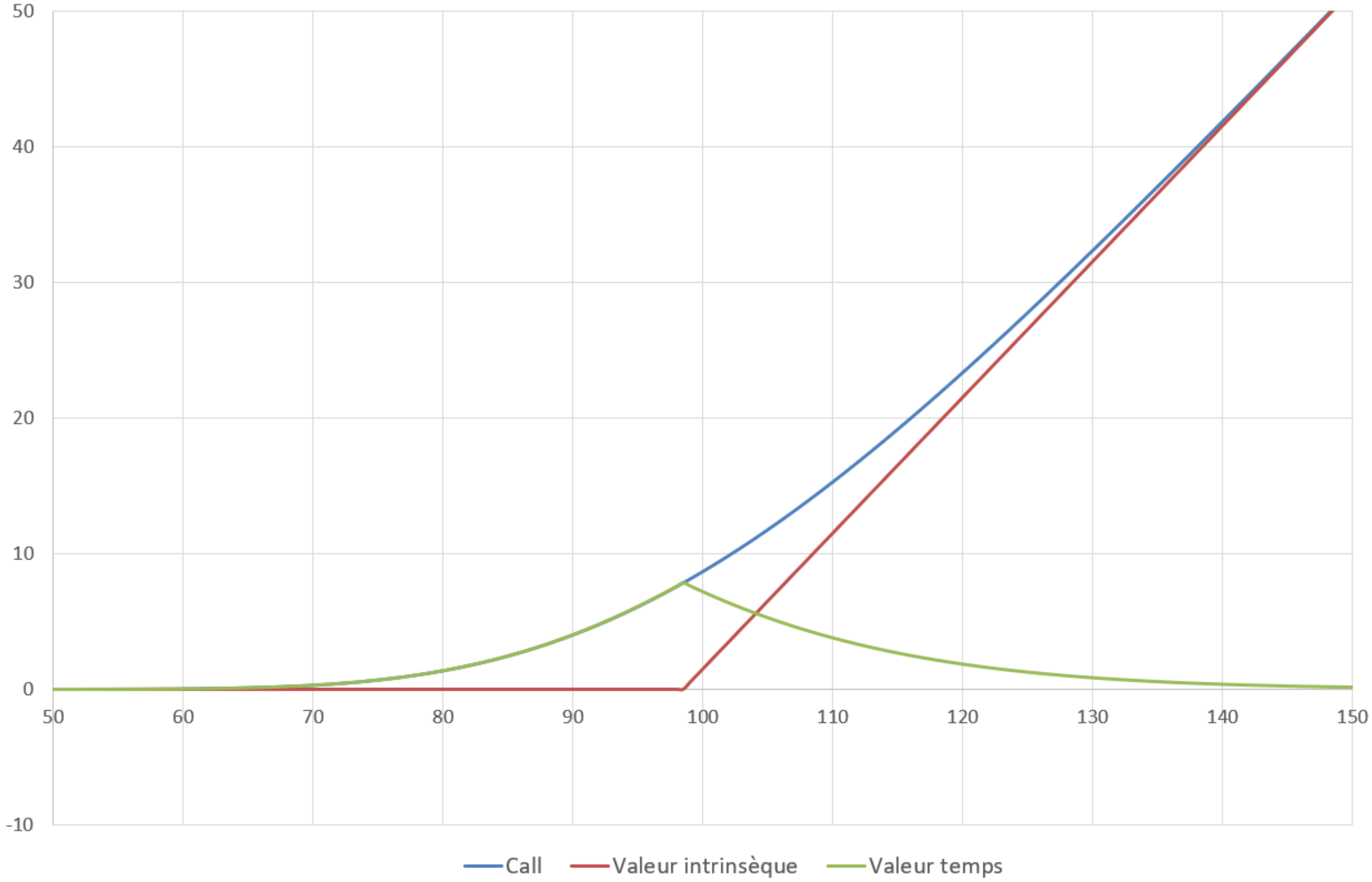
Pour le call : $$\mathbf{VT}_{\text{call}} = C_0 - \mathbf{VI}_{\text{call}}$$

