DIFIQ
Master en Finance Quantitative
Rappels du niveau 1
Variations des grecques & A.O.A

Jean-François Berger-Lefébure

26 Novembre 2024

Contents

1 Variations des grecques

Options vanilles : sensis et impact des facteurs

FACTEUR	CALL	PUT	SENSIS « grecques »
Cours S_0 ↗	↗ $\Delta > 0$	↘ $\Delta < 0$	Delta (Δ)
Volatilité σ ↗	↗ $V > 0$	↗ $V > 0$	Véga (V)
Tps jusqu'à mat. $T - t$ ↘	↘ $\theta < 0$	↘ $\theta < 0$	Théta (θ)
Taux d'intérêt r ↗	↗ $\rho > 0$	↘ $\rho < 0$	Rho (ρ)
Dividendes ↗	↘	↗	-

1.1 Impact du Delta sur les options

1.1.1 Pourquoi le Delta impacte-t-il les options ?

Le Delta mesure la sensibilité du prix d'une option par rapport à une variation du prix de l'actif sous-jacent. Il représente le taux de variation du prix de l'option par rapport à une petite variation du prix de l'actif sous-jacent.

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}$$

1.1.2 Impact sur les calls

Pour un **call**, qui donne le droit d'acheter l'actif sous-jacent, une augmentation du cours de l'actif sous-jacent entraîne une augmentation de la valeur de l'option.

- **Conséquence** : Le Delta d'un call est positif.
- **Sensibilité** : Positive ($\Delta > 0$).

Exemple : Si le prix de l'action augmente de 1 €, le prix du call augmente d'une fraction de cette variation, qui est donnée par le Delta. Si le Delta est de 0.5, une augmentation de 1 € du prix de l'action entraînera une augmentation de 0.5 € du prix du call.

1.1.3 Impact sur les puts

Pour un **put**, qui donne le droit de vendre l'actif sous-jacent, une augmentation du cours de l'actif sous-jacent entraîne une diminution de la valeur de l'option.

- **Conséquence** : Le Delta d'un put est négatif.
- **Sensibilité** : Négative ($\Delta < 0$).

Exemple : Si le prix de l'action augmente de 1 €, le prix du put diminue d'une fraction de cette variation, qui est donnée par le Delta négatif. Si le Delta est de -0.5, une augmentation de 1 € du prix de l'action entraînera une diminution de 0.5 € du prix du put.

1.1.4 Pour aller plus loin

Le Delta peut aussi être vu comme la probabilité qu'une option finisse dans la monnaie, particulièrement dans le cadre des options européennes. En effet, un Delta proche de 1 signifie que l'option a une forte probabilité de finir dans la monnaie, alors qu'un Delta proche de 0 signifie une faible probabilité.
Formule dans Black & Scholes: $\Delta_{\text{Call}} = N(d_1)$ et $\Delta_{\text{Put}} = N(d_1) - 1$

—

1.2 Impact du Véga sur les options

1.2.1 Pourquoi le Véga impacte-t-il les options ?

Le Véga mesure la sensibilité du prix d'une option (V) à une variation de la volatilité implicite (σ) de l'actif sous-jacent. Mathématiquement, il est défini comme la dérivée partielle du prix de l'option par rapport à la volatilité :

$$Véga = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Cela signifie que le Véga indique de combien le prix de l'option change lorsque la volatilité implicite augmente de 1%.

1.2.2 Impact sur les options

Pour les calls et les puts, le Véga est toujours **positif**, car une augmentation de la volatilité accroît la probabilité que l'option finisse dans la monnaie, augmentant ainsi sa valeur.

- **Conséquence** : Une volatilité plus élevée rend les options plus chères, car elles deviennent plus "risky" mais aussi potentiellement plus lucratives.
- **Sensibilité** : Positive ($Véga > 0$).

Exemple : Si une option a un Véga de 0.25 et que la volatilité implicite augmente de 1%, le prix de l'option augmentera de 0.25 unités monétaires.

