```
\usepackage[default]{frcursive}
\usepackage[noplusnominus,noequal,eulergreek]{mathastext}
\linespread{1}
```

Deuxième formule de la moyenne

Jean-François Burnol, 7 octobre 2009

Soit $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles, f étant supposée intégrable sur $[a, b]$ et g **positive décroissante**. Alors :

$$\exists c \in [a, b] \qquad \int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)\int_a^c f(t)\,dt\ .$$

Pour f à valeurs complexes l'inégalité suivante est valable :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le g(a) \sup_{c\in[a,b]} \left|\int_a^c f(t)\,dt\right|\ .$$

Pour g positive croissante on aura $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(b)\int_c^b f(t)\,dt$ et/ou l'inégalité analogue.

On aura compris que l'intérêt majeur de la deuxième formule de la moyenne sous la forme d'une inégalité est que le module dans la majoration est **à l'extérieur** de l'intégrale !

La **preuve** est, comme à l'habitude, un choix parmi de nombreuses possibilités. Pour celle que je présente en premier, je voulais être compris par quelqu'un ne maîtrisant que l'intégrale de Riemann, et donc, pour une preuve réellement complète, il me fallait éviter l'emploi d'un théorème admis comme l'est celui de la convergence dominée. Mais le raisonnement se devait d'être valable aussi pour une fonction intégrable au sens de Lebesgue, et donc je ne pouvais pas faire reposer la preuve sur l'emploi de sommes de Riemann. **Lorsqu'elle est justifiable, une simple intégration par parties mène au résultat.** Cela sera expliqué par la suite.

Remarque : si l'on travaille avec l'intégrale au sens de Riemann, on sait que toute fonction monotone sur le segment $[a,b]$ est intégrable, et que le produit de deux fonctions Riemann-intégrables est intégrable. Si l'on travaille avec l'intégrale de Lebesgue, on sait que toute fonction monotone est mesurable, que le produit de deux fonctions mesurables est mesurable, donc le produit fg est mesurable et de plus, comme g est bornée, fg est intégrable puisque f l'est.

(Micro)-Remarque 2 : g est juste supposée décroissante, pas continue. Donc il vaudrait mieux écrire $g(a^+)$ que $g(a)$, cela donnerait une meilleure majoration. Mais ça marche avec les deux.

Remarque 3 : si l'on remplace $g(t)$ par $g(t)-g(b^-)$ on obtient une évaluation plus précise, c'est la forme traditionnelle de la seconde formule de la moyenne $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a^+)\int_a^c f(t)\,dt + g(b^-)\int_c^b f(t)\,dt$ (il suffit alors pour g d'être monotone, et pas nécessairement positive).

Remarque **assez subtile** 4 : sauf si g est constante sur $]a,b[$ la deuxième formule de la moyenne sous la forme plus haut vaut avec un c **distinct** de a et de b. Et sous la forme

$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a^+)\int_a^c f(t)\,dt + g(b^-)\int_c^b f(t)\,dt$ elle vaut avec un $c \in]a,b[$ sans autre condition sur g que d'être monotone (vous pourrez chercher à justifier cette remarque, cela est assez rusé).

Je vais avoir besoin du fait que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $K(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$ sont des fonctions **continues** de x. C'est évident lorsque f est bornée (donc en particulier si f est intégrable au sens de Riemann) car de $|f| \leq C$ résulte $|F(x) - F(y)| \leq C|x-y|$ (de même pour K) donc F et K sont alors Lipschitziennes. Dans le cas d'une fonction Lebesgue-intégrable non bornée, c'est un théorème classique que l'on peut prouver en utilisant le théorème de la convergence dominée (exercice). On va même utiliser que K est **uniformément continue**, ce qui est assuré par le fait que $[a,b]$ est compact, et est trivial par la propriété Lipschitzienne dans le cas où f est bornée.

Soit $N \geq 1$ et soit $t_j = a + j\frac{b-a}{N}$, $0 \leq j \leq N$. Définissons :

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)g(t_j)\,dt$$

Comme g est décroissante :

$$\left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)g(t_j)\,dt - \int_a^b f(t)g(t)\,dt \right| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t)|(g(t_j) - g(t))\,dt$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} (g(t_j) - g(t_{j+1})) \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t)|\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} (g(t_j) - g(t_{j+1}))(K(t_{j+1}) - K(t_j))$$

Soit $\omega(N) = \sup_{a\le t\le b-\frac{b-a}{N}}(K(t+\frac{b-a}{N}) - K(t))$. D'après ce qui précède :

$$\left| I_N - \int_a^b f(t)g(t)\,dt \right| \le \sum_{j=0}^{N-1}(g(t_j) - g(t_{j+1}))\omega(N) = (g(a) - g(b))\omega(N)$$

