

Level 1
Pricing and risk-management des options
Cours 2

Jean-François Berger-Lefébure

December 2024

Contents

1 Volatilité implicite	4
1.1 Contexte et définition	4
1.2 Pourquoi calculer la volatilité implicite ?	4
1.3 Formule et explication des paramètres	4
1.4 Pourquoi la volatilité implicite varie-t-elle selon les options ?	4
1.5 Utilité pratique	5
2 Smile de volatilité	5
2.1 Qu'est-ce qu'un smile de volatilité ?	5
2.2 Pourquoi observe-t-on un smile de volatilité ?	5
2.3 Exemple numérique	5
2.4 Conséquences pour les traders	6
2.5 Ce qu'il faut retenir	6
2.6 Distinction entre CALL et PUT	6
2.7 Exemple avec le CAC 40	7
2.8 Pourquoi la volatilité implicite est plus élevée sur les PUTS ?	7
2.9 Exemple: Smile de volatilité	7
2.9.1 Analyse du graphique	8
2.9.2 Pourquoi cette forme ?	8
2.9.3 Cas pratique: Caplets EURIBOR	8
2.10 Exemple: Skew de volatilité	9
2.10.1 Analyse du graphique	9
2.10.2 Pourquoi cette forme ?	9
2.10.3 Cas pratique: Options sur le CAC 40	9
2.11 Ce qu'il faut retenir	10
3 Surface de volatilité	11
3.1 Qu'est-ce qu'une surface de volatilité ?	11
3.2 Formule mathématique simple	11
3.3 Que montre la surface de volatilité ?	12
3.4 Exemple pratique: Surface du CAC 40	12
3.5 Pourquoi la surface de volatilité est-elle importante ?	12
3.6 Ce qu'il faut retenir	13
4 Valeur intrinsèque	14
4.1 Interprétation	14
4.2 Exemple concret	15
4.3 Ce qu'il faut retenir	15
5 Formule du portefeuille répliquant	16
5.1 Contexte : Construction du portefeuille	16
5.2 Analyse de la formule	16
5.3 Inégalité et interprétation	16
5.4 Ce qu'il faut retenir	17
6 Valeur temps et formules associées	18
6.1 Définition de la valeur temps	18
6.2 Relation entre valeur totale et ses composants	18
6.3 Propriétés importantes de la valeur temps	18

6.4	Ce qu'il faut retenir	18
7	Annexes	20
7.1	Pourquoi la volatilité implicite est-elle résolue numériquement et non analytiquement ?	20

1 Volatilité implicite

1.1 Contexte et définition

La **volatilité implicite** est la volatilité estimée par le marché sur la base des prix observés des options. Contrairement à la **volatilité historique**, qui mesure les fluctuations passées, la volatilité implicite reflète les **anticipations de risque** des investisseurs pour l'avenir.

1.2 Pourquoi calculer la volatilité implicite ?

L'objectif est de traduire dans un modèle théorique (Black & Scholes) l'information contenue dans le prix de marché d'une option. Cela permet de:

- Comparer les attentes des investisseurs sur la **volatilité future**.
- Ajuster la couverture de portefeuilles d'options (*hedging*).
- Déetecter d'éventuelles anomalies de prix pour des **arbitrages**.

1.3 Formule et explication des paramètres

Soit un call sur un actif S de prix d'exercice K , maturité T , observé au prix C_0^{MKT} .

La volatilité implicite est la valeur de σ telle que:

$$C_0^{BS}(S, K, T, r, \sigma_{imp}) = C_0^{MKT}$$

- S : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K : Prix d'exercice de l'option.
- T : Temps jusqu'à maturité (en années).
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- σ_{imp} : Volatilité implicite que nous cherchons.

ANNEXE: L'équation est résolue numériquement, car il est impossible de l'inverser analytiquement.

