

Université Lille 1 – UFR de Mathématiques  
Licence de Mathématiques (L3, S5, année 2006-2007)

M305 (Variables Complexes)

Examen du 7 mars 2007

durée : 3 heures; ni documents ni calculatrices

Toute question demande en réponse non seulement un résultat mais surtout une démonstration. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

(3 pts) 1. Déterminer les rayons de convergence

(a) de  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n + 9^n} z^{2n}$ ,

(b) et de  $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^3} z^{n^2}$ .

(4 pts) 2. Soit  $f(z) = \frac{3z^2 - 1}{z(z^2 - 1)}$ .

(a) Décomposer la fraction rationnelle  $f$  en éléments simples,

(b) puis déterminer ses séries de Laurent :

(a) pour  $0 < |z| < 1$ ,

(b) et pour  $|z| > 1$ .

(c) Enfin, déterminer  $\int_{|z|=2} f(z) dz$ .

(4 pts) 3. Soit  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4z + 5)(z - i)}$ .

(a) Déterminer les singularités et les résidus dans  $\mathbb{C}$  de  $f$ ,

(b) puis trouver en la justifiant la valeur de  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ,

Tournez la page

(c) enfin, en déduire les valeurs de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)} dx \text{ et de } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)} dx$$

Ces valeurs doivent être déduites du résultat donné à la question précédente.

(2 pts) 4. Déterminer  $\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + 6ix - 9} dx$ .

(2 pts) 5. Déterminer  $\mathcal{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$ .

(2 pts) 6. Soit  $f(z) = \frac{1}{5}z^{50} + z^{30} + \frac{1}{5}$ .

1. Quel est l'énoncé du théorème de Rouché?

2. Combien la fonction  $f$  a-t-elle de zéros dans le disque unité? Montrer qu'ils sont tous simples.

(3 pts) 7. Quel est l'énoncé du principe du maximum? Soit  $\mathcal{Q} = \{z = x + iy \mid x > 0, y > 0\}$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\overline{\mathcal{Q}}$ . Est-il exact que si  $|f(x)| \leq 1$  pour tout  $x \geq 0$  et si  $|f(iy)| \leq 1$  pour tout  $y \geq 0$  alors  $|f(z)| \leq 1$  pour  $z \in \mathcal{Q}$ ? Si oui, le prouver; si non, le prouver.

```
\usepackage[default]{frcursive}
\usepackage[noplusnominus,noequal,eulergreek]{mathastext}
\linespread{1}
```