On sait que K est continue, donc uniformément continue sur $[a,b]$, donc $\omega(N) \to 0$. Ainsi

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

Par ailleurs on a également (quelque part $F(a) = 0$ est utilisé !) :

$$(1)\quad \begin{aligned} I_N = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)g(t_j)\,dt &= \sum_{j=0}^{N-1} g(t_j)(F(t_{j+1}) - F(t_j)) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1}(g(t_j) - g(t_{j+1}))F(t_{j+1}) + g(b)F(b) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |I_N| \le \left(\sum_{j=0}^{N-1}(g(t_j) - g(t_{j+1})) + g(b)\right)\sup_{a\le x\le b}|F(x)| = g(a)\sup_{a\le x\le b}|F(x)|$$

D'où la deuxième formule de la moyenne dans le cas complexe, par passage à la limite.

Dans le cas réel, et en notant $m = \inf_{[a,b]} F(x)$ et $M = \sup_{[a,b]} F(x)$, on obtient de (1) (puisque g est décroissante et positive) :

$$g(a)\inf_{[a,b]} F(x) \le I_N \le g(a)\sup_{[a,b]} F(x)\,,$$

d'où après passage à la limite

$$g(a)\inf_{[a,b]} F(x) \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le g(a)\sup_{[a,b]} F(x)\,,$$

et par conséquent (le cas $g(a) = 0$ traité à part) par le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue F :

$$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,dt\,.$$

Répétons que si g n'est pas constante sur $]a,b[$ alors il y a un $c \in]a,b[$ qui convient.

Autre perspective

Supposons que f soit continue et g de classe C^1. Toujours avec $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on a par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(b)F(b) + \int_a^b F(t)(-g'(t))\,dt$$

Par le premier théorème de la moyenne pour une intégrale avec poids positif, il vient :

$$\exists c \in [a,b] \quad \int_a^b F(t)(-g'(t))\,dt = F(c)\int_a^b (-g'(t))\,dt = F(c)(g(a) - g(b))$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(b)F(b) + (g(a) - g(b))F(c) = g(a)\int_a^c f(t)\,dt + g(b)\int_c^b f(t)\,dt$$

C'est-à-dire la seconde formule de la moyenne sous sa forme plus précise (je laisse en exercice le fait qu'il y a un $c \in]a,b[$ qui convienne). Comme $F([a,b])$ est un segment, tout barycentre à coefficients positifs de points de ce segment y est encore donc $g(b)F(b) + (g(a) - g(b))F(c)$ est de la forme $g(a)F(c')$, ce qui donne comme conséquence la seconde formule de la moyenne sous sa forme fruste, celle que j'ai choisie de mettre en avant au début de ce texte. Dans la pratique, on veut surtout une majoration de $\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right|$, et la forme fruste comme la forme précise donnent toutes deux :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq g(a) \sup_{c\in[a,b]} \left|\int_a^c f(t)\,dt\right| .$$

On notera que la majoration par $g(a)|\int_a^c f(t)\,dt| + g(b)|\int_c^b f(t)\,dt|$ est souvent moins intéressante.

Encore une autre perspective

Ici je m'adresse à un auditoire maîtrisant mesure et intégration. Tout d'abord on peut remplacer $g(x)$ en tout x par $g(x^+)$ ce qui ne modifie g que sur un ensemble dénombrable, donc de mesure nulle, et rend g continue à droite. La formule sera donc prouvée avec $g(a^+)$ et elle a comme corollaire moins précis celle avec $g(a)$. Dorénavant je suppose g continue à droite, donc il existe une mesure (de Lebesgue-Stieltjes) positive sur le segment $[a,b]$ telle que $g(x) = g(b) + \mu(]x,b])$ (par exemple et en particulier $g(b^-) = g(b) + \mu(\{b\})$). On applique le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,dt &= g(b)F(b) + \int_{a<t<b} f(t)\Big(\int_{t<u\leq b} d\mu(u)\Big)dt \\ &= g(b)F(b) + \int_{a<t<u\leq b} f(t)d\mu(u)dt = g(b)F(b) + \int_{a<u\leq b} F(u)d\mu(u)\end{aligned}$$

Puis on fait appel au premier théorème de la moyenne pour l'intégration de fonctions continues contre une mesure positive :

$$\exists c \in [a,b] \qquad \int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(b)F(b) + F(c)\int_{a<u\leq b} d\mu(u) = g(b)F(b) + (g(a)-g(b))F(c)$$

Une application : transformation de Laplace

On considère une fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$, intégrable sur tout segment et telle que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{\mathcal{C}\to+\infty} \int_0^{\mathcal{C}} f(t)\,dt$ existe. Alors les intégrales impropres :

$$\mathcal{I}(a) = \int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt$$

existent et définissent une fonction continue de $a \geq 0$.