1.4 Pourquoi la volatilité implicite varie-t-elle selon les options ?

En théorie, sous le modèle de Black & Scholes, la volatilité est supposée **constante**. Pourtant, dans la pratique:

- Les investisseurs anticipent des **mouvements extrêmes** non prévus par la normalité des rendements (queues épaisses).
- Le marché valorise différemment les options en fonction des niveaux de prix (*strikes*) car les craintes ne sont pas symétriques:
 - Puts (protection contre un krach) = volatilité implicite souvent plus élevée.
 - Calls éloignés (anticipation d'explosion haussière) = volatilité implicite ajustée.
- Les déséquilibres entre **l'offre et la demande** sur certaines options influencent leur prix, et donc leur volatilité implicite.

1.5 Utilité pratique

La volatilité implicite est essentielle pour évaluer les **risques perçus par le marché**. Sur certains marchés (comme les devises), les options sont même cotées directement en volatilité plutôt qu'en prix.

2 Smile de volatilité

2.1 Qu'est-ce qu'un smile de volatilité ?

Le **smile de volatilité** décrit la relation entre la volatilité implicite et le prix d'exercice (*strike*). Contrairement au modèle de Black & Scholes, qui suppose une volatilité constante, le marché montre une **volatilité variable selon le strike**.

Le graphique typique prend la forme d'un sourire:

- Options **dans la monnaie (ITM)** et **hors de la monnaie (OTM)** = Volatilité plus élevée.
- Options **à la monnaie (ATM)** = Volatilité plus faible.

2.2 Pourquoi observe-t-on un smile de volatilité ?

- **Queue épaisse des distributions:** Les investisseurs craignent des mouvements extrêmes, créant une demande plus forte pour les protections (puts OTM).
- **Risque asymétrique:** Les investisseurs paient plus cher pour se protéger des krachs (puts) que pour spéculer sur des hausses (calls).
- **Ajustements dynamiques:** Les market-makers doivent se couvrir en ajustant leurs positions sur le sous-jacent, augmentant ainsi la demande sur certaines options.
- **Effets comportementaux:** Les marchés anticipent des mouvements spécifiques selon les zones de prix critiques (support ou résistance).

2.3 Exemple numérique

Supposons un sous-jacent valant 100 € avec 3 options:

- Call 1: Strike 90 €, prix observé 15 €.
- Call 2: Strike 100 €, prix observé 10 €.
- Call 3: Strike 110 €, prix observé 5 €.

Calcul des volatilités implicites:

- Call 1 (ITM) = $\hat{\sigma}$ Volatilité élevée car risque de mouvement fort.
- Call 2 (ATM) = $\hat{\sigma}$ Volatilité faible, prix centré sur l'attente moyenne.
- Call 3 (OTM) = $\hat{\sigma}$ Volatilité plus élevée si anticipation de mouvement extrême.

2.4 Conséquences pour les traders

- Le smile force les traders à utiliser des modèles plus complexes (*stochastiques*) pour ajuster leurs stratégies.
- Il peut révéler des **opportunités d'arbitrage** lorsque certaines options sont mal pricées par rapport à leurs voisines.
- Les smiles reflètent la psychologie du marché face au risque.

2.5 Ce qu'il faut retenir

- La **volatilité implicite** est calculée pour refléter le prix observé d'une option sur le marché en inversant la formule de Black & Scholes.
 - Elle varie selon les strikes en raison des anticipations de **risques asymétriques**, des **queues épaisses** dans les distributions, et des **ajustements dynamiques** des traders.
 - Le **smile de volatilité** est une courbe montrant des volatilités implicites plus élevées pour les options loin de la monnaie (OTM/ITM).
 - La volatilité implicite n'est pas constante, ce qui invalide l'hypothèse simplificatrice de Black & Scholes et nécessite des modèles plus avancés.
 - Les traders doivent intégrer ces variations pour ajuster correctement leurs stratégies de couverture et éviter des erreurs coûteuses.
-

2.6 Distinction entre CALL et PUT

La **volatilité implicite** affichée sur un **skew** ou un **smile** représente à la fois les **CALLS** et les **PUTS**.

- Pour les **strikes faibles** (à gauche du graphique):
 - On parle surtout des **options PUT**.
 - Ces options protègent contre des **baisses importantes**.
 - Elles ont généralement une **volatilité implicite plus élevée**, car les baisses sont perçues comme **plus brutales et plus probables** que les hausses.
- Pour les **strikes élevés** (à droite du graphique):
 - On regarde surtout les **options CALL**.
 - Ces options permettent de **parier sur des hausses**.
 - Leur **volatilité implicite est plus faible**, car les hausses sont souvent vues comme **progressives et moins risquées**.