1.2.3 Résumé

- Le Véga est toujours positif ($Véga > 0$) pour les calls et les puts.

1.2.4 Pour aller plus loin

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le Véga pour une option européenne est donné par la formule suivante :

$$V = S_0\sqrt{T} \cdot N'(d_1)$$

où :

- S_0 : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- T : Temps restant avant l'échéance (en années).
- $N'(d_1)$: Densité de la loi normale standard calculée en d_1.
- $d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, avec K le strike, r le taux sans risque, et σ la volatilité.

Le Véga est particulièrement important pour les options proches de la monnaie (ATM), car elles sont les plus sensibles aux variations de la volatilité. À mesure que l'option approche de l'échéance, le Véga diminue, car il y a moins de temps pour que la volatilité affecte son prix.
—

1.3 Impact du Thêta sur les options

1.3.1 Pourquoi le Thêta impacte-t-il les options ?

Le Thêta mesure la sensibilité du prix d'une option (V) à l'écoulement du temps (T), aussi appelé "valeur temps". Mathématiquement, il est défini comme la dérivée partielle du prix de l'option par rapport au temps restant avant l'échéance :

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$$

Cela signifie que le Thêta indique de combien le prix de l'option change lorsque le temps restant avant l'échéance diminue d'un jour ou d'une unité.

1.3.2 Impact sur les options

Pour les calls et les puts, le Thêta est généralement **négatif**, car à mesure que l'échéance approche, la "valeur temps" de l'option diminue.

- **Conséquence** : Les options perdent de la valeur avec le temps si les autres paramètres restent constants.
- **Sensibilité** : Négative ($\Theta < 0$).

Exemple : Si une option a un Thêta de -0.05, cela signifie qu'elle perd 0.05 unités monétaires par jour à mesure que l'échéance approche.

1.3.3 Résumé

- Le Thêta est généralement négatif ($\Theta < 0$) pour les calls et les puts.
- Les options proches de l'échéance ont un Thêta plus important (en valeur absolue), car la perte de valeur temps est plus rapide.

1.3.4 Pour aller plus loin

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le Thêta pour une option européenne est donné par les formules suivantes :

$$\Theta_{\text{Call}} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta_{\text{Put}} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

où :

- S_0 : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- T : Temps restant avant l'échéance (en années).
- σ : Volatilité implicite.
- r : Taux sans risque.
- K : Prix d'exercice (strike).
- $N(d_1)$, $N(d_2)$: Fonction de répartition cumulative de la loi normale standard.
- $N'(d_1)$: Densité de la loi normale standard calculée en d_1.

Le Thêta est particulièrement important pour les options proches de l'échéance, car leur "valeur temps" diminue rapidement. Les traders doivent donc surveiller attentivement le Thêta pour ajuster leurs stratégies de couverture.

—

1.4 Impact du Rhô sur les options

1.4.1 Pourquoi le Rhô impacte-t-il les options ?

Le Rhô mesure la sensibilité du prix d'une option (V) à une variation du taux d'intérêt sans risque (r). Mathématiquement, il est défini comme la dérivée partielle du prix de l'option par rapport au taux d'intérêt :

$$\hat{o} = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Cela signifie que le Rhô indique de combien le prix de l'option change lorsque le taux d'intérêt varie de 1%.

1.4.2 Impact sur les options

Pour les calls et les puts, l'impact du Rhô dépend de la nature de l'option :

- Pour un **call**, le Rhô est **positif**, car une augmentation des taux d'intérêt augmente la valeur actualisée du prix d'exercice, ce qui rend le call plus intéressant.
- Pour un **put**, le Rhô est **négatif**, car une augmentation des taux d'intérêt réduit la valeur actualisée du prix d'exercice, ce qui diminue l'attractivité du put.

Exemple : Si un call a un Rhô de 0.15, cela signifie qu'une augmentation de 1% du taux d'intérêt augmentera le prix du call de 0.15 unités monétaires.