Preuve : par la seconde formule de la moyenne :

$$0 \leq \mathcal{X} \leq \mathcal{Y} \implies \left|\int_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq \sup_{\mathcal{X}\leq\mathcal{Z}\leq\mathcal{Y}} \left|\int_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}} f(t)\,dt\right|$$

Donc le critère de Cauchy pour l'existence de $\mathcal{I}(a)$ est vérifié. De plus en faisant tendre $\mathcal{Y}$ vers $+\infty$ il vient :

$$0 \leq \mathcal{X} \implies \left|\int_{\mathcal{X}}^{\infty} f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq \sup_{\mathcal{Z}\geq\mathcal{X}} \left|\int_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}} f(t)\,dt\right| \leq 2 \sup_{\mathcal{Z}\geq\mathcal{X}} \left|\int_{\mathcal{Z}}^{\infty} f(t)\,dt\right|$$

Par conséquent les fonctions de a, $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(a) = \int_0^{\mathcal{X}} f(t)e^{-at}\,dt$, convergent uniformément sur $a \in [0,+\infty[$ et pour $\mathcal{X} \to +\infty$ vers la fonction $\mathcal{I}(a)$. Il suffit donc de s'assurer de la continuité de chaque $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(a)$. Mais par le théorème des accroissement finis $|e^{-at} - e^{-bt}| \leq t|b-a|e^{-ct} \leq \mathcal{X}|b-a|$ pour $0 \leq t \leq \mathcal{X}$. Les fonctions $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ sont donc Lipschitziennes et par conséquent continues en leur variable a.

Si l'on suppose seulement que $\int_0^{\mathcal{C}} f(t)\,dt$ est borné, on peut affirmer en revisitant la preuve que $\mathcal{I}(a) = \int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt$ existe pour $a > 0$ et est une fonction continue.

Il se peut qu'alors la limite $I(0^+)$ existe. Notez que pour f positive le théorème de la convergence monotone garantit $\int_0^\infty f(t)\,dt = I(0^+)$ (même si tous les $I(a)$ valent $+\infty$). Supposons seulement que la fonction f soit telle que les transformées de Laplace $I(a) = \lim_{X\to\infty} \int_0^X f(t)e^{-at}\,dt$ existent et que $I = \lim_{a\to 0^+} I(a)$ existe. Le **remarquable théorème** suivant (la preuve en sera donnée ultérieurement) vaut : l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge (et est donc nécessairement égale à I) **si et seulement si** on a $\int_0^X tf(t)\,dt = o(X)$ pour $X \to \infty$ (vrai si $f(t) = o(\frac{1}{t})\ldots$). Ceci s'appelle un théorème Taubérien, Tauber ayant montré l'analogue avec une série au lieu d'une intégrale. Pouvez-vous en tout cas montrer la partie facile : si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge alors $\int_0^X tf(t)\,dt = o(X)$?

Étudions $I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}e^{-at}\,dt$. Par la deuxième formule de la moyenne on a $|\int_X^Y \frac{\sin(t)}{t}\,dt| \leq \frac{2}{X}$ donc le critère de Cauchy est vérifié pour l'existence de $I(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Donc I est une fonction continue de $a \geq 0$. On peut ensuite justifier de diverses manières que $I'(a)$ existe et vaut $J(a) = -\int_0^\infty \sin(t)e^{-at}\,dt$. C'est très facile si l'on dispose du théorème de la convergence dominée car $\frac{I(a+h)-I(a)}{h} = \int_0^\infty \sin(t)e^{-at}\frac{e^{-ht}-1}{th}\,dt$ et on peut majorer en valeur absolue $\frac{e^{-ht}-1}{th}$ par $e^{t|h|}$. Donc si $a > 0$ et si $|h|$ est restreint à être $\leq \frac{1}{2}a$, le théorème de la convergence dominée donne le résultat voulu. Et bien sûr :

$$J(a) = \Im \int_0^\infty e^{-(a+i)t}\,dt = \Im \frac{1}{a+i} = \frac{-1}{1+a^2}$$

Donc, il existe une constante C telle que pour $a > 0$ on ait $I(a) = C - \mathrm{Arctg}(a)$. Il ne reste alors qu'à justifier $\lim_{a\to+\infty} I(a) = 0$ (c'est trivial...

si, si !) pour en conclure que $\mathcal{C} = \frac{\pi}{2}$ et donc que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \mathcal{I}(0^+) = \mathcal{C} = \frac{\pi}{2}$.