2.7 Exemple avec le CAC 40

Supposons que le CAC 40 soit actuellement à **5000 points**:

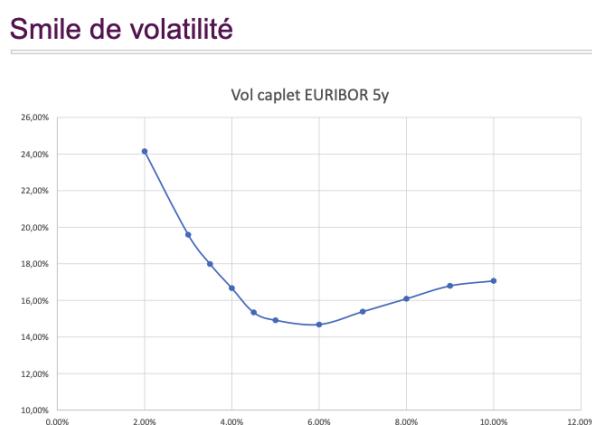
- Un **PUT** avec un strike à **4000 points**:
 - Fortement hors de la monnaie (**OTM**).
 - Volatilité implicite élevée (**30%**) car il couvre un **risque de baisse brutale** (krach).
- Un **CALL** avec un strike à **6000 points**:
 - Fortement hors de la monnaie (**OTM**).
 - Volatilité implicite plus faible (**15%**) car une hausse aussi forte est perçue comme **moins probable et progressive**.

2.8 Pourquoi la volatilité implicite est plus élevée sur les PUTS ?

- **Protection des portefeuilles:** Les investisseurs achètent souvent des **PUTS** pour se **protéger** contre des baisses, ce qui fait monter leur **prix** et donc leur **volatilité implicite**.
- **Nature des baisses:** Les baisses sur les marchés sont souvent **rapides et brutales** (ex: crise de 2008, COVID-19). Cela entraîne une **incertitude accrue** sur les scénarios baissiers, donc une volatilité plus forte.
- **Hausses perçues comme progressives:** À l'inverse, les hausses sont souvent **plus lentes et prévisibles**, réduisant l'incertitude et la **volatilité implicite** sur les CALLS.

2.9 Exemple: Smile de volatilité

Volatilité des caplets EURIBOR 5 ans



Le graphique montre une courbe en forme de **U**, appelée **Smile de volatilité**.

2.9.1 Analyse du graphique

Ce graphique concerne un **caplet EURIBOR 5 ans**, qui est une option sur un **taux d'intérêt**.

Important: L'axe des abscisses ici n'est pas un **strike classique** comme pour des actions, mais représente directement des **niveaux de taux d'intérêt** (en %).

- Exemple: 2%, 3%, 4% représentent des **taux d'exercice** pour le caplet.
- Cela signifie qu'on observe la **volatilité implicite** pour des options protégeant contre un taux d'intérêt dépassant 2%, 3%, etc.

La volatilité est **élevée** pour les strikes éloignés (en dehors de la monnaie, OTM ou ATM) et **faible** pour les strikes proches du prix actuel (à la monnaie, ATM).

2.9.2 Pourquoi cette forme ?

- Les investisseurs craignent des **événements extrêmes** comme des krachs ou des hausses brutales.
- Les options éloignées nécessitent donc une **prime de risque** supplémentaire, augmentant la volatilité implicite.
- Ce phénomène reflète une anticipation asymétrique du marché sur les fluctuations des prix.

2.9.3 Cas pratique: Caplets EURIBOR

Les options sur taux d'intérêt, comme les caplets EURIBOR, montrent ce comportement car:

- Les traders se protègent contre des hausses soudaines des taux.
- Ils achètent des options OTM, augmentant leur prix et leur volatilité implicite.

Option call avec un strike à 2%

- L'option est **très hors de la monnaie (OTM)**.
- Tu dois utiliser une **volatilité implicite élevée (24%)** pour refléter l'**incertitude** d'un retour vers ces niveaux très bas.
- Cette forte volatilité traduit la **crainte d'une baisse extrême des taux** associée à un scénario de crise ou de politique monétaire ultra-accommodante.

