Modèle de Black & Scholes

Jean-François Berger-Lefébure

Contents

1 Introduction : Contexte et Développement du Modèle de Black & Scholes

1.1 Contexte Historique et Origines

Le modèle de Black & Scholes a été introduit en 1973 par **Fischer Black** et **Myron Scholes**, avec une contribution majeure de **Robert Merton**. À cette époque, les marchés financiers connaissaient une forte croissance des produits dérivés, notamment les options. Cependant, il manquait un cadre théorique rigoureux pour évaluer leur prix.

Avant cette avancée, l'évaluation des options reposait sur des règles empiriques et des méthodes peu formalisées, ce qui rendait les marchés inefficaces. Les chercheurs se sont donc posé une question fondamentale : *comment évaluer correctement une option de manière scientifique ?*

La Question Fondamentale

Le problème posé était :

- *Quel est le prix équitable d'une option aujourd'hui, sachant que son rendement futur est incertain ?*

Pour répondre à cette question, il était nécessaire d'exploiter la théorie des probabilités, la dynamique des processus stochastiques et la finance quantitative.

1.2 Hypothèses Clés du Modèle

Pour simplifier l'analyse, Black et Scholes ont posé plusieurs hypothèses sur les marchés :

- **Absence d'opportunités d'arbitrage** : Il est impossible de réaliser un profit sans risque.
- **Évolution continue des prix** : Les variations des prix suivent un mouvement brownien géométrique (modèle log-normal).
- **Marchés parfaits** : Pas de coûts de transaction ni de taxes, et la possibilité d'acheter ou vendre des fractions d'actifs.
- **Taux d'intérêt constant et connu** : Les emprunts et placements se font à un taux fixe.
- **Aucune distribution de dividendes** pendant la durée de vie de l'option.
- **Volatilité constante** : La variabilité des rendements reste stable sur la période étudiée.

Ces hypothèses simplifient les calculs tout en posant la base d'un modèle analytique solide.

1.3 Formules

La formule initiale de Black & Scholes permet de calculer le prix d'un **call européen** (droit d'acheter un actif) :

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Avec :

- S_0 : Prix initial de l'actif sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (strike).
- T : Temps jusqu'à la maturité (en années).
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- $N(.)$: Fonction de répartition de la loi normale.
- d_1 et d_2 calculés par :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où σ représente la **volatilité** de l'actif.

Logique Sous-jacente : La Réplication et l'Arbitrage

L'idée maîtresse repose sur la **réplication dynamique** :

- Construire un portefeuille composé d'actions et d'emprunts pour imiter exactement le payoff de l'option.
- Ajuster dynamiquement la quantité d'actifs dans le portefeuille pour rester couvert en permanence.

Ainsi, en supposant qu'il n'existe pas d'arbitrage, le coût de ce portefeuille (appelé *réplication parfaite*) doit correspondre au prix de l'option.

1.4 Problématiques Soulevées et Extensions

Bien que ce modèle soit révolutionnaire, il n'était pas exempt de limites :

- **Volatilité non constante** : La volatilité réelle observée sur les marchés dépend du niveau des prix.
- **Sauts dans les prix** : Les prix des actifs peuvent connaître des variations soudaines, ce que le modèle ne peut pas capturer.
- **Dividendes non pris en compte** : Hypothèse restrictive dans de nombreux cas.

Ces limites ont conduit à des extensions telles que :

- **Modèle de Black-Scholes-Merton avec dividendes.**
- **Modèles à volatilité locale et stochastique**.

Importance dans la Finance Moderne

Le modèle Black & Scholes a marqué le début de la finance quantitative moderne. Il est devenu la base de nombreux modèles plus complexes utilisés pour évaluer des produits financiers exotiques tels que les options barrières, les options asiatiques et les produits quantos. —

2 Développement et Démonstration du Modèle de Black & Scholes

2.1 Modélisation du Prix de l'Actif Sous-jacent

Sous ces hypothèses, le prix de l'actif sous-jacent $S(t)$ suit un **processus stochastique géométrique brownien** décrit par l'équation suivante :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

où :

- $S(t)$: Prix de l'actif sous-jacent à l'instant t.
- μ : Rendement moyen de l'actif (non pris en compte sous la mesure risque-neutre).
- σ : Volatilité constante.
- $W(t)$: Mouvement brownien standard sous la mesure historique $\mathbb{P}$.

Cette équation combine :

- Une croissance déterministe donnée par $\mu S(t)dt$.
- Un terme aléatoire, proportionnel à la volatilité σ et au mouvement brownien $dW(t)$.

2.2 Changement vers la Mesure Risque-Neutre

Pour effectuer la valorisation sous la mesure **risque-neutre**, on suppose que les investisseurs sont indifférents au risque. Ainsi, au lieu d'utiliser le rendement μ, on travaille avec un taux sans risque constant r.

En appliquant ce changement de mesure, la dynamique devient :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t)$$

où :

- r : Taux d'intérêt sans risque.
- $W^Q(t)$: Mouvement brownien sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$.

Ce changement de mesure garantit que tout actif actualisé au taux sans risque est une **martingale**. Cela repose sur le principe d'absence d'arbitrage.

4. Construction d'un Portefeuille de Couverture (Hedge)

Pour établir une couverture parfaite, on considère un portefeuille constitué :

- d'une position longue sur l'option $(V(S,t))$.
- d'une position courte sur une quantité Δ de l'actif sous-jacent.

La valeur du portefeuille est alors :

$$\Pi(t) = V(S,t) - \Delta S(t)$$

On cherche à annuler le risque, c'est-à-dire que le portefeuille doit être insensible aux fluctuations aléatoires $(dW(t))$. Pour cela, on impose que :

$$d\Pi(t) = 0$$

5. Application de l'Itô et Équation aux Dérivées Partielles

En utilisant le **Lemme d'Itô**, on calcule l'évolution de la valeur de l'option $V(S,t)$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt$$

En substituant $dS(t)$ et imposant la neutralité du risque ($d\Pi(t) = 0$), on obtient l'équation clé :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Cette équation aux dérivées partielles (EDP) est au cœur du modèle de Black & Scholes. Elle décrit l'évolution temporelle de la valeur de l'option en fonction des paramètres du modèle.

6. Résolution de l'Équation et Formule Finale

Pour résoudre cette équation, on applique des techniques analytiques, en particulier la transformation logarithmique de l'actif ($X = \ln S$) et des substitutions. Ce processus permet d'obtenir une solution fermée qui correspond au prix du call européen :

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Ces expressions seront développées et justifiées dans les sections suivantes.