

**M305 (Variables Complexes)**  
**EXAMEN DU 7 MARS 2007**  
**durée : 3 heures ; ni documents ni calculatrices**

Toute question demande en réponse non seulement un résultat mais surtout une démonstration.  
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

(3 pts) 1. Déterminer les rayons de convergence

(a) de  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n + 9^n} z^{2n}$ ,

(b) et de  $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^3} z^{n^2}$ .

(4 pts) 2. Soit  $f(z) = \frac{3z^2 - 1}{z(z^2 - 1)}$ .

(a) Décomposer la fraction rationnelle  $f$  en éléments simples,

(b) puis déterminer ses séries de Laurent :

(a) pour  $0 < |z| < 1$ ,

(b) et pour  $|z| > 1$ .

(c) Enfin, déterminer  $\int_{|z|=2} f(z) dz$ .

(4 pts) 3. Soit  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4z + 5)(z - i)}$ .

(a) Déterminer les singularités et les résidus dans  $\mathbf{C}$  de  $f$ ,

(b) puis trouver en la justifiant la valeur de  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ,

(c) enfin, en déduire les valeurs de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)} dx \quad \text{et de} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1)} dx$$

Ces valeurs doivent être déduites du résultat donné à la question précédente.

(2 pts) 4. Déterminer  $A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + 6ix - 9} dx$ .

(2 pts) 5. Déterminer  $B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$ .

(2 pts) 6. Soit  $f(z) = \frac{1}{5}z^{50} + z^{30} + \frac{1}{5}$ .

1. Quel est l'énoncé du théorème de Rouché ?
2. Combien la fonction  $f$  a-t-elle de zéros dans le disque unité ? Montrer qu'ils sont tous simples.

(3 pts) 7. Quel est l'énoncé du principe du maximum ? Soit  $Q = \{z = x + iy \mid x > 0, y > 0\}$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\overline{Q}$ . Est-il exact que si  $|f(x)| \leq 1$  pour tout  $x \geq 0$  et si  $|f(iy)| \leq 1$  pour tout  $y \geq 0$  alors  $|f(z)| \leq 1$  pour  $z \in Q$  ? Si oui, le prouver ; si non, le prouver.

```
\usepackage[nomath,lighttt]{lmodern}
\renewcommand{\rmdefault}{lmvtt}
\renewcommand{\mddefault}{sb}
\usepackage[eulergreek,alldelims,symbolmax]{mathastext}
\renewcommand{\mddefault}{m}
```