Défi : prouvez élémentairement $\mathcal{I}'(a) = \mathcal{J}(a)$!

(deuxième formule de la moyenne, suite)

Jean-François Burnol, 7 octobre 2009

Je rappelle nos notations $\mathcal{I}(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-at}\,dt$ et $\mathcal{J}(a) = -\int_0^\infty \sin(t) e^{-at}\,dt$. On veut montrer élémentairement $\mathcal{I}'(a) = \mathcal{J}(a)$ pour $a > 0$. Par Taylor-Lagrange :

$$e^y = e^x + (y-x)e^x + \frac{1}{2}(y-x)^2 e^z$$

avec un z entre x et y, et donc :

$$\left|\frac{e^y - e^x}{y-x} - e^x\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|\,e^{\max(x,y)} = \frac{1}{2}|x-y|\,\max(e^x, e^y)$$

Avec $a > 0$ et $b \geq \frac{1}{2}a$ on peut écrire :

$$\frac{\mathcal{I}(b) - \mathcal{I}(a)}{b-a} - \mathcal{J}(a) = \int_0^\infty \sin(t)\left(\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{bt - at} + e^{-at}\right) dt$$

$$\implies \left|\frac{\mathcal{I}(b) - \mathcal{I}(a)}{b-a} - \mathcal{J}(a)\right| \leq \frac{1}{2}|b-a| \int_0^\infty |\sin(t)|\, t\, e^{-\frac{1}{2}at}\,dt$$

D'où la conclusion.

Et en ce qui concerne :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} e^{-at}\,dt = 0$$

on a tout bêtement :

$$|\mathcal{I}(a)| \leq \int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{1}{a}$$

Je propose maintenant l'exercice suivant : *soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur tout segment, et telle que $\int_0^X f(t)\,dt$ soit borné. On* sait que les intégrales impropres $\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt$ convergent pour tout $a > 0$. Montrez :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt = 0$$

voir au verso après y avoir réfléchi

... la convergence monotone ne s'applique bien sûr pas puisque l'on n'a pas fait l'hypothèse de l'existence de $\int_0^\infty |f(t)|\,dt$...

... le résultat est trivial si f est bornée mais on n'a pas non plus fait cette hypothèse... et si f était majorée par un polynôme ça irait encore, mais on n'a pas non plus fait cette hypothèse... même si f était au plus de croissance exponentielle cela serait assez trivial, mais on n'a pas fait cette hypothèse !

... à propos donner un exemple de f qui vérifie l'hypothèse mais qui n'est majorée par aucune expression du type $Ke^{\lambda t}$, autrement dit telle que $\limsup_{t\to+\infty} |f(t)|e^{-at} = +\infty$ pour tout $a > 0$.

Soit K tel que $\left|\int_0^X f(t)\,dt\right| \leq K$ pour tout X. Ainsi $\left|\int_X^Y f(t)\,dt\right| \leq 2K$ pour tous X, Y. Par la deuxième formule de la moyenne :

$$Y \geq X \implies \left|\int_X^Y f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq 2Ke^{-aX}$$

En prenant la limite pour $Y \to \infty$ il vient :

$$\left|\int_X^\infty f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq 2Ke^{-aX}$$

Ainsi :

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|e^{-at}\,dt + 2Ke^{-a}$$

Le premier terme tend vers zéro pour $a \to +\infty$, soit parce que f est supposée intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ et donc est bornée sur cet intervalle, soit dans le cas général par le théorème de la convergence dominée (rappelez-vous qu'il y a dans son énoncé un presque partout bien utile ici à cause de $t = 0$). Le second terme tend aussi vers zéro. D'où la conclusion. Variante : pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq \int_0^\epsilon |f(t)|\,dt + 2Ke^{-a\epsilon}$$

$$\implies \limsup_{a\to+\infty}\left|\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq \int_0^\epsilon |f(t)|\,dt$$

$$\implies \limsup_{a\to+\infty}\left|\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt\right| \leq \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\epsilon |f(t)|\,dt = 0$$

d'où la conclusion. La dernière limite n'est pas triviale et nécessite la convergence dominée ou monotone et équivaut à la continuité de $x \mapsto \int^x |f(t)|\,dt$ en théorie de l'intégrale de Lebesgue. Si f est supposée intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ c'est trivial par contre, car elle est alors bornée.