1.4.3 Résumé

- Le Rhô est **positif** ($\hat{o} > 0$) pour les calls.
- Le Rhô est **négatif** ($\hat{o} < 0$) pour les puts.

1.4.4 Pour aller plus loin

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le Rhô pour une option européenne est donné par les formules suivantes :

$$\hat{o}_{\text{Call}} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$\hat{o}_{\text{Put}} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

où :

- K : Prix d'exercice (strike).
- T : Temps restant avant l'échéance (en années).
- r : Taux sans risque.
- $N(d_2)$, $N(-d_2)$: Fonction de répartition cumulative de la loi normale standard.

Le Rhô est généralement plus significatif pour les options de long terme, car les variations des taux d'intérêt ont un effet plus important sur la valeur actualisée du prix d'exercice. Les traders doivent surveiller le Rhô, notamment dans des environnements de taux d'intérêt variables.
—

1.5 Impact du Gamma sur les options

1.5.1 Pourquoi le Gamma impacte-t-il les options ?

Le Gamma mesure la sensibilité du Delta (Δ) à une variation du prix de l'actif sous-jacent (S_0). Mathématiquement, il est défini comme la dérivée partielle du Delta par rapport au prix du sous-jacent, ou équivalemment comme la seconde dérivée du prix de l'option (V) par rapport au sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}$$

Cela signifie que le Gamma indique de combien le Delta change lorsque le prix du sous-jacent varie légèrement.

1.5.2 Impact sur les options

Pour les calls et les puts, le Gamma est toujours positif. Cela s'explique par le fait que, quelle que soit la direction du mouvement du sous-jacent, le Delta augmente pour un call et diminue en valeur absolue pour un put.

- **Pour un call** : Le Gamma reflète à quel point le Delta du call s'ajuste pour suivre les variations du sous-jacent.
- **Pour un put** : Le Gamma indique à quelle vitesse le Delta d'un put varie en réponse aux changements du sous-jacent.

Exemple : Une option a un Gamma de 0.02 et un Delta de 0.5. Si le prix du sous-jacent augmente de 2 €, la variation du Delta sera $\Gamma \times \Delta S_0 = 0.02 \times 2 = 0.04$. Le nouveau Delta sera alors $0.5 + 0.04 = 0.54$.

1.5.3 Résumé

- Le Gamma est toujours **positif** pour les calls et les puts.
- Il est maximum pour les options proches de la monnaie (ATM) et diminue lorsque l'option devient très dans ou hors de la monnaie (ITM ou OTM).
- Le Gamma est plus élevé pour les options proches de l'échéance, car le Delta varie plus rapidement à mesure que le sous-jacent fluctue.

1.5.4 Pour aller plus loin

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le Gamma pour une option européenne est donné par la formule suivante :

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

où :

- $N'(d_1)$: Densité de la loi normale standard calculée en d_1.
- S_0 : Prix actuel de l'actif sous-jacent.
- σ : Volatilité implicite.
- T : Temps restant avant l'échéance (en années).
- $d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Le Gamma est particulièrement important pour les stratégies de couverture (*delta-hedging*), car il mesure l'instabilité du Delta. Plus le Gamma est élevé, plus il faut fréquemment ajuster la position pour maintenir une couverture efficace.