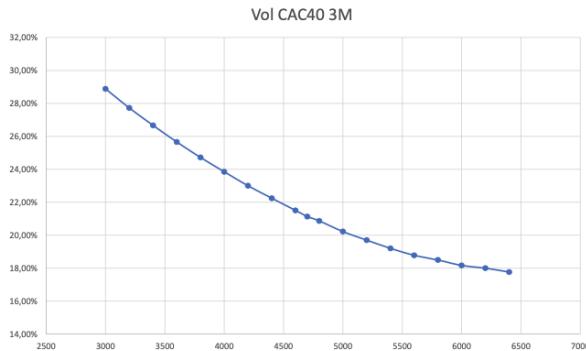
Option call avec un strike à 10%

- L'option est aussi **hors de la monnaie (OTM)**, mais **moins extrême** que dans le cas précédent.
- Tu prends une **volatilité implicite plus faible (17%)** car les **hausses de taux** sont perçues comme plus **progressives et prévisibles**.
- Le risque est jugé **moins incertain** pour des taux élevés, ce qui réduit la volatilité implicite.

2.10 Exemple: Skew de volatilité

Exemple: Volatilité sur le CAC 40 à 3 mois

Skew de volatilité



Le graphique montre une courbe décroissante, appelée **Skew de volatilité**.

2.10.1 Analyse du graphique

- Axe vertical: Volatilité implicite (%).
- Axe horizontal: Prix d'exercice (*strike*) des options.

La volatilité est **plus élevée** pour les strikes faibles et **diminue progressivement** pour les strikes plus élevés.

2.10.2 Pourquoi cette forme ?

- Les investisseurs ont tendance à craindre davantage les **baisses brutales des marchés** (krachs) qu'une montée progressive.
- Ils paient une prime pour les **puts hors de la monnaie (OTM)** qui protègent contre ces baisses.
- En conséquence, la volatilité implicite est **plus forte pour les puts** que pour les calls.
- Ce comportement reflète une **asymétrie de risque** liée à l'aversion au risque des investisseurs.

2.10.3 Cas pratique: Options sur le CAC 40

Dans ce cas:

- Les investisseurs achètent des **puts protecteurs** pour couvrir leurs portefeuilles en cas de baisse rapide.
- Cette demande augmente les prix des puts et donc leur **volatilité implicite**.

2.11 Ce qu'il faut retenir

- Le **Smile de volatilité** présente une courbe en U où la volatilité est plus forte pour les options loin de la monnaie (OTM ou ITM).
 - Le **Skew de volatilité** montre une courbe décroissante où les strikes faibles ont une volatilité plus forte (effet de protection contre les baisses).
 - Ces phénomènes prouvent que la volatilité implicite n'est **pas constante**, contredisant le modèle de **Black & Scholes**.
 - Les investisseurs anticipent des **risques asymétriques** et paient plus pour se protéger contre les scénarios extrêmes.
 - Les modèles avancés (volatilité stochastique) sont souvent nécessaires pour mieux refléter ces effets.
 - Un **skew** représente la **volatilité implicite** des **CALLS** (strikes élevés) et des **PUTS** (strikes faibles).
 - **Strikes faibles (PUTS):** Volatilité plus **élevée** car ils protègent contre des **baisses brutales**.
 - **Strikes élevés (CALLS):** Volatilité plus **faible** car les hausses sont jugées **progressives et moins risquées**.
 - La forte volatilité sur les **PUTS** reflète une **aversion au risque** et une crainte des **krachs**, tandis que la volatilité plus faible sur les **CALLS** traduit une perception de **hausse maîtrisée**.
 - Le skew ne reflète pas forcément un **pessimisme général**, mais plutôt une **prudence face aux risques asymétriques**.
-

3 Surface de volatilité

3.1 Qu'est-ce qu'une surface de volatilité ?

Surface de volatilité (CAC 40)