De sorte que : $$C_0 = \mathbf{VT}_{\text{call}} + \mathbf{VI}_{\text{call}}$$

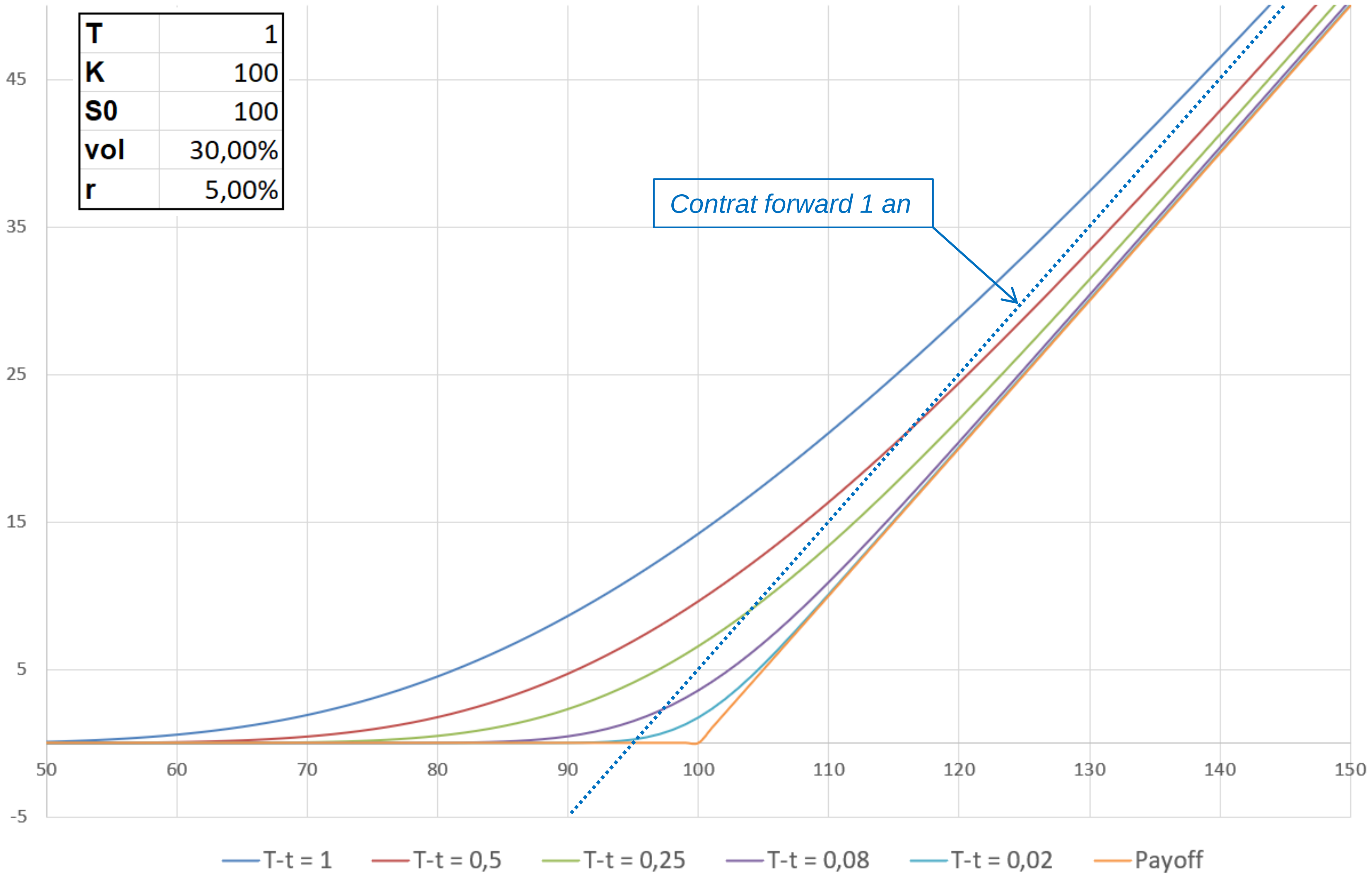
La **valeur intrinsèque** est le meilleur minorant du prix de l'option. C'est le prix de l'option dans un contexte déterministe (σ = 0)

La **valeur temps** correspond au « prix de l'incertitude ». Elle est maximum à la monnaie et est d'autant plus grande que la volatilité et le temps restant jusqu'à échéance sont importants

Valeur intrinsèque et valeur temps



Call – effet du temps restant jusqu'à maturité



Put – effet du temps restant jusqu'à maturité