—

1.6 Synthése du tableau

- **Delta (Δ)** : Pour un acheteur, le Δ est **positif** pour un call ($\Delta > 0$) car une hausse du sous-jacent augmente la valeur du call, et **négatif** pour un put ($\Delta < 0$) car une hausse diminue la valeur du put.
- **Véga (V)** : Le **V** est **toujours positif** ($V > 0$), car une augmentation de la volatilité accroît la probabilité que l'option devienne ou reste profitable, augmentant ainsi sa valeur.
- **Thêta (θ)** : Le θ est généralement **négatif** ($\theta < 0$), car la valeur temps de l'option diminue avec l'approche de l'échéance, réduisant sa valeur pour un acheteur.
  Cas spécifique : Le θ peut être **positif** pour des options très **ITM ou OTM** où la valeur temps est négligeable, ou en présence de **dividendes proches** augmentant la valeur intrinsèque.
- **Rho (ρ)** : Pour un acheteur, le ρ est **positif** pour un call ($\rho > 0$) car une hausse des taux d'intérêt augmente la valeur d'un achat futur, rendant le call plus attractif. À l'inverse, le ρ est **négatif** pour un put ($\rho < 0$) car une hausse des taux réduit l'intérêt d'avoir du cash immédiatement, diminuant ainsi la valeur d'un put.

—

1.7 Questions

1. Delta – Call européen

Un trader détient un call européen avec un Delta de 0.6. Si le prix du sous-jacent augmente de 10 €, de combien le prix du call change-t-il ?
Réponse : Le Delta de 0.6 signifie que pour chaque euro d'augmentation du prix du sous-jacent, le prix du call augmente de 0.6 €. Variation du prix du call $= 0.6 \times 10 = 6$ €.

2. Delta – Put européen

Un put européen a un Delta de -0.4. Si le prix du sous-jacent diminue de 5 €, comment le prix du put évolue-t-il ?
Réponse : Le Delta de -0.4 signifie que le prix du put augmente de 0.4 € pour chaque euro de diminution du prix du sous-jacent. Variation du prix du put $= -0.4 \times (-5) = 2$ €.

3. Véga – Option ATM

Une option proche de la monnaie (ATM) a un Véga de 0.25. Si la volatilité implicite augmente de 2%, quel est l'impact sur le prix de l'option ?
Réponse : Variation du prix de l'option $= 0.25 \times 2 = 0.5$ €.

4. Véga – Option OTM

Un trader observe que le Véga d'une option est très faible. Que peut-on en conclure sur la position de l'option par rapport au prix d'exercice ?
Réponse : Un Véga faible indique que l'option est probablement loin de la monnaie (OTM ou ITM), car les options proches de la monnaie (ATM) ont le Véga le plus élevé.

5. Thêta – Option à court terme

Une option avec une maturité de 5 jours a un Thêta de -0.1. Que signifie cela pour le prix de l'option ?
Réponse : Le Thêta de -0.1 signifie que l'option perd 0.1 € de valeur par jour à cause du passage du temps.

6. Thêta – Options long terme

Pourquoi une option ayant une échéance dans un an a-t-elle un Thêta plus faible qu'une option avec une échéance dans une semaine ?
Réponse : Les options à court terme perdent plus rapidement leur valeur temps car elles approchent de l'échéance, tandis que les options long terme ont une dégradation plus progressive de leur valeur temps.

7. Rhô – Call européen

Un call européen a un Rhô de 0.2. Si le taux d'intérêt augmente de 0.5%, de combien le prix du call change-t-il ?
Réponse : Variation du prix du call $= 0.2 \times 0.5 = 0.1$ €.

8. Rhô – Put européen

Un put européen a un Rhô de -0.15. Si le taux d'intérêt augmente de 1%, quel est l'impact sur le prix du put ?
Réponse : Variation du prix du put $= -0.15 \times 1 = -0.15$ € (le prix du put diminue).

9. Gamma – Call européen

Une option a un Gamma de 0.02 et un Delta de 0.5. Si le prix du sous-jacent augmente de 2 €, quelle est la nouvelle valeur du Delta ?
Réponse : Variation du Delta $= 0.02 \times 2 = 0.04$. Nouveau Delta $= 0.5 + 0.04 = 0.54$.

10. Gamma – Impact sur Delta

Pourquoi un Gamma élevé rend-il un Delta moins stable ?
Réponse : Un Gamma élevé signifie que le Delta change rapidement pour de petites variations du sous-jacent, rendant plus difficile la gestion de la couverture (delta-hedging).