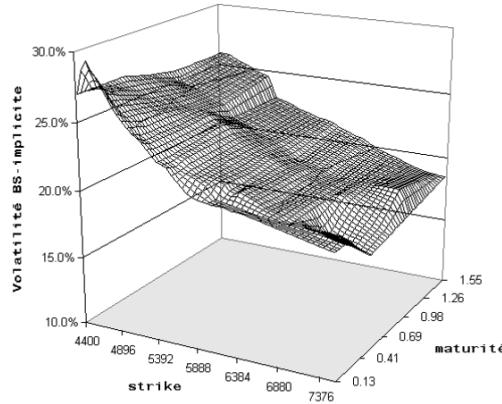


Figure 1: Support de cours - Antonin CHAIX

La **surface de volatilité** est une représentation en **3 dimensions** qui montre comment la **volatilité implicite** dépend de:

- Le **strike (K)**: Le prix d'exercice de l'option.
- La **maturité (T)**: La durée restante avant l'expiration de l'option.

Cette surface permet de visualiser:

- Comment la volatilité varie en fonction du **niveau de prix** (strike).
- Comment elle change selon la **durée** jusqu'à l'échéance (maturité).

3.2 Formule mathématique simple

La surface de volatilité est décrite par:

$$Vol_{implicite} = F(K, T)$$

où:

- K = Strike (prix d'exercice).
- T = Maturité (temps restant avant expiration).
- F = Fonction qui relie ces deux variables à la volatilité.

Interprétation: La volatilité implicite est une **fonction du strike et du temps**, ce qui crée une **surface 3D** avec:

- Axe des **X**: Strike (K).
- Axe des **Y**: Maturité (T).
- Axe des **Z**: Volatilité implicite (σ_{imp}).

3.3 Que montre la surface de volatilité ?

1. Variation selon le strike: Skew et Smile

- Pour une maturité donnée, on observe souvent un **skew** (volatilité décroissante) ou un **smile** (volatilité en U).
- Cela signifie que les options **hors de la monnaie** (OTM) ont souvent des volatilités plus élevées.

2. Variation selon la maturité: Term structure

- La volatilité implicite change aussi en fonction de la **maturité**:
 - **Court terme (maturité faible)**: Volatilité souvent plus élevée en raison de l'**incertitude immédiate**.
 - **Long terme (maturité élevée)**: Volatilité plus **faible** car les mouvements futurs sont perçus comme **plus prévisibles**.

3.4 Exemple pratique: Surface du CAC 40

Sur le graphique:

- **Axe X (strike)**: Montre différents niveaux de prix d'exercice pour les options sur le CAC 40.
- **Axe Y (maturité)**: Représente différentes échéances pour ces options.
- **Axe Z (volatilité implicite)**: Affiche la volatilité calculée pour chaque combinaison de strike et maturité.

Observation:

- La volatilité est plus élevée pour les strikes **faibles (PUTS)** et diminue progressivement vers les strikes **élevés (CALLS)**.
- La volatilité est aussi **plus forte** sur les **maturités courtes**, car l'incertitude immédiate est **plus grande**.
- Elle **diminue** sur les **maturités longues**, car les risques futurs sont considérés comme **plus lissés**.

3.5 Pourquoi la surface de volatilité est-elle importante ?

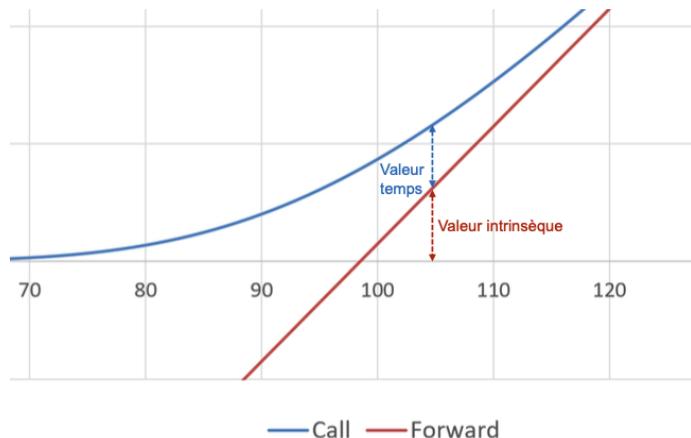
- **Pour évaluer correctement les options**: Les traders doivent utiliser la bonne volatilité implicite pour le strike et la maturité choisis.
- **Pour détecter des anomalies**: Une déformation inhabituelle de la surface peut signaler des **anticipations de crise** ou des **opportunités d'arbitrage**.
- **Pour modéliser des scénarios complexes**: La surface de volatilité permet d'ajuster les modèles pour tenir compte de la **réalité des marchés**, où la volatilité n'est jamais constante.