11. Thêta – Call et Put

Un trader détient un call et un put européens ayant la même maturité et le même strike. Comment comparer leurs Thêta ?
Réponse : Les deux options ont des Thêta similaires en valeur absolue, mais leur signe est négatif (perte de valeur temps).

12. Véga – Options longues vs courtes

Une option avec une échéance de 6 mois et une autre avec une échéance de 2 semaines ont la même position ATM. Laquelle a le plus grand Véga ?
Réponse : L'option avec une échéance de 6 mois a un Véga plus élevé car elle est plus sensible aux variations de la volatilité implicite.

13. Delta – Call ITM

Un call européen a un Delta de 0.9. Qu'indique cette valeur sur la probabilité que l'option finisse dans la monnaie ?
Réponse : Un Delta de 0.9 indique une probabilité élevée (90%) que le call finisse dans la monnaie.

14. Gamma – OTM vs ATM

Un trader observe que l'option ATM a un Gamma plus élevé qu'une option OTM. Pourquoi ?
Réponse : Le Gamma est maximum pour les options proches de la monnaie (ATM) car c'est à cet endroit que le Delta varie le plus rapidement.

15. Rhô – Augmentation des taux

Un trader vend un call lorsque les taux d'intérêt sont proches de zéro. Quel est le risque si les taux augmentent soudainement ?
Réponse : Une augmentation des taux d'intérêt augmentera la valeur du call (Rhô positif), ce qui est défavorable à un vendeur d'options.

2 Absence d'Opportunités d'Arbitrages (AOA)

2.1 Hypothèse d'AOA et Arbitrage

Définition de l'AOA : L'hypothèse d'**Absence d'Opportunités d'Arbitrages (AOA)** stipule qu'il est **impossible de réaliser un profit sans risque** sur les marchés.

- Un **arbitrage** est un portefeuille ayant :
  - Une valeur initiale nulle : $X_0 = 0$
  - Une valeur future positive : $X_T \geq 0$
  - Une probabilité non nulle d'une valeur strictement positive : $P(X_T > 0) > 0$
- L'hypothèse d'AOA exclut de tels portefeuilles sur un marché parfait.

—

2.2 Propriété clé de l'AOA : Égalité des valeurs actuelles

Si deux portefeuilles ont des **valeurs finales identiques** à l'échéance ($X_T = Y_T$), alors ils doivent avoir la **même valeur aujourd'hui** ($X_0 = Y_0$).

Démonstration par l'absurde :

- Supposons $X_T = Y_T$ mais $X_0 > Y_0$.
- Il suffirait alors :
  - D'**acheter** Y et de **vendre** X.
  - D'investir la différence pour obtenir un profit sans risque.
- Cela créerait une **opportunité d'arbitrage**, ce qui contredit l'hypothèse d'AOA.

—

2.3 Application : Pricing d'un Call

- Pour évaluer un **call**, on construit un **portefeuille de réplication** vérifiant :

$$X_T = (S_T - K)^+$$

- Ce portefeuille, appelé **portefeuille de couverture**, permet de calculer directement le prix du call :

$$X_0 \quad \text{(valeur aujourd'hui).}$$

—

2.4 Limites pratiques : Problèmes de liquidité

L'hypothèse repose sur la possibilité d'**acheter et vendre librement** à tout moment. Cependant, en pratique, des **problèmes de liquidité** peuvent survenir :

- **Manque de contreparties :** Difficulté à trouver un acheteur ou vendeur.
- **Délais de transaction :** Décalage temporel entre l'ordre et son exécution.

Cela peut limiter l'exploitation des opportunités d'arbitrage sur des marchés réels.

2.5 Résumé

- L'AOA garantit qu'il est impossible de réaliser un profit sans risque sur un marché parfait.
- Deux portefeuilles ayant les **mêmes valeurs finales** doivent avoir les **mêmes valeurs actuelles**.
- En pratique, cette hypothèse repose sur une **liquidité parfaite**, qui peut être compromise par des problèmes réels (liquidité et délais).

—