3.6 Ce qu'il faut retenir

- Une **surface de volatilité** montre comment la **volatilité implicite** varie en fonction du **strike** et de la **maturité**.
 - La volatilité dépend:
 - Du **strike (K)** — Effet **skew** ou **smile** selon la position par rapport au prix actuel.
 - De la **maturité (T)** — Volatilité plus forte à **court terme** et plus faible à **long terme**.
 - Elle sert à corriger les limites du modèle de **Black & Scholes** qui suppose une volatilité **constante**, ce qui n'est pas réaliste.
 - Une **surface déformée** peut refléter des **anticipations de crise**, des **craintes asymétriques** ou des effets liés à des **événements économiques** (annonces de la BCE, etc.).
-

4 Valeur intrinsèque

Valeur intrinsèque et valeur temps



La formule donnée pour la valeur intrinsèque d'un **call** est :

$$VI_{call} = (S_0 - Ke^{-rT})^+ \leq C_0$$

- S_0 : Prix actuel du sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (strike).
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- T : Temps jusqu'à l'échéance (en années).
- e^{-rT} : Facteur d'actualisation pour ramener la valeur future du strike à aujourd'hui.
- $(x)^+$: Prend seulement la **valeur positive** (si résultat négatif, on prend 0).
- C_0 : Prix actuel de l'option call.

4.1 Interprétation

1. **Actualisation du strike** : Ke^{-rT} représente la **valeur actualisée** du prix d'exercice à aujourd'hui, car ce paiement est effectué dans le futur.
2. **Déférence avec le prix du sous-jacent** : $S_0 - Ke^{-rT}$ mesure combien l'option serait dans la monnaie si exercée immédiatement.
3. **Valeur positive uniquement** : $(x)^+$ signifie qu'on ne garde que la **valeur positive** de la différence. Si elle est négative, on met 0.
4. **Comparaison au prix de l'option** : La valeur intrinsèque est toujours **inférieure ou égale** au prix de l'option (C_0), car le prix inclut aussi une **valeur temps**.

4.2 Exemple concret

Soit :

$$S_0 = 110, \quad K = 100, \quad r = 5\%, \quad T = 1$$

1. Calcul du strike actualisé :

$$Ke^{-rT} = 100e^{-0.05(1)} \approx 95.12$$

2. Valeur intrinsèque :

$$VI_{call} = (110 - 95.12)^+ = 14.88$$

3. Comparaison avec le prix de l'option : Si $C_0 = 17$, alors :

$$14.88 \leq 17$$

4.3 Ce qu'il faut retenir

- La **valeur intrinsèque** mesure la **valeur immédiate** d'une option si exercée tout de suite.

- Pour un **call** :

$$VI_{call} = (S_0 - Ke^{-rT})^+$$

- Elle utilise le **strike actualisé** pour tenir compte de la **valeur temporelle de l'argent**.
- On prend uniquement la **valeur positive** ou 0 si l'option est hors de la monnaie.
- La valeur intrinsèque est toujours **inférieure ou égale** au prix de l'option, car celui-ci inclut aussi une **valeur temps**.

5 Formule du portefeuille répliquant

La formule donnée est :

$$(S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

5.1 Contexte : Construction du portefeuille

Ce portefeuille est construit dans une situation où :

- On achète une action aujourd’hui au prix S_0 .
- On emprunte une somme équivalente à Ke^{-rT} , soit la valeur actualisée du prix d’exercice.

L’objectif est de répliquer un call européen à l’échéance T .

5.2 Analyse de la formule

Partie gauche : $(S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}}$

1. $S_T - K$: C’est la valeur intrinsèque potentielle du call à maturité. Elle est :
 - Positive si $S_T > K$.
 - Nulle ou négative sinon.
2. $\mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}}$: C’est un indicateur binaire (1 ou 0) qui vérifie :
 - 1 si le portefeuille est anticipé dans la monnaie aujourd’hui ($S_0 > Ke^{-rT}$).
 - 0 sinon (le portefeuille n’est pas construit).
3. Produit des deux termes : Ce portefeuille ne génère un gain que si :
 - L’option est anticipée dans la monnaie aujourd’hui.
 - L’option reste dans la monnaie à maturité.

Partie droite : $(S_T - K)^+$

Cette partie représente la valeur intrinsèque standard d’un call européen classique :

- Il prend la valeur positive de $S_T - K$ ou 0 si l’option est hors de la monnaie.
- Il représente le call classique sans condition initiale.

5.3 Inégalité et interprétation

L’inégalité :

$$(S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_0 - Ke^{-rT} > 0\}} \leq (S_T - K)^+$$

montre que :

- Le portefeuille répliquant (gauche) est inférieur ou égal à un call classique (droite).

- Le portefeuille fonctionne uniquement si l'option est **anticipée dans la monnaie** au départ, alors que le call classique peut capturer toute la valeur intrinsèque **sans condition**.
- Le call standard inclut aussi une **valeur temps**, ce que le portefeuille construit ne garantit pas.

5.4 Ce qu'il faut retenir

- Ce portefeuille est construit avec l'achat d'une **action** et un **emprunt** égal au **strike actualisé**.
 - La condition $S_0 > Ke^{-rT}$ signifie que l'option doit être **anticipée dans la monnaie** pour construire ce portefeuille.
 - L'inégalité montre que ce portefeuille réplique **partiellement** un call, mais est toujours **inférieur ou égal** au call classique.
 - Le **call classique** capture toute la valeur intrinsèque sans condition initiale et inclut une **valeur temps**, ce que le portefeuille ne peut pas garantir.
 - Cette démonstration illustre que le call classique est plus **flexible** et donc **plus cher** qu'un portefeuille répliquant.
-

6 Valeur temps et formules associées

6.1 Définition de la valeur temps

La **valeur temps** est définie comme la différence entre :

- Le **prix total** de l'option (C_0).
- Sa **valeur intrinsèque** (VI_{call}).

Formule :

$$VT_{call} = C_0 - VI_{call}$$

6.2 Relation entre valeur totale et ses composants

La formule clé reliant le prix total et ses deux composants est :

$$C_0 = VT_{call} + VI_{call}$$

- C_0 : Prix total de l'option.
- VT_{call} : Valeur temps (prix de l'incertitude future).
- VI_{call} : Valeur intrinsèque (valeur immédiate).

6.3 Propriétés importantes de la valeur temps

1. **Maximum à la monnaie (ATM)** : La valeur temps est **maximale** lorsque le prix spot (S_0) est **proche du strike (K)**, car l'incertitude est la plus forte.
2. **Dépendance à la volatilité** : Plus la **volatilité** est élevée, plus la **valeur temps** est grande, car il y a davantage d'opportunités pour que l'option devienne profitable.
3. **Dépendance au temps restant** : Plus il reste de **temps avant l'échéance**, plus la valeur temps est élevée. Elle diminue avec le temps, un phénomène connu sous le nom de **décroissance temporelle (time decay)**.
4. **Cas limite** : À l'échéance, la valeur temps devient **nulle**, car il n'y a plus d'incertitude sur l'évolution du prix.

6.4 Ce qu'il faut retenir

- La **valeur temps** est la différence entre le **prix total** d'une option (C_0) et sa **valeur intrinsèque** (VI_{call}) :

$$VT_{call} = C_0 - VI_{call}$$

- La formule clé reliant les deux valeurs est :

$$C_0 = VT_{call} + VI_{call}$$

- La **valeur intrinsèque** est le minimum que vaut l'option dans un **contexte déterministe** ($\sigma = 0$).
- La **valeur temps** représente le **prix de l'incertitude**.

- Elle est **maximum à la monnaie (ATM)**.
 - Elle augmente avec la **volatilité** et le **temps restant**.
 - Elle diminue à mesure que l'échéance approche (**décroissance temporelle**).
- À l'échéance, la valeur temps devient **nulle**, et l'option ne vaut que sa **valeur intrinsèque**.

7 Annexes

7.1 Pourquoi la volatilité implicite est-elle résolue numériquement et non analytiquement ?

Introduction

La **volatilité implicite** est un paramètre clé utilisé pour évaluer les prix des options. Elle représente l'anticipation du marché sur la volatilité future d'un actif. Cependant, contrairement à d'autres paramètres comme le prix du sous-jacent ou le taux d'intérêt, la volatilité implicite **ne peut pas être observée directement sur le marché**.

On doit donc la **déduire** en utilisant un modèle mathématique, comme celui de **Black & Scholes**. Cela implique d'inverser la formule utilisée pour calculer le prix d'une option afin de retrouver la volatilité implicite correspondant au prix observé.

Toutefois, cette inversion est **complexe** car la formule de Black & Scholes ne peut pas être résolue directement. Au lieu de cela, on utilise des méthodes **numériques** qui trouvent progressivement la solution.

Formule et problème d'inversion

La formule de Black & Scholes pour le prix d'un call est donnée par:

$$C_0^{BS}(S, K, T, r, \sigma) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

avec:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- S : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- K : Prix d'exercice (strike).
- T : Temps restant jusqu'à la maturité (en années).
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- Φ : Fonction de répartition cumulative d'une loi normale standard.
- σ : Volatilité implicite recherchée.

Pourquoi ne peut-on pas inverser la formule ?

Cette formule est **non linéaire** et implique des éléments mathématiques complexes:

- La volatilité (σ) apparaît dans **plusieurs termes** sous des formes difficiles à manipuler: logarithmes, racines carrées et produits.
- La fonction Φ de la loi normale cumulative n'a pas de formule inversée simple. Elle nécessite elle-même des calculs approximatifs.
- Ces caractéristiques rendent l'équation **impossible à résoudre directement** par des méthodes algébriques classiques.

Méthode numérique utilisée pour la résoudre

Pour trouver la volatilité implicite (σ_{imp}), on doit:

1. Faire une **hypothèse initiale** pour σ (par exemple 20%).
2. Calculer le prix théorique de l'option avec cette valeur dans la formule de Black & Scholes.
3. Comparer ce prix théorique au prix observé sur le marché (C_0^{MKT}).
4. Ajuster la volatilité et recommencer jusqu'à ce que les deux prix correspondent.

Ce processus itératif utilise des algorithmes comme **Newton-Raphson**, qui approchent la solution en corrigeant progressivement l'estimation.

Formellement, on résout:

$$f(\sigma) = C_0^{BS}(\sigma) - C_0^{MKT} = 0$$

et met à jour la volatilité avec:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}$$

où $f'(\sigma)$ est la dérivée par rapport à σ .

Exemple simplifié

Supposons un sous-jacent à 100 € et une option d'exercice 110 €, avec un prix observé de 5 €. On teste plusieurs valeurs de volatilité:

- $\sigma = 15\%$ donne un prix théorique de 4,50 € (**trop bas**).
- $\sigma = 20\%$ donne un prix théorique de 5,10 € (**trop haut**).

On ajuste la volatilité à 18,5% pour atteindre un prix de 5 €.

Pourquoi cette méthode est-elle importante ?

Cette approche permet d'adapter le modèle de Black & Scholes à la réalité des prix observés sur le marché, même si ses hypothèses (volatilité constante, distribution normale) ne sont pas toujours vérifiées.

Ce qu'il faut retenir

- La **volatilité implicite** mesure l'anticipation des fluctuations futures du marché.
- Elle est calculée en ajustant la volatilité dans la formule de Black & Scholes jusqu'à ce que le prix théorique égalise le prix observé.
- La formule ne peut pas être inversée analytiquement car elle contient des termes non linéaires (logarithmes, racines, et la fonction normale cumulative).
- On utilise des méthodes **numériques itératives**, comme celle de **Newton-Raphson**, pour approcher la solution.
- Cette méthode est essentielle pour adapter les modèles théoriques aux **prix réels de marché** et prendre en compte des anticipations complexes sur la volatilité future.